تعیین پاسخ سازه یک درجه آزادی به روش حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت و روش انتگرال دیوهامل

تهیه کننده: کامبیز چراغی(کارشناس ارشد سازه)

ایمیل : kambiz.cheraghi@gmail.com

روش حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش یک روش دقیق برای محاسبه پاسخ یک سازه تحت هر نوع بار گذاری است، در بارگذاری های ساده و حالت بدون میرایی این معادله جرکت به روش دستی قابل حل می باشد. در این روش معادله حاکم بر حرکت جسم که به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است، اگر بر روی سازه بارگذاری اعمال شود این معادله غیر همگن خواهد بود و در حالت بدون بارگذاری این معادله همگن ، و سازه در حالت ارتعاش آزاد است.

اگر بارگذاری پیچیده بود و بتوان آن را به بازه هایی تقسیم کرد که هر قسمت به روش دستی قابل حل باشد. در این حالت در هر بارگذاری معادله حرکت را به دست آورده و سرعت و جابجایی در انتهای آن باگذاری را به دست آورده که این سرعت و جابجایی شرایط مرزی در معادله حرکت بارگذاری مرحله بعدی خواهد بود.

انتگرال دیوهامل یک روش تقریبی برای محاسبه پاسخ یک سیستم تحت هر نوع بارگذاری است. این روش بدین صورت است که بارگذاری به صورت ضربه هایی متوالی بر روی سازه در نظر می گیرد.و با اصل جمع اثار این اثرات ضربه با هم جمع میکند در حالت هایی خاص اگر سازه بدون میرایی باشد و بارگذاری ساده. این انتگرال به روش دستی قابل حل بوده و جواب دقیق را به ما می

دهـد. در ادامـه به حل چندین مثال با بارگذاری های متفاوت با هر دو روش خواهیم پرداخت. برای اطمینان از صحت جواب می توان جواب های به دست آمده از دو روش را با هم مقایسه کرد.

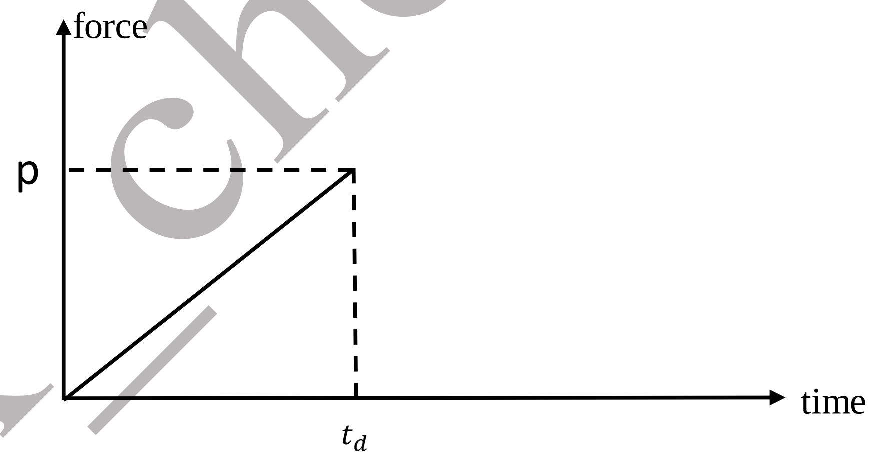
مثال ۱)

سـازه ای به جرم m و سـختی k تحت باری مطابق شـکل ۱ قرار گرفته اسـت، معادله حاکم بر حرکت سـیسـتم را بعد از ضـربه به دو روش حل مستقیم معادله دیفرانسیل حرکت و انتگرال دیوهامل به دست آورید؟

فرضیات:

سرعت و جابجایی در لحظه اولیه برابر صفر است

از میرایی صرف نظر شود.



شکل ۱

روش اول حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت:

$0 < t \le t_d$ ①

$$m\ddot{y} + ky = \frac{P}{t_d}t$$

$$\ddot{y} + w^2 y = \frac{P}{m t_d}t$$

$$y_c = A\sin wt + B\cos wt$$

$$y_p = \frac{P}{m w^2 t_d}t$$

$m w^2 = k$ ✱

$\frac{P}{k} = y_s$ ✱

$$y_{(t)} = y_c + y_p$$

$$y_t = A\sin wt + B\cos wt + y_s\frac{t}{t_d}$$

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\dot{y}_{(t)} = Aw\cos wt - Bw\sin wt + \frac{y_s}{t_d}$$

$$\dot{y}_{(0)} = 0 \Rightarrow A = -\frac{y_s}{w t_d}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_t = \frac{y_s}{t_d}\left[t - \frac{1}{w}\sin wt\right] \quad ① \qquad \dot{y}_t = \frac{y_s}{t_d}\left[1 - \cos wt\right] \quad ② \quad 0 < t < t_d}$$

$$y_{t_d} = \frac{y_s}{t_d}\left[t_d - \frac{1}{w}\sin w t_d\right] \quad (4) \qquad \dot{y}_{t_d} = \frac{y_s}{t_d}\left[1 - \cos w t_d\right] \quad (3)$$

$t > t_d$ ارتعاش آزاد

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$y_t = C \sin w(t - t_d) + D \cos w(t - t_d) \quad (5)$$

$$(4)\ y(t_d) = D \Rightarrow D = \frac{y_s}{t_d}\left[t_d - \frac{1}{w}\sin w t_d\right] \quad (6)$$

$$(3)\ \dot{y}_{t_d} = Cw \Rightarrow C = \frac{y_s}{w t_d}\left[1 - \cos w t_d\right] \quad (7)$$

<<جایگذاری 6 و 7 در 5>>

$$y_t = \frac{y_s}{t_d}\left[\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w}\cos w t_d\right)\sin w(t - t_d) + \left(t_d - \frac{1}{w}\sin w t_d\right)\left(\cos w(t - t_d)\right)\right]$$

★ $\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$ نکته

$$\Rightarrow y = \frac{y_s}{t_d}\left[\frac{1}{w}\sin w(t - t_d) - \frac{1}{w}\cos w t_d \cdot \sin w(t - t_d) + t_d \cos w(t - t_d) - \frac{1}{w}\sin w t_d \times \cos w(t - t_d)\right]$$

$$y = \frac{y_s}{t_d}\left[\frac{1}{w}\sin w(t - t_d) - \frac{1}{2w}\left(\sin w t + \cancel{\sin w(t - 2t_d)}\right) + t_d \cos w(t - t_d) - \frac{1}{2w}\left(\sin w t - \cancel{\sin w(t - 2t_d)}\right)\right]$$

$$y = \frac{y_s}{t_d}\left[\frac{1}{w}\sin w(t - t_d) - \frac{1}{w}\sin w t + t_d \cos w(t - t_d)\right] \quad t > t_d$$

در مرحله بعدی به روش انتگرال دیوهامل معادله حرکت را به دست می آوریم.

