

# www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

فروشگاه تفصلي مهندسي عمران



@icivilir



icivil.ir





واحد علوم و تحقیقات

# تئوری پایداری سازه‌ها

## Stability Theory of Structures

استاد: دکتر شیدایی

دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات



تئوری پایداری سازه ها

Stability Theory of Structures

# پایداری سازه ها

## Stability Theory of structures

### تعداد واحد: ۳

پیشنیاز درس: تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته

۳۰٪	الف) نیم ترم
۴۰٪	ب) پایان ترم
۱۲/۵٪	پ) پروژه
۷/۵٪	ت) تکالیف کامپیوتری
۱۰٪	ث) تکالیف درسی
	سمینار کلاسی

## پایداری سازه‌ها

تعداد واحد: ۳

پیشنیاز: تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته

هدف: آشنا ساختن دانشجویان با اصول پایداری قطعات و سازه‌ها و کاربرد آنها در طرح سازه‌ها

سرفصل درس:

- ۱- کمانش ارتجاعی و "ارتجاعی - خمیری" ستونها: باراولر، طول مؤثر، تئوری مدول دوگانه و مماسی، تئوری شتلی، ستونها با نقص اولیه، نحوه استفاده از این اصول در تدوین آیین‌نامه‌ها
- ۲- روشهای تقریبی و کاربرد آنها در حل مسائل پایداری، بار بحرانی با استفاده از منحنی تغییر شکل تقریبی، انرژی پتانسیل ایستا، روش "رایلی - ریتز" و روش گلوکین
- ۳- تیر ستونها، بررسی بارگذارهای مختلف، تأثیر نیروی محوری بر روی سختی خمشی، مقاومت نهایی، نحوه استفاده از اصول در تدوین آیین‌نامه‌ها
- ۴- کمانش پیچشی و پیچش جانبی اعضا، کمانش جانبی تیرهای با مقطع مستطیل در خمش خالص، کمانش جانبی تیرهای "Z" شکل، نحوه استفاده از این اصول در تدوین آیین‌نامه‌ها
- ۵- کمانش تابها: بررسی بارگذارهای مختلف، تأثیر نیروی محوری بر روی سختی خمشی، مقاومت قابها، نحوه استفاده از این اصول در تدوین آیین‌نامه‌ها.



## مباحث مطروحه در اين درس

### • فصل اول: کلیات (مقدمه - مبانی)

فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها - تعریف پایداری و ناپایداری در سازه ها - نمایش سمبولیک پدیده های پایداری و ناپایداری - روش های بررسی پایداری سیستم های سازه ای و معیارهای حاصل از آنها.

### • فصل دوم: رده بندی پدیده های ناپایداری ارتجاعی

ناپایداری نقطه حدی - ناپایداری نقطه دو شاخگی متقارن پایدار - ناپایداری نقطه دو شاخگی متقارن نا پایدار - ناپایداری نقطه دو شاخگی غیر متقارن - حساسیت سازه ها و پایداری آنها به ناکاملی ها - ناپایداری سیستم های با چند درجه آزادی.

### • فصل سوم: پایداری ستون ها و تیر ستون ها:

بررسی پایداری ستون اولر - اثر شرایط مرزی در بار بحرانی ستون ها - بررسی پایداری ستون های ناکامل - تعیین بار بحرانی ستون اولر با روش های تقریبی - کمانش غیر ارتجاعی ستون ها - بررسی رفتار ستون ها با استفاده از روش عناصر محدود - بررسی پایداری تیر ستون ها.

### • فصل چهارم: کمانش قاب ها

تحلیل کیفی پایداری یک قاب ساده- محاسبه بار بحرانی قاب ها با استفاده از روش تعادل خنثی- تاثیر نیروی محوری بر سختی خمشی- تعیین بار بحرانی قاب ها با استفاده از روابط شیب - افت اصلاح شده - تعیین بار بحرانی قاب ها با استفاده از روش تحلیل ماتریسی سازه ها- تحلیل خطی سازی شده کمانش- تحلیل الاستیک مرتبه دوم

• فصل پنجم: بررسی پایداری سازه ها به روش تحلیل غیرخطی عناصر محدود



- 1) Croll, J.G.A, and Walker, A.C, “Elements of Structural Stability”, The Macmillian Press Ltd, 1979.
- 2) Chajes, A, “Principle of Structural Stability Theory”, McGraw Hill Inc, 1974.
- 3) Crisfield, M.A, “Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures”, John Wiley and Sons Inc, 1991.
- 4) Thompson, J.M.T and Hunt, G.W, “A General Theory of Elastic Stability”, John Wiley and Sons Inc, 1973.
- 5) Thompson, J.M.T and Hunt, G.W, “Elastic Instability Pheonomenon”, John Wiley and Sons Inc, 1984.
- 6) Waszczyszyn, Z, “Stability of Structures by Finite Element Method”, Elsevier Applied Science Publishers, 1995.

7) Farshad, M. “Stability of Structures”, Elsevier Applied Science Publishers, 1994.

8) Timoshenko, S.P and Gere, J.M, “Theory of Elastic Stability”, McGraw Hill Inc, 1983.

9) Gregory, M, “Elastics Instability”, E.F.N. Spon Ltd, 1967.

10) El Naschie, M.S. “Stress, Stability and Chaos”, McGraw Hill Inc, 1990.

11) Horne, M.R, and Merchant, W, “The Stability of Frames”, Pergamon Press, 1965.

12) Livesley, R.K, “Matrix Method of Structural Analysis”, Pergamon Press, 1975.

13) Bathe, K.J, “Finite Element Procedures”, Prentice-Hall Inc, 1996.

تئوری پایداری سازه ها

Stability Theory of Structures

# فصل اول

کلیات (مقدمه – مبانی)

## ۱- فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها

---

خط سیر سازه ها از ۲۰۰ سال پیش تا کنون :

Heavy and Thick Structures



Light and Thin Structures

علل این خط سیر:

- استفاده از مصالح با مقاومت بالا
- ضرورت اقتصادی بودن سازه ها
- نیاز به سیستم های پیچیده و ظریف سازه ای
- پیشرفت روشهای طراحی و ابداع روشهای نوین
- ارتقای سطح تکنولوژی ساخت
- پیشرفت تکنیک های بهینه سازی
- ابداع مصالح نوین

# ۱- فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها

---

**Light and Thin** شدن سازه ها عواقب زیر را در پی خواهد داشت:

- در معرض صدمات فیزیکی قرار گرفتن
- دشواری ساخت و نیاز به تخصص های بالاتر
- نیاز به تخصص بالاتر و پیچیده تر تحلیل و طراحی سازه ها

(Specialized Design Capacity)

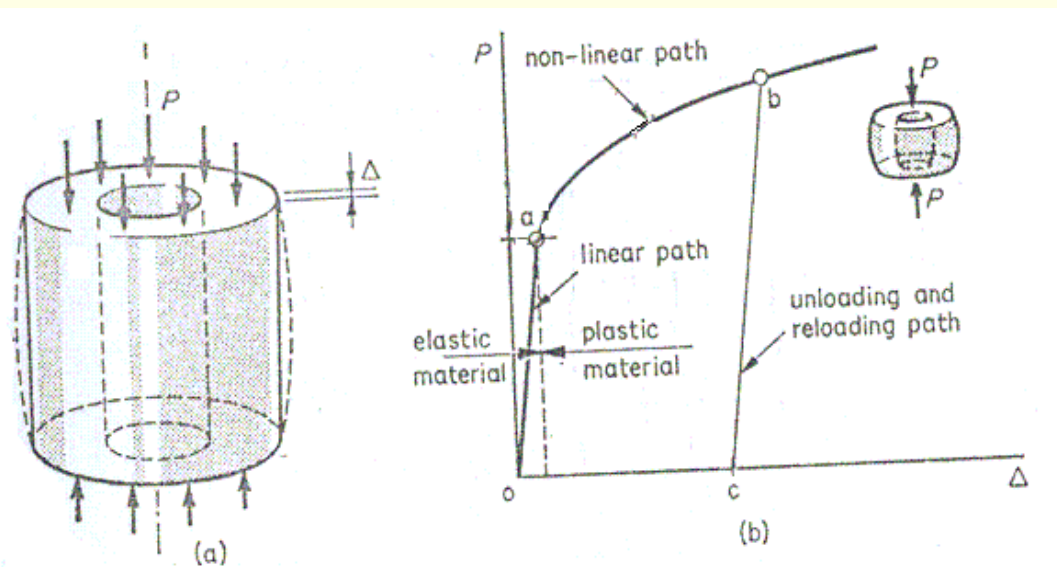
یکی از تخصص های بالا و پیچیده در تحلیل و طراحی سازه ها، آشنایی با مباحث پایداری سازه ها است.

## ۱- فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها

اکنون شکل رفتار تجربی سه سازه ساده را در نظر می گیریم :

### الف- لوله کوتاه جدار کلفت (Very Squat Tube- Short Thick Tube)

(که از مصالح شکل پذیر ساخته شده است و تحت اثر بار گسترده یکنواخت فشاری قرار دارد)



- نوع تغییر شکل لوله از نوع باد کردن (Bulging) خواهد بود.

- خرابی اگر اتفاق افتد، می تواند در یک تغییر شکل محوری بسیار بزرگتر از حد تناسب نقطه a

### (Limit Proportionality)

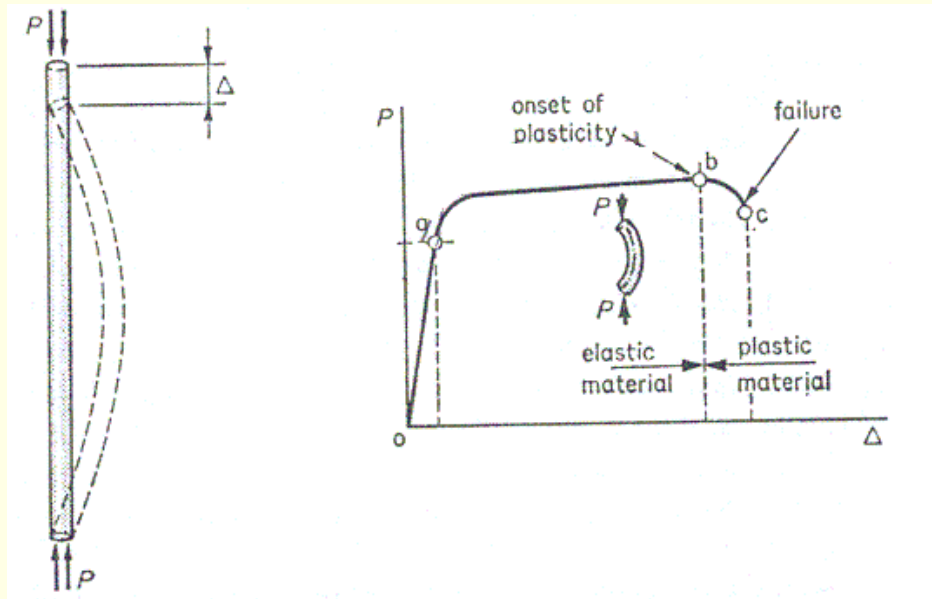
اتفاق افتد .

- برای طراحی معمولاً جهت جلوگیری از وقوع پلاستیسیته ، بار  $p$  در نقطه  $a$  نمایشگر حد بالای بارگذاری خواهد بود. بنابراین یک تحلیل خطی (Linear Analysis) برای طراحی کافی خواهد بود .

# ۱- فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها

## ب- لوله بلند جدار کلفت (Longer Thick Tube)

(که از مصالح شکل پذیر ساخته شده (Ductile material) و تحت اثر بار محوری فشاری گسترده یکنواخت قرار دارد)



• تغییر شکل از نوع خمشی جانبی (Bowing Sideway) خواهد بود.

• وقوع پلاستیسیته در نقطه b در نهایت منجر به خرابی در نقطه c میگردد.

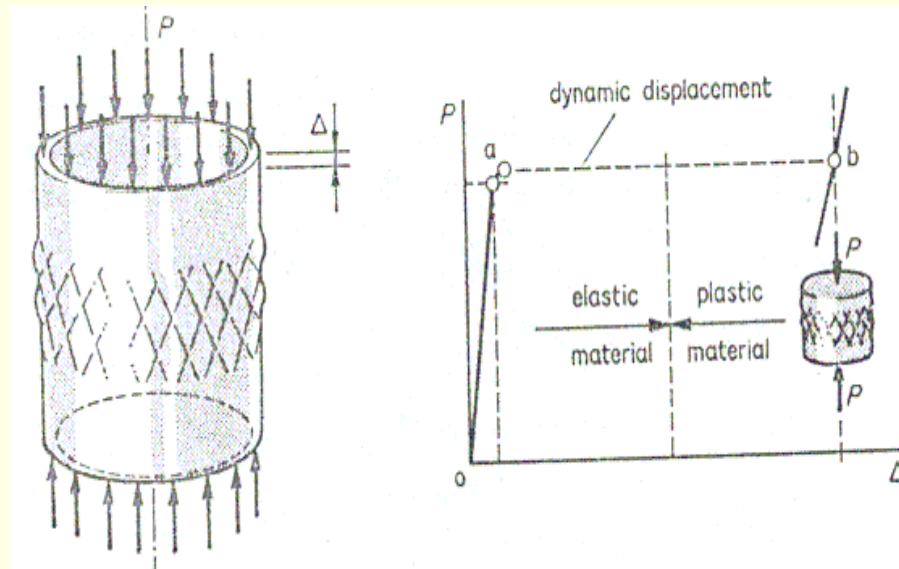
• برای طراحی معمولاً نقطه وقوع پلاستیسیته در نقطه b نمایشگر حد بالای بارگذاری خواهد بود. بنابراین یک تحلیل خطی در طراحی کارایی ندارد و به یک تحلیل غیرخطی الاستیک (Elastic Nonlinear Analysis) نیاز است، که فقط غیرخطی هندسی معمولی را در بر دارد.



## ۱- فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها

### پ- لوله بلند جدار نازک (Longer Thin Tube)

(که از مصالح شکل پذیر ساخته شده و تحت اثر بار محوری فشاری گسترده یکنواخت قرار دارد)

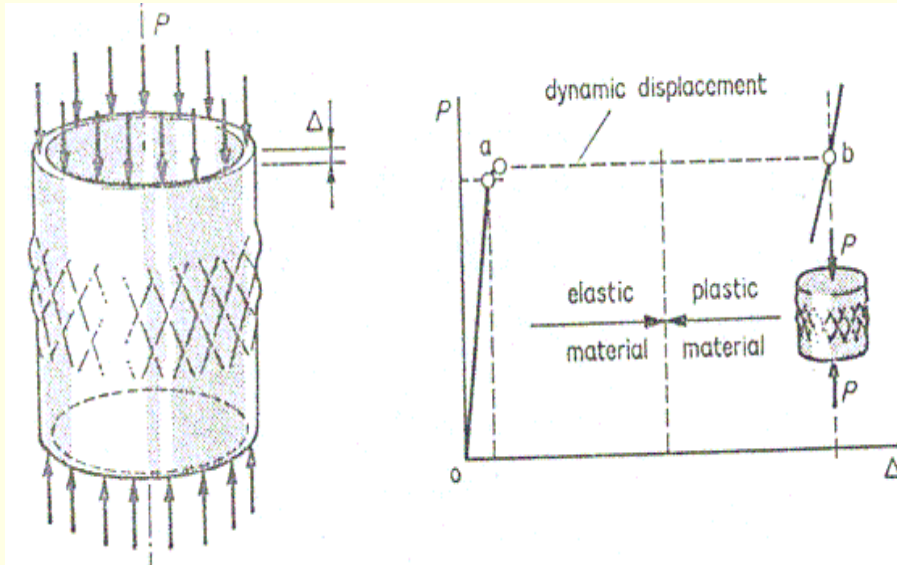


تغییر شکل از نوع کمانش (Buckling) خواهد بود .

(توجه شود که اساساً کمانش یک پدیده دینامیکی است)

**Buckling is used to denote the dynamic process in which a structure moves from an unstable to another possibly distant stable state**

# ۱- فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها



برای طراحی معمولاً جهت جلوگیری از وقوع کمانش، نقطه وقوع کمانش در  $a$  نمایشگر حد بالای بارگذاری خواهد بود. ولی یک تحلیل خطی توانایی تشخیص این نقطه را ندارد. بنابراین به یک تحلیل غیرخطی عمومی که شامل غیر خطی های هندسی و مصالح باشد برای پیش بینی رفتار دقیق مورد نیاز است ( به همراه یک روش کنترل تغییر مکان به عنوان مثال روش Arc-Length Method ) و در موارد خاص می تواند این تحلیل ، یک تحلیل دینامیکی باشد.

این نوع رفتار که در ستونهای لاغر نیز مشاهده می شود نمایش پدیده ناپایداری می باشد.

## ۱- فلسفه و چرایی مبحث پایداری سازه ها

بنابراین در سازه های لاغر سبک وزن با مقاومت بالا  
(High Strength – Slender – Lightweight)

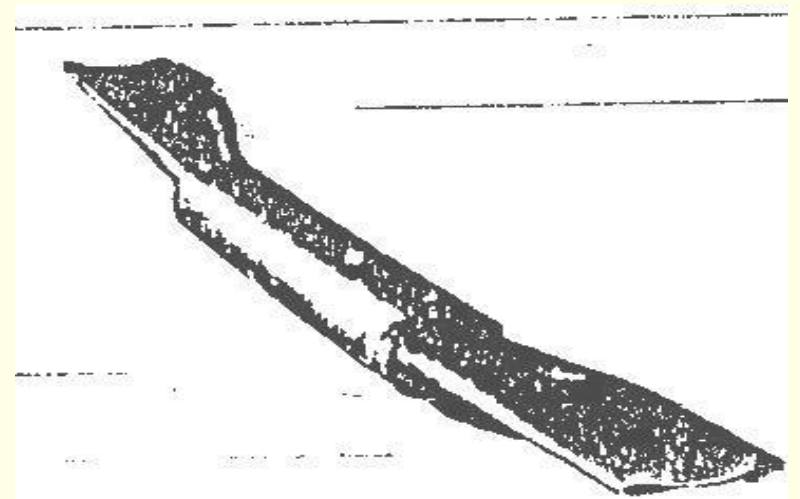
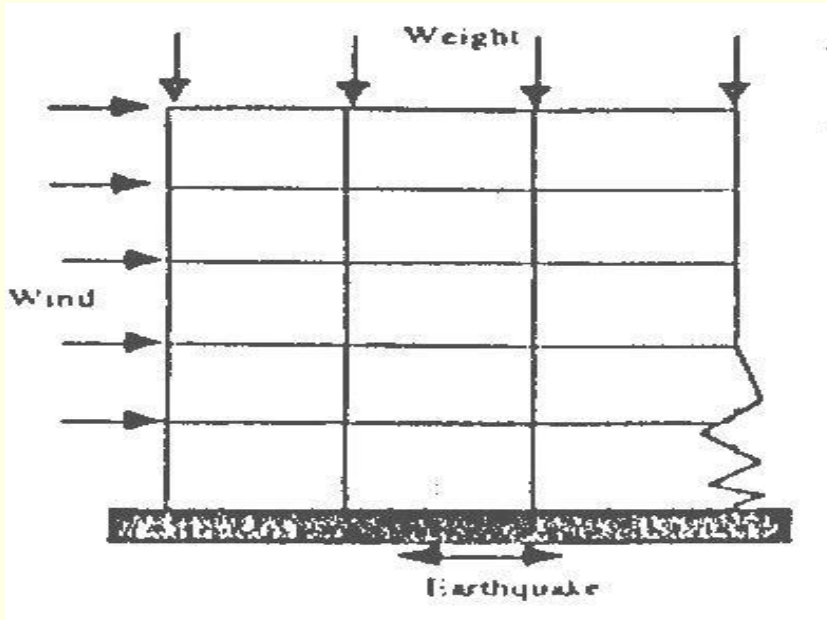
- پدیده ای بنام پدیده ناپایداری اتفاق می افتد که باید در طراحی این سازه ها حتماً مد نظر قرار گیرد.

- این پدیده با تحلیل های معمول خطی قابل ارزیابی نیست.

- وقوع این پدیده به طور قابل ملاحظه ای در ظرفیت باربری سازه (Load-Carrying Capacity) اثر می گذارد ، که باید در طراحی اصولی این سازه ها در نظر گرفته شود.

## مثال هایی از پدیده ناپایداری

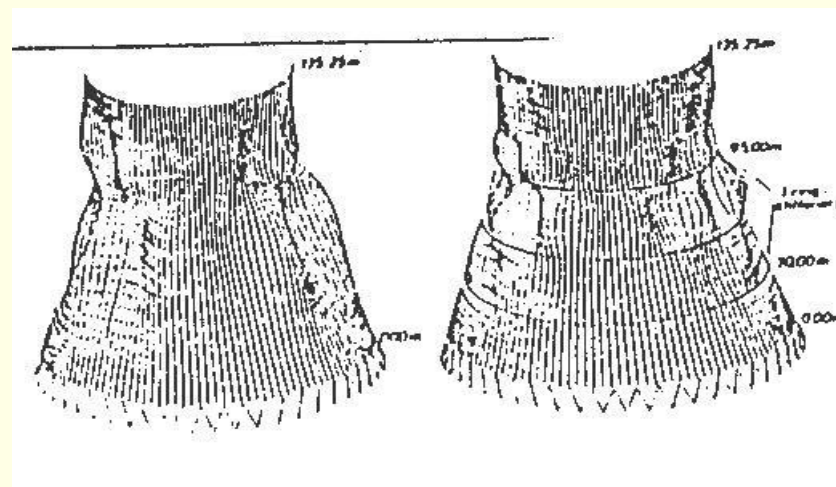
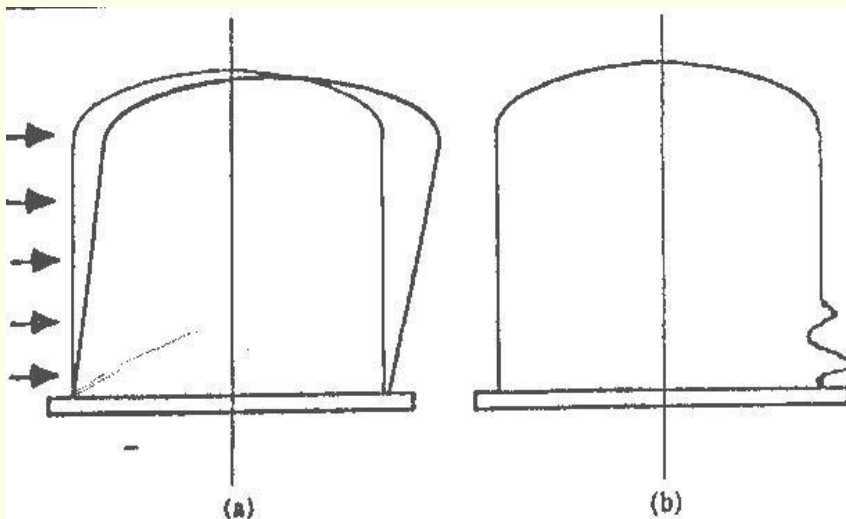
الف - کمانش یک ستون در یک قاب



ب - انتشار کمانش در یک خط لوله زیر آب

## مثال هایی از پدیده ناپایداری

پ - کمانش غیر متقارن یک پوسته



ت - کمانش یک برج خنک کننده

## ۲- تاریخچه تحقیقات در پدیده ناپایداری

---

Newton (۱۶۴۲-۱۷۲۷) ← ۱۶۸۶م ← نوسان میرای پاندول را که بیانگر یک سیستم پایدار به طور مجانب بود، مورد بررسی و مطالعه قرارداد.

Euler (۱۷۰۷-۱۷۸۳) ← ۱۷۴۴م ← بافتار تعادل یک ستون الاستیک را تحت اثر بار فشاری مورد مطالعه قرار داد (اولین مسأله دو شاخگی (Bifurcation)).

Lagrange (۱۷۳۶-۱۸۱۳) ← مکانیک مبتنی بر قضایای انرژی را ارائه نمود ← که منجر به اصل مینیم انرژی پتانسیل کلی شد که شرط کافی برای پایداری یک سیستم می باشد.

Hamilton (۱۸۰۵-۱۸۶۵) ← مکانیک تحلیلی را توسعه داد ← معادلات از مرتبه اول را در بررسی پایداری سیستم ها مورد بررسی قرار داد.

## ۲- تاریخچه تحقیقات در پدیده ناپایداری

Poincare (پدر تئوری دو شاخگی) (۱۸۵۴-۱۹۱۲) ← به طور کاملاً تفصیلی تئوری عمومی دوشاخگی را ارائه داد.

Liapunov (۱۸۵۷-۱۹۱۸) ← مبانی ریاضی تعاریف پایه ای پایداری را ارائه داد و توابع تعمیم یافته انرژی را معرفی کرد.

Andronov ← ۱۹۳۷ ← مفهوم هندسی پایداری سازه ای را بیان نمود.

Koiter ← ۱۹۴۵ ← نظریه غیرخطی دو شاخگی را برای سیستم های الاستیک پیوسته به خصوص پوسته ها ارائه نمود ← Budiansky (۱۹۶۰) و همکارانش در دانشگاه هاروارد از دیدگاه نوینی نظریه Koiter را بسط دادند.

Tompson و همکارانش در اواخر دهه ۱۹۶۰ و اوایل ۱۹۷۰، نظریه غیرخطی دوشاخگی را با استفاده از مختصات تعمیم یافته برای سیستم های گسسته یا گسسته سازی شده به کار بردند.

## ۲- تاریخچه تحقیقات درپدیده ناپایداری

---

Croll and Walker ← در اوایل ۱۹۷۰ روشهای عددی نظیر تفاضلات محدود و عناصر محدود را برای حل مسائل واقعی درپرتو نظریه غیرخطی دوشاخگی ارائه شده توسط تامسون و همکارانش به کار بردند.



## ۳- تعاریف پایداری و ناپایداری در سازه ها

پایداری سیستم ← پایداری حالت سیستم ← همراه با سیستم های فیزیکی می باشند و پایداری و ناپایداری پدیده هایی هستند که مربوط به حالت آن سیستم ها هستند .

حالت یک سیستم به دو عامل بستگی دارد: } پارامترهای داخلی سیستم  
شرایط محیطی (خارجی) سیستم

حالت یک سیستم در هر لحظه از زمان پایدار (Stable) نامیده میشود ، اگر تغییرات نسبتاً کوچک (Relatively Small Changes) در پارامترهای داخلی سیستم و یا در شرایط محیطی آن موجب تغییرات نسبتاً کوچک در حالت موجود آن سیستم شود.  
(Proportional Changes)

### ۳- تعاریف پایداری و ناپایداری در سازه ها

---

حالت یک سیستم در هر لحظه از زمان ناپایدار (Unstable) نامیده میشود ، اگر تغییرات نسبتاً کوچک در پارامترهای داخلی سیستم و یا در شرایط محیطی آن موجب تغییرات نسبتاً بزرگ (Large Change) در حالت موجود آن سیستم شود.

(Non-Proportional Changes)

حالت سیستم در سازه ها ← حالت تعادل سیستم سازه ای (Equilibrium State)

حالت تعادل یک سیستم سازه ای برای توصیف بافتار سازه (Configuration) و شرایط محیطی آن که شرایط تعادل و سازگاری را ارضا می کنند، به کار می رود.

بافتار سازه : پارامترهای داخلی سیستم سازه ای (مشخصات هندسی و مکانیکی سازه)

شرایط محیطی : شرایط بارگذاری نیرویی و تغییر مکانی

## ۳- تعاریف پایداری و ناپایداری در سازه ها

حالت تعادل پایدار یک سیستم سازه‌ای : (Stable Equilibrium State)

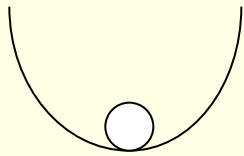
حالت تعادل یک سیستم سازه‌ای پایدار نامیده می‌شود، اگر اختلال‌های کوچک (Small Perturbation – Small Disturbance) در آن حالت که از تغییرات کوچک در بارگذاری یا اختلال‌های کوچک در پارامترهای داخلی سیستم سازه‌ای از جمله تغییرات در هندسه سیستم سازه‌ای و یا در شرایط مرزی آن ناشی می‌شود، موجب اختلال‌های کوچک در حالت تعادل موجود سیستم شود.

حالت تعادل ناپایدار یک سیستم سازه‌ای : (Unstable Equilibrium State)

حالت تعادل یک سیستم سازه‌ای ناپایدار نامیده می‌شود، اگر اختلال‌های کوچک در آن حالت که از تغییرات کوچک در بارگذاری یا اختلال‌های کوچک در پارامترهای داخلی سیستم سازه‌ای از جمله تغییرات در هندسه سیستم سازه‌ای و یا در شرایط مرزی آن ناشی می‌شود، موجب اختلال‌های بزرگ در حالت تعادل موجود سیستم شود، به گونه‌ای که در سیستم به هم‌خوردگی (Upsetting) پیش آید.

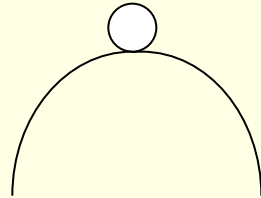
## ۴- نمایش سمبولیک پدیده های پایداری و ناپایداری

---



Stable

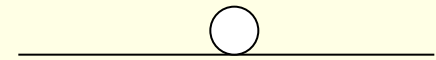
حالت تعادل پایدار



Unstable

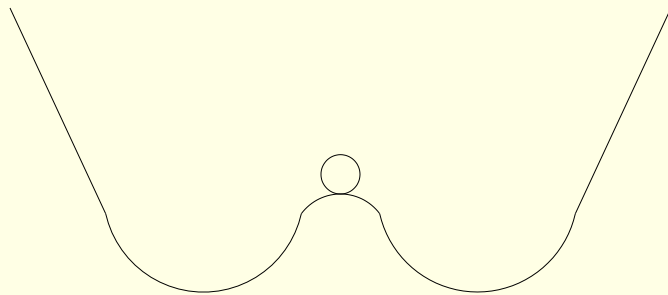
Global Instability

حالت تعادل ناپایدار



Neutral

حالت تعادل خنثی



ناپایداری محلی

Local Instability

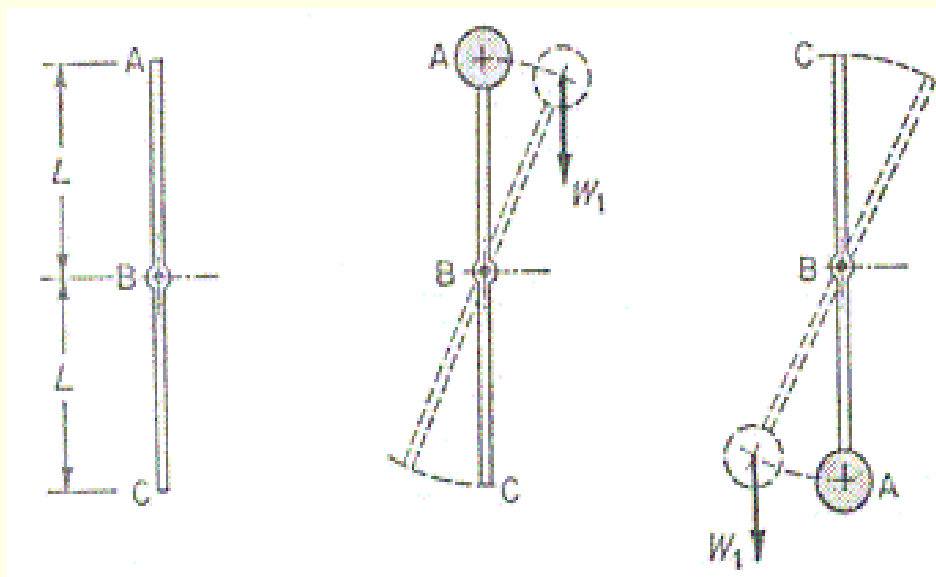
## ۵- روشهای بررسی پایداری سازه ها (و معیارهای حاصل از این روش ها)

الف- روش تعادل ایستایی (Static Equilibrium Method)

ب- روش انرژی (Energy Method)

پ- روش تعادل دینامیکی (Dynamic Equilibrium Method)

برای تشریح این روش ها ، یک بازوی صلب را در نظر می گیریم به گونه ای که وزنه  $W_1$  به انتهای بالای  $A$  و وزنه  $W_2$  به انتهای پایین  $C$  متصل شده اند .



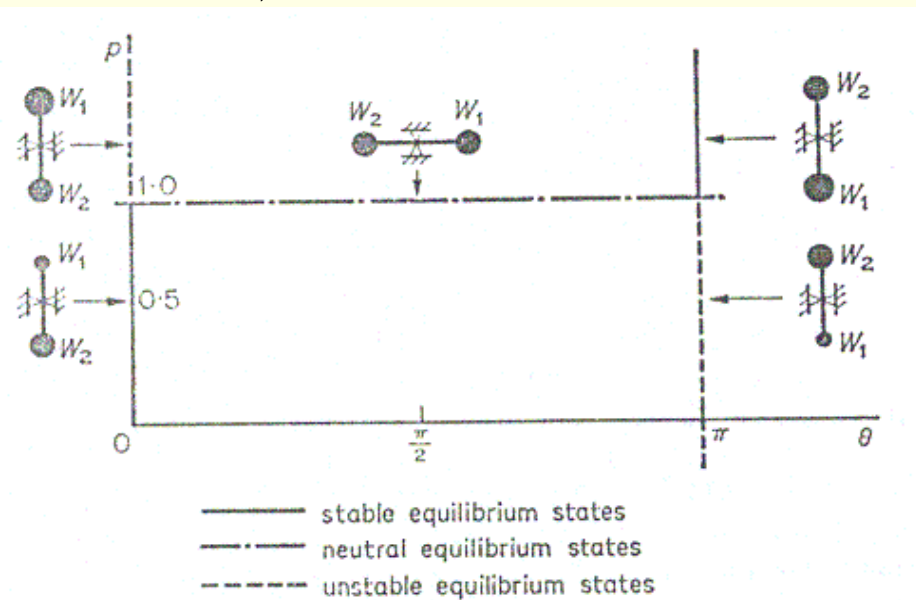
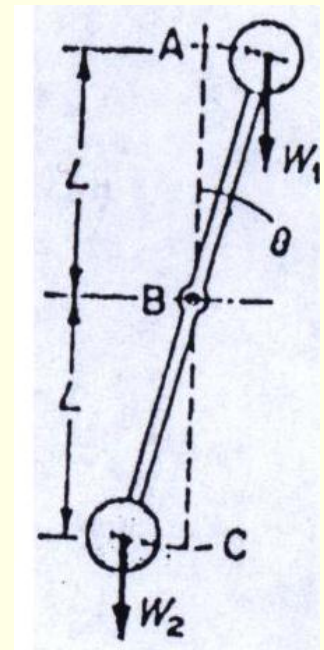
## الف- روش تعادل ایستایی

حالت تعادل این مدل زمانی رخ می دهد که با فرض یک بافتار تغییر مکانی اختیاری  $\theta$  ، لنگر برآیند صفر باشد ، به عبارت دیگر با فرض  $P = \frac{W_1}{W_2}$  باید داشته باشیم :

$$M = W_1 L \sin \theta - W_2 L \sin \theta = L \sin \theta W_2 (p - 1) = 0$$

جوابهای ممکن برای ارضای معادله تعادل عبارتند از :

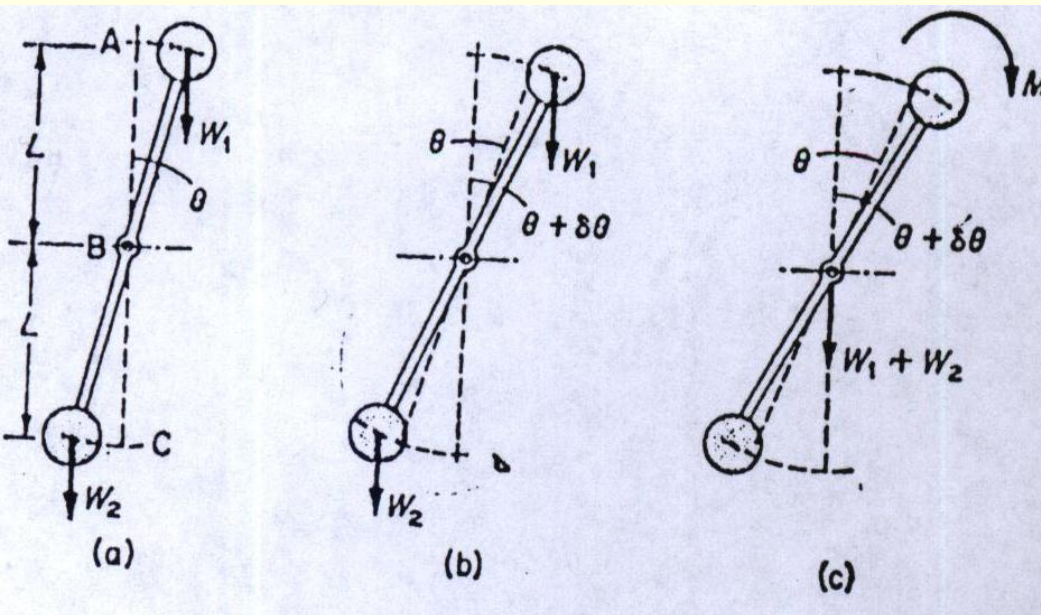
- 1)  $\theta = 0$
- 2)  $\theta = \pi$
- 3)  $P = 1$



مکان های هندسی این حالات ممکن تعادل که مسیرهای تعادل نامیده می شود، در شکل روبرو نشان داده شده است :

## الف- روش تعادل ایستایی

برای بررسی پایداری این حالات تعادل، باید یک اختلال تغییر مکانی کوچک ( $\delta\theta$  نظیر) به سیستم اعمال کنیم و طبیعت لنگر برآیند حاصل را مورد بررسی قرار دهیم:



در این حالت لنگر برآیند عبارت است از:

$$M = W_2 L (p - 1) \sin(\theta + \delta\theta)$$

با فرض  $\cos \delta\theta \cong 1$  و  $\sin \delta\theta \cong \delta\theta$

خواهیم داشت:

$$M = W_2 L (p - 1) (\sin \theta + \delta\theta \cdot \cos \theta)$$

اگر این حالت تعادل را در روی هر یک از مسیرهای تعادل بررسی کنیم (به عبارت دیگر:  $W_2 L (p - 1) \sin \theta = 0$ )، در این صورت لنگر خارج از توازن حاصل (out of Balance Moment) عبارت خواهد بود از:

$$M = W_2 L (p - 1) (\delta \theta \cdot \cos \theta)$$

در حالات خاص این لنگر به صورت زیر در می آید :

$$M \Big|_{\theta=0} = W_2 L (p - 1) \delta \theta \begin{cases} p < 1 \rightarrow M < 0 & \text{تعادل پایدار} \\ p = 1 \rightarrow M = 0 & \text{تعادل بحرانی} \\ p > 1 \rightarrow M > 0 & \text{تعادل ناپایدار} \end{cases}$$

$$M \Big|_{\theta=\pi} = -W_2 L (p - 1) \delta \theta \begin{cases} p < 1 \rightarrow M > 0 & \text{تعادل ناپایدار} \\ p = 1 \rightarrow M = 0 & \text{تعادل بحرانی} \\ p > 1 \rightarrow M < 0 & \text{تعادل پایدار} \end{cases}$$

$$M \Big|_{p=1} = 0 \begin{cases} 0 < \theta < \pi & \text{تعادل خنثی} \\ \theta = 0, \pi & \text{حالت بحرانی} \end{cases}$$



## الف- روش تعادل ایستایی

بنابراین معیار استخراج شده از روش تعادل استاتیکی عبارت است از :

- اگر نیروهای استاتیکی عمل کننده بر روی یک سیستم بعد از یک تغییر مکان کوچک در حول حالت تعادل در جهتی باشند که موجب شوند سیستم به حالت تعادل اولیه خود بازگردد، موقعیت اولیه را یک حالت تعادل پایدار می نامیم.

