دینامیک سازه ها

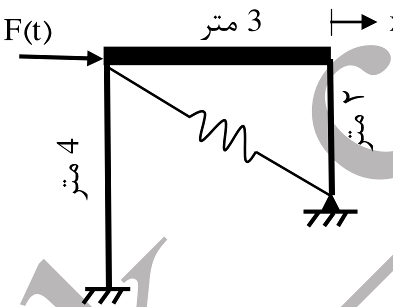
محاسبه پاسخ یک سیستم یک درجه آزاد به بار انفجاری به سه روش حل معادله دیفرانسیل حرکت، انتگرال دیوهامل و روش تقریبی در نرم افزار ریاضی maple 2017

تهیه کننده: کامبیز چراغی (کارشناس ارشد سازه)

ایمیل: kambiz.cheraghi@gmail.com

صورت مسئله:

سازه زیر تحت بار انفجاری که مختصات آن به صورت نقاطی در جدول ۱ نشان داده شده است، قرار گرفته. تاریخچه جابجایی سقف و تنش خمشی در ستون بلند را تا ۸ ثانیه پس از وقوع انفجار به دست آورید؟



واحد تمام پارامتر ها بر حسب m و N

فرضیات:

جرم سقف 1000 و سختی آن بی نهایت است

سختی فنر 130000

ابعاد ستون ها مربع به ضلع 0.05

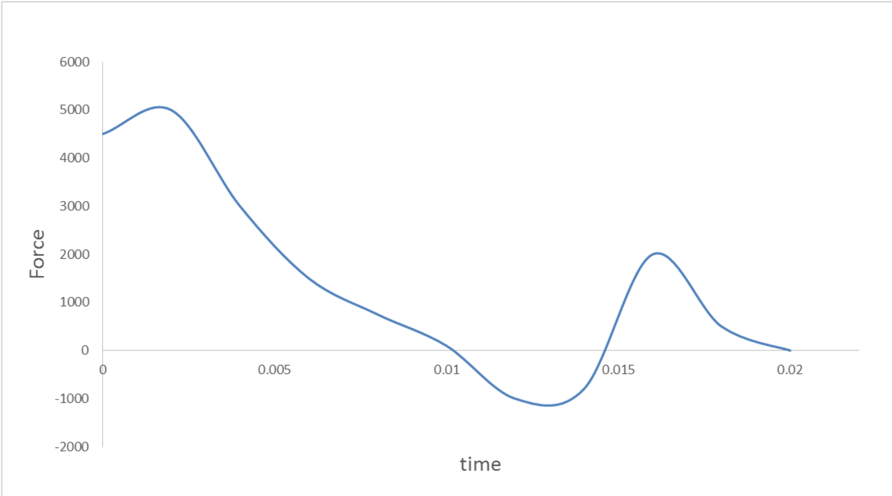
سرعت و جابجایی اولیه برابر صفر است.

$$E = 2 \times 10^{11}\, {}^{N}/_{m}$$

$$\xi = 0.05$$

t	F(t)
0	4500
0.002	5000
0.004	3000
0.006	1500
0.008	750
0.01	100
0.012	-1000
0.014	-800
0.016	2000
0.018	500
0.02	0

جدول ۱- *مختصات بار*



شکل ۱-نمودار نیروی وارده

حل:

ابتدا سختی معادل سازه را به دست می آوریم برای این امر سختی تک تک اعضا را به دست می آوریم و با تکنیک فنر ها با هم جمع می کنیم.

سختی ستون ۴ متری

$$K = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 2 \times 10^{11} \times \frac{0.05^4}{12}}{4^3} = 19531.25$$

سختی ستون ۲متری

$$K = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 2 \times 10^{11} \times \frac{0.05^4}{12}}{2^3} = 39062.5$$

سختی معادل فنر

$$k \times \cos^2\theta = 130000 \times (\frac{3}{\sqrt{13}})^2 = 90000$$

با توجه به تکنیک فنرها چون جابجایی در هر سه عضو یکسان است پس با هم فنر های موازی را تشکیل می دهند. و به صورت زیر سختی کل محاسبه می شود.