در این مثال به این دلیل که فقط در قسمت زمانی ۰ تا t_d بار داریم فقط در این قسمت انتگرال دیوهامل را محاسبه می کنیم و در بقیه زمان ها صفر است.

فرمول $$y=\frac{1}{mw}\int P(\tau)\sin w(t-\tau)\,d\tau$$

$$y=\frac{1}{mw}\int_0^{t_d}\frac{P\tau}{t_d}\sin w(t-\tau)\,d\tau+\int_{t_d}^{t}0\,\cancelto{0}{\sin w(t-\tau)}\,d\tau$$

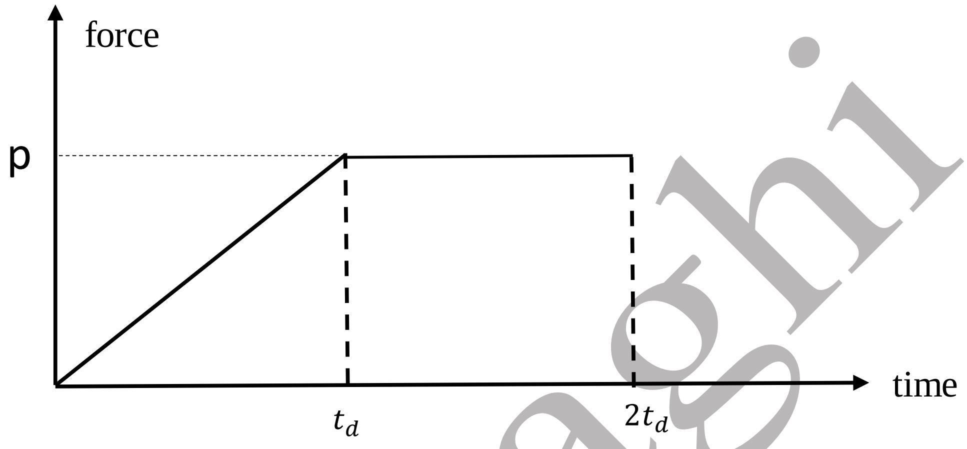
$$y=\frac{P}{t_d m w}\left[\frac{\tau}{w}\cos w(t-\tau)+\frac{1}{w^2}\sin w(t-\tau)\right]_0^{t_d}$$

$$\boxed{y=\frac{y_s}{t_d}\left[t_d\cos w(t-t_d)+\frac{1}{w}\sin w(t-t_d)-\frac{1}{w}\sin wt\right]}$$

همانطور که مشاهده می‌شود انتگرال دیوهامل بسیار ساده تر و سریع تر معادله حرکت را به دست می‌آورد.

مثال ۲)

سازه ای به جرم m و سختی k تحت باری مطابق شکل۲ قرار گرفته است، معادله حاکم بر حرکت سیستم را بعد از ضربه به دو روش حل مستقیم معادله دیفرانسیل حرکت و انتگرال دیوهامل به دست آورید؟



شکل ۲ نمودار بار

$$0 < t < t_d$$

$$m\ddot{y} + ky = \frac{P}{t_d} t$$

$$\ddot{y} + w^2 y = \frac{P}{m t_d} t$$

$$y_c = A \sin wt + B \cos wt$$

$$y_p = \frac{P}{m w^2 t_d} t = \frac{P}{k t_d} t = \frac{y_s}{t_d} t$$

$$y_t = y_c + y_p$$

$$y_t = A \sin wt + B \cos wt + \frac{y_s}{t_d} t$$

$$\dot{y}_t = Aw \cos wt - Bw \sin wt + \frac{y_s}{t_d}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\dot{y}_{(0)}=0 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{y_s}{t_d\, w}$$

$$\Rightarrow y_{(t)}=\frac{y_s}{t_d}\left(t-\frac{1}{w}\sin wt\right) \qquad y_{t_d}=\frac{y_s}{t_d}\left(t_d-\frac{1}{w}\sin wt_d\right) \quad ①$$

$$\dot{y}_{(t)}=\frac{y_s}{t_d}\left(1-\cos wt\right) \qquad \dot{y}_{t_d}=\frac{y_s}{t_d}\left(1-\cos wt_d\right) \quad ②$$

حالت $2t_d > t > t_d$

$$m\ddot{y}+ky=P$$

$$\ddot{y}+w^2y=\frac{P}{m}$$

$$y_c=C\sin w(t-t_d)+D\cos w(t-t_d)$$

$$y_p=\frac{P}{mw^2}=\frac{P}{k}=y_s$$

$$y_{(t)}=y_c+y_p$$

$$y_{(t)}=C\sin w(t-t_d)+D\cos w(t-t_d)+u_s \quad ⑤$$

$$\dot{y}_{(t)}=Cw\cos w(t-t_d)-Dw\sin w(t-t_d)$$

$$①\ y_{(t_d)}=0+D+u_s$$

$$\Rightarrow D=-\frac{y_s}{t_d\, w}\sin wt_d \quad ③$$

$$②\ \dot{y}_{(t_d)}=Cw$$

$$C=\frac{y_s}{w\, t_d}\left[1-\cos wt_d\right] \quad ④$$

با جایگذاری 3 و 4 در 5 داریم

$$y(t)=\frac{y_s}{w t_d}\left[(1-\cos w t_d)(\sin w(t-t_d))-\sin w t_d \times \cos w(t-t_d)\right]+y_s$$