- اگر نیروهای استاتیکی عمل کننده بر روی یک سیستم بعد از یک تغییر مکان کوچک در حول حالت تعادل در جهتی باشند که موجب شوند سیستم از حالت تعادل اولیه خود دور شده و آشفته شود، در این صورت موقعیت اولیه را یک حالت تعادل ناپایدار می نامیم.

## ب- روش انرژی:

سیستمی با متغیر حالت فرضی  $\theta$  و تابع انرژی پتانسیل کلی  $\Pi = u - w$  در دو حالت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\Pi(\theta) \quad \theta \quad \text{حالت ۱:}$$

$$\Pi(\theta + \delta\theta) \quad \theta + \delta\theta \quad \text{حالت ۲:}$$

$\delta\theta$  اختلال کوچکی در متغیر حالت  $\theta$  در نظر گرفته می شود.

با بسط سری تیلور تابع انرژی پتانسیل کلی حالت ۲ داریم:

$$\Pi(\theta + \delta\theta) = \Pi(\theta) + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} (\delta\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} (\delta\theta)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} (\delta\theta)^3 + \dots$$

$$\Delta \Pi = \Pi(\theta + \delta\theta) - \Pi(\theta) = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} (\delta\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} (\delta\theta)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} (\delta\theta)^3 + \dots \quad (i)$$

در یک سیستم در حال تعادل همواره تغییر در انرژی کرنشی ( $\Delta u$ ) برابر با انرژی پتانسیل نیروهای خارجی ( $\Delta w$ ) خواهد بود یعنی:

$$\Delta \Pi = \Delta(u - w) = \Delta u - \Delta w = 0$$

بر این اساس با توجه به رابطه (i) و با توجه به اینکه  $\delta\theta$  اختلال کوچکی در متغیر حالت می باشد شرط لازم و کافی برای تعادل عبارت خواهد بود از صفر بودن جمله اول سمت راست رابطه (i) ، یعنی:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$$

اگر به ازای اختلال کوچک ایجاد شده در سیستم ( $\delta\theta$ ) ، تغییر در انرژی کرنشی بیشتر از تغییر در انرژی پتانسیل نیروهای خارجی باشد این به معنی جذب انرژی توسط سیستم در خلال تغییر شکل بوده که نشاندهنده پایدار بودن حالت تعادل سیستم است، بنا بر این بر اساس جمله دوم سمت راست رابطه (i) ، شرط پایداری تعادل عبارت خواهد بود از:


$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} > 0$$

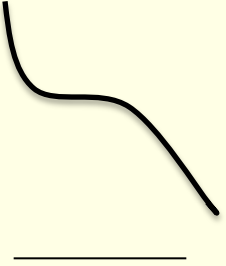
روش انرژی بر پایه دو اصل استوار است:

۱- مقدار مانای (Stationary Value) تابع انرژی پتانسیل کلی نسبت به یک متغیر حالت یا چند متغیر حالت شرط لازم و کافی برای تعادل یک مسیر است:

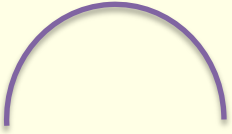
$$\Pi = u - w \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$$

۲- مینیمم نسبی تابع انرژی پتانسیل کلی (Total Potential Energy Functional) نسبت به یک متغیر حالت (یا چند متغیر حالت)، شرط لازم و کافی برای پایداری یک حالت تعادل است. به عبارت دیگر، مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل کلی یک سیستم نسبت به یک متغیر حالت (یا چند متغیر حالت)، پایداری یا ناپایداری حالات تعادل آن سیستم را مشخص می کند.


 $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} > 0$  → حالت تعادل پایدار → تابع انرژی پتانسیل کلی مینیمم است

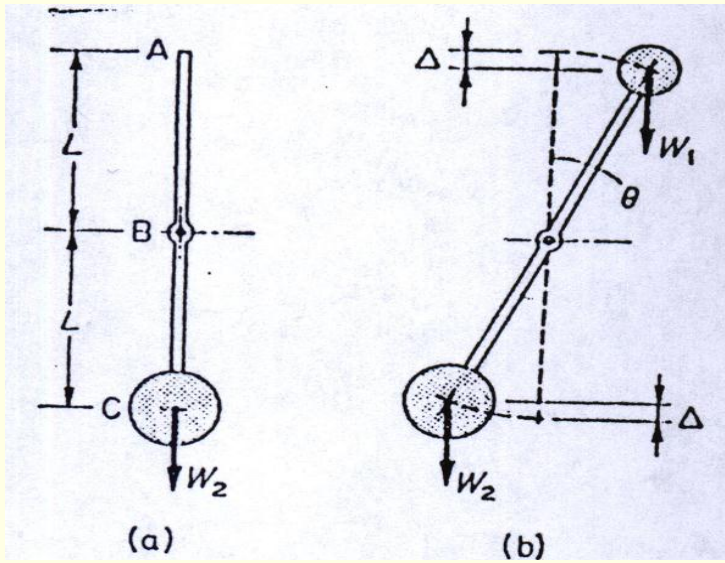

 $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0$  → حالت تعادل بحرانی
 

}	پایدار
	ناپایدار
	خنثی


 $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} < 0$  → حالت تعادل ناپایدار → تابع انرژی پتانسیل کلی ماکزیمم است

## ب- روش انرژی

برای نمایش کاربرد روش انرژی، مدل قبلی را مجدداً در نظر می‌گیریم:



تابع انرژی پتانسیل کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\Pi = u - w$$

$$u = 0$$

$$w = (L - L \cos \theta)(W_1 - W_2)$$

$$\Rightarrow \Pi = W_2 L (1 - \cos \theta) (1 - p)$$

$$\frac{W_1}{W_2} = p$$

## ب- روش انرژی

• طبق اصل موضوع اول، حالت یک سیستم می تواند در حال تعادل باشد، اگر و فقط اگر مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کلی نسبت به یک متغیر حالت مساوی صفر باشد (مانابودن انرژی پتانسیل کلی) :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = W_2 L(1 - p) \sin \theta = 0$$

این معادله همان معادله ای است که با استفاده از روش تعادل به دست آمده بود.

$$1) \quad \theta = 0$$

$$2) \quad \theta = \pi \quad \text{مسیر های تعادل :}$$

$$3) \quad P = 1$$

• طبق اصل موضوع دوم، بررسی پایداری حالات یک سیستم با استفاده از ارزیابی مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل نسبت به یک متغیر حالت امکان پذیر است :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = W_2 L(1 - p) \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0} = W_2 L(1-p) \begin{cases} p < 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} > 0 & \text{پایدار} \\ p = 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0 & \text{بحرانی} \\ p > 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} < 0 & \text{ناپایدار} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\pi} = -W_2 L(1-p) \begin{cases} p < 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} < 0 & \text{ناپایدار} \\ p = 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0 & \text{بحرانی} \\ p > 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} > 0 & \text{پایدار} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \Big|_{p=1} = 0 \quad \text{بحرانی}$$



برای بررسی پایداری این حالت ، باید مشتقات از مرتبه بالاتر تابع را مورد ارزیابی قرار دهیم:

$$\Pi' = 0 \quad \Pi'' > 0 \quad \text{پایدار}$$

$$\Pi' = \Pi'' = \Pi''' = 0 \begin{cases} \Pi'''' > 0 & \text{پایدار} \\ \Pi'''' < 0 & \text{ناپایدار} \end{cases}$$

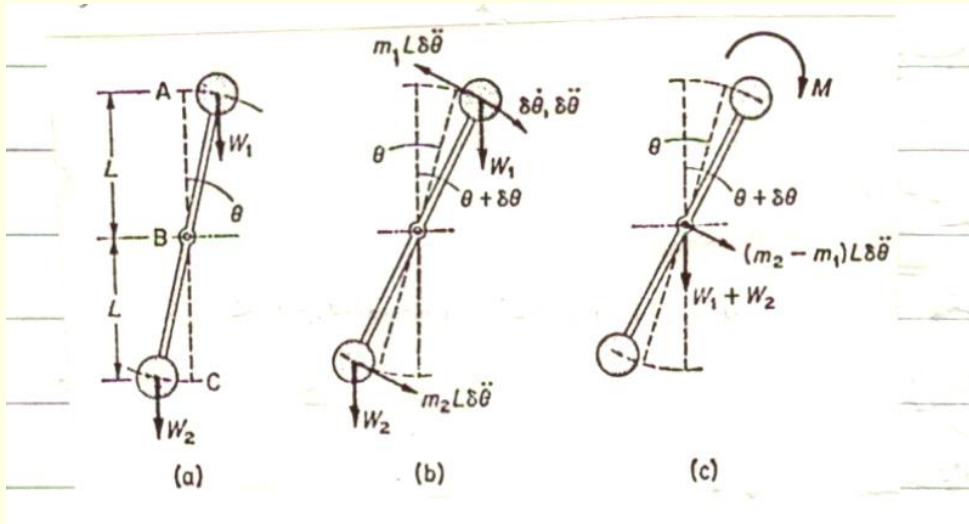
$$\Pi' = \Pi'' = \Pi''' = \Pi'''' = \Pi^v = 0 \begin{cases} \Pi^{vi} > 0 & \text{پایدار} \\ \Pi^{vi} < 0 & \text{ناپایدار} \end{cases}$$

معیار استخراج شده از روش انرژی:

- اگر لازمه ایجاد یک اختلال کوچک در حالت تعادل یک سیستم، افزایش انرژی پتانسیل کلی باشد، در آن صورت آن حالت تعادل، پایدار است.
- اگر لازمه ایجاد یک اختلال کوچک در حالت تعادل یک سیستم، کاهش انرژی پتانسیل کلی (آزاد شدن انرژی) باشد، در آن صورت آن حالت تعادل، ناپایدار است.

## پ- روش تعادل دینامیکی :

برای نشان دادن این روش، همان بازوی صلب را در نظر می‌گیریم ولی فرض می‌کنیم که وزنه‌های  $W_1$  و  $W_2$  همراه با جرم‌های  $m_1$  و  $m_2$  می‌باشد و در یک لحظه زمانی تحت اثر تغییر مکان زاویه‌ای کوچک  $\delta\theta$  و سرعت زاویه‌ای کوچک  $\delta\dot{\theta}$  و شتاب زاویه‌ای  $\delta\ddot{\theta}$  قرار می‌گیرد.



اکنون علاوه بر نیروهای وزن  $W_1$  و  $W_2$  نیروهای اینرسی مربوط به جرم  $m_1$  -  
 $m_1 L \delta \ddot{\theta}$  و جرم  $m_2$  -  $m_2 L \delta \ddot{\theta}$  در معادلات تعادل وارد می‌شوند:

$$M = (W_1 - W_2)L \sin(\theta + \delta\theta) - (m_1 + m_2)L^2 \delta \ddot{\theta} = 0$$

## پ- روش تعادل دینامیکی

با فرض  $P = \frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1}{m_2}$  و با بررسی معادله مذکور در روی هر یک از مسیرهای تعادل، معادله فوق به صورت زیر در می آید:

$$\delta \ddot{\theta} + \alpha^2 \delta \theta = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{1 - p}{1 + p} \frac{g}{L}$$

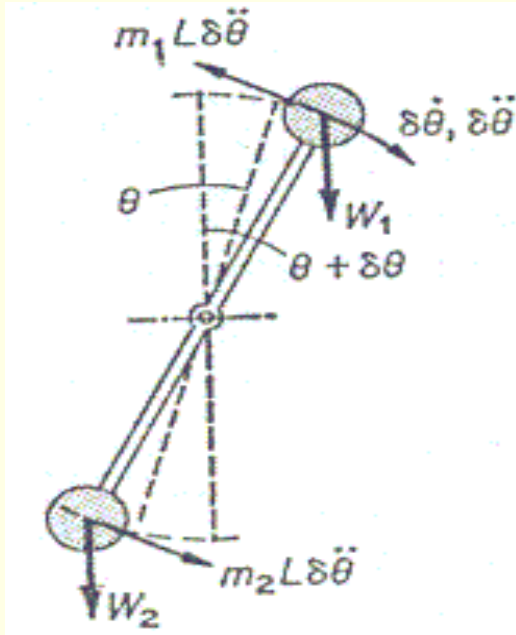
که در آن داریم:

بسته به علامت  $\alpha^2$ ، جواب معادله بالا به صورت زیر می باشد:

$$\alpha^2 > 0 \rightarrow p < 1 \Rightarrow \delta \theta = A \sin (\alpha t) + B \cos (\alpha t)$$

$$\alpha^2 = 0 \rightarrow p = 1 \Rightarrow \delta \theta = At + B$$

$$\alpha^2 < 0 \rightarrow p > 1 \Rightarrow \delta \theta = A \sinh (\alpha t) + B \cosh (\alpha t)$$



## پ- روش تعادل دینامیکی

اگر شرایط اولیه را به صورت زیر در نظر بگیریم: ( در زمان  $t = 0$  )

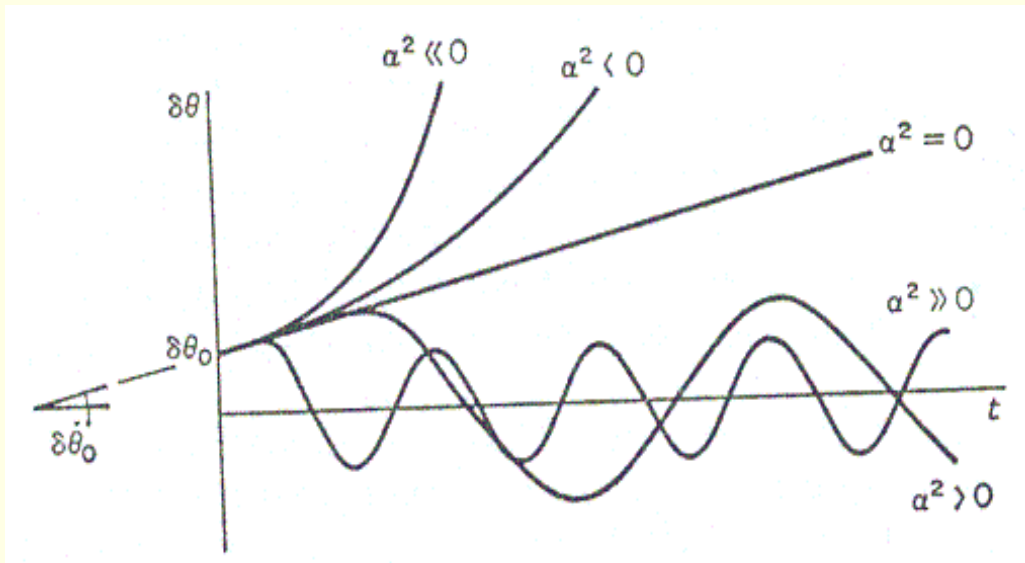
$$\begin{cases} \delta\theta = \delta\theta_0 \\ \delta\dot{\theta} = \delta\dot{\theta}_0 \end{cases}$$

در این صورت جواب های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \delta\theta = \frac{\delta\dot{\theta}_0}{\alpha} \sin(\alpha t) + \delta\theta_0 \cos(\alpha t) & \alpha^2 > 0 \\ \delta\theta = \delta\dot{\theta}_0 t + \delta\theta_0 & \alpha^2 = 0 \\ \delta\theta = \frac{\delta\dot{\theta}_0}{\alpha} \sinh(\alpha t) + \delta\theta_0 \cosh(\alpha t) & \alpha^2 < 0 \end{cases}$$

## پ- روش تعادل دینامیکی

اگر  $\delta\theta$  را بر حسب زمان  $t$  رسم کنیم، نمودارهای زیر را خواهیم داشت:



مشاهده می کنیم که طبیعت پاسخ فیزیکی وابسته به علامت  $\alpha^2$  است و  $\alpha^2$  نیز وابسته به  $(1-p)$  است

- در حالت  $p=0$ ، پاسخ سیستم به یک اختلال خارجی، یک نوسان با فرکانس بسیار بالا می باشد. ( $\alpha^2 \gg 0$ )
- با افزایش  $p$  (یعنی افزایش  $W_1$ )، فرکانس نوسان شروع به کاهش می کند و در نهایت در  $p=1$  به فرکانس صفر می رسد. ( $\alpha^2=0$ )
- در حالت  $p>1$ ، پاسخ سیستم به گونه ای است که با یک اختلال کوچک با افزایش زمان، دامنه و سرعت به شدت افزایش پیدا می کند. ( $\alpha^2 < 0$ )

## پ- روش تعادل دینامیکی

معیار استخراج شده از روش تعادل دینامیکی عبارت است از :

- اگر کلیه فرکانس های سیستم برای ارتعاشات کوچک حول یک حالت تعادل، حقیقی (real) و مثبت باشند، در این صورت حالت مذکور یک حالت تعادل پایدار است.

- اگر حداقل یک فرکانس ارتعاش کوچک حول یک حالت تعادل، موهومی (Imaginary) باشد، در این صورت حالت مذکور یک حالت تعادل ناپایدار است .

- اگر حداقل یک فرکانس ارتعاش کوچک حول یک حالت تعادل، صفر (zero) باشد، در این صورت حالت مذکور یک حالت بحرانی است .

• ضرورت بحثی در مورد

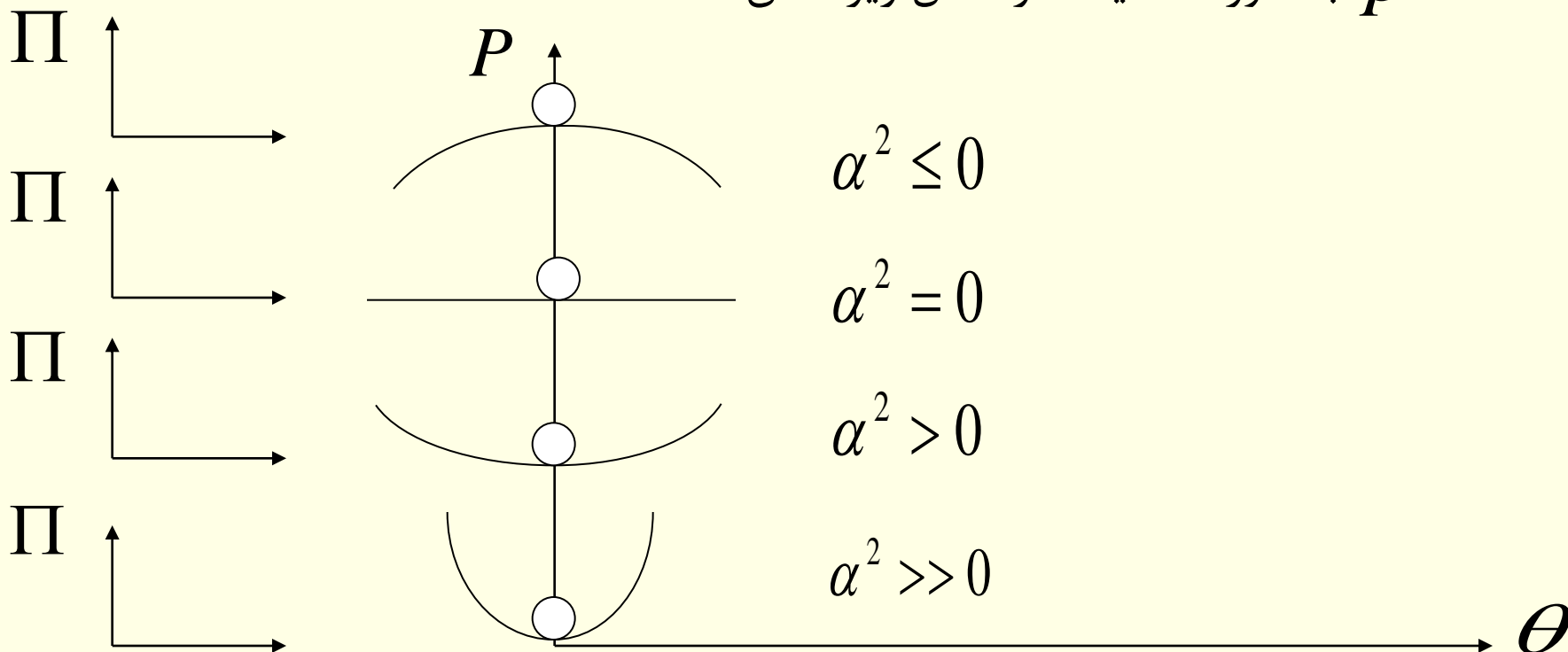
سختی سازه و رابطه آن با

فرکانس سازه ( $\omega = [k/m]^{1/2}$ )

# ارتباط مفهومی بین معیارهای حاصل از روش انرژی و روش تعادل دینامیکی

یک ارتباط مفهومی بین معیارهای حاصل از روش انرژی و روش تعادل دینامیکی از طریق تصور رفتار یک گوی کوچک که از حالت تعادل خود تغییر مکان یافته است در یک سطح پتانسیل حاصل می شود.

به عنوان مثال برای مسیر تعادل با معادله  $\theta = 0$ ، تابع پتانسیل کلی  $\Pi$  به ازای مقادیر مختلف  $p$  به طور شماتیک در شکل زیر نشان داده شده است:





## ارتباط مفهومی بین معیارهای حاصل از روش انرژی و روش تعادل دینامیکی

• برای حالت  $p \ll 1$  و  $\alpha^2 \gg 0$ ، گوی با فرکانس بزرگ تری حول حالت تعادل نوسان خواهد کرد و در اثر عامل میرایی به تعادل اولیه خود باز خواهد گشت (فرکانس بالا).

( پتانسیل کلی = مینیمم کاملاً مشهود )

• برای حالت  $p < 1$  و  $\alpha^2 > 0$ ، گوی با فرکانس کوچک تری حول حالت تعادل نوسان خواهد کرد و در اثر عامل میرایی به تعادل اولیه خود باز خواهد گشت (فرکانس پایین).

( پتانسیل کلی = مینیمم نسبتاً مشهود )

• برای حالت  $p = 1$  و  $\alpha^2 = 0$ ، گوی در موقعیت تغییر شکل یافته باقی خواهد ماند، (فرکانس صفر).

( پتانسیل کلی = نه مینیمم ، نه ماکزیمم )

• برای حالت  $p > 1$  و  $\alpha^2 < 0$ ، گوی با سرعت فزاینده از حالت تعادل اولیه خود به سمت حالت تعادل دورتری حرکت خواهد نمود (فرکانس موهومی).

( پتانسیل کلی = ماکزیمم مشهود )

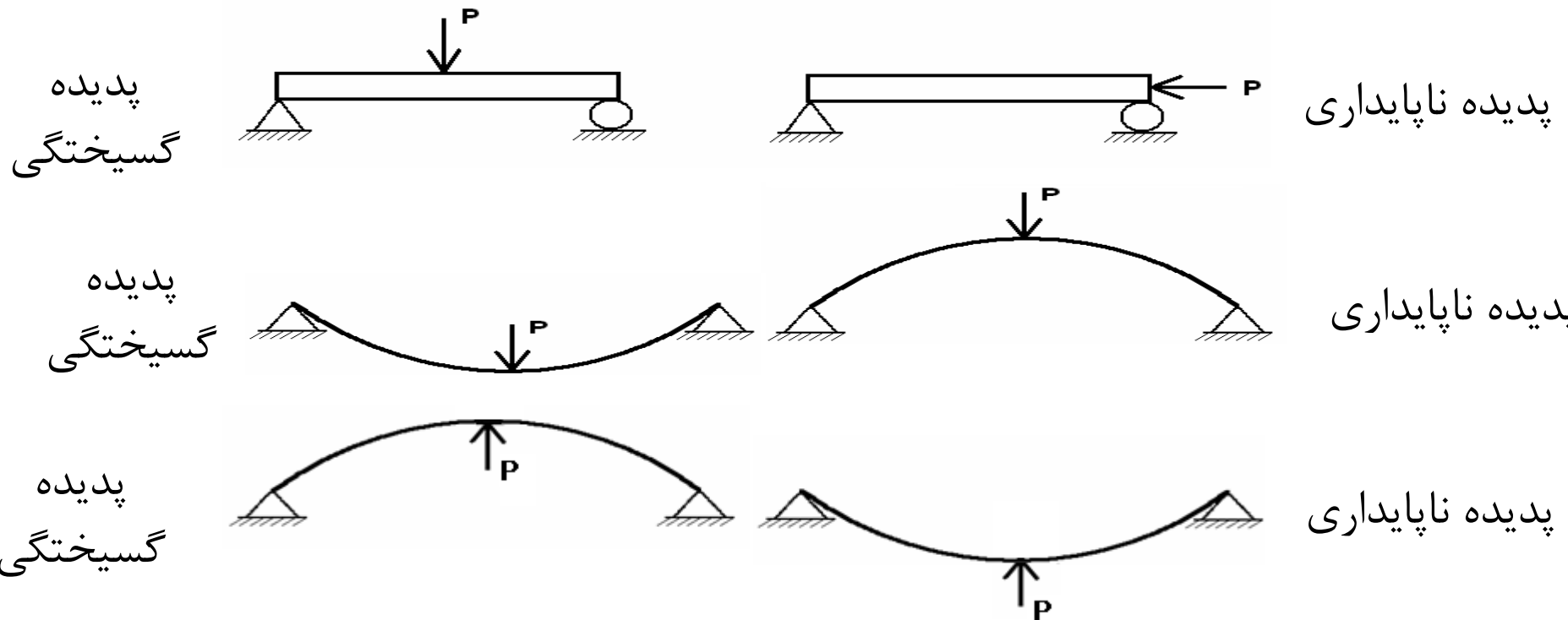
## فصل دوم

# رده بندی پدیده های ناپایداری

# ۱- مقدمه

ناپایداری سیستم سازه ای در واقع بستگی به دو عامل دارد:

- ۱- پارامترهای سیستم سازه ای نظیر خواص هندسی و مکانیکی سازه (بافتار سازه)
- ۲- شرایط محیطی نظیر شرایط بارگذاری



# ۱- مقدمه

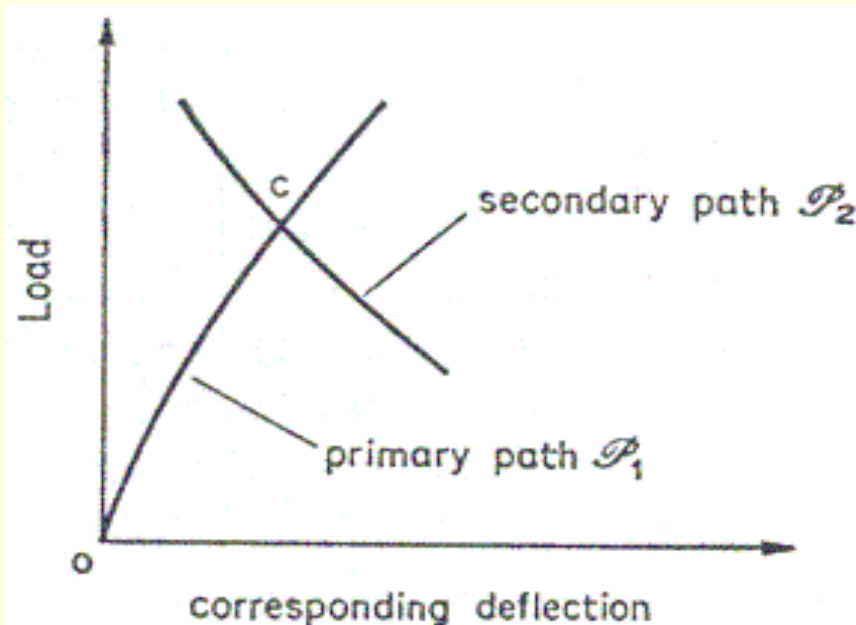
اساساً دو رده ناپایداری وجود دارد :

الف- ناپایداری نقطه حدی (Limit Point Instability)

ب- ناپایداری نقطه دو شاخگی (Bifurcation Point Instability)

• ناپایداری نقطه حدی : برای سیستم سازه ای تحت بار گذاری مشخص فقط یک مسیر تعادل وجود دارد .

• ناپایداری نقطه دو شاخگی : برای سیستم سازه ای تحت بارگذاری مشخص بیش از یک مسیر تعادل وجود دارد .

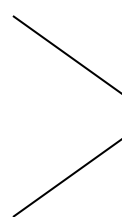


## ۱- مقدمه

• ناپایداری نقطه دو شاخگی با توجه به وضعیت مسیر دوم به سه رده تقسیم می شود :

- ۱- متقارن ناپایدار
- ۲- متقارن پایدار
- ۳- نامتقارن

ناپایداری ارتجاعی



ناپایداری غیر ارتجاعی

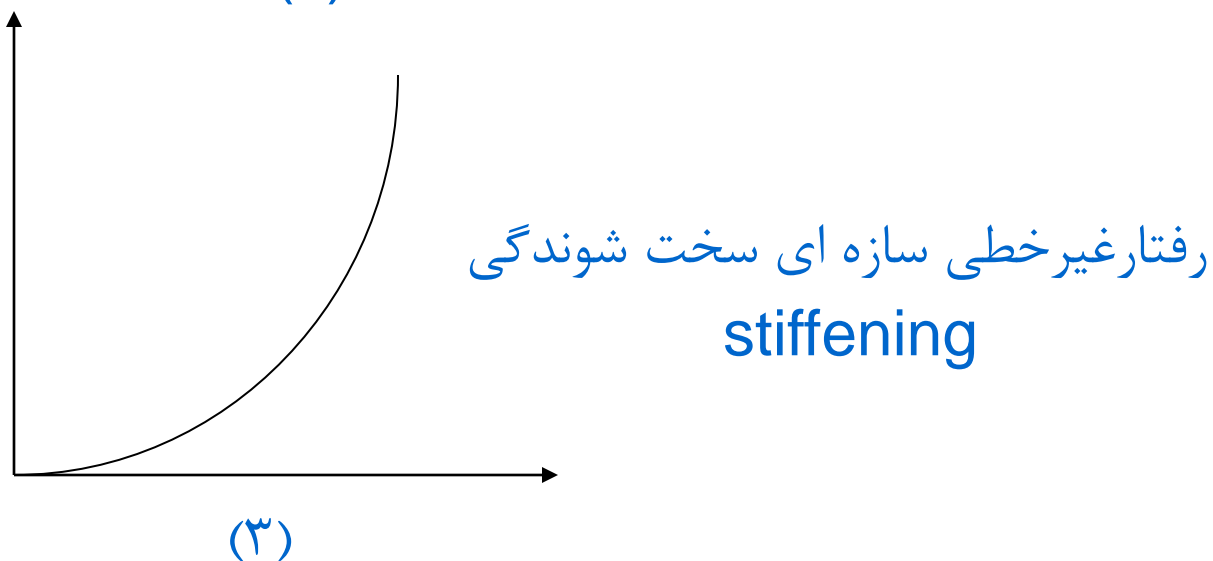
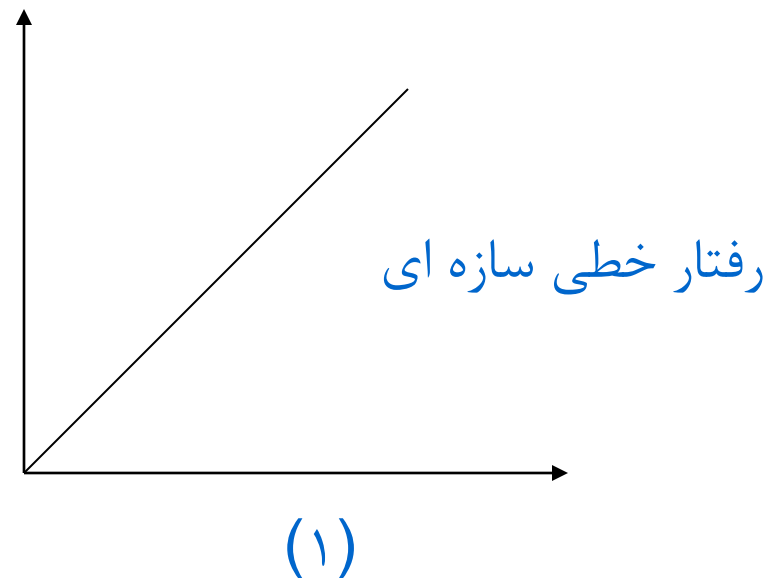
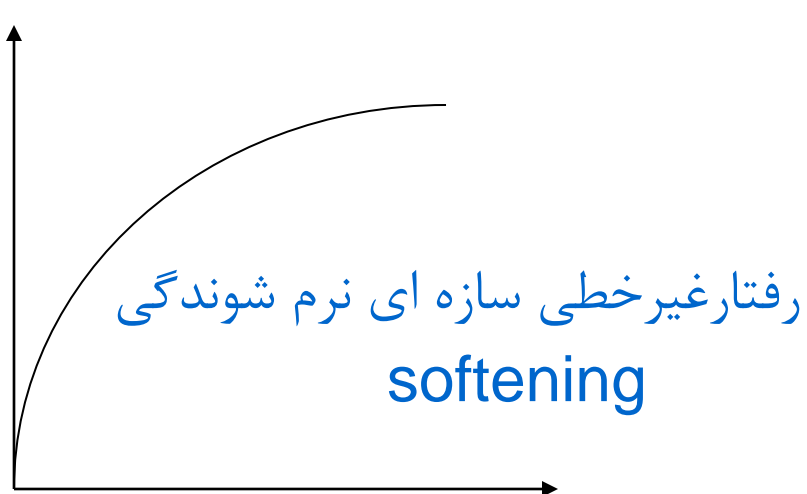
تقسیم می شود

• در یک رده بندی دیگر ناپایداری به دو رده

ناپایداری ارتجاعی : قبل از ناپایداری هیچ گونه تسلیمی در مصالح رخ نمی دهد .

ناپایداری غیر ارتجاعی : قبل از ناپایداری تسلیم در مصالح رخ می دهد.

در این فصل صرفاً ناپایداری ارتجاعی را مورد بررسی قرار خواهیم داد .



## ۱- مقدمه

در شکل (۱) برای هر تراز بار سختی ثابت است ، پس هیچ گونه ناپایداری رخ نمی دهد  
در شکل (۲) چون سختی در حال کاهش است احتمال بروز ناپایداری وجود دارد .  
در شکل (۳) سختی در حال افزایش است و ناپایداری مطرح نیست .

رفتار مصالح	رفتار سازه	نوع ناپایداری
تا نقطه ناپایداری قطعاً خطی است ، بعد از آن می تواند غیر خطی هم باشد.	غیر خطی (نرم شونده)	ناپایداری ارتجاعی
غیر خطی	غیر خطی (نرم شونده)	ناپایداری غیرارتجاعی

پس برای بررسی پایداری یا ناپایداری سازه رفتار باید غیر خطی نرم شونده باشد.