سختی کل

$$K_e = 19531.25 + 39062.5 + 90000 = 148593.75$$

حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت:

معادله حرکت سیستم یک درجه آزاد تحت بار ثابت ① $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t)$

با تقسیم طرفین معادله ۱ بر m داریم ② $\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}$

از دینامیک سازه ها داریم: ③ $\frac{c}{c_{cr}} = \xi \qquad c_{cr} = 2m\omega \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

با جاگذاری معادلات ۳ در ۲ داریم ④ $\ddot{y} + 2\xi\omega\,\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F(t)}{m}$

روش انتگرال دیوهامل :

نیروی p(u) را که دارای تغییرات دلخواه بر حسب زمان است، می توان بصورت مجموعه ای از ضربه‌های بی نهایت کوتاه متوالی نشان داد. پاسخ دینامیکی یک سیستم خطی به یکی از این ضربه ها (یعنی ضربه ای با مقدار $p(\tau)d\tau$ در زمان τ)از حاصل ضرب پاسخ مربوط به ضربه واحد در مقدار ضربه به دست می آید:

$$du(t) = [p(\tau)d\tau]h(t-\tau) \qquad t > \tau$$

$$u(t) = \int_0^t p(\tau)\,h(t-\tau)d\tau$$

رابطه فوق یک انتگرال دوهامل مي باشد که قابل استفاده براي هر سيستم ديناميکي خطي است، با توجه به این که تابع پاسخ تحت یک ضربه واحد به صورت زیر است:

$$h(t-\tau) \equiv u(t) = \frac{1}{m \times \omega_D} e^{-\xi \times \omega_n (t-\tau)} \sin[\omega_D (t-\tau)] \qquad \xi \neq 0 \qquad t \geq \tau$$

telegram me/@engineer_teacher
kambiz.cheraghi@gmail.com

بنابراين مي توان پاسخ يک سيستم يک در جه آزادي با ميرايي را از قرار دادن پاسخ مربوط به ضربه واحد در رابطه اوليه انتگرال دو هامل بدست آورد كه برابر مي شود با :

$$u(t) = \frac{1}{m \times \omega_D} \int_0^t p(\tau)\, e^{-\xi \times \omega_n (t-\tau)} \sin[\omega_D (t - \tau)] \qquad \xi \neq 0$$

روش تقریبی :

در روش تقریبی فرض بر این است که ضربه باعث یک سرعت اولیه در سازه می شود و جابجایی در لحظه ضربه برابر صفر است، به این ترتیب که مساحت زیر نمودار بار در جرم سازه برابر با سرعت اولیه سازه خواهد بود. با قرار دادن این سرعت اولیه در ارتعاش آزاد میرا، تاریخچه جابجایی محاسبه می شود.

حل در نرم افزار maple :

ابتدا باید انفجار را که به صورت یک سری نقاط داده شده است با یک معادله تقریب بزنیم که با تکنیک curve Fitting در maple این کار را انجام می دهیم، (بین هر دو نقطه را با یک خط درجه دو در نظر می گیریم).

```
> restart :
> with(plots) :
> Digits := 50 :
> with(ExcelTools) : interface(elisiondigitsafter = 15) :
```

Assign parameters :

```
> K := 148593.75 :
> M := 1000 :
> ω := sqrt(K/M) :
> ξ := 0.05 :
```

Load:

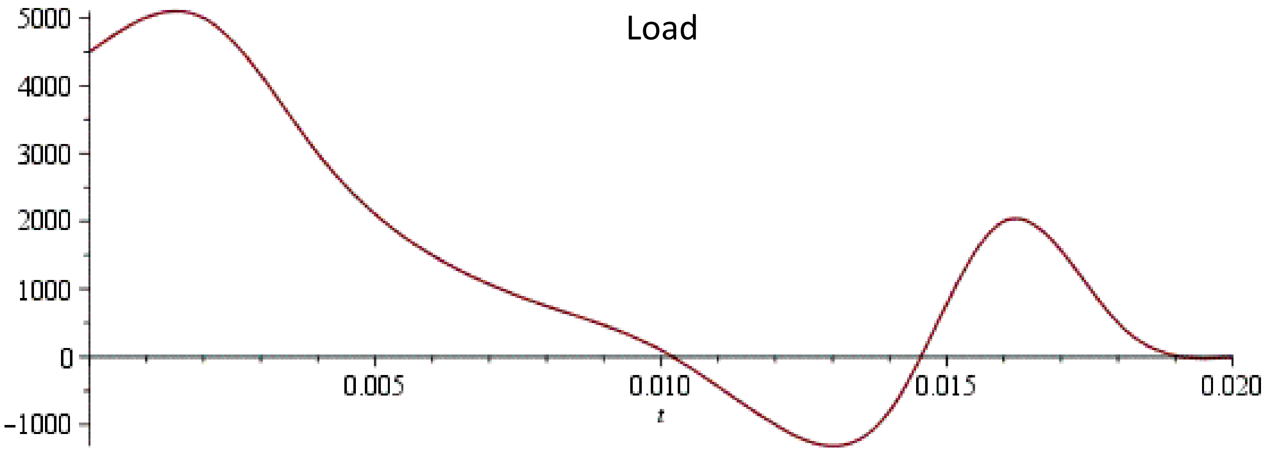
```
> Q := Import("D:/New folder (2)/1.xlsx"); #import nods from excel باز خوانی نقاط در اکسل
```

$$\left[\begin{array}{c} \textit{11 x 2 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right]$$

> $F := t \rightarrow evalf(piecewise(t < 0, 0, 0.02 \geq t \geq 0, CurveFitting\text{:-}Spline(Q[\,..,1], Q[\,..,2], t, degree = 3), t > 0.02, 0))$

$$t \rightarrow evalf\left(piecewise\left(t < 0, 0, t \leq 0.02 \textbf{ and } 0 \leq t, CurveFitting\text{:-}Spline\left(Q_{(\,)..(\,),1}, Q_{(\,)..(\,),2}, t, degree = 3\right), 0.02 < t, 0\right)\right)$$

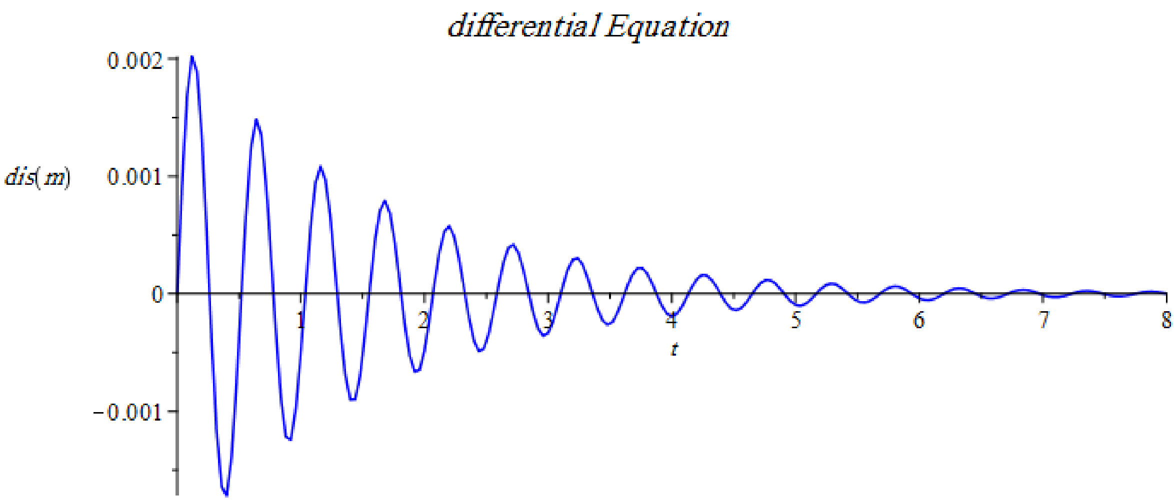
> $plot(F(t), t = 0..0.02, size = [700, 250])$