$$y(t)=\frac{y_s}{w t_d}\left[\sin w(t-t_d)-\cos w t_d \cdot \sin w(t-t_d)-\sin w t_d \cdot \cos w(t-t_d)\right]+y_s$$

$$\sin a \times \cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$ نکته ☆

$$y(t)=\frac{y_s}{w t_d}\left[\sin w(t-t_d)-\frac{1}{2}\left(\sin w t+\cancel{\sin w(t-2t_d)}\right)-\frac{1}{2}\left(\sin w t-\cancel{\sin w(t-2t_d)}\right)\right]+y_s$$

$$\ll y(t)=\frac{y_s}{w t_d}\left[\sin w(t-t_d)-\sin w t\right]+y_s \gg \quad t_d<t\leqslant 2t_d$$

$$\dot{y}(t)=\frac{y_s}{w t_d}\left[w\cos w(t-t_d)-w\cos w t\right]$$

$$y(2t_d)=\frac{y_s}{w t_d}\left[\sin w(t_d)-\sin 2w t_d\right]+y_s \quad (6)$$

$$\dot{y}(2t_d)=\frac{y_s}{w t_d}\left[w\cos w t_d-w\cos 2w t_d\right] \quad (7)$$

ارتعاش آزاد $2t_d < t$

$$\ddot{y} + w^2 y = 0$$

$$y = E \sin w(t-2t_d) + F \cos w(t-2t_d) \qquad (10)$$

(6) $y(2t_d) = F \quad \Rightarrow F = \dfrac{y_s}{w t_d}\left[\sin w t_d - \sin 2 w t_d + w t_d\right] \qquad (8)$

(7) $\dot{y}(2t_d) = E \quad \Rightarrow E = \dfrac{y_s}{w t_d}\left[\cos w t_d - \cos 2 w t_d\right] \qquad (9)$

با جایگذاری 8 و9 در 10 داریم

$$y = \frac{y_s}{w t_d}\Big[(\cos w t_d - \cos 2 w t_d)\sin w(t-2t_d) + (\sin w t_d - \sin 2 w t_d + w t_d)\cos w(t-2t_d)\Big]$$

$$y = \frac{y_s}{w t_d}\Big[\frac{1}{2}\big(\sin w(t-t_d) + \cancel{\sin w(t-3t_d)}\big) - \big(\sin w t + \cancel{\sin w(t-4t_d)}\big)$$

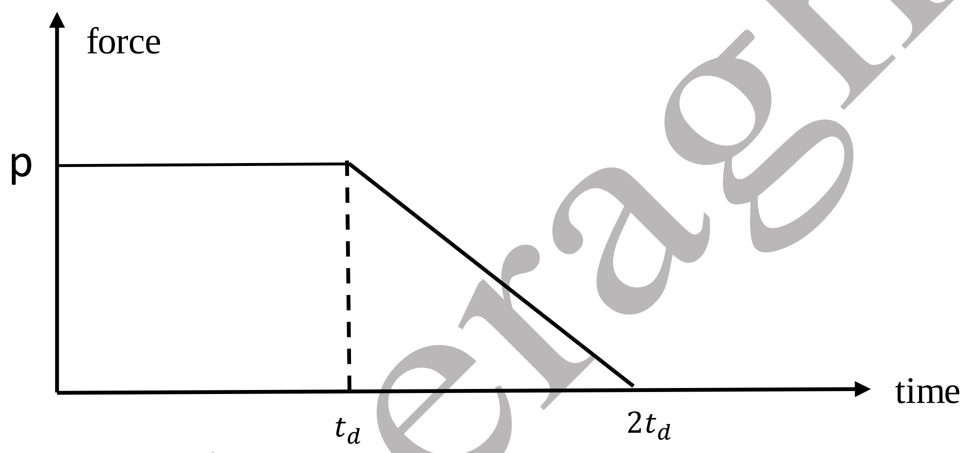
$$+\frac{1}{2}\big(\sin w(t-t_d) - \cancel{\sin w(t-3t_d)}\big) - \big(\sin w(t) - \cancel{\sin w(t-4t_d)}\big)$$

$$+ w t_d \cos w(t-2t_d)\Big]$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{y_s}{w t_d}\left[\sin w(t-t_d) - \sin w t\right] + y_s \cos w(t-2t_d)} \qquad t>2t_d$$

مثال 3)

سازه ای به جرم m و سختی k تحت باری مطابق شکل 3 قرار گرفته است، معادله حاکم بر حرکت سیستم را بعد از ضربه به دو روش حل مستقیم معادله دیفرانسیل حرکت و انتگرال دیوهامل به دست آورید؟



شکل 3 نمودار بار

در مرحله اول با روش حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت مسئله را حل می کنیم.

می توان بار را به دو بار گذاری مستطیلی و مثلثی تقسیم کرد. و در هر حالت سرعت و جابجایی را در انتهای بار به دست آورد که شرایط اولیه در بارگذاری بعدی خواهد بود.

$$m\ddot{y}+ky=P \qquad 0<t<t_d$$

$$\ddot{y}+w^2y=\frac{P}{m}$$

$$y_c=A\sin wt+B\cos wt$$

$$y_p=\frac{P}{mw^2}=\frac{P}{k}=y_s$$

$$y_t=y_p+y_s$$

$$y_t=A\sin wt+B\cos wt+y_s \quad ① \qquad \dot{y}_t=Aw\cos wt-Bw\sin wt$$

$$y(0)=0 \Rightarrow 0=0+B+y_s \qquad \Rightarrow \boxed{B=-y_s} \quad ②$$

$$\dot{y}(0)=0 \Rightarrow 0=Aw \qquad \Rightarrow \boxed{A=0} \quad ③$$

با جایگذاری 2 و 3 در 1 داریم

$$\begin{cases} y_t=y_s(1-\cos wt) \\ \dot{y}_t=y_s w\sin wt \end{cases} \qquad 0<t<t_d$$

$$t=t_d \quad \begin{cases} y_{t_d}=y_s(1-\cos wt_d) \\ \dot{y}_{t_d}=y_s w\sin wt_d \end{cases}$$

$$t_d<t<2t_d \qquad P(t)=-\frac{P}{t_d}t+2P$$

$$m\ddot{y}+ky=-\frac{P}{t_d}t+2P \Rightarrow \ddot{y}+w^2y=-\frac{P}{mt_d}t+\frac{2P}{m}$$