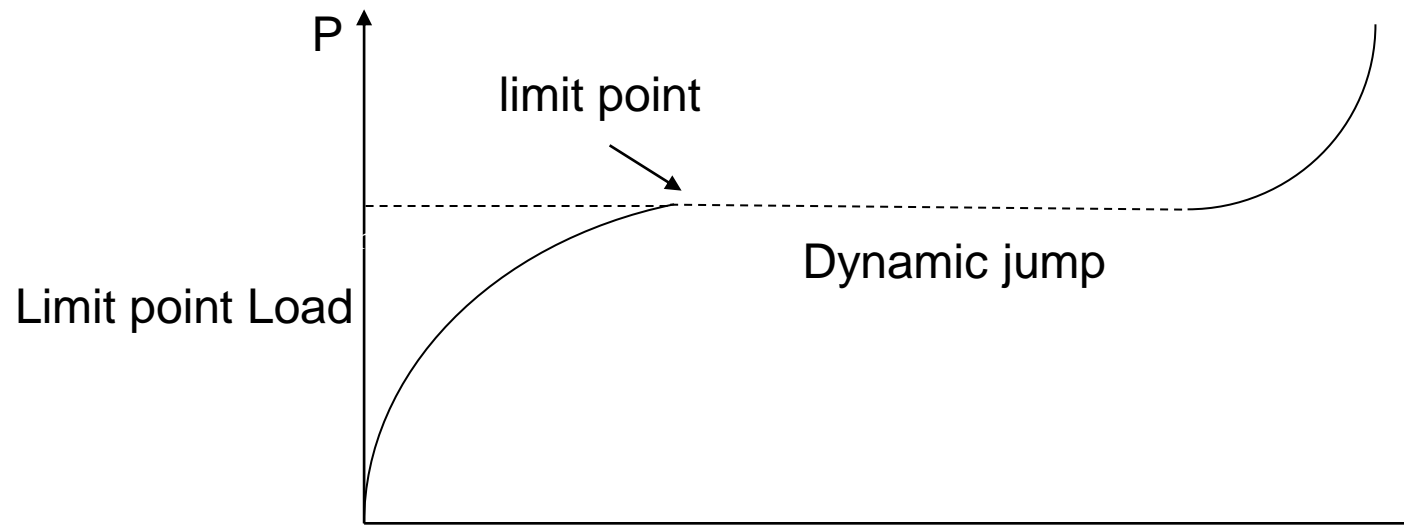
## ۲- ناپایداری نقطه حدی (Limit Point Instability)

الف - تعریف کلی :

یک سازه با مشخصه نرم شوندگی که در آن سختی با افزایش بار کاهش می یابد، احتمال دارد پایداری خود را به طریقه ای که ناپایداری نقطه حدی نامیده می شود از دست بدهد.

در این نوع ناپایداری نرم شوندگی که همراه با مد اولیه تغییر شکل (Initial Mode of Deformation) می باشد ممکن است با کاهش تدریجی سختی به حالتی برسد که در آن سختی سازه بکلی از بین برود .

در این حالت است که گفته می شود مسیر تعادل بار - تغییر مکان به یک نقطه حدی رسیده است که در آن یک پرش دینامیکی (Dynamic Jump) به یک بافتار بسیار تغییر شکل یافته (Highly Deformed Configuration) رخ می دهد .

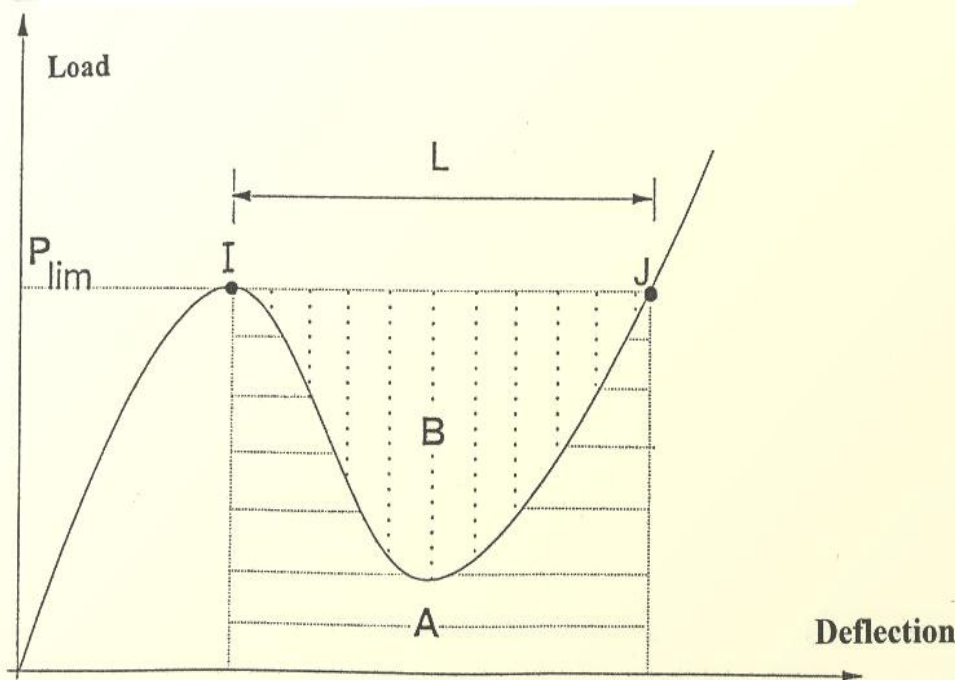




## ۲- ناپایداری نقطه حدی (Limit Point Instability)

دو ویژگی ناپایداری نقطه حدی :  
 { حفظ مد اولیه تغییرمکان بعد از وقوع ناپایداری  
 وجود یک مسیر تعادل قبل و بعد از وقوع ناپایداری

به عبارت دیگر ، در نقطه حدی سختی سازه صفر است و هیچ حالت تعادل همسایه ای به ازای یک افزایش اندک در بار وجود ندارد. در این نقطه است که سازه مجبور می شود که به دنبال یک حالت تعادل پایدار باشد که در این تراز بار و عموماً در مسیر تعادل مشابهی می باشد.



اگر سیستم کنترل بارگذاری ، بجای  
 کنترل بار (Load Control)، از نوع  
 کنترل تغییرمکان  
 (Displacement Control)

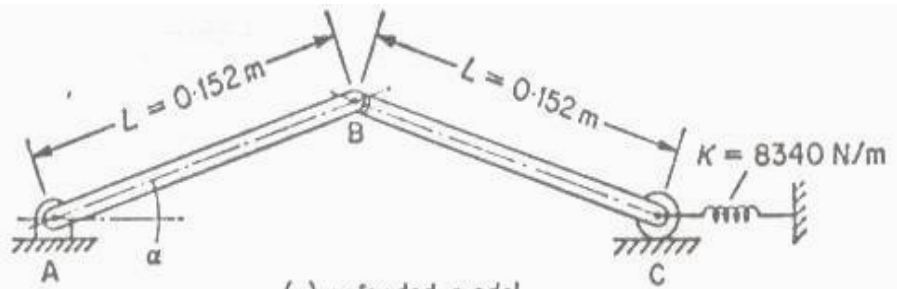
باشد، در این صورت رفتاری بصورت روبرو  
 خواهیم داشت :

## ۲- ناپایداری نقطه حدی (Limit Point Instability)

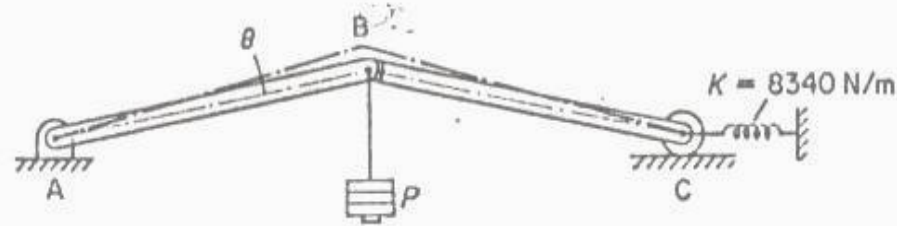
لازم به ذکر است که حرکت به سمت حالت تعادل دیگر (نقطه  $J$ ) در همان مسیر تعادل، شامل انتقال مقدار قابل توجهی انرژی بوده و با شدت قابل توجهی رخ می دهد.

این نوع ناپایداری بنام فرو جهش دینامیکی (Dynamic Snap-Through) نیز معروف است.

ب - مدل سازه ای آزمایشگاهی



(a) unfloaded model



(b) force loaded model

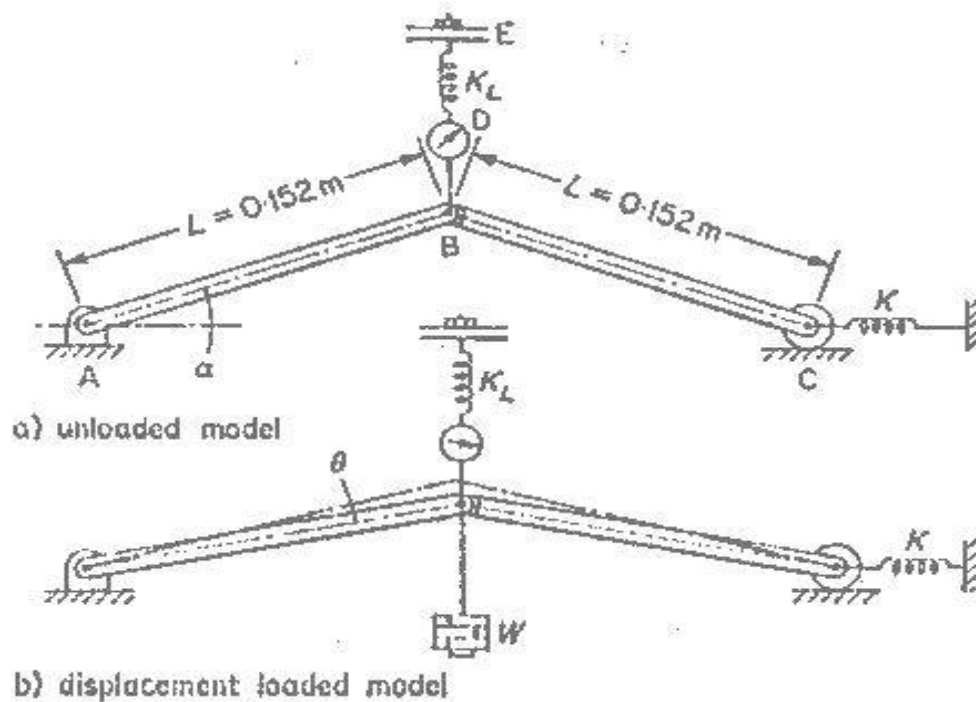
سازه مدل و کنترل بارگذاری از  
نوع کنترل بار

Force Loading

## ۲- ناپایداری نقطه حدی (Limit Point Instability)

سازه مدل و کنترل بارگذاری از نوع  
کنترل تغییر مکان

Displacement Loading



## پ - اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای (در حالت کنترل بار)

در مدل ریاضی مربوط به مدل فیزیکی سازه مورد نظر تغییر زاویه  $\theta$ ، برای تعریف تغییر مکان افقی تکیه گاه غلتکی C - یعنی  $-\Delta_1$  و تغییر مکان قائم مفصل B - یعنی  $-\Delta_2$  کافی است:

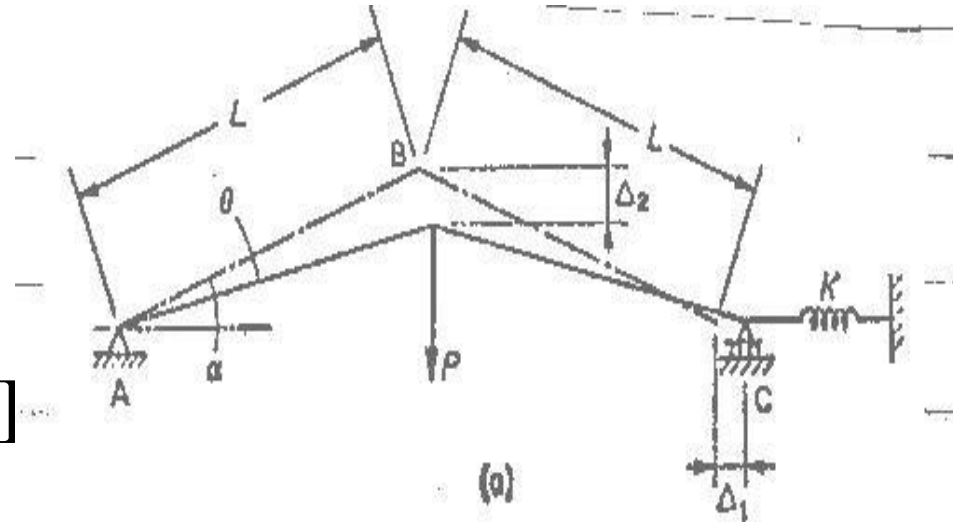
$$\Pi = u - w$$

$$u = \frac{1}{2} K \Delta_1^2 \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} K \Delta_1^2 - P \Delta_2$$

$$w = P \Delta_2$$

$$\Delta_1 = 2L[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha]$$

$$\Delta_2 = L[\sin \alpha - \sin(\alpha - \theta)]$$



$$\Rightarrow \Pi = 2KL^2[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha]^2 - PL[\sin \alpha - \sin(\alpha - \theta)]$$

برای یافتن معادلات تعادل و مسیرهای تعادل مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کلی را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 4KL^2[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha] \sin(\alpha - \theta) - PL \cos(\alpha - \theta) = 0$$

## پ – اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای (در حالت کنترل بار)

با فرض  $p = \frac{P}{4KL}$  ، معادله مذکور به صورت یک مسیر تعادل واحد در می آید که به صورت زیر تعریف می شود :

$$p = [\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha] \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos(\alpha - \theta)}$$

که شیب آن (مشتق  $p$  نسبت به  $\theta$ ) بیانگر سختی سیستم سازه ای است:

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{\cos \alpha - \cos^3(\alpha - \theta)}{\cos^2(\alpha - \theta)}$$

برای بررسی پایداری مسیر تعادل ، از مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل کلی استفاده می کنیم :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial^2 \theta} = 4KL^2 \{ \sin^2(\alpha - \theta) - \cos(\alpha - \theta)[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha] \} - PL \sin(\alpha - \theta)$$

## پ - اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای (در حالت کنترل بار)

اگر مشتق دوم مذکور را در روی مسیر تعادل در نظر بگیریم، در این صورت خواهیم داشت :

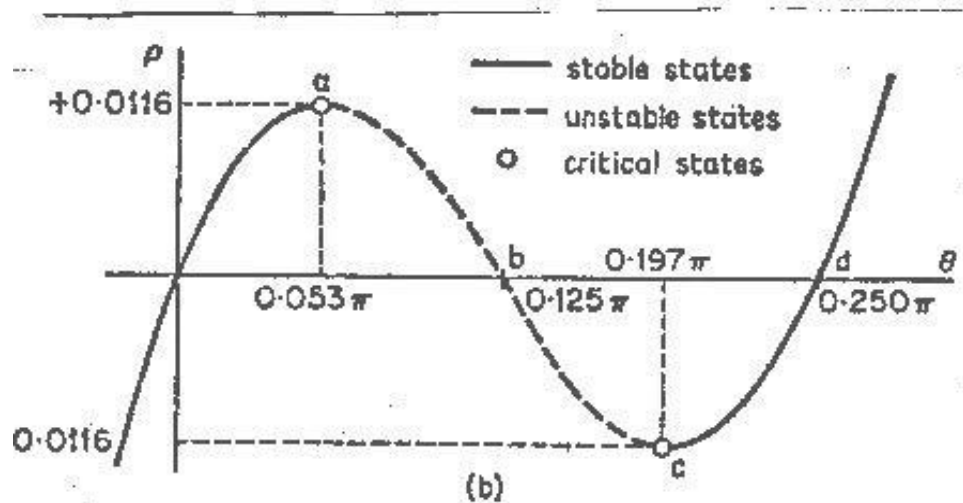
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial^2 \theta} = 4KL^2 \left[ \frac{\cos \alpha - \cos^3(\alpha - \theta)}{\cos(\alpha - \theta)} \right] \quad \frac{dp}{d\theta} = \frac{\cos \alpha - \cos^3(\alpha - \theta)}{\cos^2(\alpha - \theta)}$$

$$|\alpha - \theta| < \pi/2 \quad \text{قید مسئله} \quad \Rightarrow \cos(\alpha - \theta) > 0$$

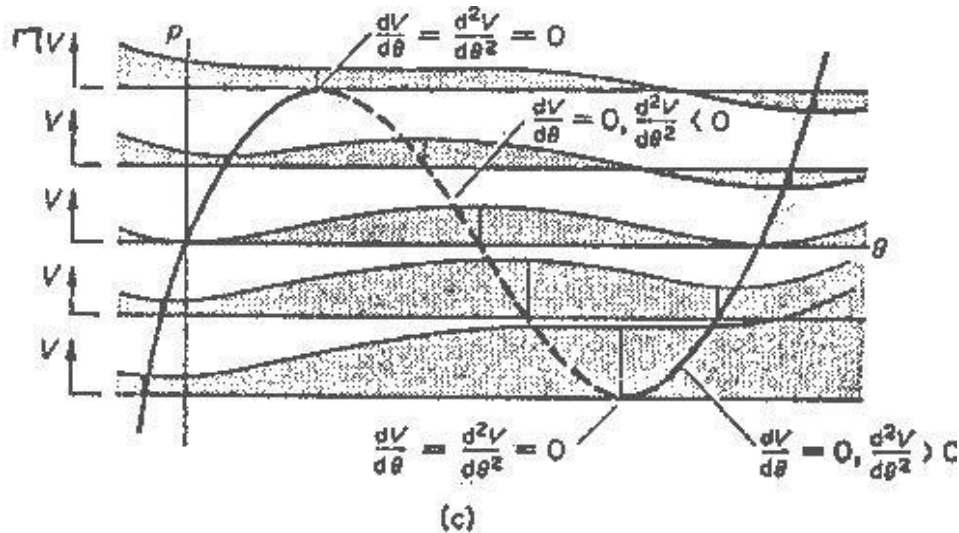
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha > \cos^3(\alpha - \theta) \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial^2 \theta} > 0 \rightarrow \text{پایدار} \\ \cos \alpha = \cos^3(\alpha - \theta) \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial^2 \theta} = 0 \rightarrow \text{نقطه بحرانی} \\ \cos \alpha < \cos^3(\alpha - \theta) \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial^2 \theta} < 0 \rightarrow \text{ناپایدار} \end{array} \right.$$

توجه شود که در حالت بحرانی، سختی سیستم سازه ای صفر است که مطابقت با فرمول استخراج شده برای سختی سیستم سازه ای دارد.

## پ - اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای (در حالت کنترل بار)

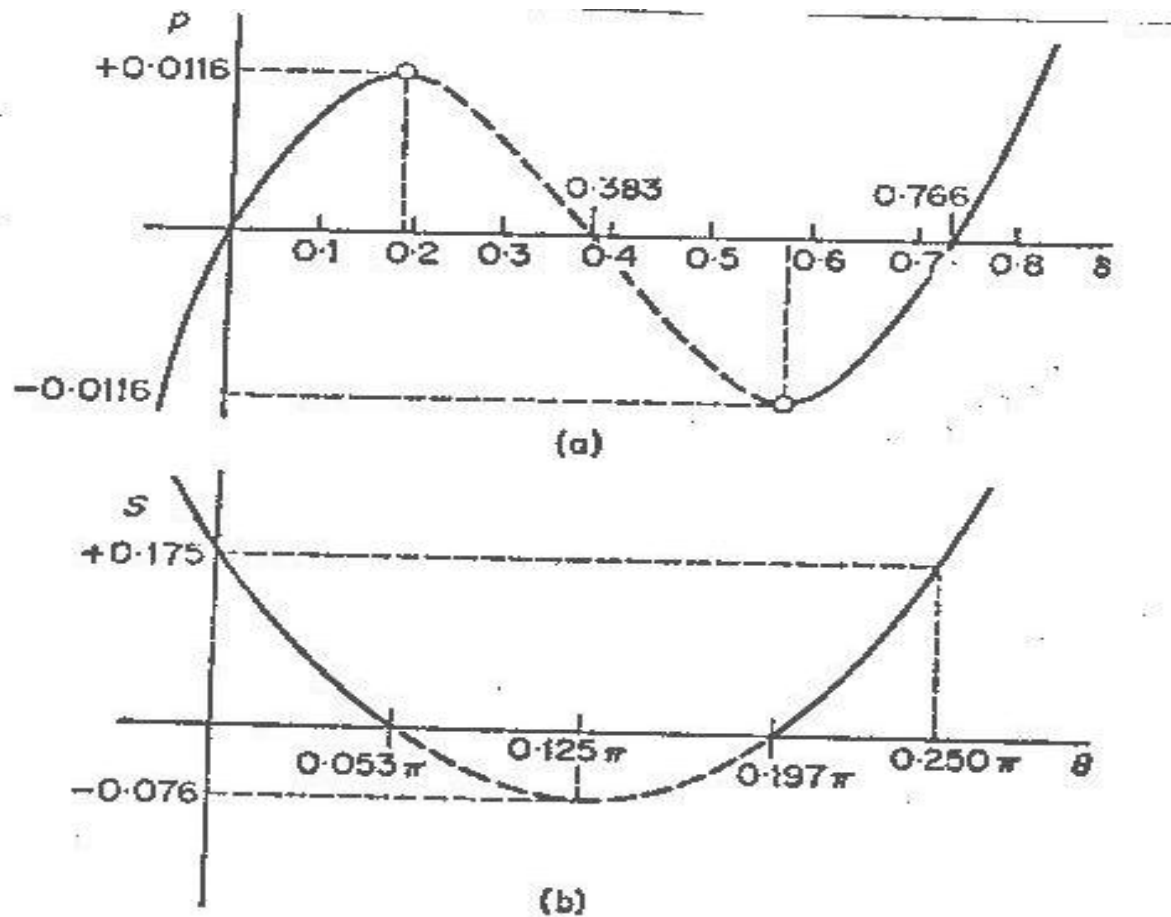


برای مدل مورد استفاده، با فرض  $K=8349\text{N/m}$  و  $L=0.152\text{m}$  و  $\alpha=\pi/8$ ، نمودار بار-تغییر مکان را به صورت روبرو خواهیم داشت:



پروفیل های انرژی پتانسیل کلی که روی مسیر تعادل بار-تغییر مکان افزوده شده است، یک ارتباط مفهومی ارزشمندی را بین تعاریف پایداری مبتنی بر فرم انرژی پتانسیل کلی و رفتار فیزیکی واقعی سازه به دست می دهد:

## پ - اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای (در حالت کنترل بار)



- اگر فرض کنیم که نمودار  $\delta = \Delta_2/L$  و نمودار  $p-\delta$  را رسم کنیم و سختی متناظر با آن  $(S)$  را به دست آوریم و نمودار  $s-\theta$  را رسم کنیم به نتایج جالبی خواهیم رسید.

- نمودارها نشان می دهند که سختی مثبت بیانگر تعادل پایدار و سختی منفی بیانگر تعادل ناپایدار است.



# ت - اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfection)

ناکاملی در سازه ها بر دو نوع است :

۱- ناکاملی های هندسی (Geometrical Imperfection)

- از قبیل انحنای اولیه اعضا سازه ای، انحراف گره های سازه ای از هندسه ایده آل (نابجایی گرهی)

۲- ناکاملی های مکانیکی (Mechanical Imperfections)

- تنش های پسماند
- خروج از مرکزیت بار
- عدم انطباق (Lack of Fit)

سازه ها را از نظر حساسیت به ناکاملی به دو دسته تقسیم می کنیم :

۱- سازه های حساس به ناکاملی ها : Imperfection Sensitive Structures

۲- سازه های غیر حساس به ناکاملی ها : Imperfection Insensitive Structures

# ت - اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfection)

---

۱- سازه هایی که به ازای ناکاملی های کوچک به طور نامتناسبی تغییرات بزرگی در رفتار را به نمایش می گذارند ، سازه های حساس به ناکاملی ها می باشند . ظرفیت باربری این سازه ها به شدت نسبت به ناکاملی ها حساس است.

۲- سازه هایی که به ازای ناکاملی های کوچک به طور متناسب تغییرات کوچکی در رفتار را به نمایش می گذارند ، سازه های غیرحساس به ناکاملی ها می باشند . ظرفیت باربری این سازه ها حساسیت کمی نسبت به ناکاملی ها دارد.

## ت - اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfection)



• آنالیز تجربی حساسیت.

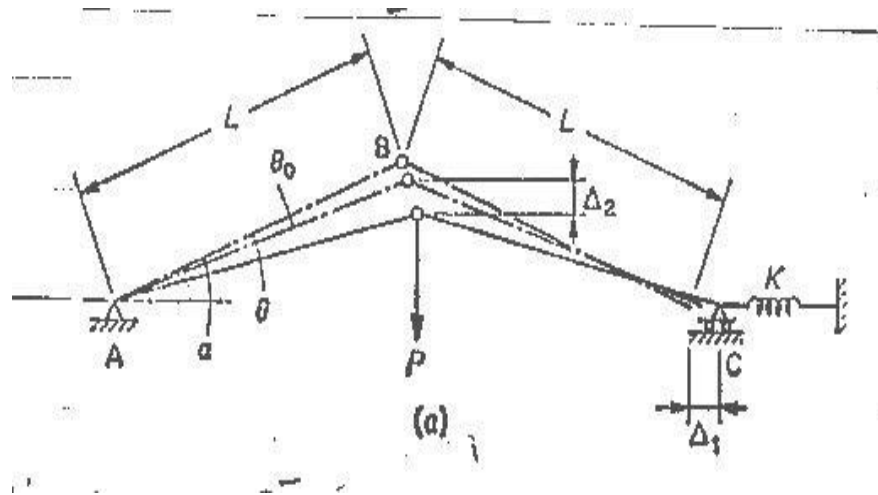
- ۱- انتخاب نوع ناکاملی
- ۲- محل اعمال ناکاملی
- ۳- مقدار ناکاملی
- ۴- نحوه ترکیب ناکاملی

در یک سازه  $n$  درجه آزادی با موارد روبرو مواجه هستیم:

• آنالیز حساسیت نسبت به ناکاملی ها (Imperfection Sensitivity Analysis) در بررسی پایداری سیستم های سازه ای اهمیت به سزایی دارد.

• در این نوع تحلیل بسته به نوع سازه، یک ناکاملی خاص در نظر گرفته می شود و با افزایش و کاهش میزان آن ناکاملی، حساسیت سازه نسبت به ناکاملی مورد ارزیابی قرار می گیرد.

## ت - اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfection)



اکنون برای مدل سازه ای مورد نظر خود، یک ناکاملی هندسی را فرض می کنیم ، به عبارت دیگر ناکاملی هندسی  $\theta_0$  را به عنوان یک انحراف از هندسه کامل بارگذاری نشده (Perfect Unloaded Geometry) به صورتی که در شکل مقابل نشان داده شده است، در نظر می گیریم :

برای تحلیل این سیستم ناکامل ، جهت ساده سازی محاسبات ، تقریب سازی خاصی را به کار می بریم .

## ت - اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfection)

اگر از تقریب سازی های زیر استفاده کنیم :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta \cong \theta - \frac{\theta^3}{6} \\ \cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ \sin \theta_0 \cong \theta_0 \\ \cos \theta_0 \cong 1 \end{array} \right.$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \Rightarrow$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \Rightarrow$$

در این صورت  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  به صورت زیر به دست خواهند آمد :

$$\Delta_1 = 2L[\sin \alpha(\theta - \theta_0 - \theta^3 / 6) - \cos \alpha(\theta^2 / 2)]$$

$$\Delta_2 = L[\sin \alpha(\theta^2 / 2) + \cos \alpha(\theta - \theta^3 / 6 - \theta_0)]$$

$$\Pi = u - w \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2} K \Delta_1^2 \\ w = P \Delta_2 \end{array} \right. \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} K \Delta_1^2 - P \Delta_2$$

## ت - اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfection)

اگر مقادیر  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  را در رابطه تابع انرژی پتانسیل کلی جایگذاری کرده و از ترم‌هایی که دارای و بالاتر می باشند و نیز از ترم‌هایی نظیر  $\theta_0\theta^3$  صرف نظر کنیم ، در این صورت خواهیم داشت :

$$\Pi = 2KL^2[\sin^2 \alpha(\theta^2 - 2\theta_0\theta) - \sin \alpha \cos \alpha(\theta^3 - \theta_0\theta^2)] - PL[\sin \alpha(\theta^2 / 2) + \cos \alpha(\theta - \theta_0 - \theta^3 / 6)]$$

از  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$  معادله تعادل سیستم به دست می آید :

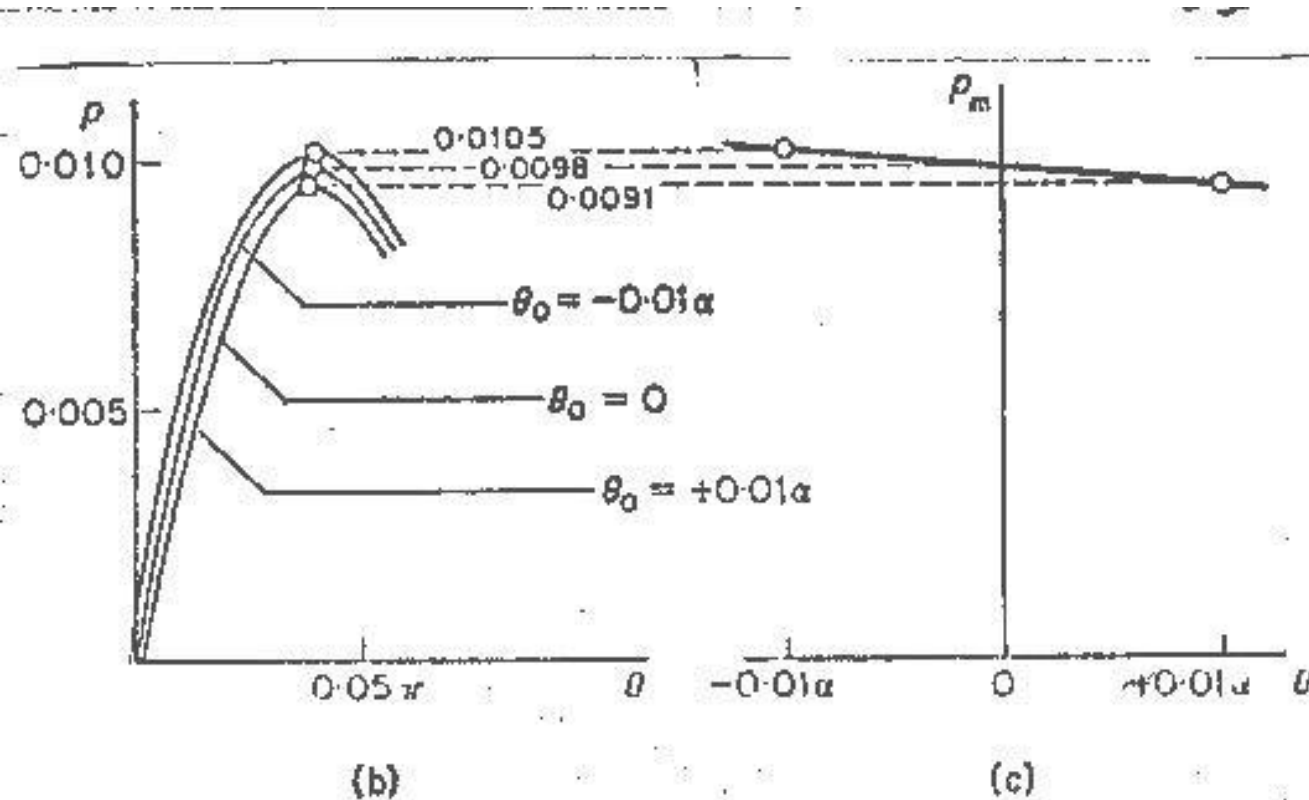
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 2KL^2[2 \sin^2 \alpha(\theta - \theta_0) - \sin \alpha \cos \alpha(3\theta^2 - 2\theta_0\theta)]$$

$$- PL[\theta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha(1 - \theta^2 / 2)] = 0$$

و مسیر تعادل  $P$  به وسیله معادله (بدون بعد) زیر مشخص می شود (بیانگر یک مسیر واحد):

$$p = \frac{\sin^2 \alpha(\theta - \theta_0) - \sin \alpha \cos \alpha(3\theta^2 / 2 - \theta_0\theta)}{\theta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha(1 - \theta^2 / 2)}$$

## ت - اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfection)



- به ازای مقادیر مختلف ناکاملی  $(\theta_0)$ ، نمودار  $p-\theta$  و نیز نمودار  $p_{cr}-\theta_0$  رسم شده است.

- ملاحظه می شود که حتی به ازای ناکاملی های خیلی بزرگ تغییر در مسیر تعادل اندک است.

- ملاحظه می شود که بار بحرانی تا حد بسیار قابل توجهی تابعی خطی از ناکاملی  $\theta_0$  بوده و حساسیت بسیار کمی نسبت به  $\theta_0$  دارد.

- اساساً یکی از ویژگی های سازه هایی که کمانش آنها از نوع فروجهش (Snap-through) و پایداری آنها از نوع ناپایداری نقطه حدی است، عدم حساسیت نسبت به ناکاملی (Imperfection Insensitivity) می باشد.

## ث- مدل های سازه ای واقعی

---

ناپایداری نقطه حدی در سازه های زیر که تحت اثر بارگذاری جانبی قرار دارند ، رخ می دهد .