Solution of the Differential Equation:

> $Dis := dsolve\left(\left\{diff(y(t), t\$2) + 2\cdot\xi\cdot\omega\cdot diff(y(t), t) + \omega^2\cdot y(t) = \frac{F(t)}{M}, y(0) = 0, D(y)(0) = 0\right\}, type = numeric\right) :$

> $Differential := odeplot(Dis, t = 0..8, size = [700, 300], color = [blue], title = differential\,Equation, titlefont = [\text{"Times New Roman "}, 16])$



telegram me/@engineer_teacher
kambiz.cheraghi@gmail.com
آدرس ایمیل و تلگرام :
تهیه کننده : کامبیز چراغی

Duhamel's integral

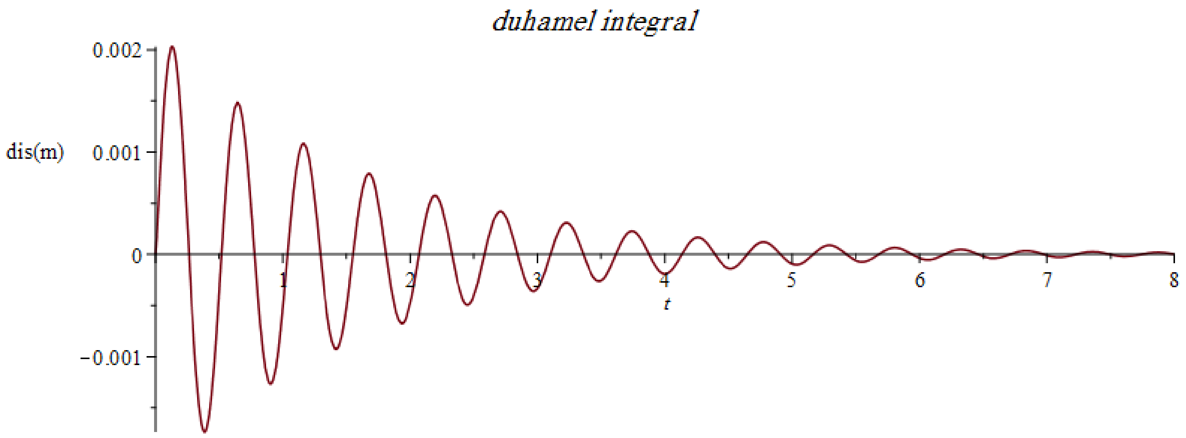
> $\omega_d := \omega \cdot \sqrt{1-\xi^2}$:

> $g := t \rightarrow \frac{1}{M \cdot \omega_d} . e^{(-\xi \cdot \omega \cdot t)} \cdot \sin(\omega_d \cdot t)$:

> $d := t \rightarrow evalf(int(F(\text{tau}) \cdot g(t-\text{tau}), \text{tau} = 0..t))$

$$t \rightarrow evalf\left(\int_0^t F(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right)$$

> $Duhamel := plot(d(t), t = 0..8, size = [800, 300], title = duhamel\ integral, titlefont = [\text{"Times New Roman "}, 16])$



approximate solution:

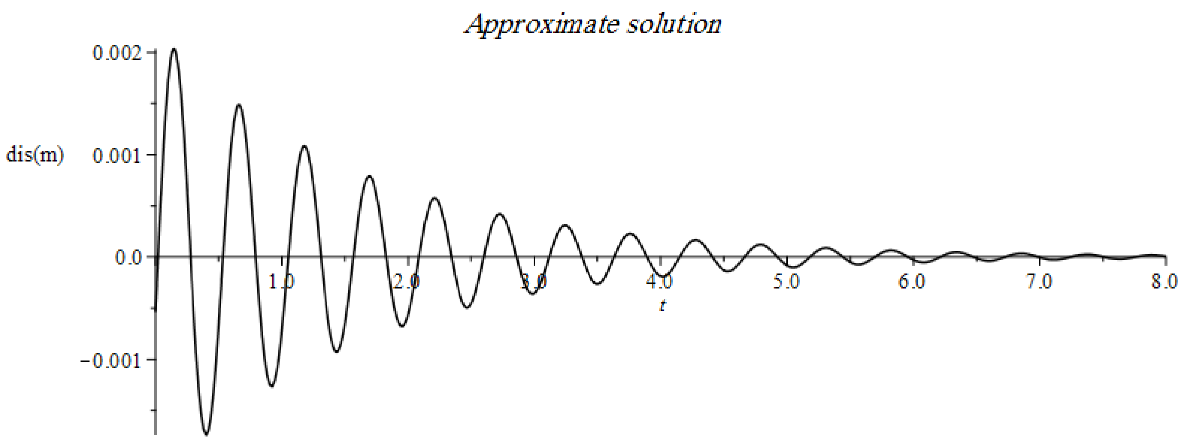
> $Area := int(F(t), t = 0..0.02)$

مساحت زیر نمودار بار

$$26.778867403314917127071823204419889502762430939226$$

> $app := t \rightarrow \left(\frac{Area}{M \cdot \omega_d} . e^{(-\xi \cdot \omega \cdot (t-0.02))} \cdot \sin(\omega_d \cdot (t-0.02))\right)$:

> $approximate := plot(app(t), t = 0..8, size = [800, 300], title = Approximate\ solution, titlefont = [\text{"Times New Roman "}, 16])$



telegram me/@engineer_teacher
kambiz.cheraghi@gmail.com

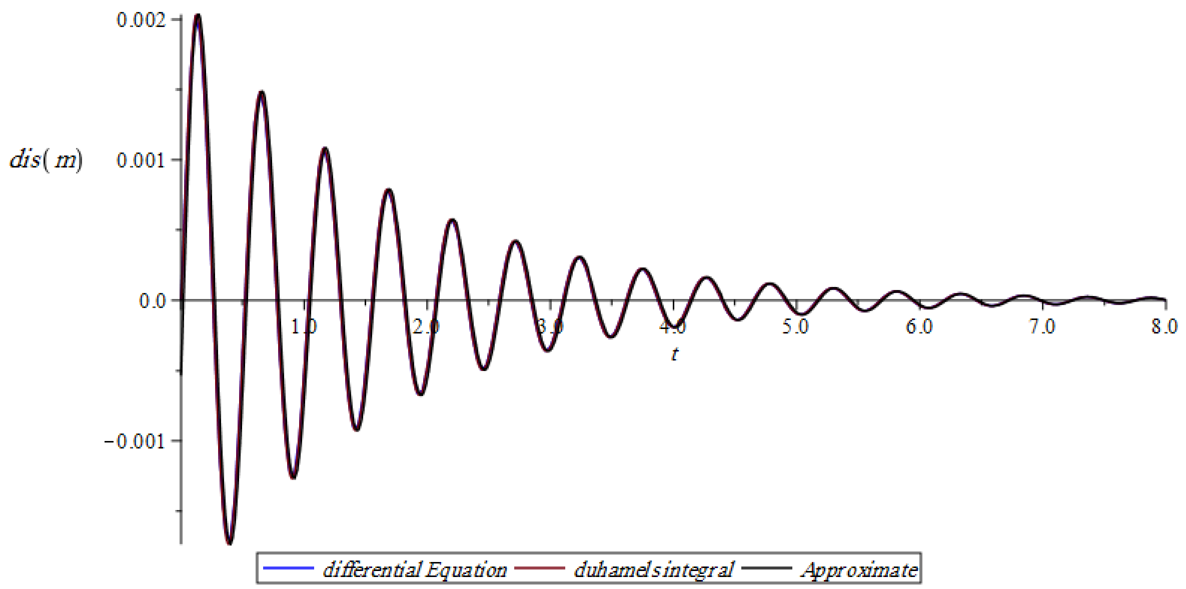
آدرس ایمیل و تلگرام :

تهیه کننده : کامبیز چراغی

در این مرحله نتایج را با هم مقایسه می کنیم.