$$y_c=C\sin w(t-t_d)+D\cos w(t-t_d)$$

$$y_p=-\frac{P}{mt_d w^2}t+\frac{2P}{mw^2} \Rightarrow y_p=-\frac{y_s}{t_d}t+2y_s$$

$$y_t = y_c + y_p$$

④ $t_d < t < 2t_d$

$$y_t = C\sin w(t-t_d) + D\cos w(t-t_d) - \frac{y_s}{t_d}t + 2y_s$$

$$t = t_d \Rightarrow \quad \overset{y_{t_d} \searrow}{y_s(1-\cos w t_d)} = 0 + D - y_s + 2y_s$$

$$D = -y_s \cos w t_d \qquad ⑤$$

$$\dot{y}_t = C w\cos w(t-t_d) - D w \sin w(t-t_d) - \frac{y_s}{t_d}$$

$$t = t_d \Rightarrow y_s w \sin w t_d = C w - 0 - \frac{y_s}{t_d}$$

$$C = y_s \sin w t_d + \frac{y_s}{w t_d} \qquad ⑥$$

با جایگذاری 5 و 6 در 4 داریم

$$y_t = y_s\left[\left(\sin w t_d + \frac{1}{w t_d}\right)\sin w(t-t_d) - \cos w t_d \cdot \cos w(t-t_d) - \frac{t}{t_d} + 2\right]$$

نکته
$$\begin{cases} \sin a \ \sin b = \frac{-1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right) \\ \cos a \ \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \end{cases}$$

$$y_t = y_s\left[\frac{-1}{2}\left(\cos wt - \cos w(2t_d - t)\right) + \frac{1}{w t_d}\sin w(t-t_d) - \frac{1}{2}\left(\cos wt + \cos w(2t_d - t)\right) - \frac{t}{t_d} + 2\right]$$

$$\Rightarrow y_t = y_s\left[\frac{1}{w t_d}\sin w(t-t_d) - \cos wt - \frac{t}{t_d} + 2\right]$$

$$\dot{y}_t = y_s\left[\frac{1}{t_d}\cos w(t-t_d) + w\sin wt - \frac{1}{t_d}\right]$$

$$t = 2t_d \quad \begin{cases} y_{2t_d} = y_s\left[\dfrac{1}{wt_d}\sin wt_d - \cos w2t_d - \dfrac{2\cancel{t_d}}{\cancel{t_d}} + 2\right] \\ \dot{y}_{2t_d} = y_s\left[\dfrac{1}{t_d}\cos wt_d + w\sin w2t_d - \dfrac{1}{t_d}\right] \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$2t_d < t$$

$$P_{(t)} = 0$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + w^2 y = 0$$

$$y_t = E\sin w(t - 2t_d) + F\cos w(t - 2t_d) \quad (7) \qquad 2t_d < t$$

i.C $\quad y_{2t_d} = y_s\left[\dfrac{1}{wt_d}\sin wt_d - \cos 2wt_d\right] = 0 + F \quad (8)$

$$\dot{y}_{2t_d} = y_s\left[\frac{1}{t_d}\cos wt_d + w\sin 2wt_d - \frac{1}{t_d}\right] = Ew + 0 \quad (9)$$

با جایگذاری 8 و 9 در 7 داریم

$$y_t = y_s\left[\underbrace{\left(\frac{1}{wt_d}\cos wt_d + \sin 2wt_d - \frac{1}{wt_d}\right)}_{E}\sin w(t-2t) + \underbrace{\left(\frac{1}{wt_d}\sin wt_d - \cos w2t_d\right)}_{F}\cos w(t-2t_d)\right]$$

$$y_t = y_s\left[\frac{1}{2wt_d}\left(\sin w(t-t_d) + \cancel{\sin w(t-3t_d)}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\cos w(4t_d - t)} - \cos wt\right)\right.$$

$$- \frac{1}{wt_d}\sin w(t - 2t_d) + \frac{1}{2wt_d}\left(\sin w(t - t_d) - \cancel{\sin w(t - 3t_d)}\right)$$

$$\left.- \frac{1}{2}\left(\cos wt - \cancel{\cos w(4t_d - t)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y_t = u_s\left[\frac{1}{wt_d}\sin w(t - t_d) - \frac{1}{wt_d}\sin(t - 2t_d) - \cos wt\right]}$$

انتگرال دیوهامل

$$y_{(t)} = \frac{1}{mw}\int_0^t P(\tau)\, \sin w(t-\tau)\, d\tau$$

$$0 < t < t_d \Rightarrow P$$

$$t_d < t < 2t_d \Rightarrow -\frac{P}{t_d}\tau + 2P$$

$$2t_d < t \Rightarrow 0$$

$$y_{(t)} = \frac{1}{mw}\int_0^{t_d} P \sin w(t-\tau)\, d\tau + \frac{1}{mw}\int_{t_d}^{2t_d}\left(-\frac{P}{t_d}\tau + 2P\right)\sin w(t-\tau)\, d\tau + \int_{2t_d}^{t} 0$$

$$= \frac{1}{mw}\left[\frac{P}{w}\cos w(t-\tau)\right]_0^{t_d} + \frac{1}{mw}\left[-\frac{P\tau}{w t_d}\cos w(t-\tau) - \frac{P}{w^2 t_d}\sin w(t-\tau)\right.$$

$$\left. + \frac{2P}{w}\cos w(t-\tau)\right]_{t_d}^{2t_d} =$$

$$\frac{P}{mw^2} \Rightarrow y_s\left[(\cancel{\cos w(t-t_d)} - \cos wt) + \left(-\frac{2\cancel{t_d}}{\cancel{t_d}}\cancel{\cos w(t-2t_d)} - \frac{1}{w t_d}\sin w(t-2t_d)\right)\right.$$