۱- سازه های قوسی

۲- سازه های پوسته ای گنبدی

۳- سازه های پوسته ای چلیکی (استوانه ای)

۴- سازه های فضاکار گنبدی

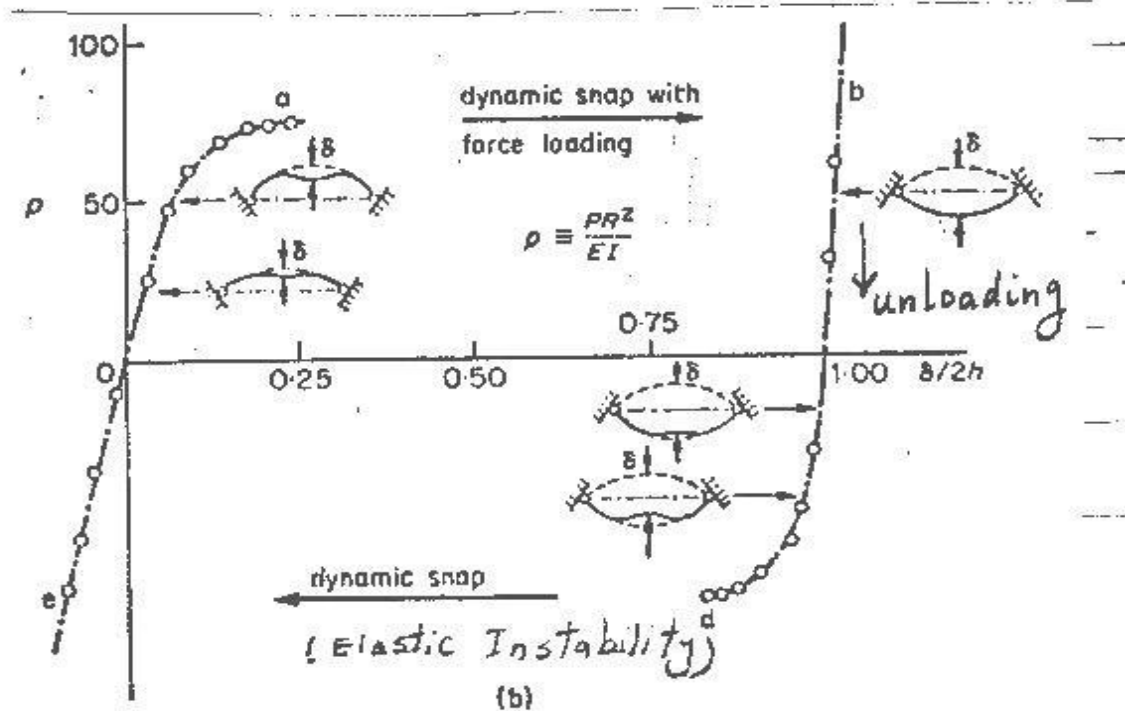
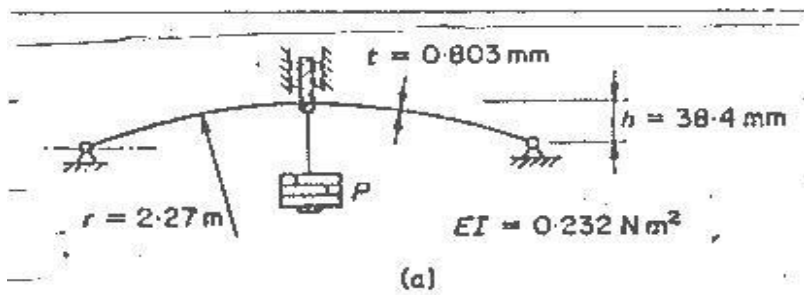
۵- سازه های فضاکار چلیکی

۶- صفحات دایروی انحنای تحت فشار



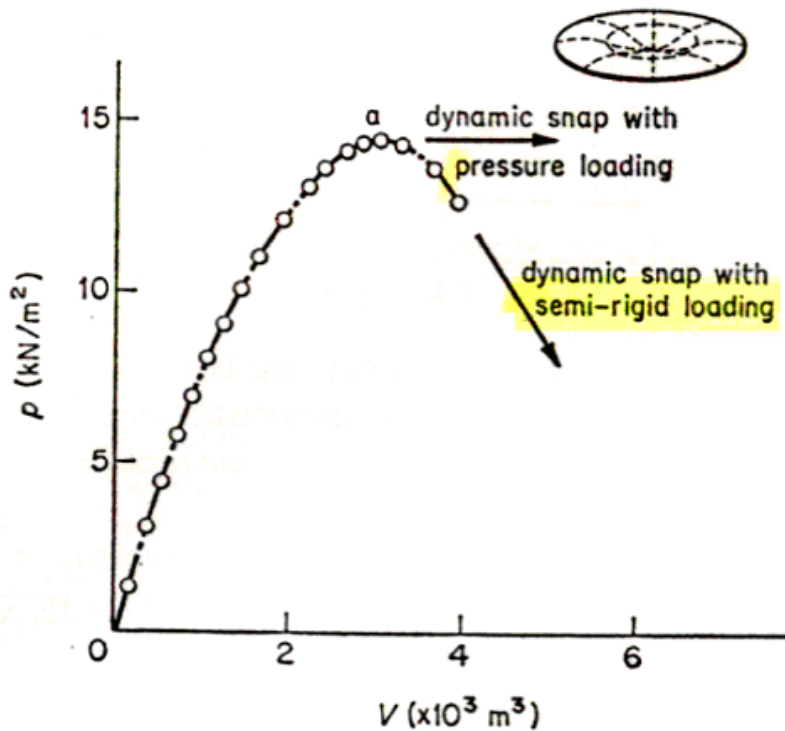
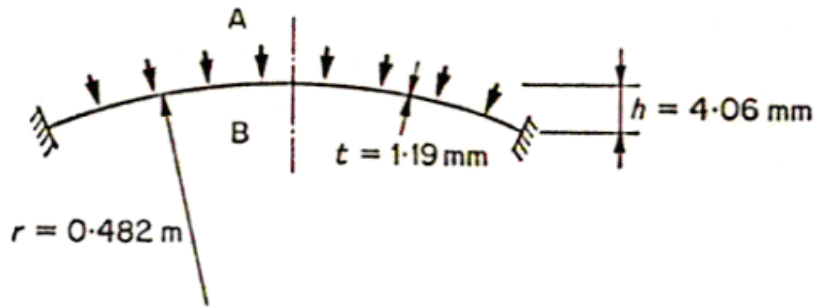
# ث- مدل های سازه ای واقعی

رفتار ناپایداری حدی در یک قوس دایروی تحت بارگذاری جانبی به روش کنترل نیرو



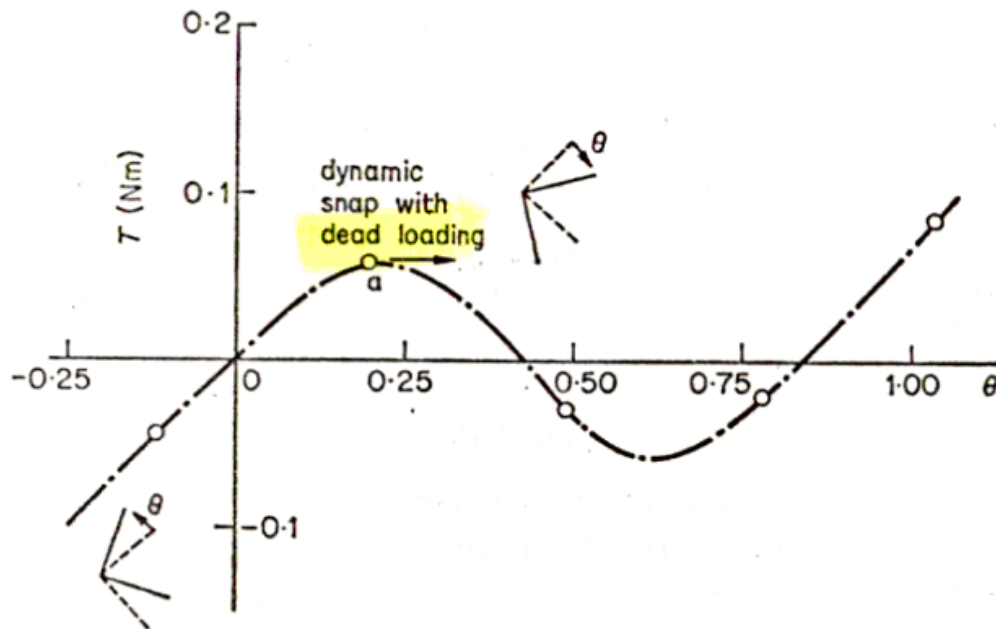
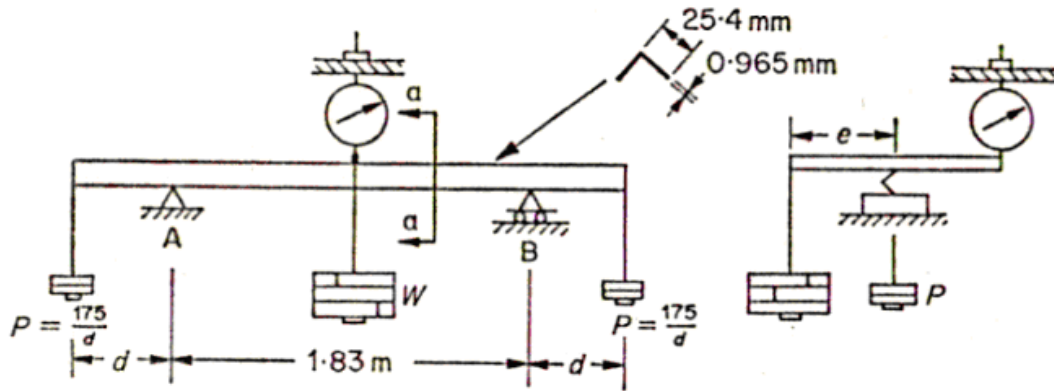
# ث- مدل های سازه ای واقعی

رفتار ناپایداری حدی در یک پوسته کروی  
تحت فشار به روش کنترل فشار

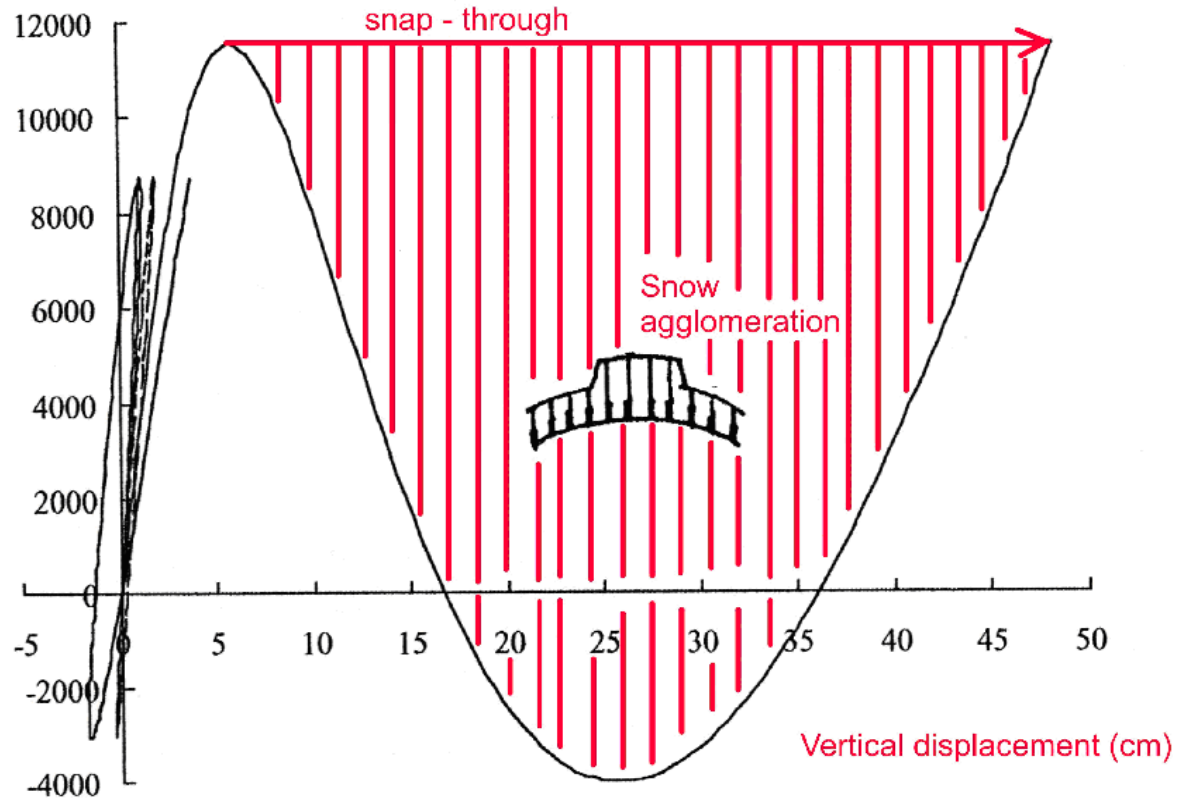
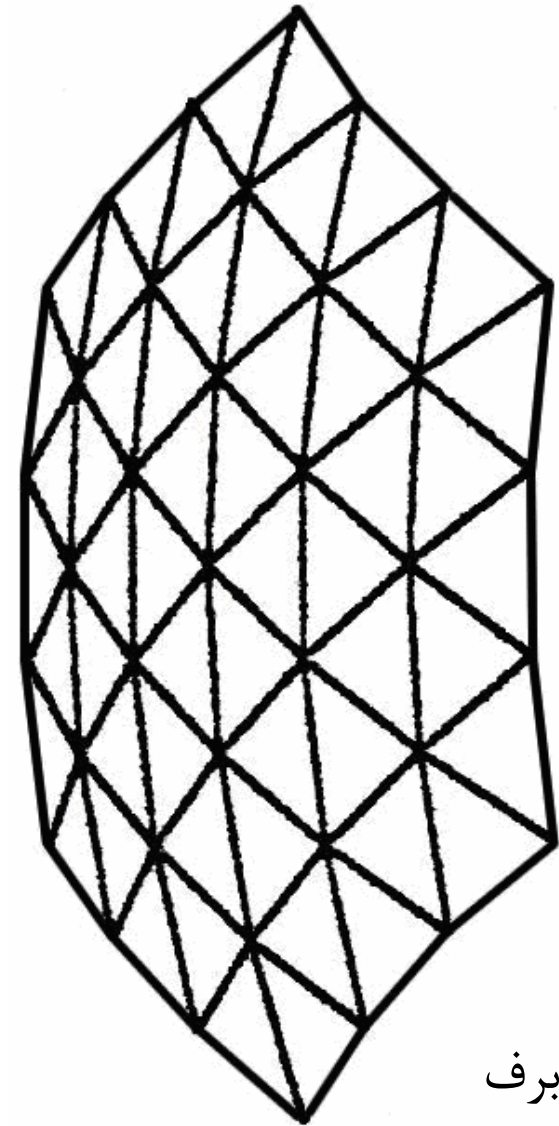


# ث- مدل های سازه ای واقعی

رفتار ناپایداری حدی در یک تیر  
 جدار نازک تحت بارگذاری جانبی به  
 روش کنترل تغییرمکان



# ث- مدل های سازه ای واقعی



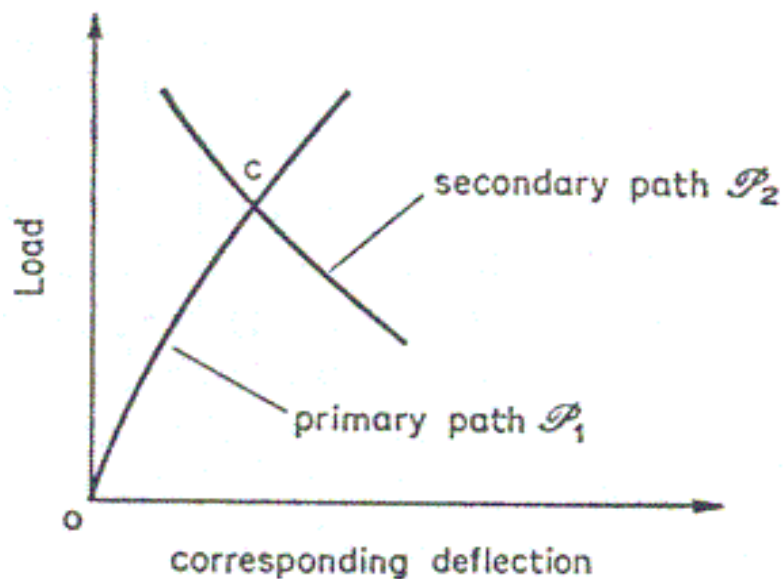
منحنی پاسخ بار- تغییر شکل یک سازه گنبدی تحت بارگذاری انباشته برف

## ۳- ناپایداری نقطه دوشاخگی Bifurcation Point Instability

(۳-۱) تعریف کلی :

تا کنون فرم های سازه ای خاصی با بارگذاری های خاصی را مورد بررسی قرار دادیم که در آنها هر حالت تعادلی فقط دارای یک مسیر تعادل واحد بود.

در برخی فرمهای سازه ای با بارگذاری های خاصی این امکان وجود دارد که دارای دو مسیر تعادل باشند، به گونه ای که از یک حالت تعادل یکسانی عبور می کنند.



در این نوع فرم های سازه (با بارگذاری های خاصی) یک مسیر تعادل از مبدا شروع می شود که به آن مسیر اولیه یا اصلی می گوئیم، این مسیر تعادل به وسیله مسیر تعادل دیگری که آن را مسیر ثانویه یا فرعی می نامیم قطع می شود که نقطه تقاطع را نقطه دوشاخگی می گوئیم.

### ۳- ناپایداری نقطه دوشاخگی

بسته به نوع مسیر تعادل ثانوی، سه نوع ناپایداری نقطه دوشاخگی داریم:

(Stable- Symmetric Bifurcation)

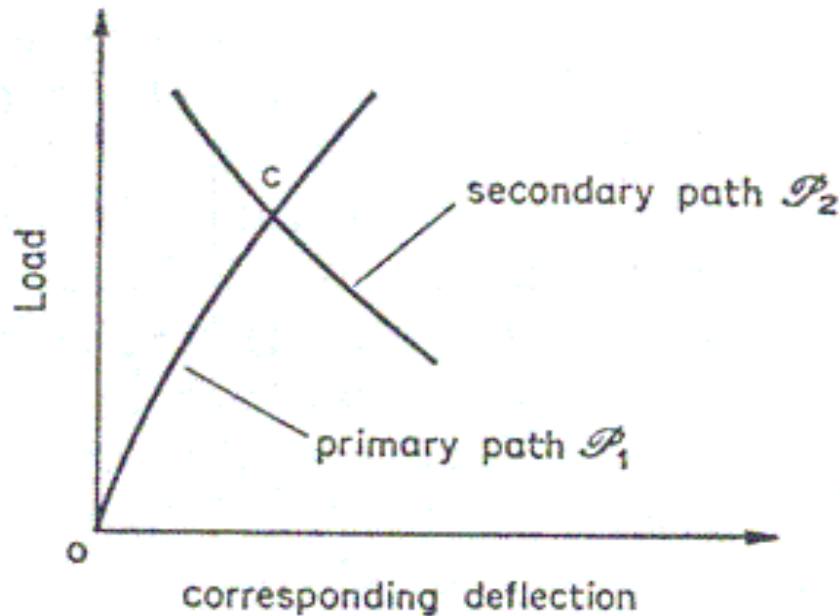
• دوشاخگی متقارن پایدار

(Unstable-Symmetric Bifurcation)

• دوشاخگی متقارن ناپایدار

(Asymmetric Bifurcation)

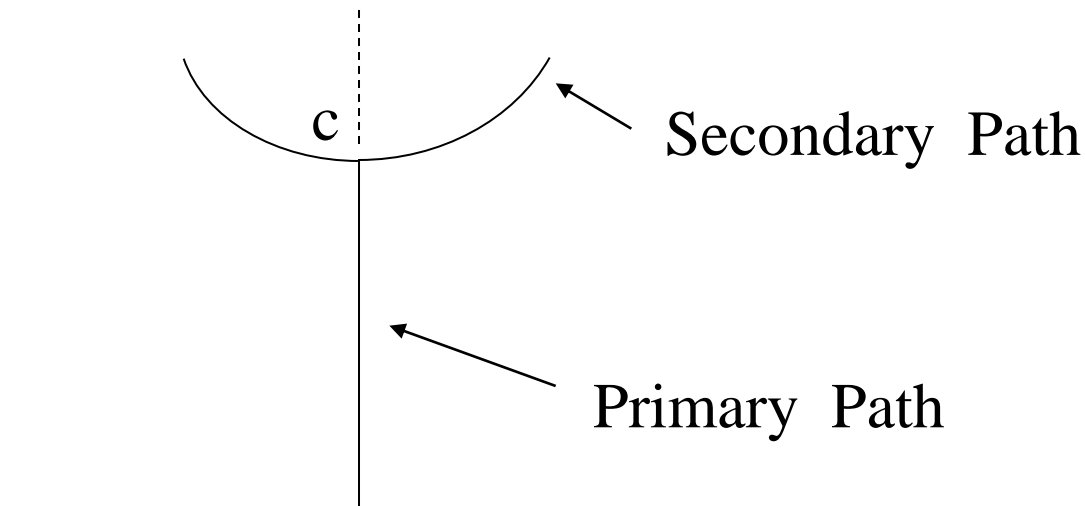
• دوشاخگی نامتقارن



## ۲-۳) دوشاخگی متقارن پایدار

الف) تعریف کلی :

در ناپایداری متقارن پایدار، مسیر تعادل اولیه پایدار سازه در نقطه ای ناپایدار می شود که آن نقطه محل تقاطع دو مسیر تعادل است و مسیر تعادل ثانوی پایدار و متقارن است.



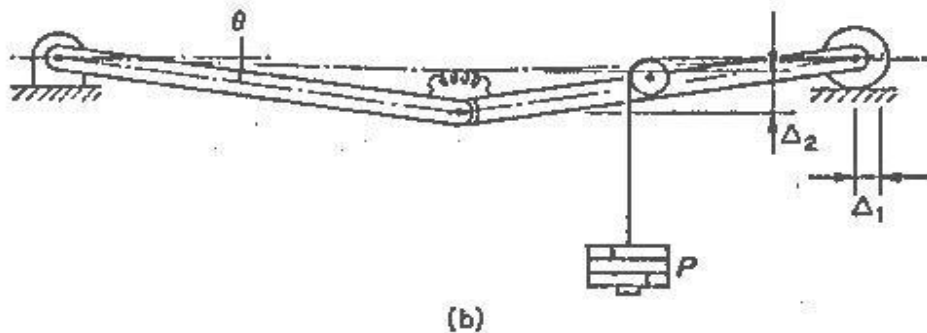
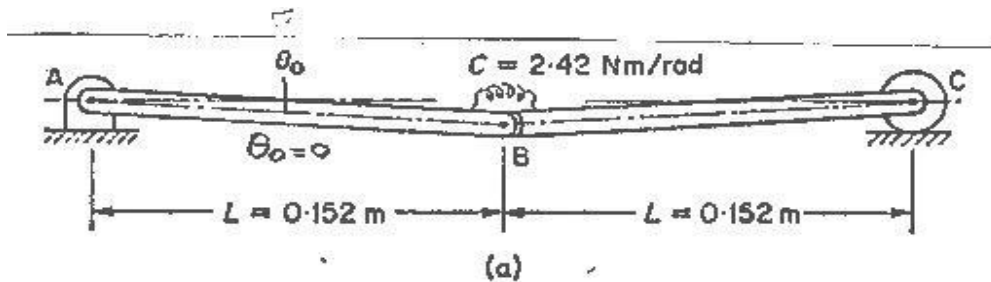
این نوع ناپایداری در ستونهای لاغر تحت اثر نیروی محوری و صفحات نازک تحت اثر بارگذاری درون صفحه ای (In-plane Loading) رخ می دهد.

## ۲-۳) دوشاخگی متقارن پایدار

(ب) مدل سازه ای آزمایشگاهی

یک مدل آزمایشگاهی که در شکل زیر نشان داده شده است به گونه ای است که در حالت بارگذاری نشده دو میله صلب  $AB$  و  $BC$  که در نقطه  $B$  توسط فنر دورانی به سختی  $C$  به همدیگر متصل شده اند، نسبت به خط افق زاویه صفر می سازند. بنابر این فنر  $C$  بیانگر الاستیسیته سیستم می باشد.

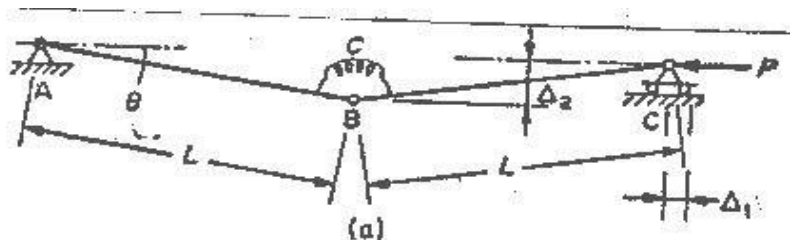
سیستم مذکور تحت اثر بارگذاری محوری به گونه ای که در زیر نشان داده شده است قرار دارد.





## ۳-۲) دوشاخگی متقارن پایدار

پ) اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای  
در مدل ریاضی مربوط به مدل فیزیکی سازه مورد نظر تغییر زاویه  $\theta$  بیانگر فرم کلی  
تغییر شکل مدل سازه ای می باشد:



$$\Delta_1 = 2L(1 - \cos \theta)$$

تغییر مکان در راستای بار  $(\Delta_1)$  عبارت است از :

$$\Pi = u - w$$

تابع انرژی پتانسیل کلی عبارت است از :

$$u = \frac{1}{2} C(2\theta)^2 = 2C\theta^2$$

$$w = 2PL(1 - \cos \theta)$$

$$\Pi = 2C\theta^2 - 2PL(1 - \cos \theta)$$

برای یافتن معادلات تعادل و مسیرهای تعادل مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کلی را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 4C\theta - 2PL \sin \theta = 0$$

با فرض  $p = \frac{PL}{2C}$  معادله تعادل به صورت زیر در می آید:

$$\theta - p \sin \theta = 0$$

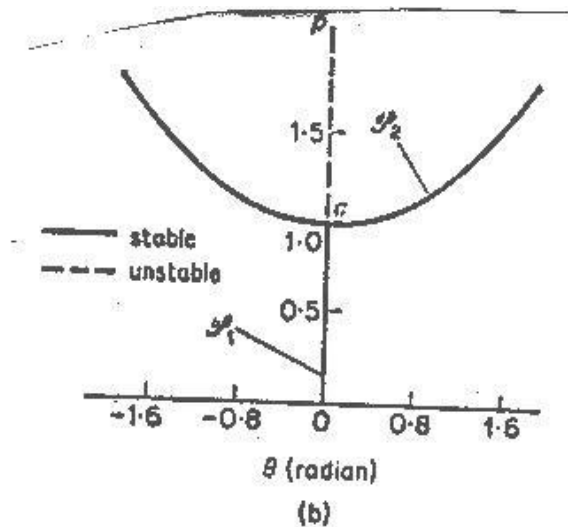
معادله تعادل حاصل منجر به دو مسیر تعادل ممکن زیر می شود:

$$\theta = 0 \quad ( \text{مسیر تعادل } \varphi_1 )$$

$$p = \frac{\theta}{\sin \theta} \quad ( \text{مسیر تعادل } \varphi_2 )$$

## ۲-۳) دوشاخگی متقارن پایدار

رابطه بار - تغییر مکان توصیف شده به وسیله دو جواب ممکن در زیر نشان داده می شود :



برای بررسی پایداری مسیرهای تعادل مذکور مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل کلی را مورد بررسی قرار می دهیم :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} &= 4C - 2PL \cos \theta \\ &= 4C(1 - p \cos \theta) \end{aligned}$$

اگر مشتق دوم مذکور را در روی مسیر مورد بررسی قرار دهیم (یعنی  $\theta = 0$ ) ، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 4C(1 - p) \begin{cases} > 0 \Rightarrow & \text{حالت پایدار} & \Leftrightarrow p < 1 \\ = 0 \Rightarrow & \text{حالت بحرانی} & \Leftrightarrow p = 1 \\ < 0 \Rightarrow & \text{حالت ناپایدار} & \Leftrightarrow p > 1 \end{cases}$$

## ۲-۳) دوشاخگی متقارن پایدار

و اگر مشتق دوم مذکور را در روی مسیر  $\varphi_2$  مورد بررسی قرار دهیم (یعنی  $p = \frac{\theta}{\sin \theta}$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 4C \left(1 - \frac{\theta}{\tan \theta}\right) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{حالت پایدار} & \Leftrightarrow \theta < \tan \theta \\ = 0 \Rightarrow \text{حالت بحرانی} & \Leftrightarrow \theta = \tan \theta \\ < 0 \Rightarrow \text{حالت ناپایدار} & \Leftrightarrow \theta > \tan \theta \end{cases}$$

از بررسی مسیر تعادل اول نتیجه می گیریم که حالت مسیر مذکور در  $p=1$  تغییر می کند و هنگامی که مدل سازه ای مذکور بیش از بار  $p=1$  بارگذاری شود در این صورت با یک اختلال خارجی کوچک (small external disturbance) از بافتار تعادل  $\theta = 0$  دور خواهد شد.

از بررسی مسیر تعادل دوم باید گفت که با توجه به اینکه برای تغییر شکل های عملی مدل سازه ای داریم:  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ ، از این رو همواره خواهیم داشت  $\tan \theta \geq \theta$  و لذا مشتق دوم هرگز صفر نخواهد بود و لذا مسیر مذکور عملاً پایدار است.

## ۲-۳) دوشاخگی متقارن پایدار

برای بررسی پایدار بودن یا ناپایدار نبودن حالت بحرانی باید مشتقات مرتبه بالاتر آن را مورد بررسی قرار می دهیم همانگونه که قبلا گفتیم اگر  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0$  و  $\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} = 0$  باشد در این صورت علامت مشتق چهارم تابع انرژی پتانسیل کلی عامل تعیین کننده پایداری یا ناپایداری حالت بحرانی مورد نظر است به عبارت دیگر اگر داشته باشیم  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} = 0$  و  $\frac{\partial^4 \Pi}{\partial \theta^4} > 0$  در این صورت حالت بحرانی یک حالت پایدار است که دلالت بر ناپایداری محلی و تقارن در تغییر شکل بحرانی  $\theta$  دارد، ولی ضرورتا بیانگر ناپایداری کلی نمی باشد.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 4C(1 - p \cos \theta) \rightarrow \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} = 4Cp \sin \theta \rightarrow \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \theta^4} = 4Cp \cos \theta$$

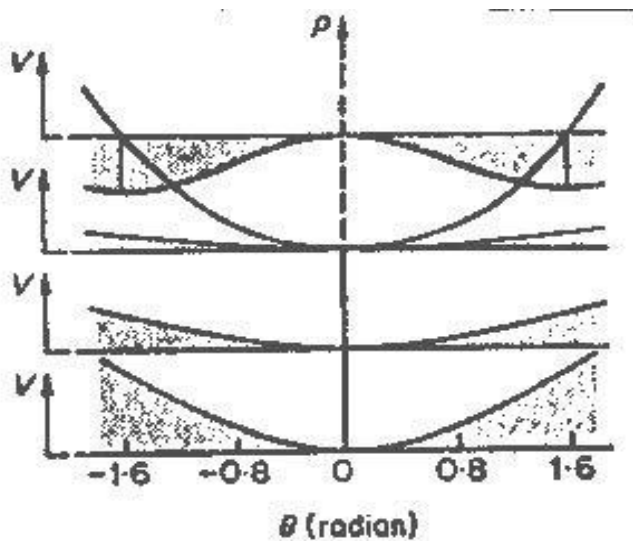
برای مدل سازه ای مذکور داریم:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0, p=1} = 0, \left. \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} \right|_{\theta=0, p=1} = 0, \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \theta^4} = 4C > 0$$

پس حالت بحرانی یک حالت پایدار است.

## ۲-۳) دوشاخگی متقارن پایدار

پروفیل های انرژی پتانسیل کلی که بر روی مسیر تعادل بار- تغییر مکان افزوده شده است یک ارتباط مفهومی ارزشمندی را بین تعاریف پایداری مبتنی بر فرم انرژی پتانسیل کلی و رفتار فیزیکی واقعی سازه ای به دست می دهد. در نمودار زیر مقادیر نسبی  $\Pi$  در ترازهای ثابت بار رسم شده اند :



مشاهده می کنیم هنگامی که  $p < 1$  می باشد انرژی پتانسیل کلی در روی مسیر اول مینیمم می باشد، در حالی که به هنگام  $p > 1$  انرژی پتانسیل کلی در روی مسیر اول یک ماکزیمم و در روی مسیر دوم یک مینیمم می باشد.

از آنجا که مشخصات بار و پایداری به ازای مقادیر مثبت و منفی  $\theta$  یکسان است، از این رو مدل سازه ای صرفاً با توجه به جهت اختلال خارجی کوچک شاخه سمت چپ (left branch) یا شاخه سمت راست را دنبال خواهد نمود.

## ۲-۳) دوشاخگی متقارن پایدار

بنابراین دوشاخگی متقارن پایدار، رفتار یک مدل سازه ای را توصیف می نماید که مسیر تعادل اولیه آن در یک تراز مشخص بار، که بار بحرانی نامیده می شود، یک مسیر ثانوی را قطع می کند که نسبت به تغییر شکل بحرانی  $\theta$  هم پایدار است و هم متقارن.

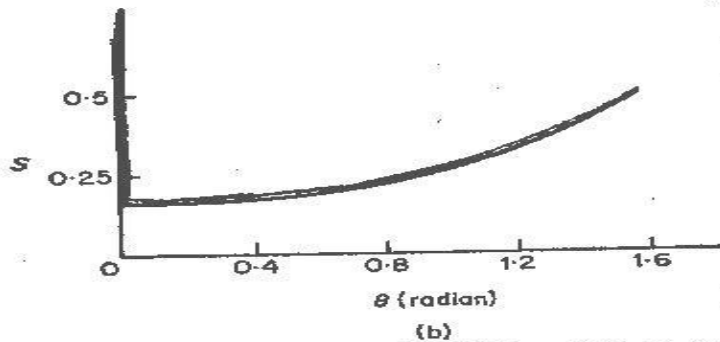
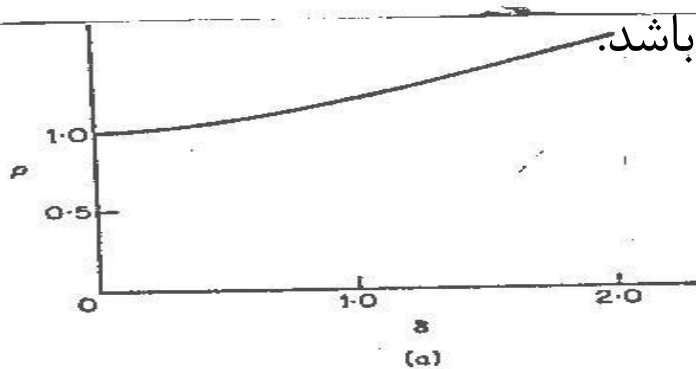
لازم به ذکر است که اگرچه مدل ریاضی مدل سازه ای مورد نظر دلالت بر این دارد که به ازای  $\theta$  صفر سازه دارای سختی بی نهایت است، ولی در واقع هیچ نوع سازه ای در عمل این چنین خاصیتی را نخواهد داشت.

## ۳-۲) دوشاخگی متقارن پایدار

اگر فرض کنیم که  $\delta = \frac{\Delta_1}{L} = 2(1 - \cos \theta)$  و نمودار  $p - \delta$  را رسم نماییم و اگر شیب نمودار مذکور را با نشان دهیم که در واقع بیانگر سختی سازه می باشد به گونه ای که

$$S = \frac{dp}{d\delta} = \frac{dp}{d\theta} / \frac{d\delta}{d\theta} = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{2 \sin^3 \theta}$$

و نمودار  $S - \theta$  را رسم نماییم در این صورت مشاهده خواهیم نمود که  $S$  همواره مثبت بوده و در ابتدا دارای مقدار بی نهایت می باشد. نکته بسیار مهم کاهش بسیار قابل ملاحظه سختی در هنگام رسیدن به بار بحرانی می باشد.

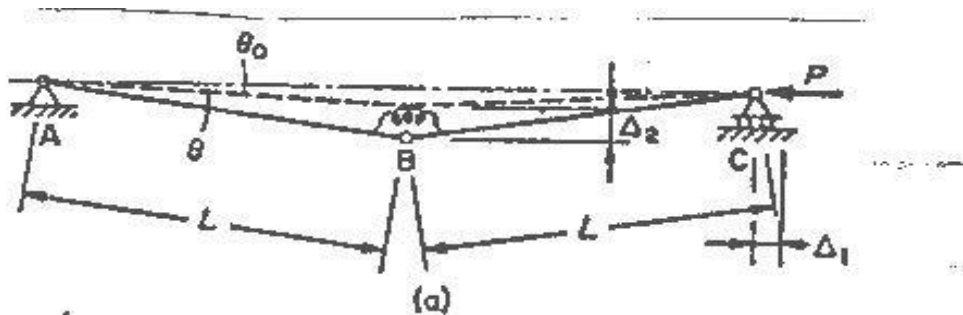




## ۳-۲) دوشاخگی متقارن پایدار

(ت) اثر ناکاملی اولیه :

برای مدل سازه ای مورد نظر یک ناکاملی هندسی را فرض می کنیم، به عبارت دیگر ناکاملی هندسی  $\theta_0$  را به عنوان یک انحراف از هندسه کامل بارگذاری نشده به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر می گیریم :



تابع انرژی پتانسیل کلی عبارت است از :

$$\Pi\{\theta, P, \theta_0\} = 2C(\theta - \theta_0)^2 - 2PL(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

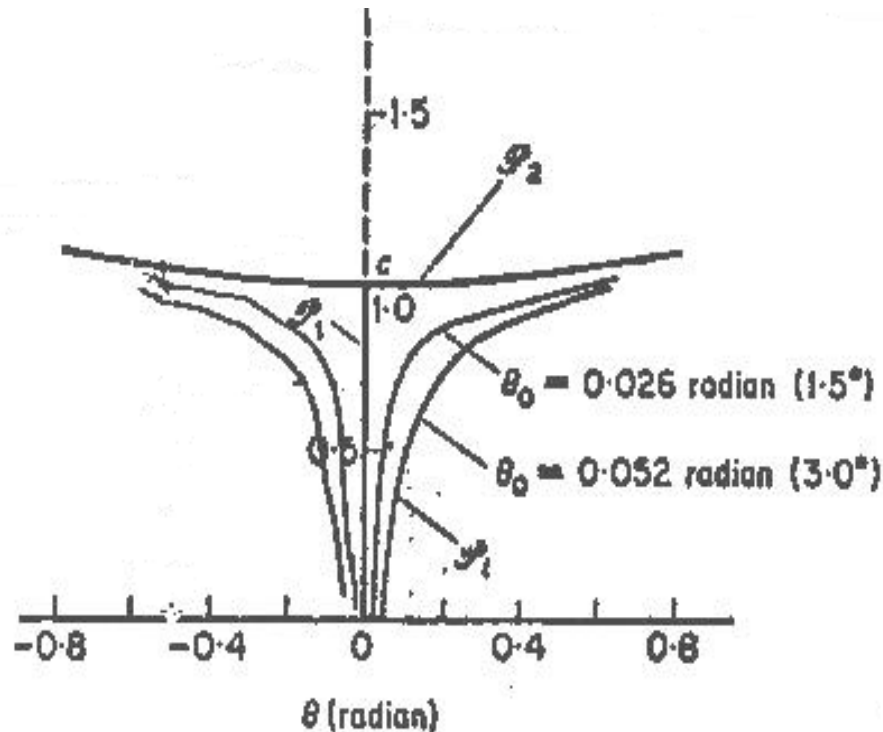
با فرض  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$  معادله تعادل سیستم به دست می آید :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 4C(\theta - \theta_0) - 2PL \sin \theta = 0$$

با فرض  $P = \frac{PL}{2C}$  معادله تعادل سیستم به صورت زیر درمی آید که بیانگر مسیر تعادل سیستم است:

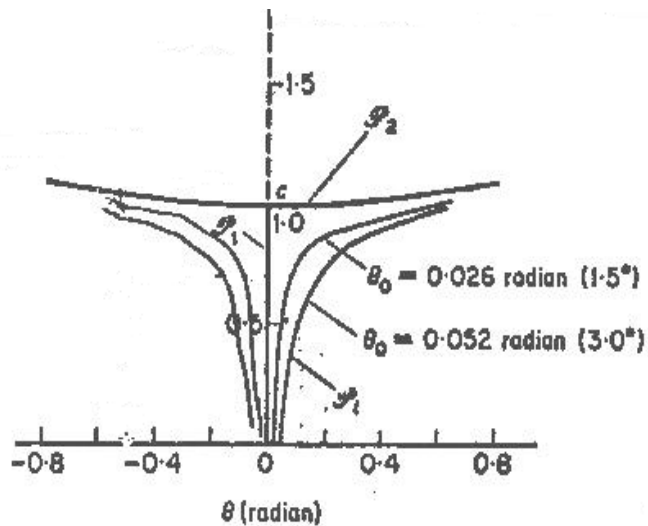
$$p = \frac{\theta - \theta_0}{\sin \theta}$$

نمودار  $p - \theta$  به ازای مقادیر مختلف  $\theta_0$  در زیر ارائه می شود :



## ۳-۲) دوشاخگی متقارن پایدار

چند نکته مهم در مدل ناکامل قابل توجه می باشد :



الف) نحوه تغییر شکل سیستم سازه ای ناکامل مذکور تابع جهت ناکاملی اولیه می باشد و علامت هر دو یکسان می باشد.