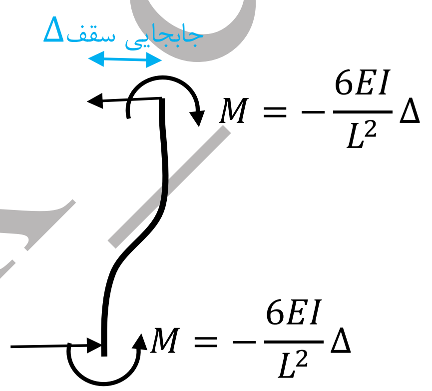
results:

```
> plots:-display(Differential, Duhamel, approximate, size = [800, 400], legend
      = [differential Equation, duhamels integral, Approximate])
```



برای محاسبه تنش در ستون بلند ابتدا لنگر انتهای ستون را با فرمول شیب افت به دست می آوریم:

مطابق شکل زیر



تنش خمشی در اتصالات بیشترین مقدار را دارند که مقدار لنگر آن برابر با $M = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$ است، برای محاسبه

Δ ، نیروی جانبی را بر سختی کل سازه تقسیم می‌کنیم.

*نیروی جانبی سازه برابر اختلاف نیروی اینرسی سقف و نیروی ضربه می باشد.(برای بعد از زمان ۰/۰۲ که بار صفر است نیری جانبی برابر با نیروی اینرسی می باشد)

$$\Delta = \frac{F_t}{k}$$ جابجایی سقف

$$M = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$$ لنگر خمشی ستون

$$\sigma = \frac{M \times c}{I} = \frac{M}{\frac{0.05^3}{6}}$$ تنش خمشی در ستون

محاسبه تنش خمشی در ستون

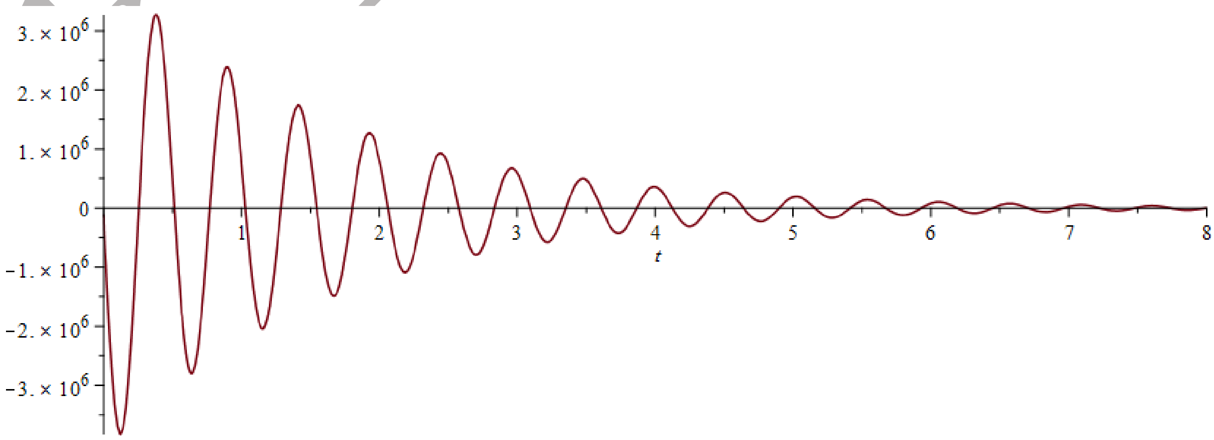
$> acc := evalf(diff(d(t), t\$2)) :$ شتاب سقف

$> F_i := acc \cdot 1000 :$ نیروی اینرسی سقف

$> F_t := F_i - F(t) :$ نیروی کلی سازه

$$> \text{delta} := (F_t / 148593.75) : M := \frac{6 \times 2 \times (10)^{11} \times \frac{(0.05)^4}{12}}{4^2} \cdot \text{delta} :$$

$$> \sigma := simplify\left(\frac{M}{\frac{0.05^3}{6}}\right) : plot(\sigma, t = 0..8, size = [850, 300],)$$



نمودار لنگر خمشی ستون بر حسب زمان (N/m)