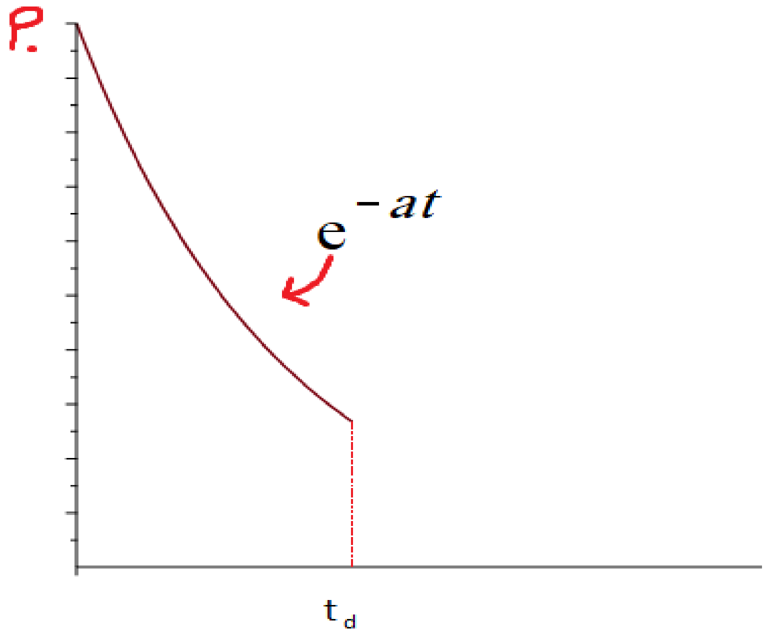
$$+ 2\cancel{\cos w(t-2t_d)}\Big) - \Big(-\cancel{\cos w(t-t_d)} - \frac{1}{w t_d}\sin w(t-t_d)$$

$$\left. + 2.\cancel{\cos w(t-t_d)}\Big)\right]$$

$$y_{(t)} = y_s\left[\frac{1}{w t_d}\sin w(t-t_d) - \frac{1}{w t_d}\sin w(t-2t_d) - \cos wt\right] \qquad t > 2t_d$$

مثال ۴)

سازه ای به جرم m و سختی k تحت باری مطابق شکل۴ قرار گرفته است، معادله حاکم بر حرکت سیستم را بعد از ضربه به دو روش حل مستقیم معادله دیفرانسیل حرکت و انتگرال دیوهامل به دست آورید؟



شکل ۴ نمودار نیروی اعمال شده

در مرحله اول به روش معادلات دیفرانسیل معادله حرکت را به دست می آوریم مسئله را در دو مرحله حل خواهیم کرد در فاز اول که حین ضربه است و فاز دوم بعد از ضربه که بار صفر است و سازه ارتعاش آزاد دارد.

$0 < t < t_d \qquad P_{(t)} = P\, e^{-at}$

$m\ddot{y} + ky = P \cdot e^{-at}$

$\ddot{y} + w^2 y = \frac{P}{m} e^{-at}$ ③

$y_t = y_c + y_p$

$y_c = A \sin wt + B \cos wt$

② $y_p = C\, e^{-at}$ ① $\ddot{y}_p = C a^2 e^{-at}$

① @ ② in ③ $\Rightarrow (Ca^2 + w^2 C) e^{-at} = \frac{P}{m} e^{-at}$

$\Rightarrow C = \frac{P}{m(a^2+w^2)} = \frac{y_s}{1+u^2}$

$\frac{P}{mw^2} = y_s \qquad \frac{a}{w} = u$

$y_t = A \sin wt + B \cos wt + \frac{y_s}{1+u^2} e^{-at}$ ④

$\dot{y}_t = Aw \cos wt - Bw \sin wt - \frac{y_s\, a}{1+u^2} e^{-at}$

$y_0 = 0 \Rightarrow 0 = B + \frac{y_s}{1+u^2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{-y_s}{1+u^2}}$ ⑤

$\dot{y}_0 = 0 \Rightarrow 0 = Aw - \frac{y_s\, a}{1+u^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{u}{1+u^2} y_s}$ ⑥

⑤ @ ⑥ in ④

$$0 < t < t_d \quad \begin{cases} y_t = \frac{y_s}{1+u^2}\left(u \sin wt - \cos wt + e^{-at}\right) \\ \dot{y}_t = \frac{y_s}{1+u^2}\left(uw \cos wt + w \sin wt - a e^{-at}\right) \end{cases}$$

$$\text{if} \quad t = t_d \Rightarrow \begin{cases} y_{t_d} = \frac{y_s}{1+u^2}\left(u \sin wt_d - \cos wt_d + e^{-at_d}\right) & ⑦ \\ \dot{y}_{t_d} = \frac{y_s}{1+u^2}\left(uw \cos wt_d + w \sin wt_d - a e^{-at_d}\right) & ⑧ \end{cases}$$

$t_d < t$ $$\ddot{y}+w^2 y = 0$$

$$y = D \sin w(t-t_d) + E \cos w(t-t_d) \qquad (9)$$

$$t=t_d \quad (7) \Rightarrow \frac{y_s}{1+u^2}\left(u \sin wt_d - \cos wt_d + e^{-at_d}\right) = 0 + E \qquad (10)$$

$$(8) \Rightarrow \frac{y_s}{1+u^2}\left(uw \cos wt_d + w \sin wt_d - a e^{-at_d}\right) = Dw + 0$$

$$\Rightarrow D = \frac{y_s}{1+u^2}\left(u \cos wt_d + \sin wt_d - u e^{-at_d}\right) \qquad (11)$$

$$(9), (11), (10) \quad y = \frac{y_s}{1+u^2}\Big[\overbrace{\left(u \cos wt_d + \sin wt_d - u e^{-at_d}\right)}^{D}\left(\sin w(t-t_d)\right) +$$
$$\overbrace{\left(u \sin wt_d - \cos wt_d + e^{-at_d}\right)}^{E}\left(\cos w(t-t_d)\right)\Big]$$

$$y = \frac{y_s}{1+u^2}\Big[\frac{u}{2}\left(\sin wt + \cancel{\sin w(t-2t_d)}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\cos w(t-2t_d)} - \cos w(t)\right)$$

$$-u e^{-at_d} \sin w(t-t_d) + \frac{u}{2}\left(\cancel{\sin w(2t_d - t)} + \sin wt\right) - \frac{1}{2}\left(\cos w(t_d) + \cancel{\cos w(t-2t_d)}\right)$$

$$+ e^{-at_d} \cos w(t-t_d)\Big]$$

$$\Longrightarrow y_t = \frac{y_s}{1+u^2}\left[u \sin wt - \cos wt + e^{-at} \cos w(t-t_d) - u e^{-at_d} \sin w(t-t_d)\right]$$

$$t_d < t$$

در قسمت بعد به روش انتگرال دیوهامل معادله حرکت را به دست می آوریم.