ب) هنگامی که  $\theta_0$  کوچک است مسیر تعادل سیستم ناکامل با افزایش تغییر مکان ها به مدل کامل میل خواهد نمود.

پ) در سیستم ناکامل دیگر اثری از نقطه دوشاخگی نیست و تنها با یک مسیر تعادل مواجه هستیم که در واقع در عمل نیز با چنین حالتی روبرو خواهیم شد.

ت) این مدل سازه ای حساسیت نسبتاً کمی به ناکاملی های اولیه نشان می دهد لذا می توان هنوز آنها را جز سازه های Imperfection - Insensitive رده بندی نمود.

برای بررسی تعادل مدل سازه ای ناکامل مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل کلی را مورد بررسی قرار می دهیم:

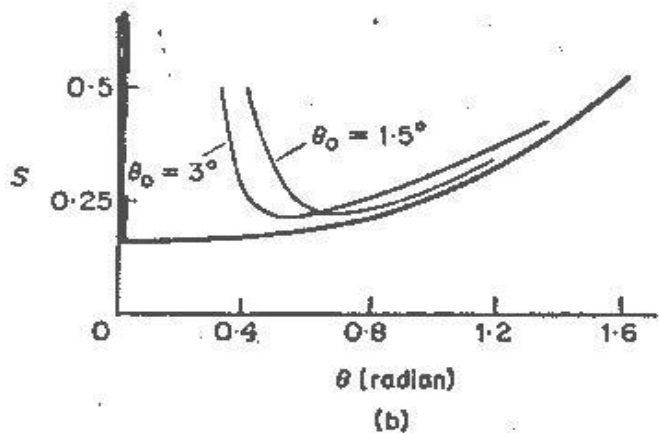
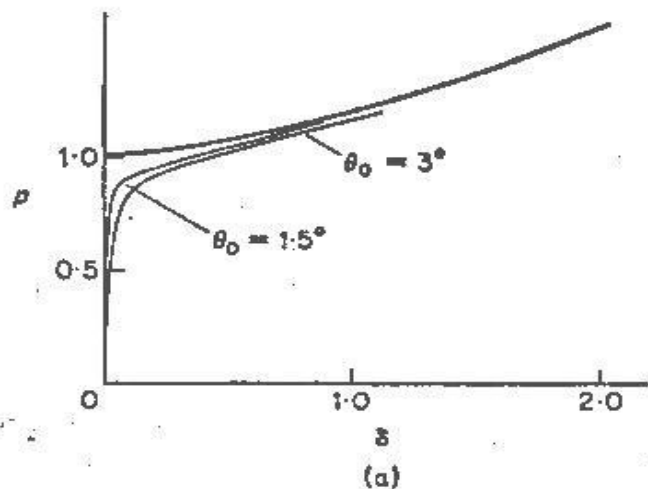
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 4C - 2PL \cos \theta = 4C(1 - p \cos \theta)$$

مشتق دوم مذکور را در روی مسیر تعادل مدل ناکامل مورد ارزیابی قرار می دهیم:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \Big|_{\varphi_i} = 4C \left[ 1 - \frac{\theta - \theta_0}{\tan \theta} \right] \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{حالت پایدار} \Leftrightarrow \theta - \theta_0 < \tan \theta \\ = 0 \Rightarrow \text{حالت بحرانی} \Leftrightarrow \theta - \theta_0 = \tan \theta \\ < 0 \Rightarrow \text{حالت ناپایدار} \Leftrightarrow \theta - \theta_0 > \tan \theta \end{cases}$$

که با توجه به تغییر شکل های عملی مدل سازه ای، مسیر مذکور همواره پایدار است و لذا مدل مذکور تنها یک مسیر تعادل پایدار را دنبال خواهد نمود.

## ۳-۲) دوشاخگی متقارن پایدار



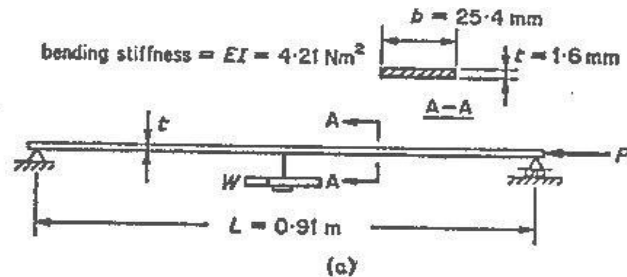
• اگر فرض کنیم که  $\delta = \Delta_1/L$  و نمودار  $p-\delta$  را رسم کنیم و اگر شیب نمودار مذکور را با  $S$  نشان دهیم که در واقع بیانگر سختی سازه است، و نمودار  $S-\theta$  را رسم کنیم باز هم مشاهده خواهیم کرد که  $S$  همواره مثبت بوده و لذا مسیر همواره پایدار است.

• با افزایش  $\theta_0$  (ناکاملی اولیه) سختی بشدت کاهش پیدا می کند. باز هم نکته مهم، کاهش بسیار قابل ملاحظه سختی در هنگام رسیدن به بار بحرانی می باشد.

## ۳-۲) دوشاخگی متقارن پایدار

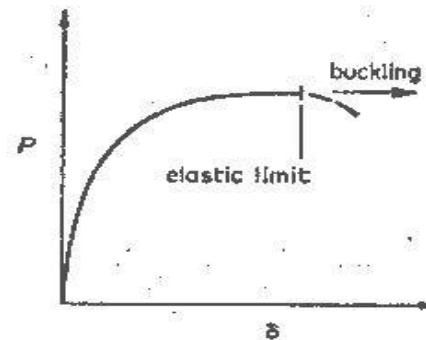
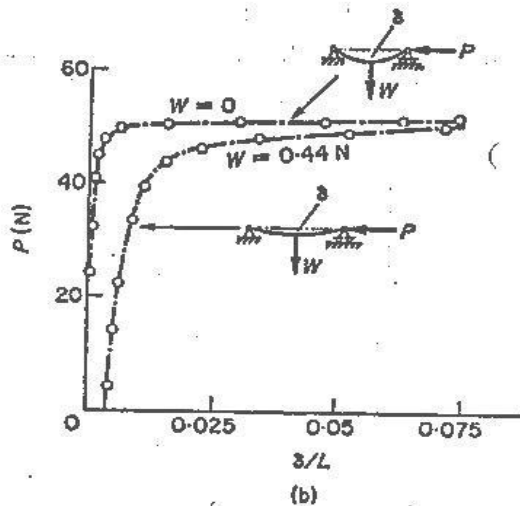
(ث) مدل های سازه ای واقعی :

ناپایداری دوشاخگی متقارن پایدار در سازه های زیر رخ می دهد :



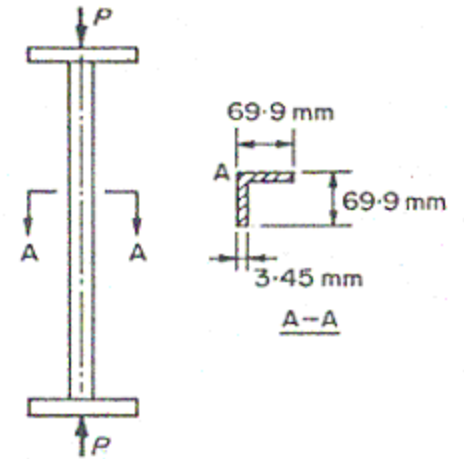
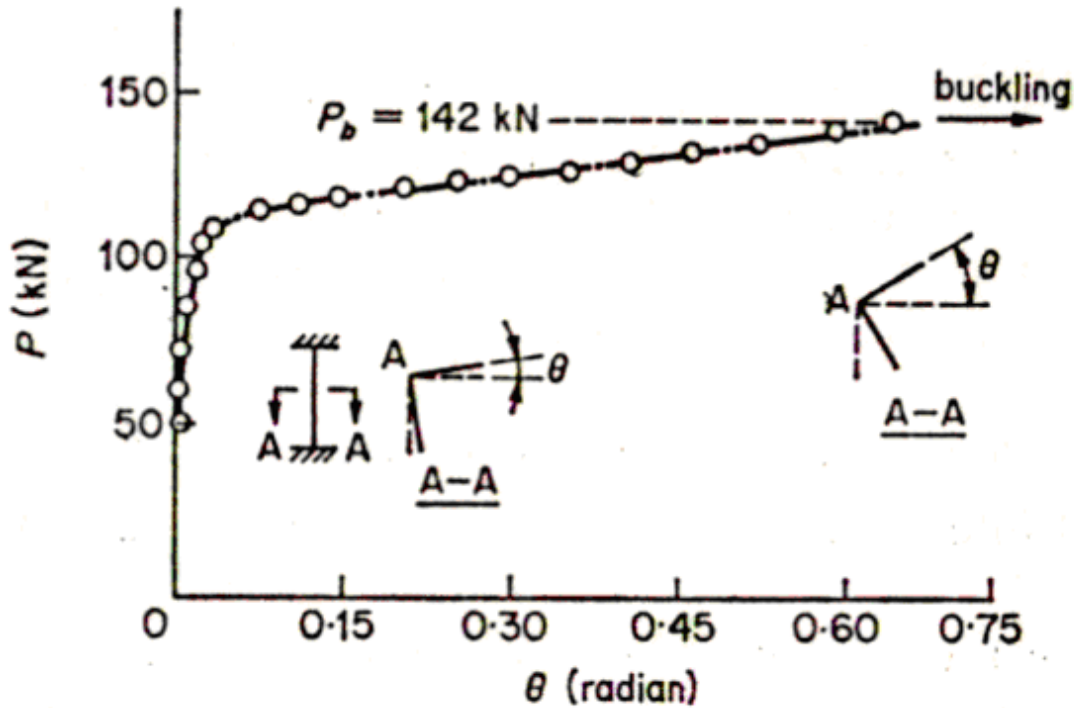
(۱) ستون های تحت اثر بار محوری  
(sideway bowing)

البته لازم به ذکر است که برای ستون های معمولی به دلیل وقوع پدیده تسلیم سختی ستون به سرعت به صفر می رسد و پدیده کمانش رخ می دهد.



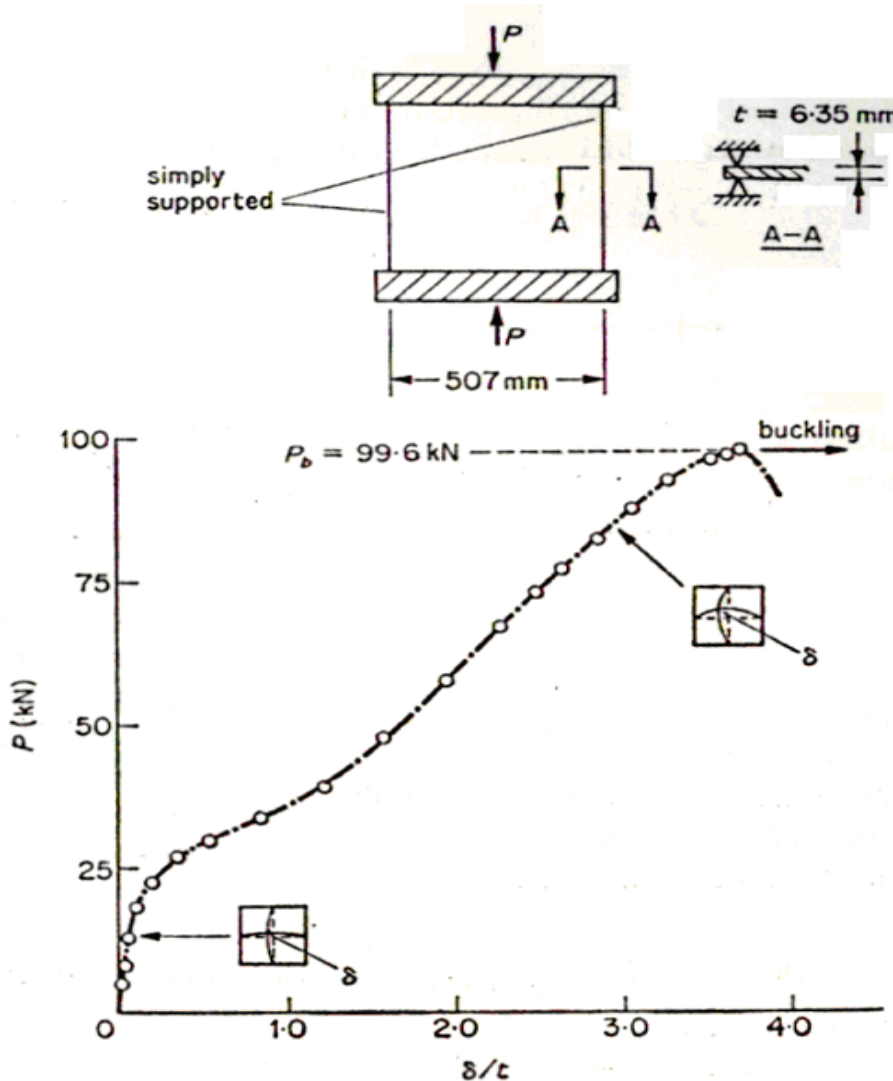
## ۳-۲) دوشاخگی متقارن پایدار

۲) ستون های جدار نازک (با سختی پیچشی کمتر نسبت به سختی خمشی)



کمانش پیچشی ستون ها

## دوشاخگی متقارن پایدار (۳-۲)



۳ صفحه تحت اثر  
بارگذاری فشاری درون  
صفحه ای

دوشاخگی متقارن پایدار در صفحه  
مربعی تحت بارگذاری درون صفحه ای

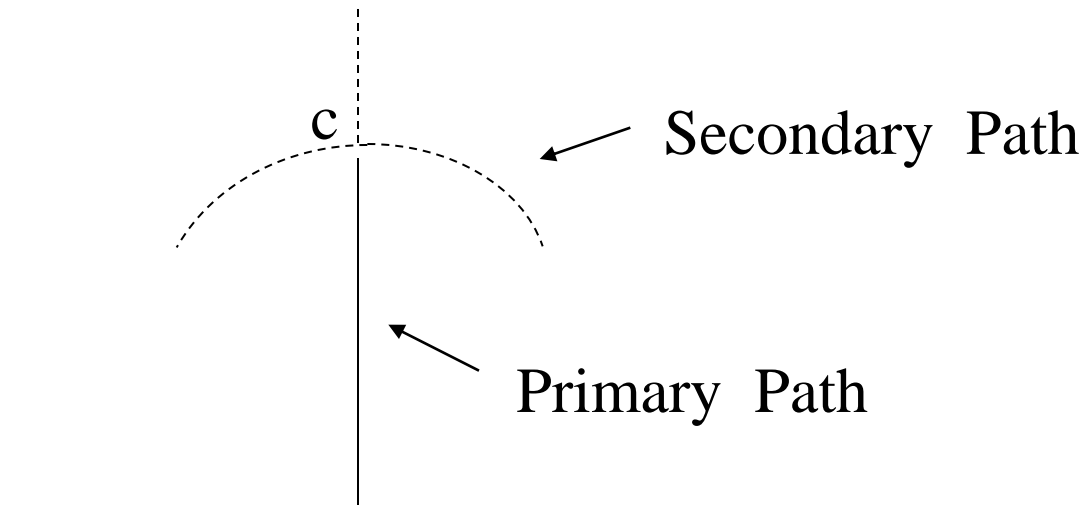


## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

### ۳-۳) دوشاخگی متقارن ناپایدار

الف) تعریف کلی :

در ناپایداری متقارن ناپایدار، مسیر تعادل اولیه پایدار سازه در یک نقطه ای ناپایدار می شود که آن نقطه محل تقاطع دو مسیر تعادل است و مسیر تعادل ثانوی ناپایدار و متقارن است:



## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

اگر بارگذاری از نوع بارگذاری تغییر مکان باشد، مدل سازه ای مسیر ثانویه را طی خواهد نمود ولی در صورتی که بارگذاری از نوع بارگذاری نیرویی باشد، در این صورت در نقطه  $C$  به ازای یک افزایش اندک در بار هیچ حالت تعادل همسایه ای وجود نخواهد داشت .

در این نقطه است که سازه مجبور می شود به دنبال یک حالت تعادل پایداری باشد که ممکن است در این تراز بار و در مسیر تعادل ثانوی وجود داشته باشد. بنابراین وقوع یک پرش دینامیکی اجتناب ناپذیر است .

اساساً طبیعت متقارن مسیر تعادل ثانوی موجب می شود که پرش دینامیکی در دو جهت مختلف امکان پذیر باشد و جهت پرش دینامیکی در واقع بستگی به جهت اختلال کوچکی خواهد داشت که در نقطه  $C$  به سازه اعمال می شود .

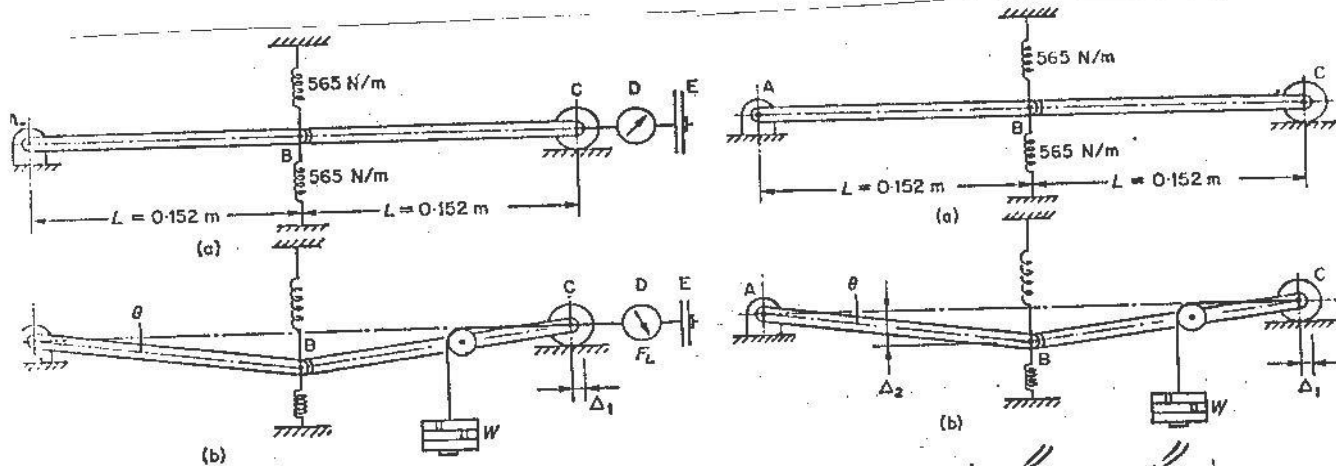
در ناپایداری متقارن ناپایدار مد تغییر شکل اولیه که متناسب با مسیر تعادل اولیه است متفاوت از مد تغییر شکل ثانوی است که متناسب با مسیر تعادل ثانوی می باشد.

## فصل دوم: رده بندی پدیده های ناپایداری

(ب) مدل آزمایشگاهی:

مدل آزمایشگاهی که در شکل نشان داده شده است به گونه ای است که در حالت بارگذاری نشده (Unloaded State) دو میله صلب  $AB$  ,  $BC$  که در نقطه  $B$  به وسیله دو فنر انتقالی به همدیگر اتصال یافته اند نسبت به افق زاویه صفر می سازند.

دو فنر پیش تنیده انتقالی (Translational Pre-stressed Spring) نمایشگر الاستیسیته سیستم بوده که سختی یکسانی داشته و لذا مقاومت مساوی برای تغییر مکان جانبی در هر دو راستا را فراهم می آورند.



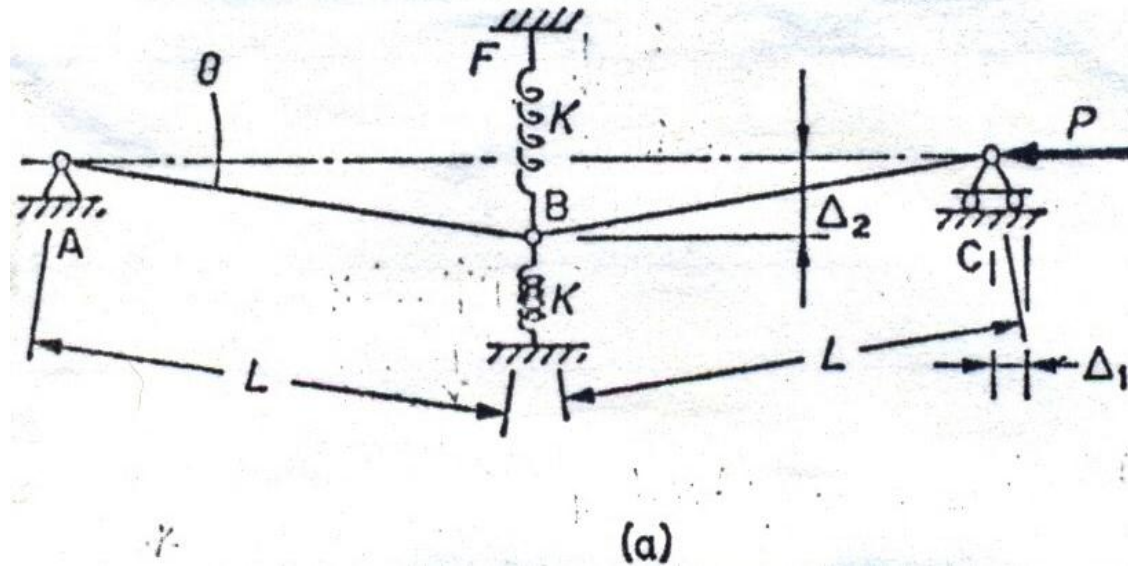
سازه مدل بارگذاری از نوع بارگذاری تغییر مکانی  
(Displacement Loading)

سازه مدل بارگذاری از نوع بارگذاری نیروی  
(Force Loading)

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

پ) اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای (در حالت کنترل بار)

در مدل ریاضی مربوط به مدل فیزیکی سازه ای مورد نظر، تغییر زاویه  $\theta$  برای تعریف تغییر مکان افقی تکیه گاه غلتکی  $C$  ( $\Delta_1$ ) و تغییر مکان قائم مفصل  $B$  ( $\Delta_2$ ) کافی است.



## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2L(1 - \cos \theta) \\ \Delta_2 = L \sin \theta \end{cases}$$

تابع انرژی پتانسیل کلی عبارت است از:

$$\Pi = u - w$$

$$\begin{cases} u = 2\left(\frac{1}{2} K \Delta_2^2\right) = K \Delta_2^2 \\ w = P \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \Pi = K \Delta_2^2 - P \Delta_1$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

از جایگذاری  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  در تابع انرژی پتانسیل کلی، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\Pi = KL^2 \sin^2 \theta - 2PL(1 - \cos \theta)$$

برای یافتن معادلات تعادل و مسیرهای تعادل مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کلی را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$$

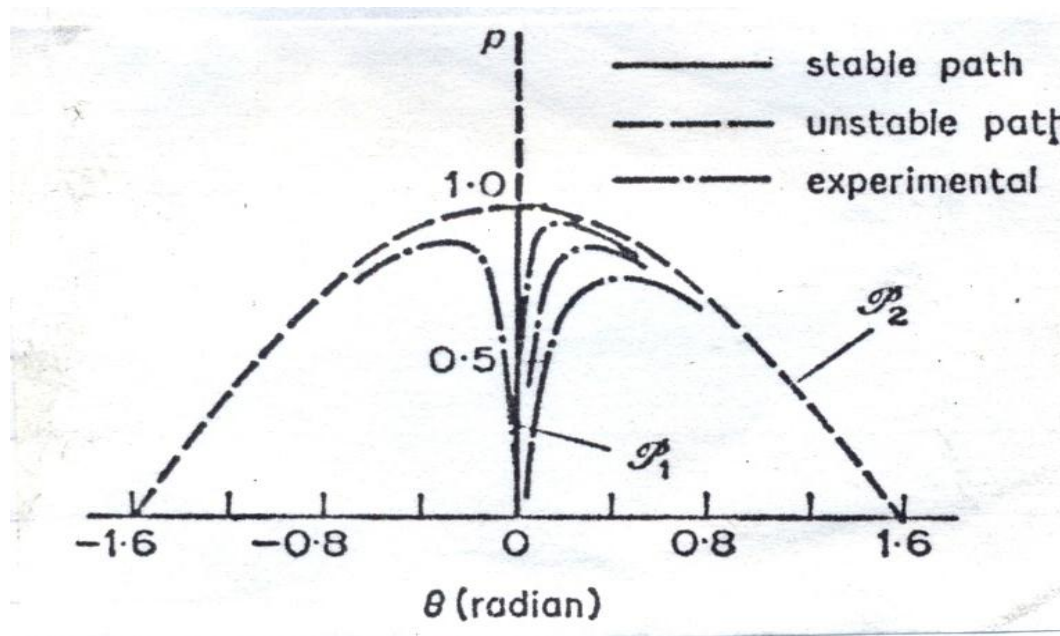
$$2KL^2 \sin \theta \cos \theta - 2PL \sin \theta = 0$$

با فرض  $p = \frac{P}{KL}$  معادله تعادل مذکور منجر به سه مسیر تعادل ممکن زیر می شود:

$$2KL^2 \sin \theta (\cos \theta - p) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ p = \cos \theta \\ \theta = \pi \end{array} \right.$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

دو مسیر ابتدائی در شکل زیر نمایش داده شده اند. مسیر سوم در مدل حاضر از نقطه نظر فیزیکی امکان ناپذیر است.



برای بررسی پایداری مسیرهای تعادل سیستم سازه ای از مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل کلی استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 2KL^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2PL \cos \theta$$

$$= 2KL^2 (\cos 2\theta - p \cos \theta)$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

اگر مشتق دوم مذکور را در روی مسیر اول مورد بررسی قرار دهیم ( $\theta = 0$ ) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 2KL^2(1-p) = \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow p < 1 & \text{حالت پایدار} \\ = 0 \Leftrightarrow p = 1 & \text{حالت بحرانی} \\ < 0 \Leftrightarrow p > 1 & \text{حالت ناپایدار} \end{cases}$$

و اگر مشتق دوم مذکور را در روی مسیر دوم ( $p = \cos \theta$ ) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = -2KL^2 \sin^2 \theta = \begin{cases} > 0 & \text{اساسا امکان ندارد} \\ = 0 & \text{حالت بحرانی} \\ < 0 & \text{حالت ناپایدار} \end{cases}$$



## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

از بررسی مسیر تعادل اول نتیجه می گیریم که حالت مسیر مذکور در  $p = 1$  تغییر می کند یعنی در حالت  $p < 1$  مسیر تعادل پایدار و  $p > 1$  مسیر تعادل ناپایدار است.

از بررسی مسیر تعادل دوم باید گفت که با توجه به تغییر شکل های عملی مدل سازه ای داریم  $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$  از این رو همواره مشتق دوم منفی است و لذا مسیر تعادل مذکور عملاً ناپایدار است.

برای بررسی پایدار بودن و ناپایدار نبودن حالت بحرانی باید مشتقات مرتبه بالاتر آن را مورد بررسی قرار دهیم. همان گونه که قبلاً گفتیم اگر  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0$  و  $\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} = 0$  باشند در این صورت علامت مشتق چهارم تابع انرژي پتانسیل کلی عامل تعیین کننده پایداری و یا ناپایداری حالت بحرانی مورد نظر است، به عبارت دیگر اگر داشته باشیم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \theta^4} < 0$$

در این صورت حالت بحرانی یک حالت ناپایدار است که دلالت بر ناپایداری کلی دارد :

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

---

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 2KL^2 (\cos 2\theta - p \cos \theta)$$

$$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} = 2KL^2 (-2 \sin 2\theta + p \sin \theta)$$

$$\frac{\partial^4 \Pi}{\partial \theta^4} = 2KL^2 (-4 \cos 2\theta + p \cos \theta)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0, p=1} = 0$$

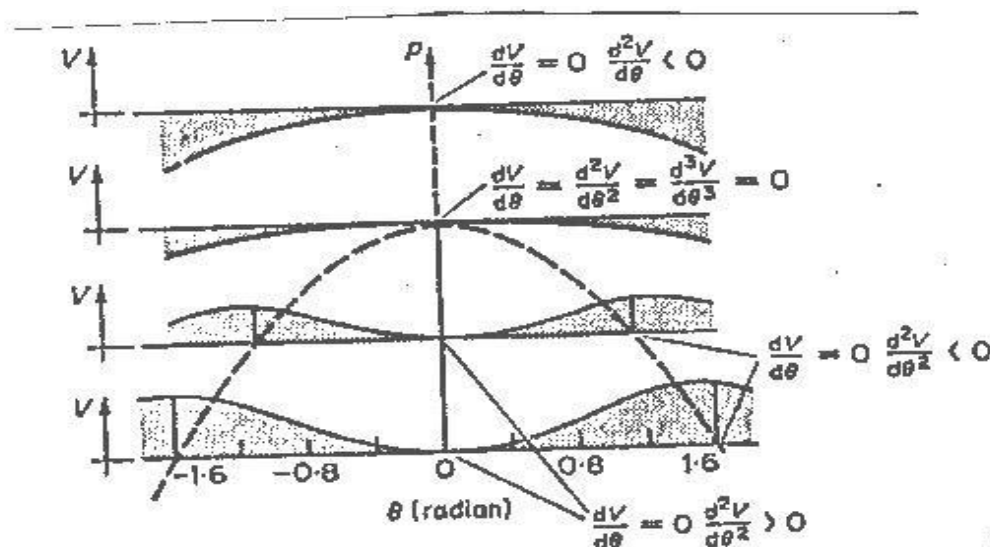
$$\left. \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \theta^3} \right|_{\theta=0, p=1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \theta^4} \right|_{\theta=0, p=1} = -6KL^2 < 0$$

پس حالت بحرانی یک حالت ناپایدار است .

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

پروفیل های انرژی پتانسیل کلی که بر روی مسیر تعادل بار - تغییر مکان افزوده شده است، یک ارتباط مفهومی ارزشمندی را بین تعاریف پایداری مبتنی بر فرم انرژی پتانسیل کلی و رفتار فیزیکی واقعی سازه ای به دست می دهد. در نمودار زیر مقادیر نسبی  $\Pi$  در ترازهای ثابت بار رسم شده اند:



مشاهده می کنیم هنگامی که  $p < 1$  می باشد انرژی پتانسیل کلی در روی مسیر اول یک مینیمم و در روی مسیر دوم یک ماکزیمم دارد در حالی که به هنگام  $p > 1$  انرژی پتانسیل کلی در روی مسیر اول یک ماکزیمم می باشد.

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

بنابراین هنگامی که بار وارده به بار بحرانی می رسد، به ازای یک افزایش بسیار کوچک در میزان بار وارده حالت تعادلی در نزدیکی حالت تعادل بحرانی وجود ندارد، لذا سازه مجبور می شود حالت تعادل پایدار جدیدی را که ممکن است در روی مسیر ثانویه موجود باشد جستجو نماید و لذا پدیده پرش دینامیکی رخ می دهد و جهت پرش دینامیکی بستگی به اختلال اولیه اعمال شده به مدل دارد.

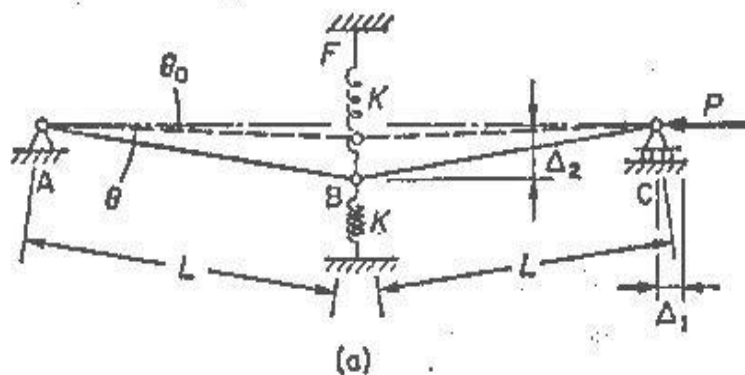
از آن جا که مشخصات بار و پایداری به ازای مقادیر مثبت و منفی  $\theta$  یکسان است از این رو مدل سازه ای صرفاً با توجه به جهت اختلال خارجی کوچک شاخه سمت چپ (Left branch) یا شاخه سمت راست (Right branch) را دنبال خواهد نمود.

بنابراین دوشاخگی متقارن ناپایدار رفتار یک مدل سازه ای را توصیف می نماید که مسیر تعادل اولیه آن در یک تراز مشخص بار که بار کمانش نامیده می شود یک مسیر ثانوی را قطع می کند که نسبت به تغییر شکل بحرانی  $\theta$  هم متقارن است و هم ناپایدار.

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

(ت) اثر ناکاملی اولیه (Initial Imperfections)

برای مدل سازه ای مورد نظر، یک ناکاملی هندسی را فرض می کنیم، به عبارتی ناکاملی هندسی  $\theta_0$  را به عنوان یک انحراف از هندسه کامل بارگذاری نشده - به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است - در نظر می گیریم:



برای مدل سازه ای ناکامل  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  به صورت زیر بدست می آید:

$$\Delta_1 = 2L(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\Delta_2 = L(\sin \theta - \sin \theta_0)$$

و با جایگذاری در تابع انرژی پتانسیل کلی نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\Pi\{\theta \quad \theta_0 \quad p\} = KL^2(\sin \theta - \sin \theta_0)^2 - 2pL(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

برای تحلیل سیستم ناکامل جهت ساده سازی محاسبات تقریب سازی های زیر را مورد استفاده قرار می دهیم:

$$\sin \theta \cong \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$$

$$\sin \theta_0 \cong \theta_0$$

$$\cos \theta_0 \cong 1$$

در این صورت تابع انرژی پتانسیل کلی تقریبی عبارت خواهد بود از:

$$\Pi\{\theta_0, \theta, p\} = KL^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} - \theta_0\right)^2 - 2PL \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\right)$$

از  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$  معادله تعادل سیستم ناکامل به دست می آید:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 2KL^2 \left(\theta - \theta_0 - \frac{2}{3}\theta^3 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_0\right) - 2PL\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

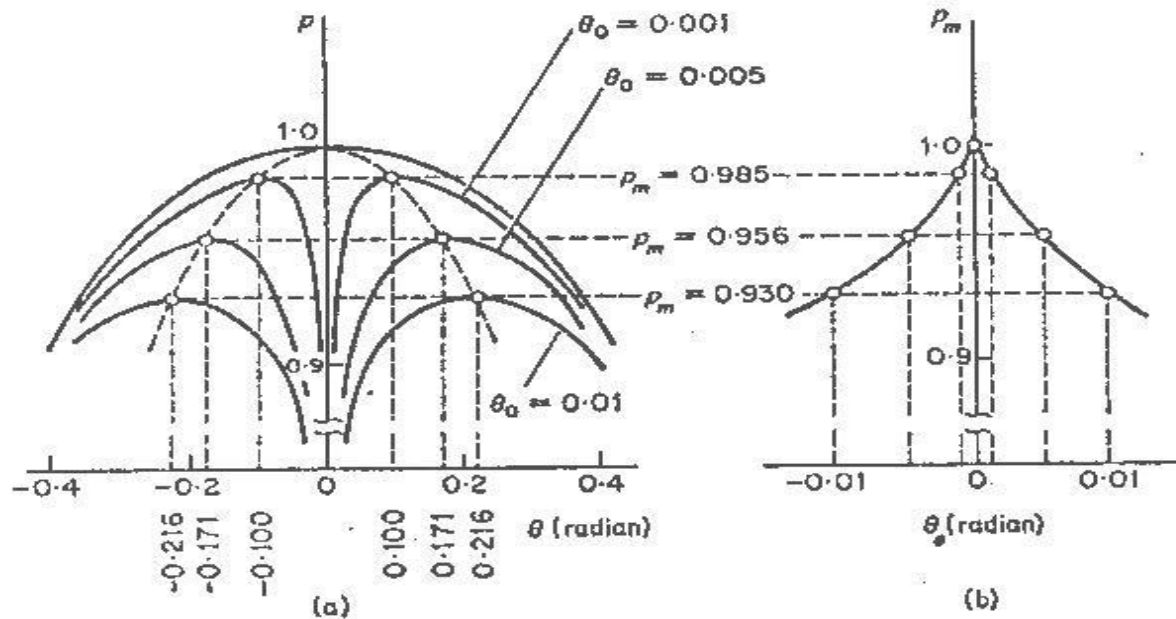
## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

و از معادله تعادل مذکور معادله مسیر تعادل به صورت زیر به دست می آید:

$$p = \frac{\theta - \theta_0 - \frac{2}{3}\theta^3 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_0}{\theta - \frac{\theta^3}{6}} \cong \frac{1}{\theta} \left[ \theta - \theta_0 - \frac{1}{2}\theta^2 \left( \theta - \frac{2}{3}\theta_0 \right) \right]$$

اگر نمودار معادله مذکور را به ازاء مقادیر مختلف  $\theta_0$  رسم نمائیم و نیز نمودار  $\theta_0$  - بار بحرانی  $P_m$  را رسم کنیم نتایج زیر حاصل می شوند:

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری



چند نکته مهم در مدل ناکامل قابل توجه می باشند:

(الف) نحوه تغییر شکل سیستم سازه ای، ناکامل تابع جهت ناکاملی اولیه می باشد و علامت هر دو یکسان می باشد.