فرمول $y_t = \frac{1}{mw}\int_0^t P(\tau)\sin w(t-\tau)\,d\tau$

$$P(\tau) = \begin{cases} 0 < t < t_d & \Rightarrow P(\tau) = P\,e^{-a\tau} \\ t_d < t & \Rightarrow P(\tau) = 0 \end{cases}$$

$$y_t = \frac{1}{mw}\int_0^{t_d} P e^{-a\tau} \sin w(t-\tau)\,d\tau + \int 0$$

$$y_t = \frac{P}{mw}\left[\frac{e^{-a\tau}}{1+u^2}\left(\frac{\cos w(t-\tau)}{w} - \frac{a}{w^2}\sin w(t-\tau)\right)\right]_0^{t_d}$$

$u = \frac{a}{w}$

$mw^2 = k$

$\frac{P}{k} = y_s$

$$= \frac{y_s}{1+u^2}\left[\left(\cos w(t-\tau) - u\sin w(t-\tau)\right)e^{-a\tau}\right]_0^{t_d}$$

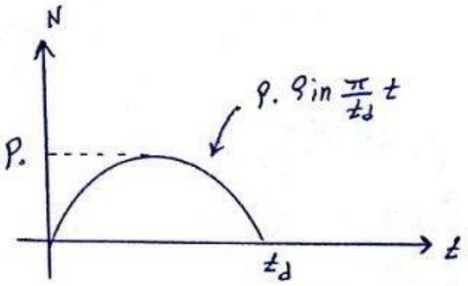
$$= \frac{y_s}{1+u^2}\left[\left(\cos w(t-t_d) - u\sin w(t-t_d)\right)e^{-at_d} - \left(\cos wt - u\sin wt\right)\right]$$

$t_d < t$

تهیه کننده : کامبیز چراغی آدرس ایمیل و تلگرام :
telegram me/@engineer_teacher
kambiz.cheraghi@gmail.com

مثال ۵)

سازه ای به جرم m و سختی k تحت باری مطابق شکل۵ قرار گرفته است، معادله حاکم بر حرکت سیستم را بعد از ضربه به دو روش حل مستقیم معادله دیفرانسیل حرکت و انتگرال دیوهامل به دست آورید؟



شکل 5

$0 < t < t_d \qquad P_{(t)} = P_0 \sin \frac{\pi}{t_d} t \qquad \bar{T} = 2 t_d \qquad \bar{\omega} = \frac{\pi}{t_d}$ فرکانس بار

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega} t$$

$$y_c = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$y_p = C \sin \bar{\omega} t \quad , \quad \ddot{y}_p = -C \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t$$

$$(-C \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t) + \omega^2 (C \sin \bar{\omega} t) = \frac{P}{m} \sin \bar{\omega} t$$

$$\Rightarrow C = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \bar{\omega}^2)} = \frac{P}{m\omega^2(1-\beta^2)} = \frac{y_s}{1-\beta^2}$$

$$\left\{ \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \beta \quad m\omega^2 = k \quad \frac{P}{k} = y_s \right.$$

$$y_t = y_c + y_p$$

$$y_t = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{y_s}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t \qquad (1)$$

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B + 0 \qquad \Rightarrow \boxed{B = 0} \qquad (2)$$

$$\dot{y}_t = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t + \frac{\bar{\omega} y_s}{1-\beta^2} \cos \bar{\omega} t$$

$$\dot{y}_{(0)} = 0 \Rightarrow 0 = A\omega + \frac{\bar{\omega} y_s}{1-\beta^2} \qquad \Rightarrow \boxed{A = \frac{-\beta}{1-\beta^2} y_s} \qquad (3)$$

$$①,③,② \begin{cases} y_t = \dfrac{y_s}{1-\beta^2}\left(\sin\bar{w}t - \beta\sin wt\right) \\ \dot{y}_t = \dfrac{y_s}{1-\beta^2}\left(\bar{w}\cos\bar{w}t - \bar{w}\cos wt\right) \end{cases} \quad 0 < t < t_d$$

$$\text{if} \quad t = t_d \Rightarrow \begin{cases} y_{t_d} = \dfrac{y_s}{1-\beta^2}\left(\sin\bar{w}t_d - \beta\sin wt_d\right) \\ \dot{y}_{t_d} = \dfrac{\bar{w}\,y_s}{1-\beta^2}\left(\cos\bar{w}t_d - \cos wt_d\right) \end{cases} ④$$

$t_d < t$

$$\ddot{y} + w^2 y = 0$$

⑦

$$y_t = D\sin w(t-t_d) + E\cos w(t-t_d) \quad @ \quad \dot{y}_t = DW\cos w(t-t_d) - EW\sin w(t-t_d)$$

$$y_{t_d} = ④ \Rightarrow \frac{y_s}{1-\beta^2}\left(\sin\bar{w}t_d - \beta\sin wt_d\right) = 0 + E \quad ⑤$$

$$\dot{y}_{t_d} = ④ \quad \frac{\bar{w}\,y_s}{1-\beta^2}\left(\cos\bar{w}t_d - \cos wt_d\right) = DW + 0$$

$$\Rightarrow D = \frac{\beta\,y_s}{1-\beta^2}\left(\cos\bar{w}t_d - \cos wt_d\right) \quad ⑥$$

$$⑦,⑥,⑤ \quad y_t = \frac{y_s}{1-\beta^2}\Big[\underbrace{\beta(\cos\bar{w}t_d - \cos wt_d)}_{D}\sin w(t-t_d) + \underbrace{(\sin\bar{w}t_d - \beta\sin wt_d)}_{E}\cos w(t-t_d)\Big]$$

$$y_t = \frac{y_s}{1-\beta^2}\Big[\frac{\beta}{2}\Big(\sin w((\beta-1)t_d + t) + \sin w(t-(1+\beta)t_d)\Big) - \frac{\beta}{2}\Big(\sin wt + \cancel{\sin} w(t-2t_d)\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\sin w((\beta-1)t_d + t) + \sin w((\beta+1)t_d - t)\Big) - \frac{\beta}{2}\Big(\cancel{\sin} w(2t_d - t) + \sin wt\Big)$$

$$\boxed{\Rightarrow y_t = \frac{y_s}{1-\beta^2}\Big[\frac{1}{2}\sin w((\beta-1)t_d + t)(\beta+1) + \frac{1}{2}\sin w(t-(\beta+1)t_d)(\beta-1) - \beta\sin wt\Big]}$$

$t_d < t$

انتگرال دیوهامل

$$y_t = \frac{1}{mw}\int_0^t P(\tau)\,\sin w(t-\tau)\,d\tau$$

$$y_t = \frac{P_\circ}{mw}\int_0^{t_d} \sin\bar{w}\tau\,\sin w(t-\tau)\,d\tau + \int_{t_d}^{t} 0$$

$$y_t = \frac{P}{mw}\left[\int_0^{t_d}\frac{1}{2}\Big(\cos w((\beta-1)\tau+t) - \cos w((\beta+1)\tau-t)\Big)\right] d\tau$$

$$= \frac{P}{mw}\left[\frac{1}{2w}\Big(\frac{1}{\beta-1}\sin w((\beta-1)\tau+t) - \frac{1}{\beta+1}\sin w((\beta+1)\tau-t)\Big)\right]_0^{t_d}$$

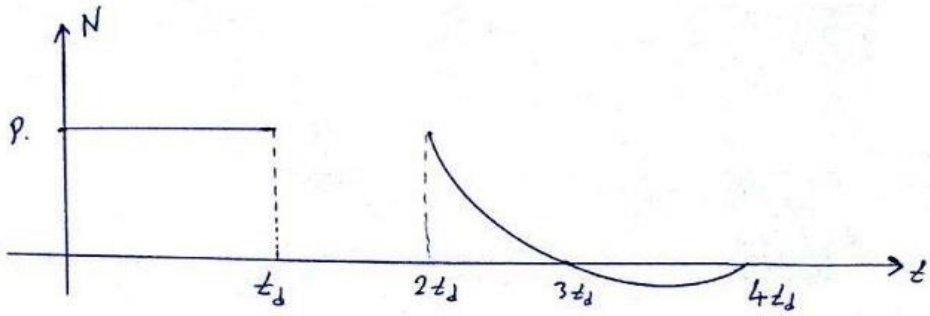
$$= y_s\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\beta-1}\sin w((\beta-1)t_d+t) - \frac{1}{\beta+1}\sin w((\beta+1)t_d-t)\Big) +$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\beta-1}\sin wt + \frac{1}{\beta+1}\sin wt\Big)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{y_s}{1-\beta^2}\Big[\frac{1}{2}\sin w((\beta-1)t_d+t)(\beta+1) + \frac{1}{2}\sin w(t-(\beta+1)t_d)(\beta-1) - \beta\sin wt\Big]}$$

مثال ۶)

سازه ای به جرم m و سختی k تحت باری مطابق شکل۶ قرار گرفته است، معادله حاکم بر حرکت سیستم را حین ضربه دوم دو روش حل مستقیم معادله دیفرانسیل حرکت و انتگرال دیوهامل به دست آورید؟



شکل ۶

$0 < t < t_d \qquad P_{(t)} = P.$

$t_d < t < 2t_d \qquad P_{(t)} = 0$

$2t_d < t < 4t_d \qquad P_{(t)} = at^2 + bt + C$ تقریب با معادله درجه 2

$$\begin{cases} P_{(2t_d)} = P. \Rightarrow \;\therefore\; P. = a(2t_d)^2 + b(2t_d) + C \\ P_{(3t_d)} = 0 \Rightarrow \quad 0 = a(3t_d)^2 + b(3t_d) + C \\ P_{(4t_d)} = 0 \Rightarrow \quad 0 = a(4t_d)^2 + b(4t_d) + C \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{P}{2t_d}, \quad b = -\frac{7P}{2t_d}, \quad C = 6P$$

$$2t_d < t < 4t_d \Rightarrow P_{(t)} = P\left(\frac{1}{2t_d^2}t^2 - \frac{7}{2t_d} + 6\right)$$

$$4t_d < t \Rightarrow P_{(t)} = 0$$

$0 < t. < t_d$

$$\ddot{y} + w^2 y = \frac{P.}{m}$$

$$y_c = A\sin wt + B\cos wt$$

$$y_t = y_c + y_p \qquad y_t = A\sin wt + B\cos wt + y_s$$

$$y_{(0)} = 0 \ , \ \dot{y}_{(0)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_t = y_s(1-\cos wt) \\ \dot{y}_t = y_s w \sin wt \end{cases} \qquad 0 < t < t_d$$

$$\text{if } t = t_d \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_{t_d} = y_s(1-\cos wt_d) \\ \dot{y}_{t_d} = y_s w \sin wt_d \end{matrix} \quad 1$$

$$t_d < t < 2t_d$$

$$\ddot{y} + w^2 y = 0$$

$$y_t = C\sin w(t-t_d) + D\cos w(t-t_d) \quad 2 \qquad @\ \dot{y}_t = Cw\cos w(t-t_d) - Dw\sin w(t-t_d)$$

1

$$y_{t_d} = y_s(1-\cos wt_d) = 0 + D \quad \Rightarrow D = y_s(1-\cos wt_d) \quad 3$$

$$\dot{y}_{t_d} = y_s w \sin wt_d = Cw \quad \Rightarrow C = y_s \sin wt_d \quad 4$$