(ب) در سیستم ناکامل دیگر اثری از نقطه دوشاخگی نیست و تنها با یک مسیر تعادل مواجه هستیم که در واقع در عمل نیز با چنین حالتی روبرو خواهیم شد.



## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

پ) ناپایداری سیستم ناکامل شبیه ناپایداری حالت حدی است به عبارت دیگر یک ناکاملی اولیه، پایداری از نوع دوشاخگی متقارن ناپایدار را به ناپایداری نقطه حدی تبدیل می نماید (به استثنای مبحث مدهای تغییر شکل).

ت) روشن است که به ازای یک ناکاملی خیلی کوچک کاهش بسیار قابل ملاحظه ای در بار بحرانی حاصل می شود . بنابراین مدل سازه ای مذکور حساسیت قابل توجهی نسبت به ناکاملی های اولیه از خود بروز می دهد لذا می توان آنها را جزء سازه های (Imperfection Sensitive) رده بندی نمود.

## فصل دوم: رده بندی پدیده های ناپایداری

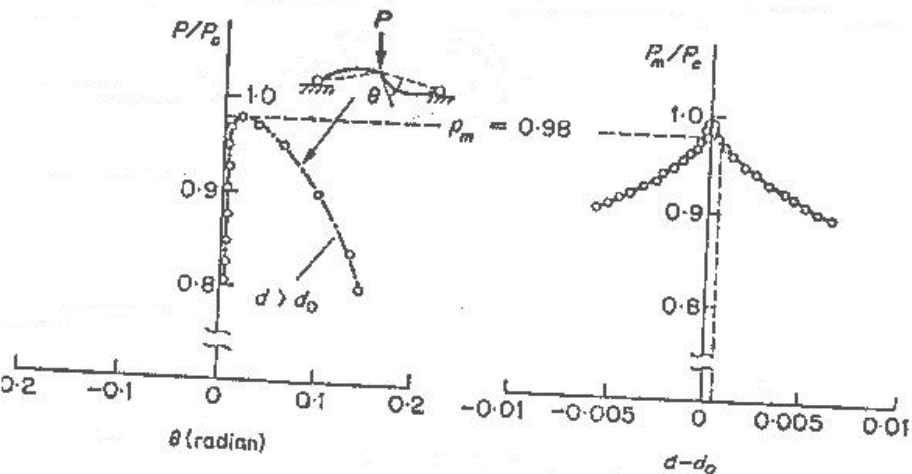
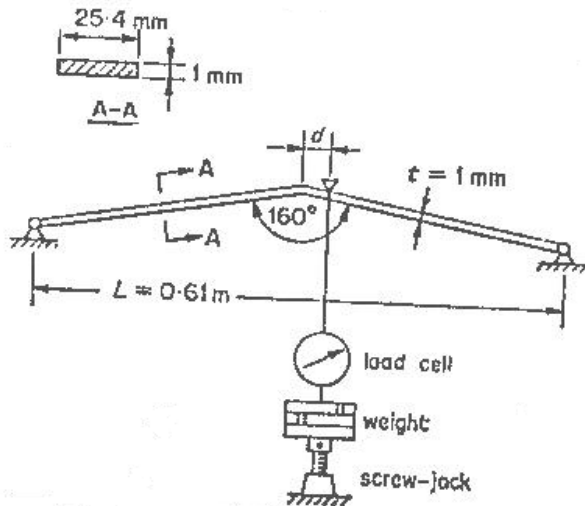
ث) مدل های سازه ای واقعی

ناپایداری دوشاخگی متقارن ناپایدار در سازه های زیر رخ می دهد:

۱- سازه toggle با بارگذاری خروج از مرکز

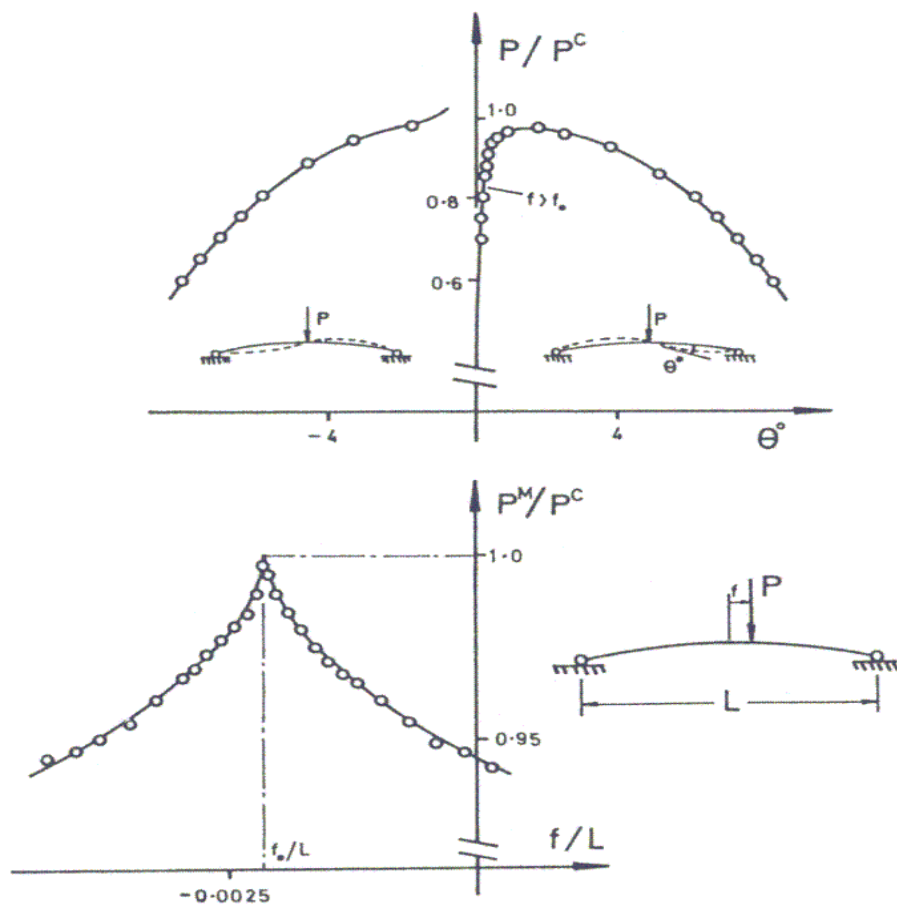
(سازه های فضاکار گنبدی)

(سازه های فضاکار استوانه ای)



## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

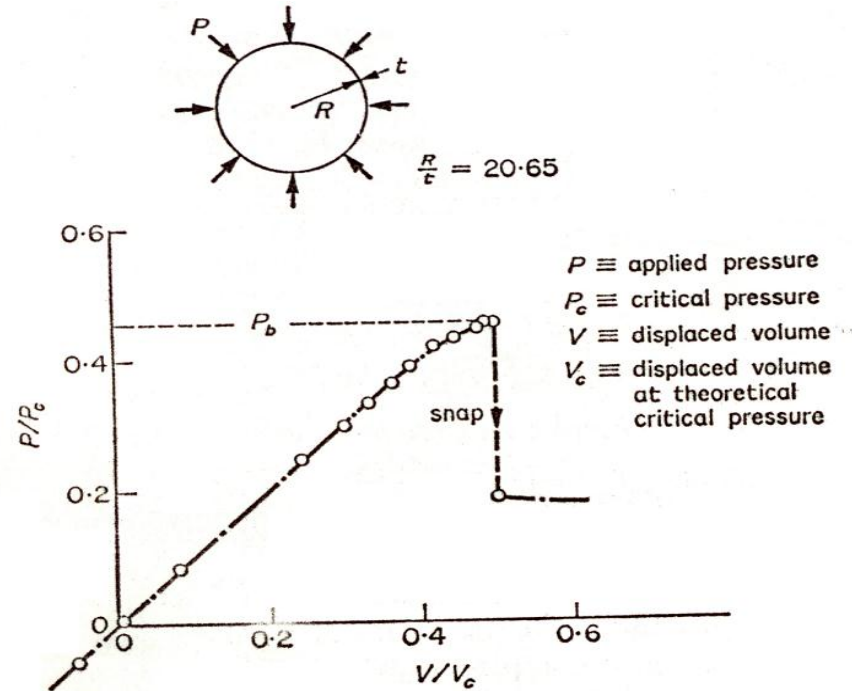
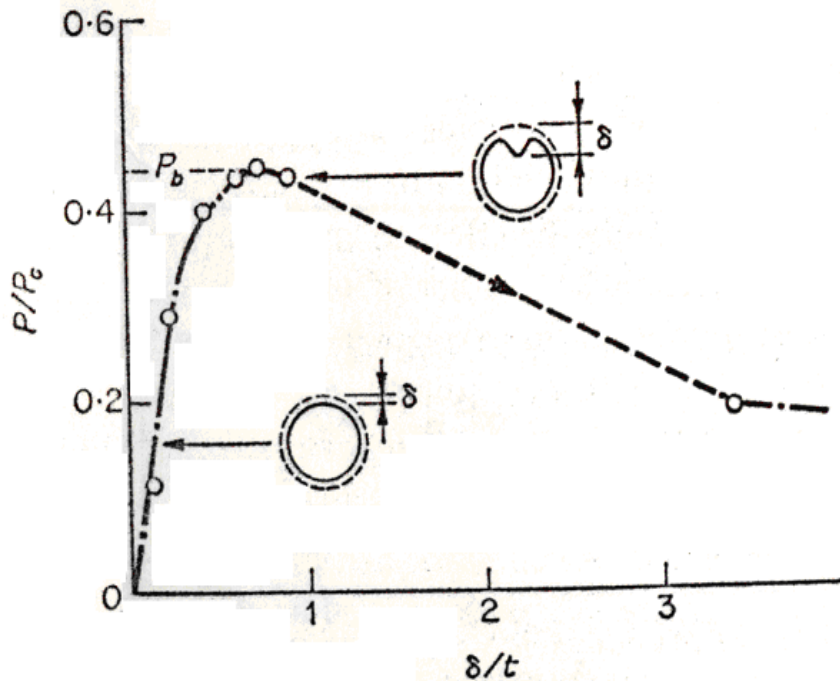
### ۲- پوسته کروی جدار نازک تحت اثر بارگذاری فشاری (Thin spherical shell under pressure loading)



رفتار دوشاخگی متقارن ناپایدار در یک پوسته کروی جدار نازک تحت بارگذاری فشاری

## فصل دوم: رده بندی پدیده های ناپایداری

### ۳- پوسته کروی جدار نازک تحت فشار هیدروستاتیکی



رفتار دوشاخگی متقارن ناپایدار در یک پوسته کروی  
جدار نازک تحت فشار هیدروستاتیکی

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

۴-۳- دوشاخگی نامتقارن (Asymmetric Bifurcation)  
الف - تعریف کلی :

تاکنون مشخصات مدل های سازه ای را مورد بررسی قرار داده ایم که یک رفتار دو شاخگی متقارن (اعم از پایدار یا ناپایدار) را از خود نشان می دهند .

مفهوم تقارن بدین معنی بود که رفتار سازه بسته به این که با دوران مثبت یا دوران منفی تغییر شکل یابد ، تغییری نمی کرد و در هر دو حالت رفتار متقارنی داشت .

تقارن مذکور در واقع ناشی از سه نوع تقارن بود :

تقارن در هندسه Symmetry of Geometry

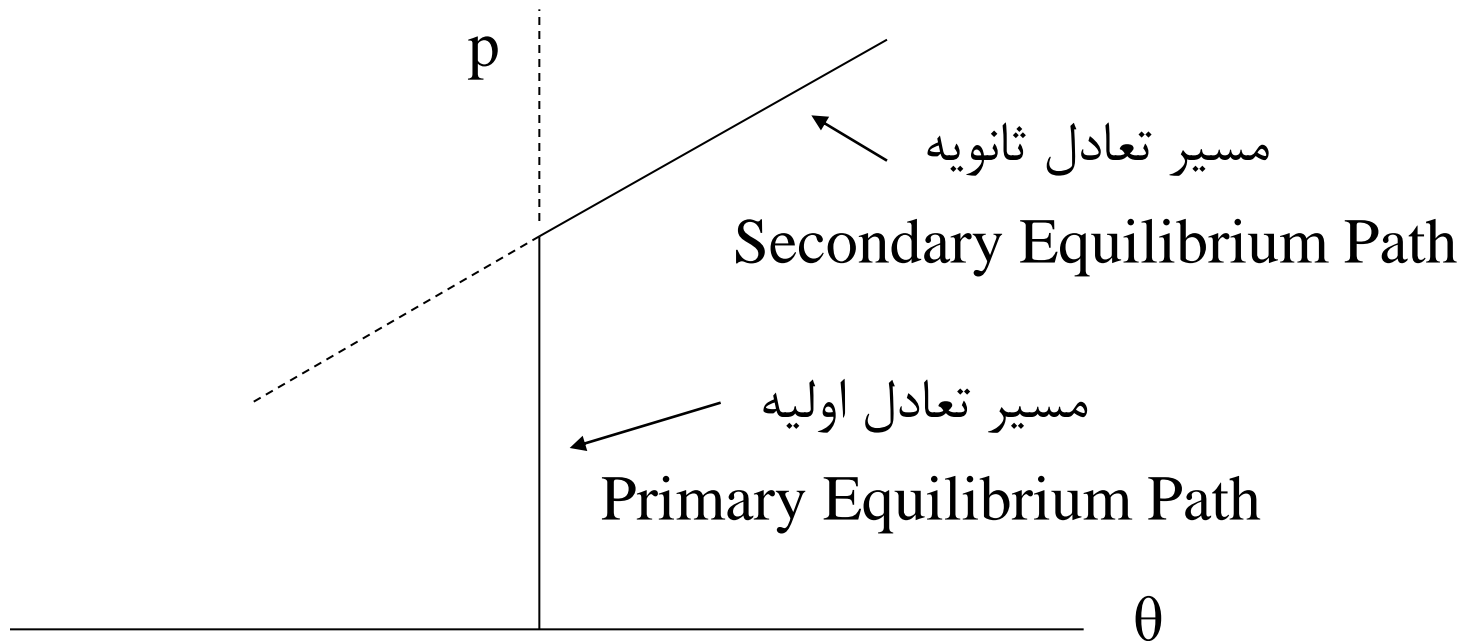
تقارن در بارگذاری Symmetry of Loading

تقارن در تغییرشکل Symmetry of Deformation

طبیعی است که اگر تقارن در هندسه یا تقارن در بارگذاری نقض شود ، در این صورت مدل سازه ای ، رفتار دو شاخگی متقارن را از خود نشان نخواهد داد .

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

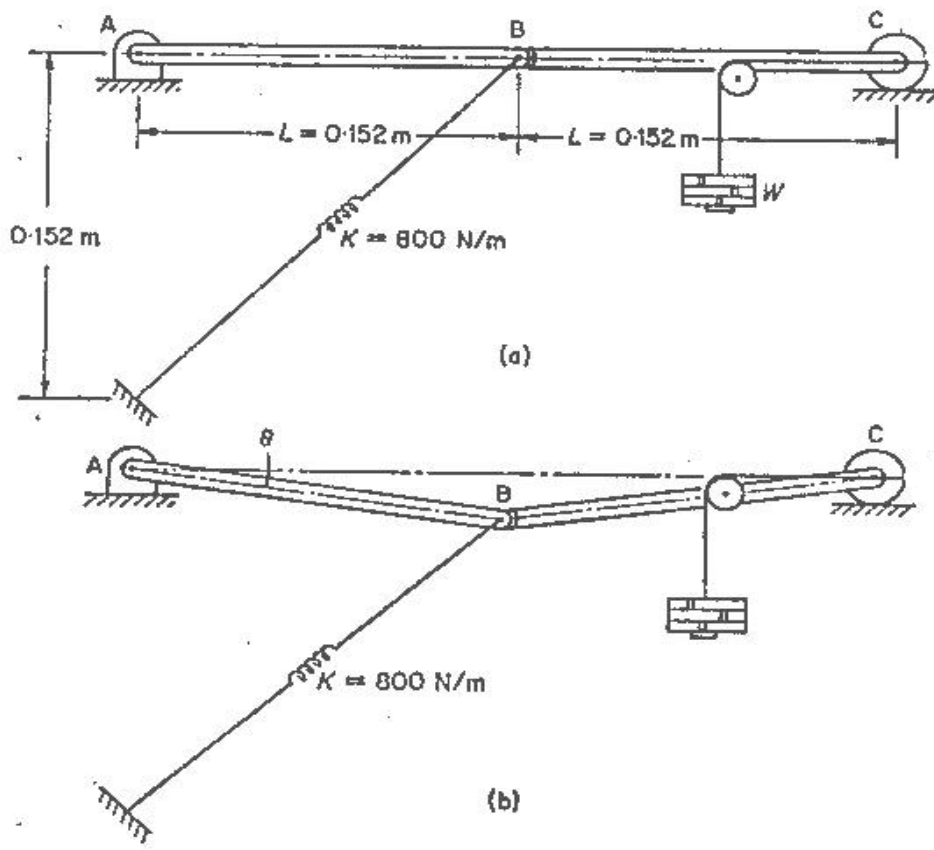
بنابراین در مدل های سازه ای که رفتار دوشاخگی نامتقارن را از خود بروز می دهند، رفتار سازه دقیقا بستگی به نحوه تغییر شکل سازه خواهد داشت و بسته به جهات متفاوت تغییر شکل، رفتار های متفاوتی را از خود نشان خواهد داد.



بنابراین انتظار می رود که به ازای تغییر شکل های مثبت ( $\theta > 0$ ) و ناکاملی اولیه مثبت ( $\theta_0 > 0$ )، مسیر تعادل همواره پایدار باشد. همانگونه که در مدل های سازه ای ناکامل با رفتار دو شاخگی متقارن پایدار، این چنین رفتاری را مشاهده می نمایم.

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

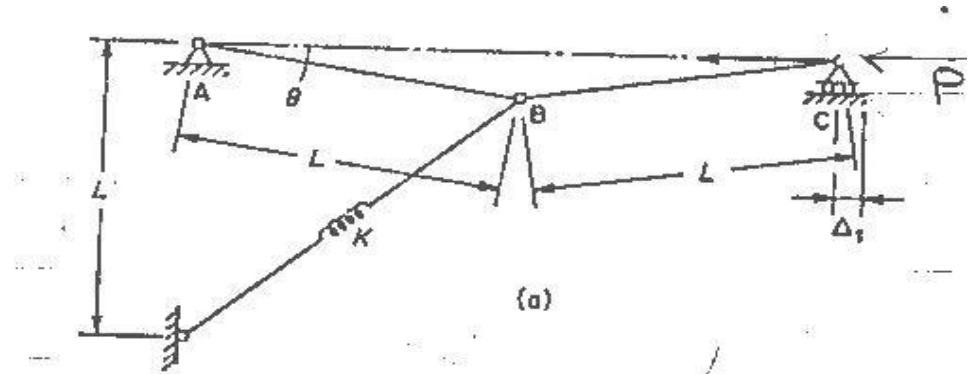
همچنین انتظار می رود که به ازای تغییر شکل های منفی ( $\theta < 0$ ) و ناکاملی اولیه منفی ( $\theta_0 < 0$ )، مسیر تعادل از نقطه بحرانی به بعد ناپایدار گردد، به گونه ای که در مدل های سازه ای ناکامل با رفتار دو شاخگی متقارن ناپایدار یا مدل های سازه ای با رفتار ناپایداری حدی، این چنین رفتاری را مشاهده می نماییم و پرش دینامیکی (Dynamic Jump) حتماً در این مدل سازه ای رخ خواهد داد.



ب - مدل سازه ای آزمایشگاهی

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

پ - اعمال روش انرژی برای بررسی پایداری مدل سازه ای (در حالت بارگذاری نیرویی)  
 در مدل ریاضی مربوط به مدل فیزیکی سازه ای مورد نظر، تغییر زاویه  $\theta$  برای تعریف تغییر مکان افقی تکیه گاه غلتکی  $C$  ( $\Delta_1$ ) و تغییر طول فنر متصل به  $B$  ( $\Delta_2$ ) کافی است.



$$\Delta_1 = 2L(1 - \cos \theta)$$

$$\Delta_2 = \sqrt{2}L[1 - (1 - \sin \theta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

تابع انرژی پتانسیل کلی عبارت است از :

$$\Pi = u - w$$

$$u = \frac{1}{2} K \Delta_2^2$$

$$w = P \Delta_1$$



## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} K \Delta_2^2 - P \Delta_1$$

$$\Pi = KL^2 [2 - \sin \theta - 2(1 - \sin \theta)^{\frac{1}{2}}] - 2PL(1 - \cos \theta)$$

برای یافتن معادلات تعادل و مسیرهای تعادل ، مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کلی را مساوی صفر قرار می دهیم :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$$

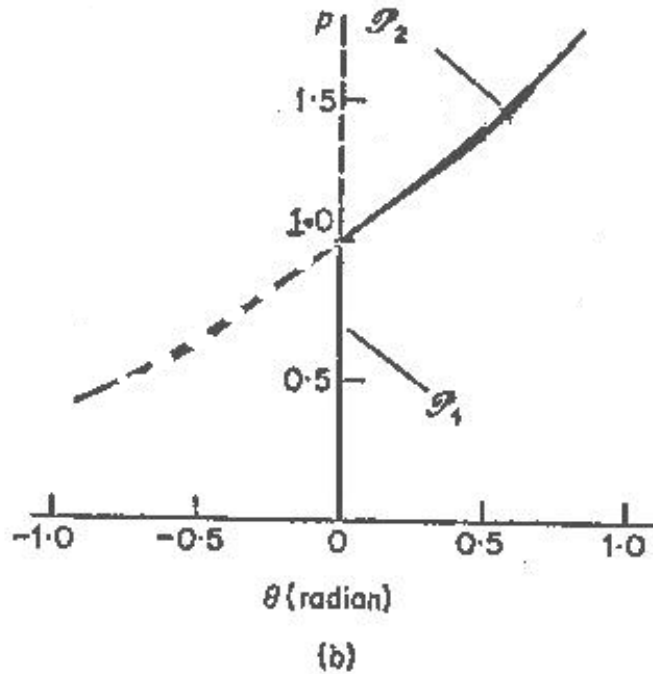
$$\Rightarrow KL^2 [\cos \theta (1 - \sin \theta)^{-\frac{1}{2}} - \cos \theta] - 2PL \sin \theta = 0$$

بافرض  $p = \frac{4P}{KL}$  ، معادله تعادل مذکور منجر به دو مسیر تعادل زیر می شود :

$$\theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{مسیر}$$

$$p = 2 \cot \theta \left[ \frac{1}{(1 - \sin \theta)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \quad \longrightarrow \quad \text{مسیر}$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری



دو مسیر  $\phi_1$  و  $\phi_2$  در شکل  
زیر نمایش داده شده اند :

برای بررسی پایداری مسیر های تعادل سیستم سازه ای از مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل کلی استفاده می کنیم :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = -KL^2 \sin \theta [(1 - \sin \theta)^{-\frac{1}{2}} - 1] + \frac{KL^2}{2} \cos^2 \theta (1 - \sin \theta)^{-\frac{3}{2}} - 2PL \cos \theta$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

اگر مشتق دوم مذکور را در روی مسیر تعادل  $\varphi_1$  (یعنی  $\theta = 0$ ) مورد بررسی قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \Big|_{\varphi_1} = \frac{KL^2}{2} (1-p) \begin{cases} p < 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} > 0 & \text{پایدار} \\ p = 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0 & \text{بحرانی} \\ p > 1 \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} < 0 & \text{ناپایدار} \end{cases}$$

اگر مشتق دوم مذکور را در روی مسیر  $\varphi_2$  (یعنی  $p = 2 \cot \theta \left[ \frac{1}{(1 - \sin \theta)^2} - 1 \right]$ ) مورد بررسی قرار دهیم ، خواهیم داشت :

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

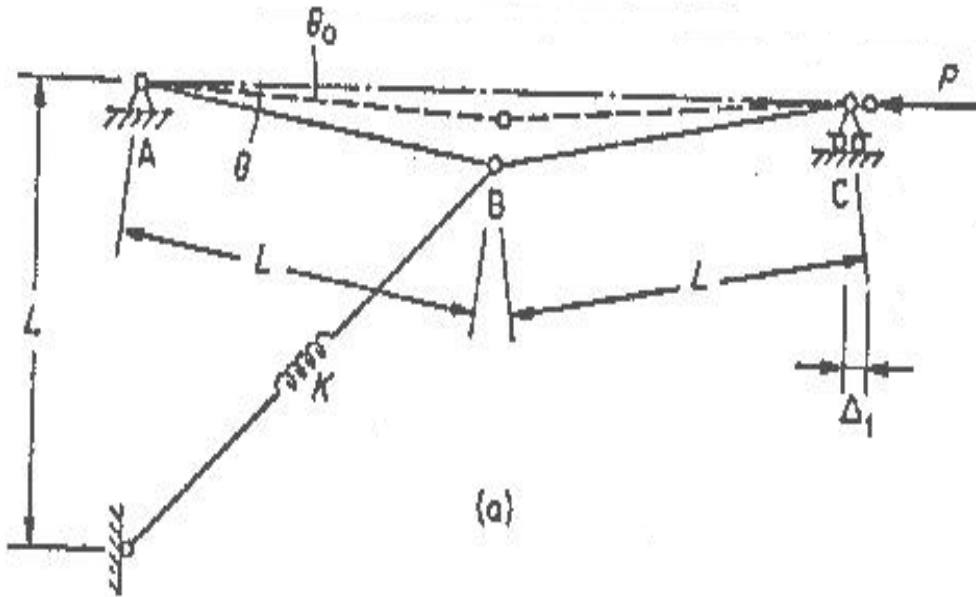
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \Big|_{\varphi_2} &= -KL^2 \sin \theta [(1 - \sin \theta)^{-\frac{1}{2}} - 1] + \frac{KL^2}{2} \cos^2 \theta (1 - \sin \theta)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad - KL^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \left[ \frac{1}{(1 - \sin \theta)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \Big|_{\varphi_2} = \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow & \text{حالت پایدار} & \Leftrightarrow \theta > 0 \\ = 0 \Leftrightarrow & \text{حالت بحرانی} & \Leftrightarrow \theta = 0 \\ < 0 \Leftrightarrow & \text{حالت ناپایدار} & \Leftrightarrow \theta < 0 \end{cases}$$

## فصل دوم: رده بندی پدیده های ناپایداری

ت) اثر ناکاملی اولیه:

برای مدل سازه ای مورد نظر، یک ناکاملی هندسی را فرض می کنیم، به عبارتی ناکاملی هندسی  $\theta_0$  را به عنوان یک انحراف از هندسه کامل بارگذاری نشده - به صورتی که در شکل روبرو نشان داده شده است - در نظر می گیریم:



برای مدل ناکامل  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\Delta_1 = 2L(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\Delta_2 = \sqrt{2}L[(1 - \sin \theta_0)^{\frac{1}{2}} - (1 - \sin \theta)^{\frac{1}{2}}]$$

از جایگذاری  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  در تابع انرژی پتانسیل کلی، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\Pi\{\theta \quad \theta_0 \quad p\} = KL^2[(1 - \sin \theta_0)^{\frac{1}{2}} - (1 - \sin \theta)^{\frac{1}{2}}]^2 - 2PL(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

برای تحلیل سیستم ناکامل ، جهت ساده سازی محاسبات ، تقریب سازی های زیر را مورد استفاده قرار می دهیم :

$$\sin \theta \cong \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$$

$$\sin \theta_0 \cong \theta_0$$

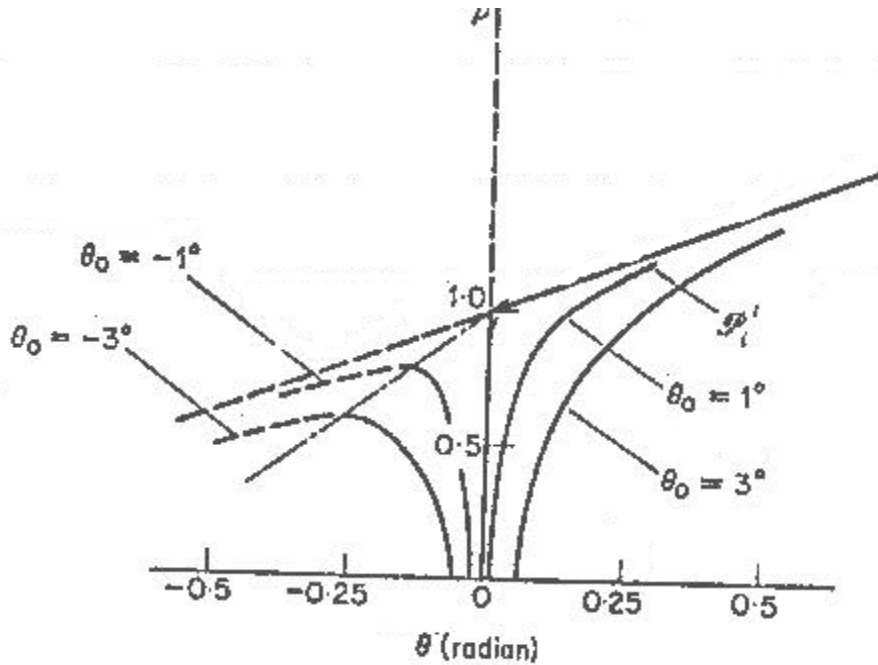
$$\cos \theta_0 \cong 1$$

با جایگذاری روابط مذکور در تابع و با در نظر گرفتن  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$  معادله تعادل سیستم ناکامل بدست آمده و از معادله تعادل مذکور ، معادله تعادل مسیر  $\varphi_i$  به صورت زیر به دست می آید :

$$p = \frac{1}{\theta} \left( \theta - \theta_0 - \frac{1}{2} \theta_0 \theta + \frac{3}{4} \theta^2 \right)$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

اگر نمودار معادله مذکور را به ازای مقادیر مختلف  $\theta_0$  رسم نماییم نتیجه زیر حاصل می شود :



چند نکته مهم در مدل ناکامل قابل توجه می باشد :

الف ) نحوه تغییر شکل سیستم سازه ای ناکامل تابع جهت ناکاملی اولیه می باشد و علامت هر دو یکسان است .

ب ) در سیستم ناکامل اثری از نقطه دو شاخگی نیست و تنها بایک مسیر تعادل مواجه هستیم که در واقع در عمل نیز با چنین حالتی روبرو خواهیم شد .

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

پ ( سیستم ناکامل با ناکاملی اولیه مثبت ( $\theta_0 > 0$ ) دارای مسیر تعادل پایدار می باشد، همان گونه که در مدل های سازه ای ناکامل با رفتار دو شاخگی متقارن پایدار، با چنین وضعی مواجه هستیم .

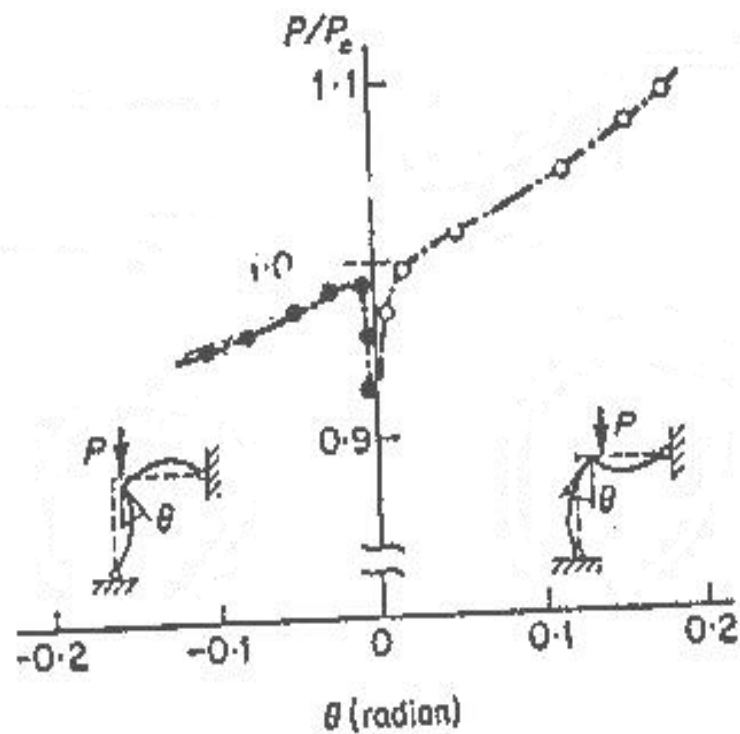
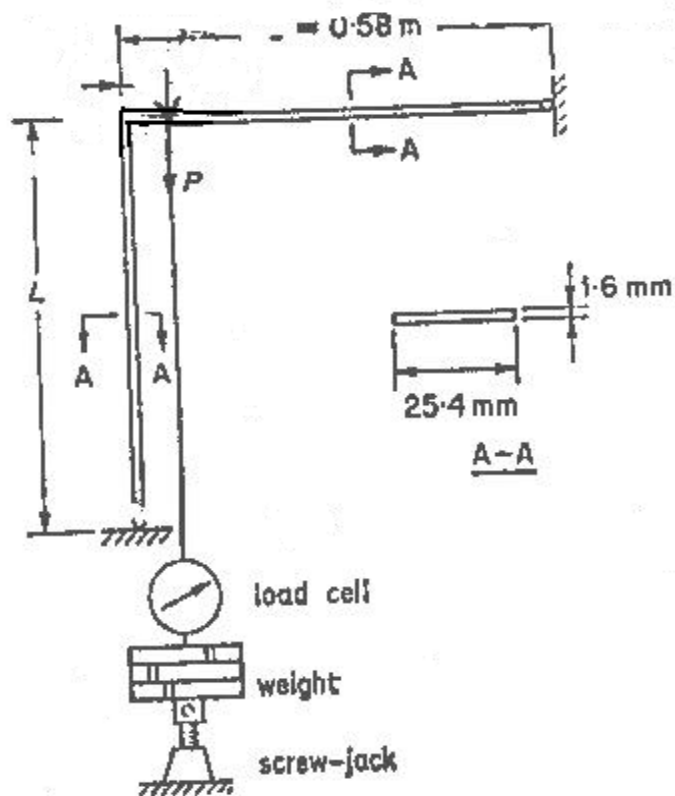
ت ( سیستم ناکامل با ناکاملی اولیه ( $\theta_0 < 0$ ) دارای مسیر تعادل ( از نقطه بحرانی به بعد ) ناپایدار می باشد ، همان طور که در مدل های سازه ای ناکامل با رفتار دو شاخگی متقارن ناپایدار، با چنین وضعی مواجه هستیم. در حالت بارگذاری نیرویی، از نقطه بحرانی که نقطه مربوط به ماکزیمم بار می باشد یک پرش دینامیکی رخ خواهد داد. مقدار بار بحرانی حساسیت بسیار به مقدار ناکاملی اولیه دارد. بنابراین سازه هایی که این چنین رفتاری را از خود نشان می دهند ، حساس به ناکاملی می باشند .



## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

ث ( مدل های سازه ای واقعی :

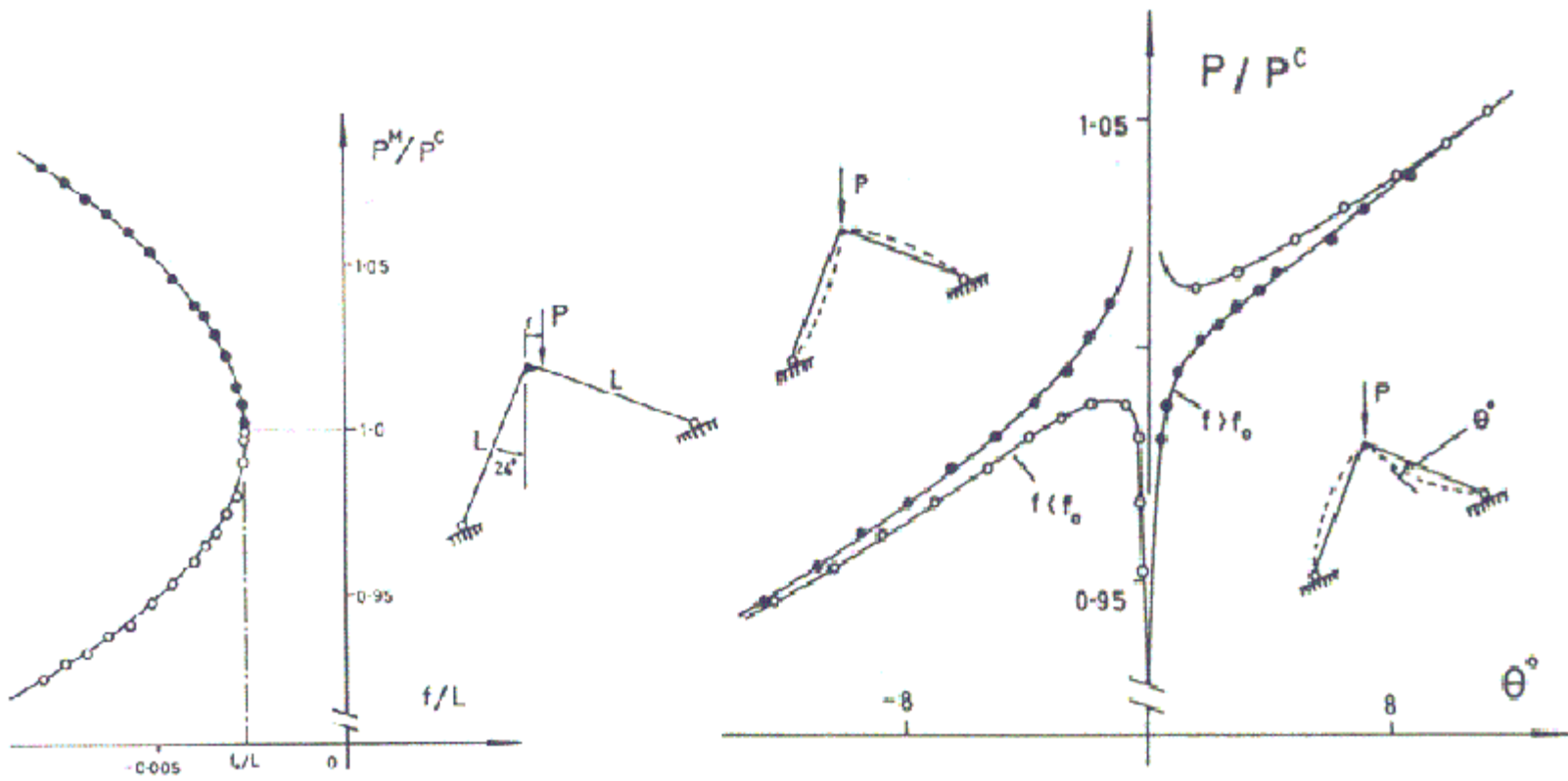
۱ - قاب دو عضوی با تکیه گاه های ساده



## فصل دوم: رده بندی پدیده های ناپایداری

ث) مدل های سازه ای واقعی:

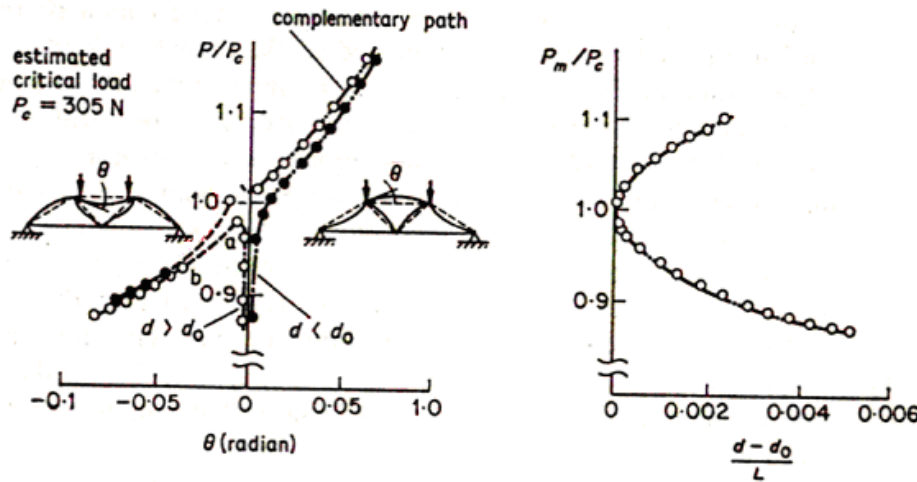
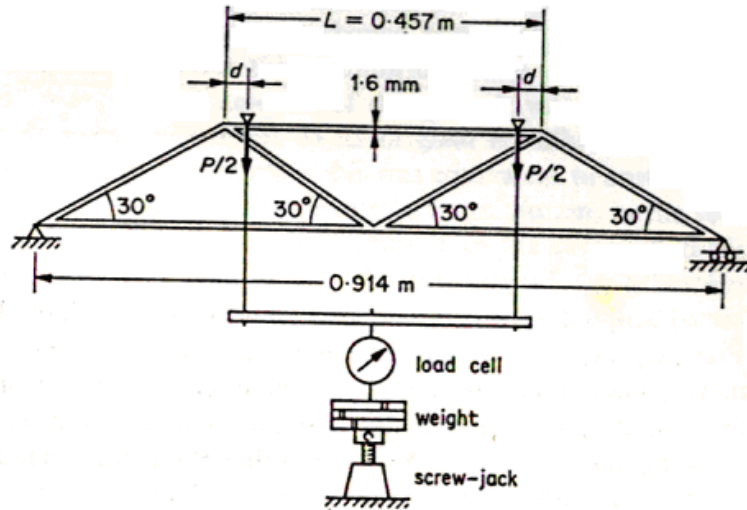
۱- قاب دو عضوی با تکیه گاه های ساده



رفتار دوشاخگی نامتقارن در یک قاب تحت بارگذاری فشاری

## فصل دوم: رده بندی پدیده های ناپایداری

۲ - خریای پل :



رفتار دوشاخگی نامتقارن در یک خریا تحت بارگذاری فشاری

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

### ۴ - بررسی ناپایداری سیستم های با چند درجه آزادی (به صورت تحلیلی) Multi - Degree of Freedom System (الف) مقدمه :

سیستم های با چند درجه آزادی، سیستم هایی هستند که حالت تعادل آنها با چند متغیر حالت مشخص می شود .

بررسی پایداری سیستم های چند درجه آزادی، نسبتاً پیچیده می باشد ولی بررسی مذکور، نکات بسیار جالبی را در مورد پایداری سیستم های چند درجه آزادی، بارهای بحرانی و مد های کمانش به دست می دهد.

در بررسی پایداری سیستم های با چند درجه آزادی از قضیه مشهور لاگرانژ - دیریکلت (Lagrange - Dirichlet Theorem) استفاده خواهیم نمود .

ب) معیار پایداری سیستم های با چند درجه آزادی ( با استفاده از قضیه Lagrange-Dirichlet )  
یک سیستم با  $n$  درجه آزادی را در نظر می گیریم .

$n$  متغیر مستقل  $u_1, u_2, \dots, u_n$  که مختصات تعمیم یافته نامیده می شوند ، حالت تعادل سیستم را در هر لحظه از زمان مشخص خواهند نمود .

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

تابع انرژی پتانسیل کلی یک سیستم الاستیک در واقع تابعی از مختصات تعمیم یافته است . اگر تابع مذکور را با استفاده از سری بسط تیلور حول حالت تعادل  $E\{u_i, p\} = E\{0, p\}$  بسط دهیم خواهیم داشت ( در واقع  $u_i$  مقدار انحراف در متغیر حالت  $i$ ام نسبت به حالت تعادل فرض شده است یعنی در حالت تعادل  $u_i=0$  است):

$$\Pi\{u_i, p\} = \Pi|_E + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \Big|_E u_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_E u_i u_j + \dots$$

$$\Pi|_E = \Pi(0,0,\dots,0) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \Big|_E = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} (0,0,\dots,0)$$

مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کلی نسبت به متغیرهای حالت مساوی صفر می باشد زیرا بنا به اصل مینیمم انرژی پتانسیل، سیستم زمانی در حال تعادل است که در اثر اختلال کوچک دلخواه هیچ تغییری در انرژی پتانسیل کلی سیستم ایجاد نشود :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \Big|_E = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

بنابراین تغییر در انرژی پتانسیل کلی عبارت است از :

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_E u_i u_j + \dots$$

اگر تغییر در انرژی پتانسیل کلی را محدود به فرم درجه دوم کنیم و از درجات بالاتر صرف نظر کنیم در نهایت نتیجه زیر حاصل می شود :

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_E u_i u_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot u_i \cdot u_j$$

$$, a_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j} \right] \Big|_E$$

شرط پایداری سیستم چند درجه آزادی عبارت است از :

$$\Delta \Pi > 0$$

شرط افزایش انرژی پتانسیل برای ایجاد یک اختلال کوچک

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

مقادیر  $(i = 1, \dots, n \text{ و } j = 1, \dots, n)$  را می توان به عنوان درایه های یک ماتریس  $n \times n$  در نظر گرفت که آن را با  $A$  نشان می دهیم . در این صورت خواهیم داشت :

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} U^T A U$$

که در آن :

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad \Delta\Pi$$

مشخص است که هنگامی مثبت است که  $A$  یک ماتریس معین مثبت باشد و  $A$  هنگامی معین مثبت است که دترمینان ماتریس و دترمینان های کلیه ماینورهای اصلی (Principle Minors) مثبت باشند .

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

ماتریس برای یک سیستم با دو درجه آزادی عبارت است از :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2^2} \end{vmatrix}$$

و برای یک سیستم با سه درجه آزادی داریم :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial u_3} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2 \partial u_3} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3 \partial u_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3 \partial u_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3^2} \end{vmatrix}$$



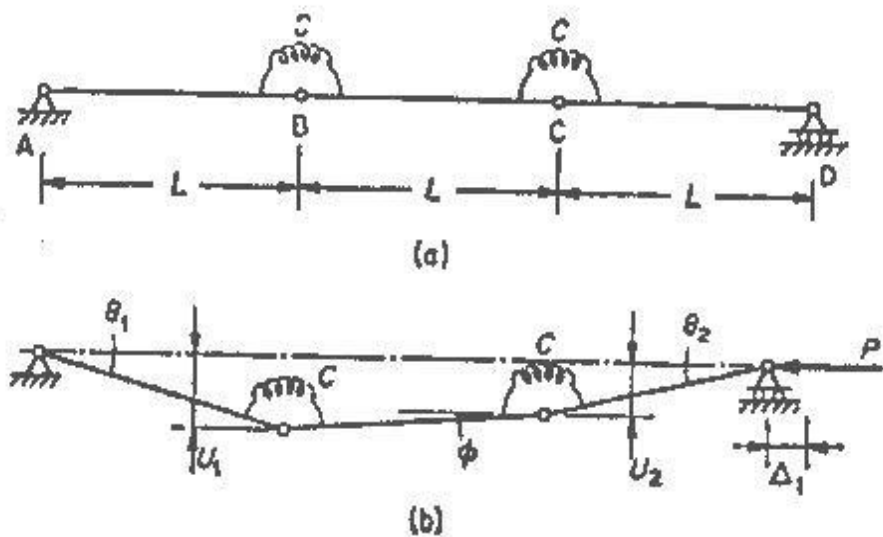
## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

بنابراین معیار پایداری یک سیستم با دو درجه آزادی عبارت است از :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \cdot \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \cdot \partial u_2} > 0$$



پ - مثال یک سیستم با دو درجه آزادی :

سیستم مذکور دارای دو درجه آزادی مستقل است.  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را به عنوان متغیرهای حالت یا مختصات تعمیم یافته سیستم در نظر می گیریم.

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

زاویه دوران میله میانی را با  $\Phi$  نشان می دهیم که بر حسب دو متغیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  به صورت زیر بیان می شود:

$$\sin \phi = \frac{U_1 - U_2}{L} = \sin \theta_1 - \sin \theta_2$$

$$\Pi = u - w$$

$$u = \frac{1}{2} C(\theta_1 + \phi)^2 + \frac{1}{2} C(\theta_2 - \phi)^2$$

$$w = P\Delta_1 = PL(3 - \cos \theta_1 - \cos \phi - \cos \theta_2)$$

با فرض  $\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$  خواهیم داشت :

$$\Pi = \frac{1}{2} C(10 - 2p)\theta_1^2 + C(-8 + p)\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2} C(10 - 2p)\theta_2^2$$

$p = \frac{2PL}{C}$  : که در آن داریم :

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

معادلات تعادل سیستم را از  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0$  و  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0$  به صورت زیر بدست می آوریم :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow C(10 - 2p)\theta_1 + C(-8 + p)\theta_2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow C(-8 + p)\theta_1 + C(10 - 2p)\theta_2 = 0$$

شرط پایداری سیستم عبارت است از :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} = 10 - 2p > 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} = 10 - 2p > 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \cdot \partial \theta_2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \cdot \partial \theta_2} > 0 \Rightarrow (10 - 2p)^2 - (-8 + p)^2 > 0$$

$$\Rightarrow (2 - p)(6 - p) > 0$$

(c)

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

سه شرط (a) و (b) و (c) به ازای  $p < 2$  ارضا می شوند. دترمینان در  $p = 2$  و  $p = 6$  مساوی صفر است که در واقع مقادیر بحرانی را بدست میدهد. به عبارت دیگر داریم :

$$p = \frac{2PL}{C}, p = 2, p = 6$$

$$\Rightarrow P_{cr1} = \frac{C}{L}, P_{cr2} = \frac{3C}{L}$$

اگر معادلات تعادل را به صورت زیر بنویسیم :

$$\begin{bmatrix} 10 - 2p & -8 + p \\ -8 + p & 10 - 2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

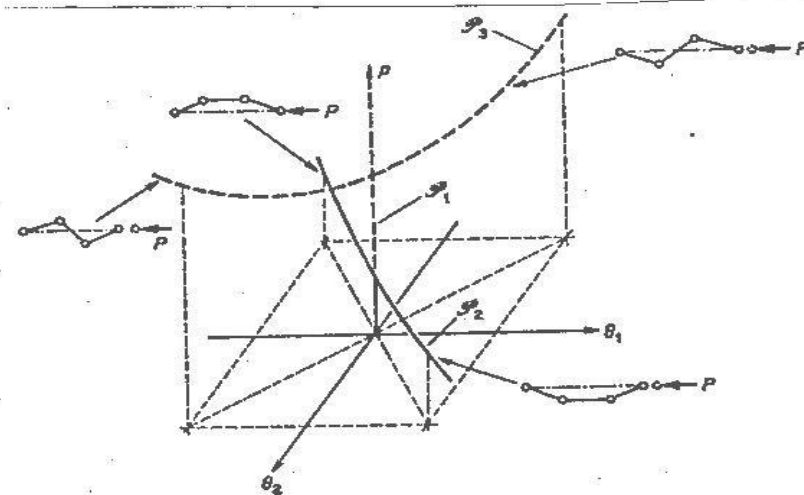
که در واقع یک ویژه مسئله (EigenProblem) است که ویژه مقادیر (EigenValues) آن  $p = 2$  و  $p = 6$  و ویژه بردارهای (EigenVectors) آن عبارت است از :

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

$B_2 = [1, -1]$  و  $B_1 = [1, 1]$  .  $p = 2$  و  $p = 6$  بارهای بحرانی و  $B_1$  و  $B_2$

در واقع همان مدهای کمانش می باشند . این شکل های مود را در زیر نشان می دهیم .  
مسیر تعادل  $\varphi_1$  ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ) که به ازای  $p < 2$  پایدار و  $p = 2$  حالت بحرانی تعادل و  $p > 2$  ناپایدار می باشد .

مسیر تعادل  $\varphi_2$  که همواره پایدار بوده و نقطه  $(\theta_1, \theta_2, p) = (0, 0, 2)$  نقطه دوشاخگی متقارن پایدار می باشد . می توان نشان داد که مسیر تعادل دارای معادله زیر است :



$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 \\ p = 2 + \frac{1}{3} \theta_1^2 \end{cases}$$

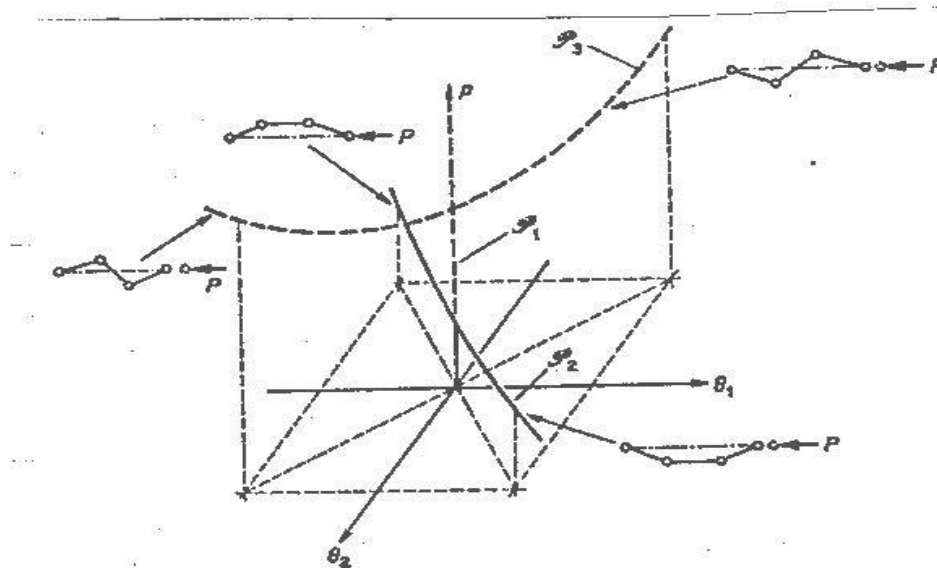
لازم به ذکر است که این مسیر تعادل بیانگر مد تغییر مکان متقارن بوده و در واقع مد کمانش در این مسیر متقارن می باشد .

## فصل دوم : رده بندی پدیده های ناپایداری

می توان نشان داد که مسیر تعادل  $\varphi_3$  دارای معادله زیر است :

$$\begin{cases} \theta_2 = -\theta_1 \\ p = 6 + 3\theta_1^2 \end{cases}$$

این مسیر تعادل بیانگر یک مد تغییر شکل پادمتقارن (Antisymmetric) بوده و در واقع مد کمانش در این مسیر پاد متقارن می باشد و نقطه  $(\theta_1, \theta_2, p) = (0, 0, 6)$  یک نقطه دو شاخگی متقارن بوده که در آن سختی پس بحرانی (Post-Critical Stiffness) افزایش می یابد .



## فلوچارت تشخیص نوع ناپایداری در تحلیل ناپایداری سازه ها

یک سازه  $N$  درجه آزادی با الگوی بارگذاری مشخص و هندسه معلوم در دست می باشد .  
مراحل تشخیص نوع ناپایداری این سازه در یک تحلیل ناپایداری به شکل یک فلوچارت در زیر آورده شده است :

تحلیل غیرخطی هندسی و مصالح با اعمال کنترل تغییرمکان  
( مثلاً با استفاده از روش Arc-Length Method )

استخراج رفتار بار - تغییرمکان سازه Perfect

محاسبه دترمینان ماتریس سختی سازه در هر تراز بارگذاری .  
در یک تراز بار این دترمینان صفر یا منفی خواهد شد

اعمال تغییرمکان را ادامه می دهیم

چنانچه با افزایش تغییرمکان ، بار کاهش پیدا کند ناپایداری نقطه حدی خواهیم داشت

پایان

اگر با افزایش تغییرمکان ، افزایش بار داشته باشیم ناپایداری از نوع دو شاخگی خواهد بود

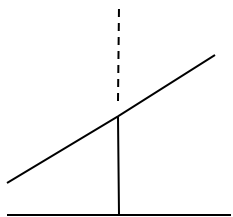
انجام تحلیل Linear Buckling Analysis  
و استخراج مودهای کمانش سازه

اعمال مود کمانش غالب در دو جهت به سازه  
Perfect و ایجاد سازه Imperfect



# تحليل غير خطي هندسي و مصالح سازه Imperfect و استخراج رفتار بار - تغييرمکان سازه در هر دو جهت

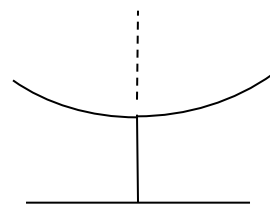
چنانچه سازه در دو جهت مختلف رفتار یکسانی نداشته باشد، ناپایداری از نوع دو شاخگی نامتقارن می باشد



پایان

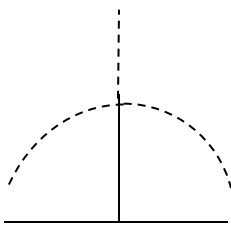
چنانچه سازه در دو جهت مختلف رفتار یکسانی داشته باشد، ناپایداری از نوع دو شاخگی متقارن می باشد

چنانچه مسیر دوم تعادل پایدار باشد، ناپایداری از نوع دو شاخگی متقارن پایدار است



پایان

چنانچه مسیر دوم تعادل ناپایدار باشد، ناپایداری از نوع دو شاخگی متقارن ناپایدار است



پایان



## فصل سوم

# پایداری ستون ها (و تیرستون ها)

# ۱- مقدمه

در این فصل پایداری اعضای سازه ای ( structural members ) یک بعدی (one dimensional) که تحت اثر نیروهای تعمیم یافته از جمله نیروهای فشاری محوری قرار دارند مورد بررسی قرار می گیرند.

این اعضای سازه ای عبارتند از :

1. ستون ها (Columns)

2. میله های فشاری (Comperssive struts)

3. تیرستونها ( Beam-Columns )

- ستونها ، اعضای سازه ای یک بعدی هستند که عمدتاً تحت اثر نیروهای فشاری محوری بوده و غالباً تحت اثر توام نیروی فشاری و لنگر خمشی می باشند .
- میله های فشاری ، اعضای سازه ای یک بعدی می باشند که عمدتاً تحت اثر نیروهای محوری بوده و جزء اعضای سازه ای خرپا ها یا میل مهار فشاری می باشند.
- تیر ستونها ، اعضای سازه ای یک بعدی هستند که علاوه بر نیروهای فشاری محوری، تحت اثر نیروهای جانبی و لنگر خمشی انتهایی نیز می باشند.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

• بررسی پایداری ستون ها و (تیرستون ها)، مقدمه ای بر بررسی پایداری قابها (Frames) بوده و مبانی پایه ای بررسی مذکور را فراهم می کند.

## ۲- بررسی پایداری ستون اولر

فرض می کنیم که عضو تحت اثر بار محوری نشان داده شده در شکل زیر، دارای یک سطح مقطع ثابت بوده و از مصالح همگن ساخته شده باشد :

ضمناً فرضیات زیر در نظر گرفته می شود :

الف) عضو در دو انتها دارای تکیه گاه های ساده است. تکیه گاه پایین ثابت است و انتهای بالایی طوری نگه داشته می شود که حرکت دورانی و حرکت در امتداد قائم به طور آزاد ممکن باشد و حرکت در امتداد افقی غیر ممکن.

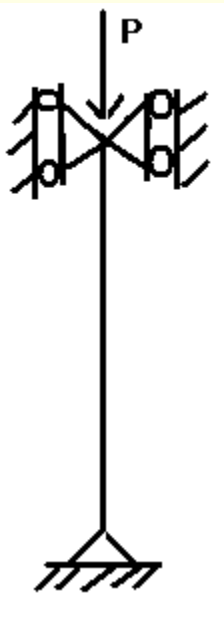
ب) عضو کاملاً قائم است و بار در امتداد مرکز سطح وارد می شود.

پ) ماده ساختمانی از قانون هوک پیروی می کند (مصالح ارتجاعی).

ت) تغییر شکل های عضو به اندازه کافی کوچک هستند. به طوری که جمله  $(y')^2$  در مقایسه با واحد در رابطه انحناء  $y''$  تقریب می شود.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

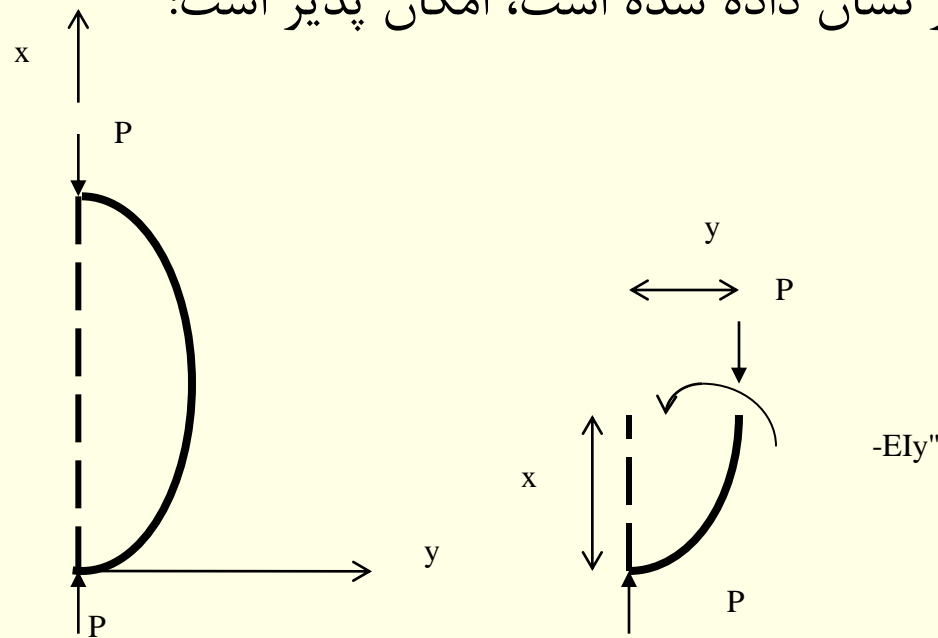
قابل صرف نظر است. لذا انحناء با



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### الف) کاربرد تعادل خنثی برای بررسی پایداری ستون

در یک سازه ضمن انتقال از حالت تعادل پایدار به حالت تعادل ناپایدار، یک حالت تعادل خنثی وجود دارد. باری که تحت اثر آن حالت تعادل خنثی پدید می آید بار بحرانی نامیده می شود. بنابراین بار بحرانی باری است که تحت اثر آن تعادل ستون در حالت خمیده به گونه ای که در شکل زیر نشان داده شده است، امکان پذیر است:



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

لنگر مقاوم داخلی در هر مقطع، در فاصله  $x$  از مرکز برابر است با:

$$M_x = -\frac{EI}{\rho} \Rightarrow M_x = -EIy''$$

با در نظر گرفتن تعادل این لنگر با لنگر خمشی خارجی وارده  $Py$ ، معادله دیفرانسیل زیر بدست می آید:

$$EIy'' + Py = 0$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت می باشد. طبیعی است که اگر فرضیات رفتار ارتجاعی و تغییر شکل های کوچک درست نباشند، مدول  $E$  متغیر خواهد بود و انحناء جایگزین  $y''$  می شود و لذا یک معادله دیفرانسیل به دست می آید که نه  $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$  ضرایب ثابت دارد و نه با یک رابطه خطی سر و کار داریم.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

اگر فرض کنیم:

بدین ترتیب معادله دیفرانسیل به صورت معادله زیر در می آید:

$$y'' + k^2 y = 0$$

از معادلات دیفرانسیل به یاد داریم که حل عمومی این معادله به صورت زیر می باشد:

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

برای ارزیابی ضرایب ثابت  $A$  و  $B$  از شرایط مرزی زیر استفاده می کنیم:

$$x=0$$

$$x=l$$

$$y=0$$

و

$$y=0$$



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$B = 0 \Rightarrow y = A \sin kx$$

از جایگذاری شرط اول خواهیم داشت:

$$A \sin kl = 0$$

از جایگذاری شرط دوم خواهیم داشت:

این رابطه می تواند در یکی از دو حالت زیر ارضا شود:

$$A=0$$

$$\sin kl=0$$

اگر  $A=0$  باشد  $k$  و در نتیجه  $P$  می تواند هر مقداری را دارا باشد. این نتیجه به عنوان جواب بدیهی شناخته می شود، زیرا آنچه را که قبلاً معلوم بوده است تأیید می کند. یعنی تا وقتی که ستون تحت هر بار  $P$ ، کاملاً قائم باقی بماند، در حال تعادل است.

اگر  $\sin kl=0$  باشد در این صورت خواهیم داشت:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$kl = n\pi \quad \text{و} \quad n = 1, 2, \dots$$

نتایج زیر حاصل می شوند ( بارهای بحرانی و منحنی تغییر

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad \text{با داشتن}$$

شکل):

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}, \quad y = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

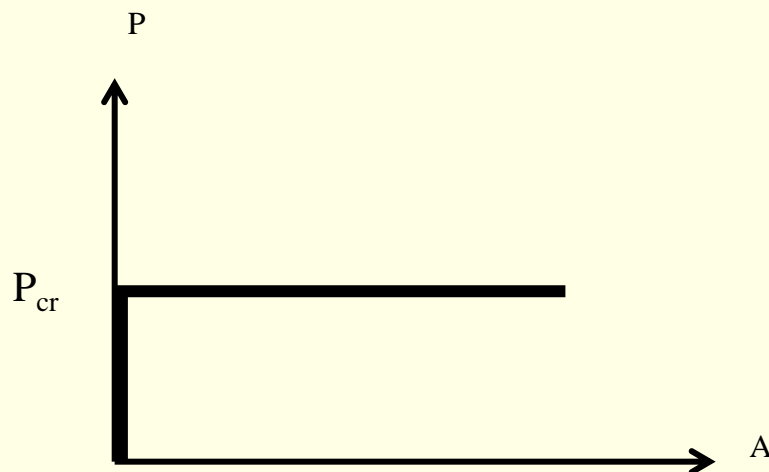
در بارهای  $P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$  ستون می تواند در حال تعادل باشد.

منحنی تغییر شکل مذکور با  $y = A \sin \frac{n\pi x}{l}$  مشخص می شود. ولی دامنه آن نامعین است، چون وقتی  $\sin kl = 0$  باشد،  $A$  می تواند هر مقداری را دارا باشد.

مقدار  $P$  که با قرار دادن  $n=1$  به دست می آید، به بار اولر معروف است (  $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  ) که کمترین مقداری است که در آن یک حالت تعادل خنثی ممکن است وجود داشته باشد. بنابراین کوچک ترین باری است که تحت اثر آن، ستون از حالت تعادل پایدار خارج می شود.

رفتار ستون اولر در شکل صفحه بعد دیده می شود:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



شکل مذکور نشان می دهد که قبل از رسیدن به بار اولر، ستون باید قائم بماند. تحت اثر بار اولر، یک دوشاخگی (Bifurcation) در تعادل وجود دارد، یعنی ستون می تواند قائم بماند و یا تغییر شکل یافته و دامنه نامعین به خود بگیرد. این رفتار معلوم می کند که یک حالت تعادل خنثی تحت اثر بار اولر وجود دارد. بنابراین بار اولر، انتقال از حالت تعادل پایدار به حالت تعادل ناپایدار را تعیین می کند.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

بار اولر حاصل از تحلیل مذکور، گاهی به عنوان بار بحرانی و گاهی به عنوان بار کمانش نامبرده می شود. ولی در واقعیت این دو بار با همدیگر فرق دارند:

باری که تحت اثر آن یک ستون ناکامل Imperfect به طور ناگهانی و دینامیکی در جهت جانبی کمانه می کند، بار کمانش نامیده می شود و به بیان دیگر کمانش پدیده ای است که وقتی روی ستون واقعی طی یک آزمایش بارگذاری می شود ظاهر می گردد.

کلمه بار بحرانی، برای باری که تحت اثر آن تعادل خنثی برای یک ستون کامل Perfect مطابق با تحلیل مذکور ممکن است، به کار گرفته می شود. به بیان دیگر کلمه بار بحرانی مربوط به یک تحلیل تئوریک ستون کامل است.

### ب) بارهای بحرانی و مدهای بحرانی ستون

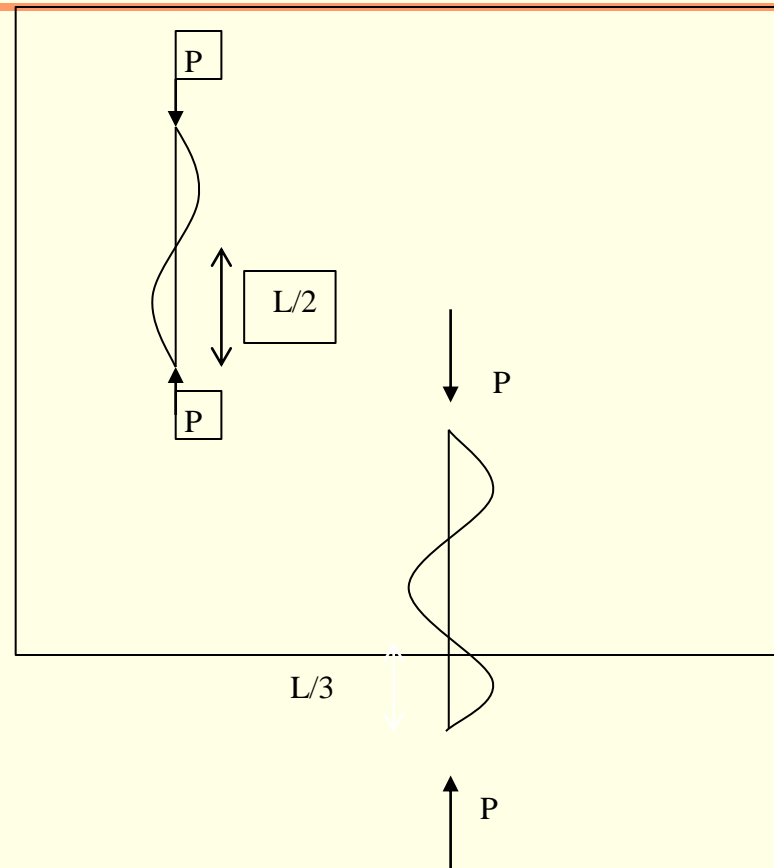
معادله زیر نشان می دهد که برای مقادیر  $n$  بزرگ تر از ۱، بارهای دیگری بزرگ تر از بار اولر وجود دارند که تحت اثر آنها تعادل خنثی امکان پذیر است به عنوان مثال:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$P_{cr2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}, y = A \sin \frac{2\pi x}{l}$$

$$P_{cr3} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}, y = A \sin \frac{3\pi x}{l}$$



لازم به ذکر است که بارهای بزرگ تر از بار اولر از لحاظ ریاضی معتبر می باشند. در موقعیت های واقعی، وجود ناکاملی های هندسی در تمایل سیستم به سمت مد خاص کمانش مؤثر خواهد بود.

## پ) ویژگی های تحلیل پایداری ستون اولر:

در اینجا لازم است که به برخی ویژگی های تحلیل انجام شده برای به دست آوردن بار اولر اشاره شود:

الف) تئوری تغییر شکل مورد استفاده، تئوری تغییر شکل های کوچک است.

ب) تئوری مورد استفاده، تئوری ارتجاعی است به عبارت دیگر پایداری ارتجاعی ستون مورد تحلیل قرار گرفته است.

پ) معادله دیفرانسیل حاکم ، یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه دوم است، لذا اصطلاحاً تحلیل مذکور یک تحلیل خطی پایداری **Linear Stability Analysis** نامیده می شود.

ت) در تحلیل مذکور با یک سیستم پیوسته سر و کار داریم نه یک سیستم گسسته.

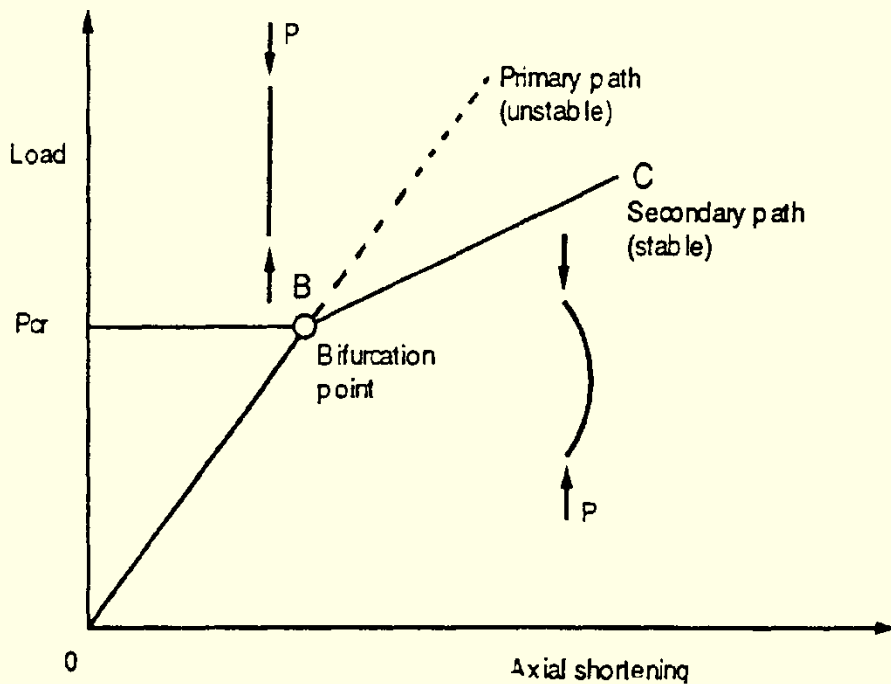
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

ث) تئوری خطی مذکور یک مساله ویژه مقدار Eigenvalue Problem است. کوچک ترین ویژه مقدار، تعیین کننده بار بحرانی اولر است و ویژه بردار وابسته به آن نشانگر شکل کمانش می باشد.