2 , 4 3 $\quad y_t = y_s\left[(1-\cos wt_d)\cos w(t-t_d) + \sin wt_d \cdot \sin w(t-t_d)\right]$

$$y_t = y_s\left[\cos w(t-t_d) - \frac{1}{2}\left(\cos wt + \cancel{\cos} w(t-2t_d)\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\cos} w(2t_d-t) - \cos wt\right)\right]$$

$$y_t = y_s\left[\cos w(t-t_d) - \cos wt\right] \qquad t_d < t < 2t_d$$

$$\dot{y}_t = y_s\left[\sin wt - \sin w(t-t_d)\right] w$$

if $t = 2t_d \Rightarrow$

$$y_{2t_d} = y_s\left[\cos wt_d - \cos w2t_d\right] \quad ⑤$$

$$\dot{y}_{2t_d} = y_s w\left[\sin 2wt_d - \sin wt_d\right]$$

$2t_d < t < 4t_d$

$$\ddot{y} + w^2 y = \frac{P}{m}\left(\frac{1}{2t_d^2}t^2 - \frac{7}{2t_d}t + 6\right)$$

$$y_c = E\sin w(t - 2t_d) + F\cos w(t - 2t_d)$$

$$y_p = at^2 + bt + C \qquad \ddot{y}_p = 2a$$

$$2a + w^2(at^2 + bt + C) = \frac{P}{m}\left(\frac{1}{2t_d^2}t^2 - \frac{7}{2t_d}t + 6\right)$$

$$w^2 a = \frac{P}{2mt_d^2} \Rightarrow a = \frac{y_s}{2t_d^2}$$

$$w^2 b = \frac{-7P}{2mt_d} \Rightarrow b = -\frac{7y_s}{2t_d}$$

$$w^2 C + \frac{y_s}{t_d^2} = \frac{6P}{m} \Rightarrow C = 6y_s - \frac{y_s}{w^2 t_d^2}$$

$$y_t = y_c + y_p$$

⑥

$$y_t = E\sin w(t - 2t_d) + F\cos w(t - 2t_d) + y_s\left(\frac{1}{2t_d^2}t^2 - \frac{7}{2t_d}t + 6 - \frac{1}{w^2 t_d^2}\right)$$

⑤ $$y_{2t_d} = y_s\left[\cos wt_d - \cos 2wt_d\right] = 0 + F + y_s\left(2 - 7 + 6 - \frac{1}{w^2 t_d^2}\right)$$

$$\Rightarrow F = y_s\left[\cos wt_d - \cos 2wt_d - 1 + \frac{1}{w^2 t_d^2}\right] \quad ⑦$$

$$\dot{y}_t = Ew\cos w(t - 2t_d) - Fw\sin w(t - 2t_d) + y_s\left(\frac{1}{t_d^2}t - \frac{7}{2t_d}\right)$$

$$⑤ \quad \dot{y}_{2t_d} = y_s\left[\sin 2wt_d - \sin wt_d\right] w = E\,w + y_s\left(\frac{2}{t_d} - \frac{7}{2t_d}\right)$$

$$\Rightarrow E = y_s\left[\sin 2wt_d - \sin wt_d + \frac{3}{w2t_d}\right] \quad ⑧$$

$$⑥, ⑧, ⑦ \quad y_t = y_s\Big[\left(\sin 2wt_d - \sin wt_d + \frac{3}{2wt_d}\right)\sin w(t-2t_d) +$$

$$+\left(\cos wt_d - \cos 2wt_d - 1 + \frac{1}{w^2t_d^2}\right)\left(\cos w(t-2t_d) + \frac{t^2}{2t_d^2} - \frac{7}{2t_d}t + 6 - \frac{1}{w^2t_d^2}\right)\Big]$$

$$\Rightarrow \quad y_t = y_s\Big[\frac{1}{2}\left(\cancel{\cos w(4t_d-t)} - \cos w(t)\right) - \frac{1}{2}\left(\cancel{\cos w(3t_d-t)} - \cos w(t-t_d)\right)$$

$$+\frac{3}{2wt_d}\sin w(t-2t_d) + \frac{1}{2}\left(\cos w(t-t_d) + \cancel{\cos w(t-3t_d)}\right) +$$

$$-\frac{1}{2}\left(\cos wt + \cancel{\cos w(4t_d-t)}\right) - \cos w(t-2t_d) \underbrace{+}_{\frac{1}{w^2t_d^2}\cos w(t-2t_d)} \frac{t^2}{2t_d^2} - \frac{7}{2t_d} + 6 - \frac{1}{w^2t_d^2}\Big]$$

$$\Rightarrow \quad y_t = y_s\Big[\cos w(t-t_d) - \cos wt + \frac{3}{2wt_d}\sin w(t-2t_d) - \cos w(t-2t_d)$$

$$\frac{1}{w^2t_d^2}\cos w(t-2t_d) + \frac{t^2}{2t_d^2} - \frac{7}{2t_d} + 6 - \frac{1}{w^2t_d^2}\Big]$$

$$2t_d < t < 4t_d$$

انتگرال دیوهامل

$$y_t = \frac{1}{m\omega}\int_0^{t} P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$y_t = \frac{1}{m\omega}\int_0^{t_d} P\cdot\sin\omega(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{m\omega}\int_{t_d}^{2t_d} 0\,\sin\omega(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{m\omega}\int_{2t_d}^{t} P\left(\frac{1}{2t_d^2}\tau^2 - \frac{7}{2t_d}\tau + 6\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau =$$

$$y_t = \frac{P}{m\omega}\left[\frac{1}{\omega}\cos\omega(t-\tau)\right]_0^{t_d} + \cancelto{y_s}{\frac{P}{m\omega^2}}\Big[+6\cos\omega(t-\tau) - \frac{7\tau}{2t_d}\cos\omega(t-\tau)$$

$$+\frac{\tau^2}{2t_d^2}\cos\omega(t-\tau) - \frac{7}{2\omega t_d}\sin\omega(t-\tau) + \frac{\tau}{\omega^2 t_d^2}\sin\omega(t-\tau) - \frac{1}{\omega^2 t_d^2}\cos\omega(t-\tau)\Big]_{2t}^{t}$$

$$y_t = y_s\Big[\cos\omega(t-t_d) - \cos\omega t + \frac{3}{2\omega t_d}\sin\omega(t-2t_d) - \cos\omega(t-2t_d)$$

$$+\frac{1}{\omega^2 t_d^2}\cos\omega(t-2t_d) + \frac{t^2}{2t_d^2} - \frac{7}{2t_d} + 6 - \frac{1}{\omega^2 t_d^2}\Big]$$