ج) تئوری خطی مذکور تنها مقادیر بارهای بحرانی و مدهای کمانش را مشخص می کند و قادر نیست که رفتار پس بحرانی (Post-Critical Behaviour) را به نمایش گذارد.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

(ت) بررسی تطبیقی رفتار ناپایداری ستون اولر (با توجه به مباحث ارائه شده در فصل دوم )  
اساسا رفتار ناپایداری ستون اولر از نوع ناپایداری نقطه دوشاخگی متقارن پایدار است.  
مساله یک میله مستقیم الاستیک لاغر را که تحت اثر نیروی فشاری محوری قرار دارد در نظر می گیریم:



• تحت اثر نیروی فشاری وارده، این میله در ابتدا تحت کوتاه شدگی محوری قرار خواهد گرفت که مقدار این کوتاه شدگی به طور خطی متناسب با نیروی وارده است. این نوع رفتار و مسیر تعادل مربوط به آن، مسیر تعادل اولیه خواهد بود.

- با افزایش بار وارده، میله بیشتر و بیشتر فشرده می شود ولی همچنان بافتار مستقیم خود را حفظ می کند تا این که به نقطه دوشاخگی میرسد. مقدار مشخص نیروی وارده محوری بیانگر نقطه دوشاخگی می باشد.

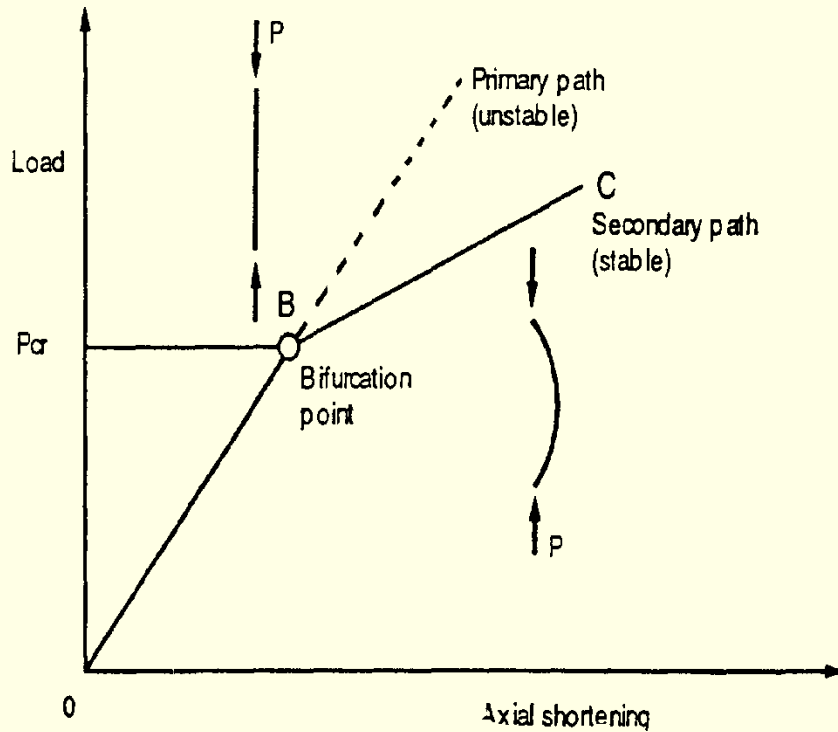


## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

- با افزایش بیشتر بار وارده بعد از نقطه دوشاخگی میله یکی از دو مسیر تعادل را طی خواهد کرد:

الف) میله می تواند مستقیم بماند و تحت فشردگی بیشتر در امتداد مسیر تعادل اولیه قرار گیرد.

ب) یک فرم خمیده را به خود بگیرد و علاوه بر تغییر شکل محوری تحت اثر تغییر شکل های جانبی نیز قرار گیرد که بیانگر مسیر ثانوی تعادل می باشد.



- مسیر مستقیم تعادل بعد از نقطه دوشاخگی، ناپایدار می باشد، به گونه ای که یک اختلال کوچک موجب خواهد شد که ستون، مسیر تعادل خمیده را انتخاب نماید که مسیر پایداری می باشد.

- بعد از نقطه دوشاخگی، سختی ستون کاهش می یابد ولی همچنان سختی مذکور مثبت می باشد و ظرفیت باربری ستون همچنان قابل افزایش است.

### ث) اثر شرایط مرزی در بار بحرانی ستون

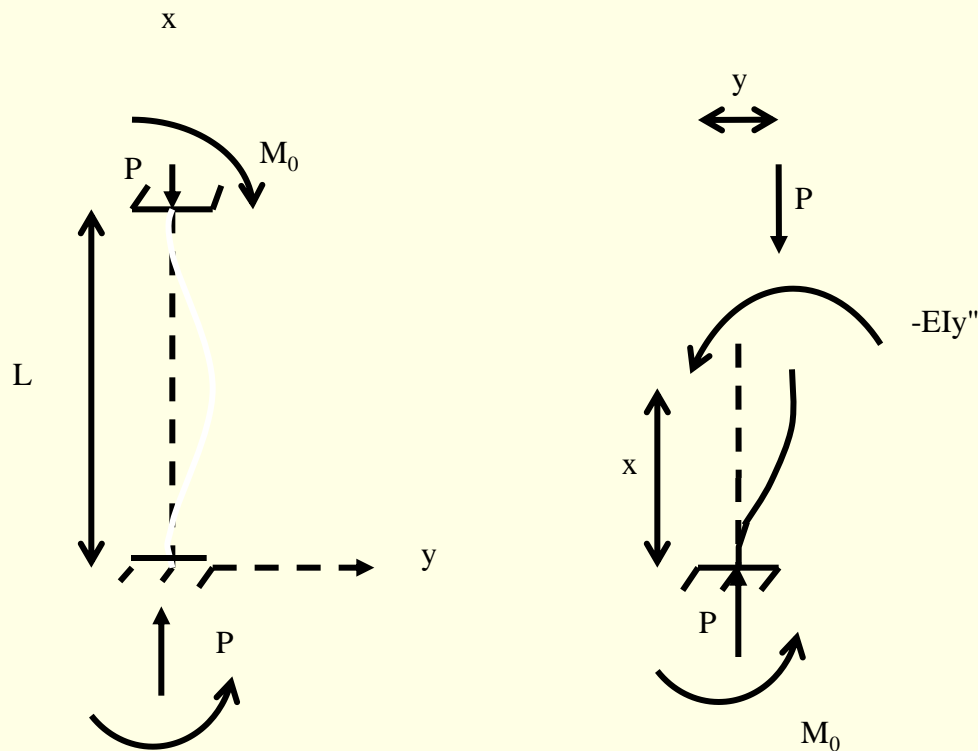
اگر تکیه گاه های ستون، به غیر از تکیه گاه های مفصلی باشند، تاثیر اساسی در بار بحرانی ستون می گذارند. در این بخش به اثر چهار نوع سیستم تکیه گاهی ستون، در بار بحرانی اشاره می کنیم:

- ستون دو سر گیردار،
- ستون یک سر گیردار و یک سر آزاد،
- ستون یک سر گیردار و یک سر مفصل،
- ستون یک سر مفصلی و یک سر گیردار ارتجاعی.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### ث-۱) ستون دو سر گیردار:

اگر ستونی دو سرش گیردار باشد، در این نقاط نمی تواند به طور جانبی حرکت و یا دوران کند. در نتیجه وقتی ستون خم شود، لنگرهای خمشی  $M_0$  طبق شکل زیر به دو سر عضو وارد می شوند:



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

با نوشتن معادله تعادل لنگرها خواهیم داشت:

$$EIy'' + Py = M_0$$

$$k^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow y'' + k^2 y = \frac{M_0}{EI}$$

جواب خصوصی و عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر حاصل می شود:

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_0}{P}$$

اکنون برای بدست آوردن ضرایب ثابت  $A$  و  $B$  شرایط مرزی را در  $x=0$  اعمال می کنیم:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B = -\frac{M_0}{P} \quad \begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{M_0}{P} (1 - \cos kx)$$

اگر شرط مرزی در  $x=l$  را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=l \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \cos kl = 1, \quad \frac{M_0}{P} = 0$$

$M_0/P=0$  بیانگر مسیر اول تعادل است (بافتار مستقیم).

$\cos kl=1$  بیانگر مسیر دوم تعادل است. کوچک ترین ریشه غیر صفر معادله مذکور  $kl=2\pi$  است:

$$\Rightarrow kl = 2\pi \Rightarrow \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

بنابراین بار بحرانی ستونی که دو سرش گیردار است، چهار برابر بار بحرانی ستونی است که تکیه گاه های آن مفصلی است.

در ضمن معادله منحنی تغییر شکل ستون عبارت است از:

$$y = \frac{M_0}{P} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$$

معادله مذکور نشان می دهد که نقاط عطف - نقاط با لنگر صفر - در  $x=l/4$  و  $x=3l/4$  قرار دارند. قسمت مرکزی ستون، بین نقاط یک چهارم، معادل ستونی است که دو سر آن مفصلی و به طول  $l/2$  است. بنابراین بار بحرانی ستون فرضی دو سر مفصلی که بین نقاط عطف ستون دو سر گیردار وجود دارد، با بار بحرانی ستون دو سر گیردار برابر است.

بنابراین می توان گفت طول مؤثر ستون اولر معادل ستون دو سر گیردار برابر با  $l/2$  است.

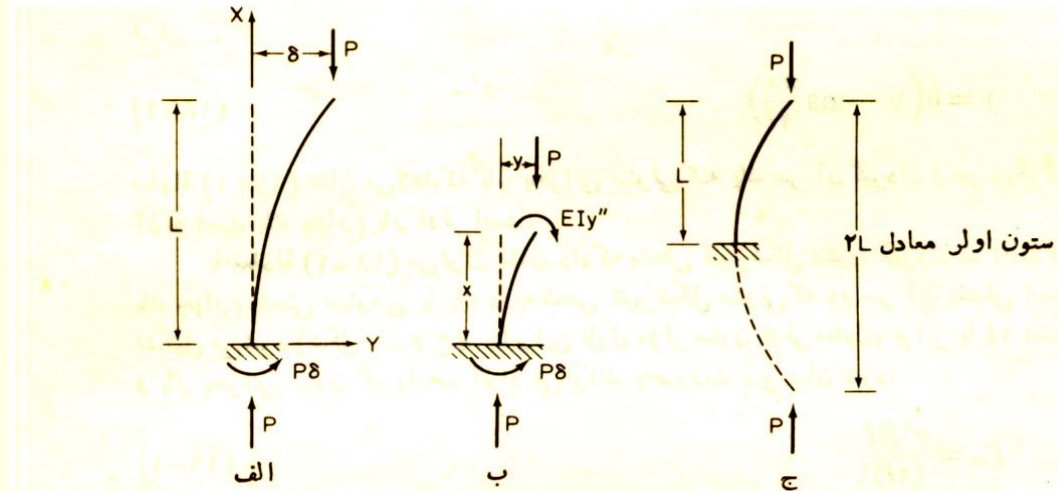
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

ت-۲) ستونی که یک سر آن گیردار و سر دیگرش آزاد است:

به همان طریق ارائه شده برای ستون دو سر گیردار می توان نشان داد که بار بحرانی و معادله تغییر شکل ستون به صورت زیر به دست می آیند:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right)$$



که در آن  $\delta$  تغییر مکان در سر آزاد ستون است که یک تغییر شکل کوچک جانبی موجب آن می شود.

مشخص است که طول مؤثر ستون اولر معادل ستون یک سر گیردار و یک سر آزاد ، برابر با  $2l$  است.

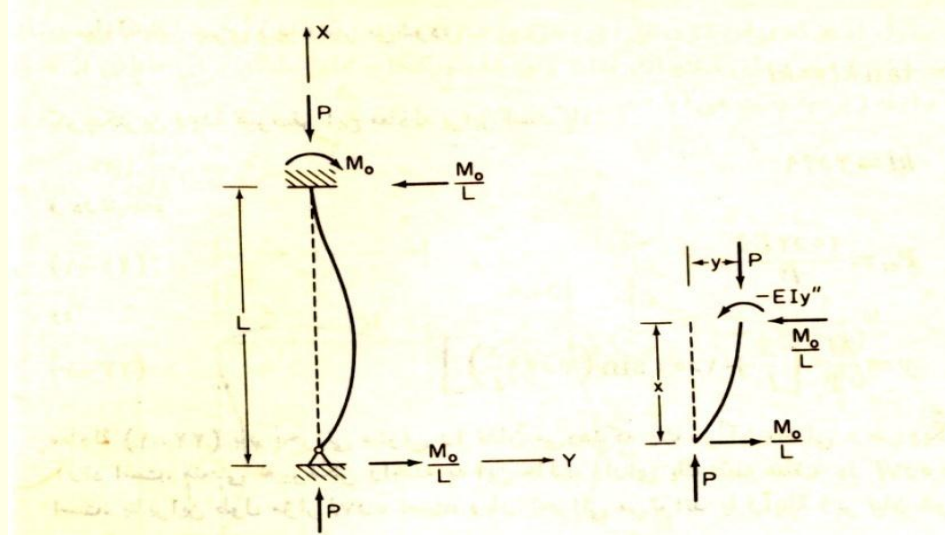
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

ث-۳) ستونی که یک سر آن گیردار و سر دیگرش مفصلی است:

به همان طریق ارائه شده برای ستون دو سر گیردار می توان نشان داد که بار بحرانی و معادله تغییر شکل ستون به صورت زیر می باشند:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

$$y = \frac{M_0}{P} \left[ \frac{x}{l} + 1.02 \sin(4.49 \frac{x}{l}) \right]$$



که در آن لنگر  $M_0$ ، لنگری است که در آن یک تغییر شکل جانبی کوچک موجب آن می شود.

مشخص است که طول مؤثر ستون اولر معادل ستون یک سر گیردار و یک سر مفصل، برابر با  $0.7l$  است.

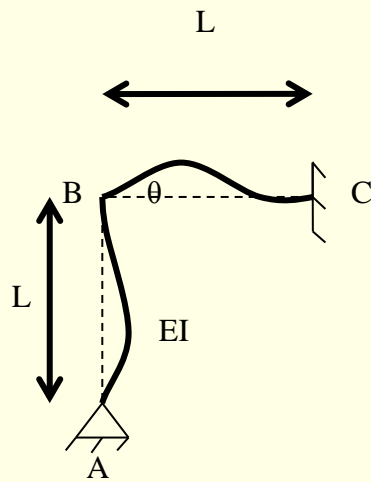


## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### ث-۴) ستون یک سر مفصلی و یک سر گیردار ارتجاعی:

در اغلب سازه های واقعی ، انتهای ستونها نه مفصلی و نه گیردار است. در عوض ستون ها معمولا به طور صلب به اعضای دیگر وصل می شوند، به نحوی که دوران در انتهای ستون ها محدود می شود. این نوع تکیه گاه ها، گیرداری های ارتجاعی نامیده می شوند. این نامگذاری به این علت است که گیرداری سر ستون به خواص ارتجاعی عنصری که ستون به آن متصل است، بستگی دارد.

ستون نشان داده شده در شکل زیر، در انتهای بالایی خود مفصلی و سر دیگرش به یک تیر به صورت ارتجاعی متصل است. تیر در انتهای دور خود در یک تکیه گاه صلب ثابت شده است.



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

می توان ثابت کرد که بار بحرانی ستون AB به صورت زیر می باشد:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.82l)^2}$$

گفتیم که اگر سر ستون (B) مفصلی باشد مقدار بار بحرانی  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  و اگر سر ستون (B) گیردار باشد مقدار بار بحرانی  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$  می باشد. مشاهده می شود که برای انتهای مقید ارتجاعی ، بار بحرانی بین دو حالت حدی انتها های کاملاً مفصلی و گیردار قرار می گیرد.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \langle P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.82l)^2} \langle P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

ستون دو سر مفصلی

ستون یک سر مفصل -

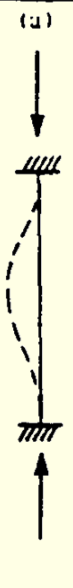
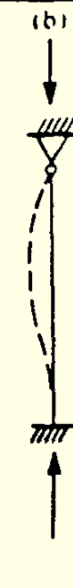

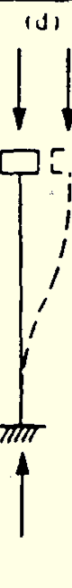
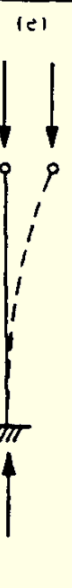
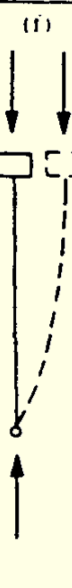






ستون یک سر مفصل -

یک سر مقید ارتجاعی

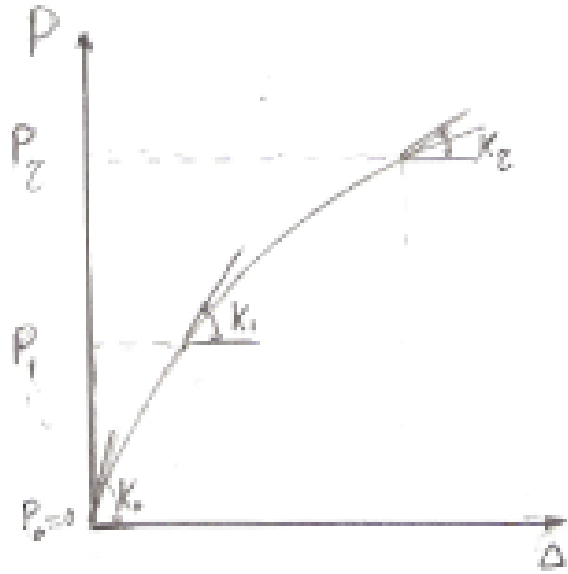
یک سر گیردار

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

در جدول زیر ، طول مؤثر  $kl$  برای اعضای فشاری نشان داده شده است:

<p>شکل گمانشی ستون بوسیله خط چین نشان داده شده است</p>								
<p>مقادیر تئوریک <math>K</math></p>	<p>0.5</p>	<p>0.7</p>	<p>1.0</p>	<p>1.0</p>	<p>2.0</p>	<p>2.0*</p>		
<p>شرایط انتهایی</p>	<p> چرخش گیردار</p>		<p>انتقال گیردار</p>		<p> چرخش آزاد</p>		<p>انتقال گیردار</p>	
	<p> چرخش آزاد</p>		<p>انتقال آزاد</p>		<p> چرخش گیردار</p>		<p>انتقال آزاد</p>	
	<p> چرخش آزاد</p>		<p>انتقال آزاد</p>		<p> چرخش آزاد</p>		<p>انتقال آزاد</p>	

# تحلیل خطی سازی شده کمانش



ماتریس سختی در تراز بار صفر ( $P_0=0$ )  $=k_0$

ماتریس سختی در تراز بار اولیه ( $P_1$ )  $=k_1$

با فرض تغییرات خطی ماتریس سختی از تراز بار صفر به بعد،  
ماتریس سختی در تراز بار  $P_\tau$  عبارتست از:

$$k_\tau = k_0 + \lambda(k_1 - k_0) \quad (i)$$

و بردار بار متناظر با آن عبارتست از:

$$P_\tau = P_0 + \lambda(P_1 - P_0) = \lambda P_1 \quad (ii)$$

$\lambda$  فاکتور مقیاس است (مقادیر بزرگتر از واحد مدنظر هستند)

در تراز بار کمانش ماتریس سختی مماسی منفرد (تکین) است:

$$\det k_\tau = 0$$

که می توان آن را به صورت معادل زیر نوشت:

$$k_\tau \phi = 0 \quad (iii)$$

$\phi$  یک بردار غیر صفر اختیاری است

# تحليل خطی سازی شده کمانش

با جایگذاری  $k_\tau$  از رابطه (i) در رابطه (iii) داریم:

$$[k_0 + \lambda(k_1 - k_0)]\phi = 0$$

$$k_0\phi = \lambda(k_1 - k_0)\phi$$

معادله فوق یک مساله مقدار ویژه تعمیم یافته است که مقادیر ویژه  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  و ... و  $\lambda_n$  آن از طریق رابطه (ii) بارهای کمانش را می دهد و  $\phi_i$  ها نمایشگر مدهای کمانش متناظر می باشد. اگر تغییر مکانهای پیش از کمانش نسبتا کوچک باشند و هر گونه تغییر در خواص مصالح فرض خطی بودن را به طور قابل ملاحظه ای نقض نکند تحلیل خطی سازی شده کمانش، تخمین معقولى از بار کمانش خواهد بود.

## تکلیف سری اول کامپیوتری:

۵ بار بحرانی و مد بحرانی اول ستون های زیر را با استفاده از تحلیل ویژه مقدار **Linearized Buckling Analysis** به دست آورده و بار های بحرانی اول آنها را با مقادیر حاصل از روابط تحلیلی مقایسه کنید:

- ستون دو سر مفصل،
- ستون دو سر گیردار،
- ستونی که یک سر آن گیردار و سر دیگرش آزاد است،
- ستونی که یک سر آن گیردار و سر دیگرش مفصلی است.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### تکلیف سری دوم کامپیوتری:

رفتار بار – تغییرمکان محوری یک ستون دو سرمفصل و نیز یک ستون دو سرگیردار تحت اثر یک نیروی محوری فشاری را با استفاده از یک تحلیل غیرخطی هندسی به دست آورده و با ارزیابی ماتریس سختی و مقادیر ویژه آن، بارهای بحرانی متناظر را در روی آین نمودارها نشان دهید.

### ۳- بررسی پایداری ستون های ناکامل (Imperfect Columns)

در این بخش رفتار ستون های ناکامل مورد بررسی قرار می گیرد و برای این منظور دو نوع ستون ناکامل در نظر گرفته می شوند:

- ستون های با انحنا اولیه،
- ستون های تحت بارهای با خروج از مرکز.

#### الف) ستون با انحنا اولیه

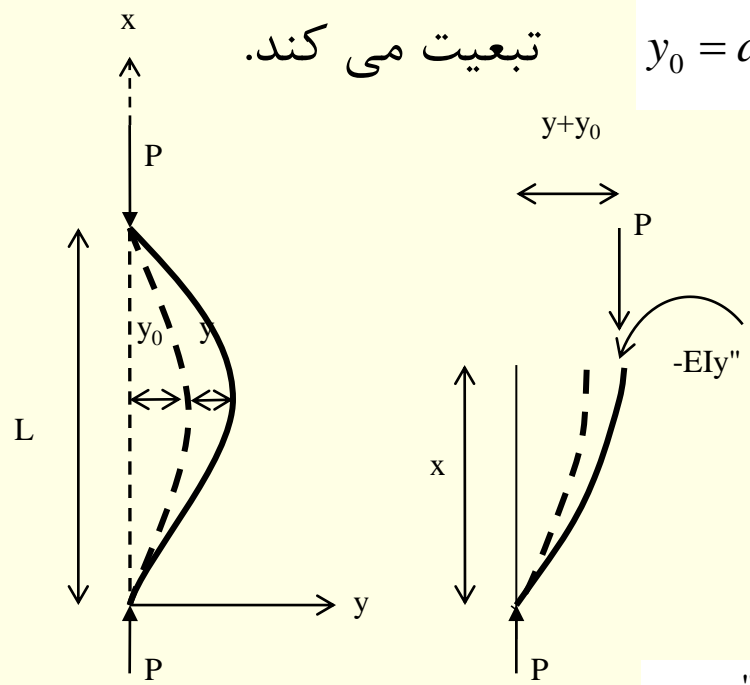
ستون اولر دو سر مفصلی را که محور مرکزی آن دارای انحنا اولیه است، در نظر می گیریم. فرض بر این است که مصالح ساختمانی از قانون هوک پیروی می کنند و تغییر شکل ها کوچک هستند.

تغییر شکل اولیه عضو را با  $y_0$  و تغییر شکل اضافی ناشی از خمش را با  $\Delta$  نشان می دهیم.



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

فرض بر این است که انحنا اولیه از معادله  $y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l}$  تبعیت می کند.



معادله تعادل لنگرها عبارتند از:

$$EIy'' + P(y_0 + y) = 0$$

با فرض  $k^2 = P/EI$  معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

$$y'' + k^2 y = -k^2 a \sin \frac{\pi x}{l}$$

معادله دیفرانسیل مذکور دارای یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی است:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$y = y_c + y_p$$

$$y_c = A \sin kx + B \cos kx$$

$$y_p = C \sin \frac{\pi x}{l} + D \cos \frac{\pi x}{l}$$

از جایگزینی  $y_p$  در معادله دیفرانسیل مذکور

نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\left[ C(k^2 - \frac{\pi^2}{l^2}) + k^2 a \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \left[ D(k^2 - \frac{\pi^2}{l^2}) \right] \cos \frac{\pi x}{l} = 0$$

برای این که معادله فوق به ازای تمامی مقادیر  $x$  ارضا شود، هر دو ضریب مربوط به جملات سینوسی و کوسینوسی برابر صفر قرار داده می شوند و لذا نتایج زیر حاصل می شود:

$$C = \frac{a}{(\frac{\pi^2}{k^2 l^2} - 1)} \quad D = 0 - \text{یا} \quad k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

اگر  $k^2 = \pi^2 / l^2$  انتخاب شود ، حل برای  $y$  به  $P = \pi^2 EI / l^2$  محدود می شود که مورد نظر نیست. بنابراین باید  $D=0$  در نظر گرفته شود.

با فرض  $\alpha = P/P_E$  و  $P_E = \pi^2 EI / l^2$  رابطه مربوط به  $C$  می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$C = \frac{\alpha \alpha}{1 - \alpha}$$

لذا جواب  $y$  به صورت زیر در می آید:

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{\alpha}{1 - \alpha} a \sin \frac{\pi x}{l}$$

برای یافتن شرایط مرزی  $A$  و  $B$  شرایط مرزی را اعمال می کنیم:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0$$

$$\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = A \sin kl$$

بنابراین  $A$  و یا  $\sin kl$  باید صفر باشد اگر  $\sin kl = 0$  باشد، در این صورت حل برای  $y$  به  $P = P_E$  محدود می شود که مورد نظر نیست و در نتیجه باید  $A = 0$  در نظر گرفته شود.

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر به دست می آید:

$$y = \frac{\alpha}{1 - \alpha} a \sin \frac{\pi x}{l}$$

کل تغییر شکل از جمع رابطه فوق و رابطه مربوط به انحنا اولیه بدست می آید:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

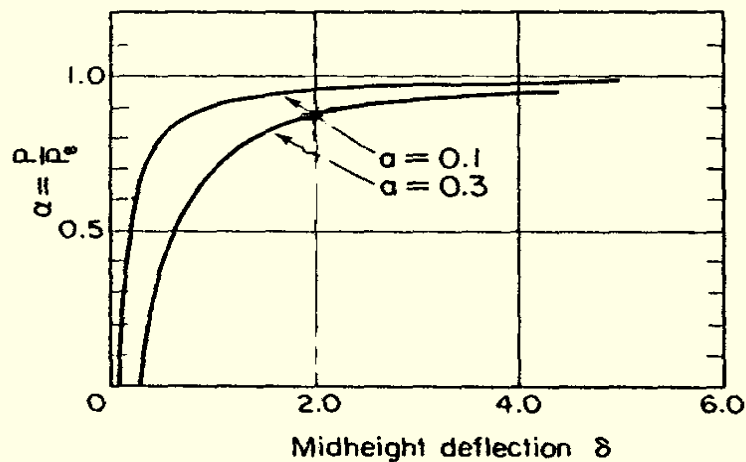
$$y_T = y_0 + y = \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) a \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{a}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}$$

کل تغییر شکل در وسط عضو برابر است با:

$$\delta = \frac{a}{1 - \alpha} = \frac{a}{1 - \left(\frac{P}{P_E}\right)}$$

نسبت تغییرات بار  $P/P_E$  بر حسب تغییر شکل وسط عضو به ازاء مقادیر مختلف از انحنای اولیه

در شکل زیر نمایش داده شده است:



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

از منحنی مذکور به نکات مهمی به شرح زیر در مورد رفتار ستون ناکامل پی می بریم:

(الف) بر خلاف ستون کامل که تا بار اولر مستقیم باقی می ماند، عضو دارای انحنا اولیه به محض وارد شدن بار شروع به خم شدن می کند.

(ب) در ستون ناکامل تغییرشکل ابتدا به کندی و سپس با افزایش نسبت بار به بار اولر با سرعت بیشتری افزایش می یابد.

(پ) هر چه انحنا اولیه بزرگتر باشد کل تغییرشکل در هر تراز بار بیشتر خواهد بود.

(ت) وقتی بار وارده به بار اولر خیلی نزدیک شود، تغییرشکل صرف نظر از مقدار اولیه انحنا به طور نامحدود افزایش می یابد.

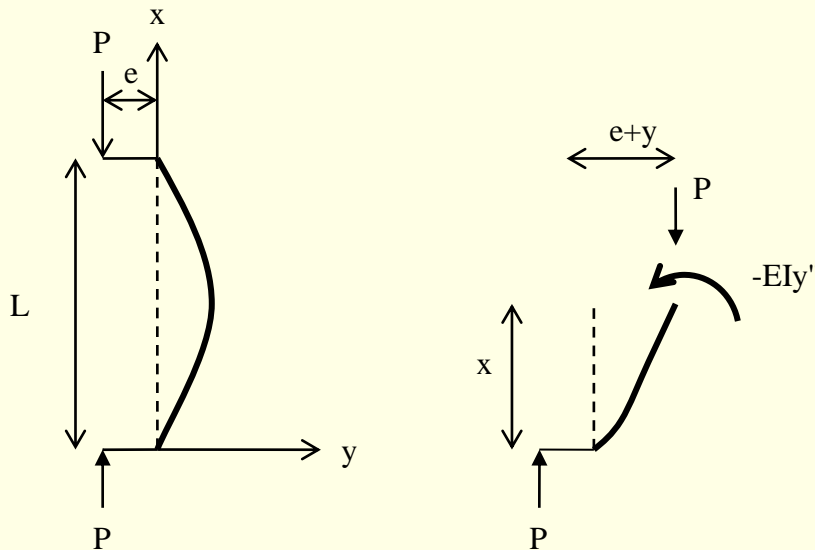
(ث) صرف نظر از اینکه انحنا اولیه چقدر کوچک است، ظرفیت باربری یک ستون ناکامل همواره کوچکتر از بار اولر است.

(ج) اگر تغییر شکل اولیه بزرگ باشد، ستون زیر بارهای پایین تر از بار اولر تغییرشکل های نسبتا بزرگی را نشان می دهد.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### ب) ستون تحت بارهای با خروج از مرکز

رفتار یک ستون ناکامل می تواند با در نظر گرفتن عضو مستقیم، ولی تحت اثر بار خارج از مرکز نشان داده شده در زیر مورد بررسی قرار می گیرد. فرض بر این است که عضو در ابتدا مستقیم است و مصالح ساختمانی آن از قانون هوک تبعیت می کند (تئوری ارتجاعی) و از طرف دیگر تغییر شکل ها کوچک باقی می مانند.



معادله تعادل لنگرها عبارتند از :

با فرض  $k^2 = P/EI$  معادله دیفرانسیل روبرو را خواهیم داشت:

$$EIy'' + P(e + y) = 0$$

$$y'' + k^2 y = -k^2 e$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

جواب معادله دیفرانسیل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y = A \sin kx + B \cos kx - e$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B = e$$

$$\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = e \frac{1 - \cos kl}{\sin kl}$$

ضرایب ثابت از شرایط مرزی محاسبه می شوند:

$$y = e \left( \cos kx + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kl - 1 \right)$$

از جایگذاری  $A$  و  $B$  خواهیم داشت:

با قرار دادن  $x = l/2$  تغییر شکل وسط ستون را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\delta = e \left( \cos \frac{kl}{2} + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin \frac{kl}{2} - 1 \right)$$



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

با استفاده از روابط:

$$\cos kl = 1 - 2 \sin^2 \frac{kl}{2}$$

$$\sin kl = 2 \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2}$$

$$\delta = e \left( \sec \frac{kl}{2} - 1 \right)$$

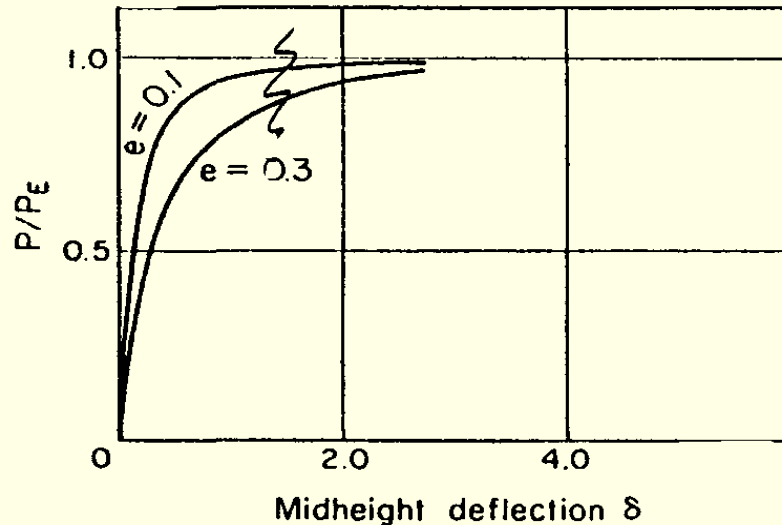
$$\delta = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) - 1 \right]$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

معادله مربوط به  $\delta$  به صورت زیر بدست می آید:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

نسبت تغییرات بار  $P/P_E$  بر حسب تغییر شکل وسط ستون  $\delta$  به ازاء مقادیر مختلف خروج از مرکز  $e$  در شکل زیر نمایش داده شده است:



از منحنی مذکور به نکات مهمی به شرح زیر در مورد رفتار ستون ناکامل پی می بریم:

الف) در این ستون ناکامل نیز ستون به محض وارد شدن بار شروع به خمش می کند.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

ب) تغییر شکل در ابتدا به کندی و سپس هر چقدر  $P$  به  $P_E$  نزدیکتر می شود با سرعت بیشتری افزایش می یابد.

پ) در  $P=P_E$  تغییر شکل به طور نامحدود افزایش می یابد.

ت) ستون های با خارج از مرکزیت های بزرگ زیر بارهایی که کاملاً کوچک تر از بار اولر هستند تغییر شکل های قابل توجهی را نشان می دهند.

ث) ستون های با خارج از مرکزیت های کوچک تا وقتی که بار به بار اولر نزدیک نشود خمش محسوسی پیدا نمی کنند.

توجه شود که با توجه به فرضیات تحلیل – رفتار ارتجاعی و تئوری تغییر شکل های

کوچک- منحنی های مذکور تا یک محدوده ای اعتبار دارند. بعد از آن محدوده، به

علت تغییر شکل های بزرگ رفتار ستون به صورت دیگری در خواهد آمد که بعد

مورد بحث قرار خواهد گرفت.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### (پ) نکات مهم در رفتار پایداری ستون های نا کامل

الف) تئوری اولر که بر اساس مفهوم ساخت ستون بدون ناکاملی قرار دارد به شرط اینکه ناکاملی ها نسبتا کوچک باشند یک معیار رضایت بخش برای طرح ستون های واقعی بدست می دهد.

ب) بار بحرانی باری است که در آن تغییر شکل یک سیستم ناکامل به طور نامحدود افزایش می یابد. برای به کار بردن این تعریف به عضو ساختمانی یا سیستم مورد بررسی یک تغییر شکل کوچک اولیه داده می شود و سپس باری که تغییر شکل نامحدود را به وجود آورده تعیین می شود.

ج) رفتار یک سیستم ناکامل می تواند یا با ایجاد یک تغییر شکل اولیه یا با وارد کردن بار با خروج از مرکز معادل سازی شود.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### تکلیف سری سوم کامپیوتری:

منحنی بار محوری - خیز وسط ستون دو سر مفصل ناکامل را با استفاده از تحلیل غیرخطی هندسی عناصر محدود به ازای مقادیر زیر به دست آورید:

الف) سه مقدار مختلف  $e$  خروج از مرکز بار،

ب) سه مقدار مختلف  $a$  ناکاملی در وسط ستون،

و سپس آنها را با منحنی های حاصل از روابط تحلیلی، به تناسب در یک نمودار مقایسه کنید.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### ۴- تعیین بار بحرانی ستون ها با استفاده از روش های تقریبی

در روش های تقریبی به طریقه ای، سیستم حقیقی پیوسته توسط یک سیستم با درجات آزادی محدود جایگزین می شود.

رفتار سیستم پیوسته با درجات آزادی بینهایت، به وسیله یک یا چند معادله دیفرانسیل قابل بیان است.

از طرف دیگر، رفتار یک سیستم با درجات آزادی محدود، با یک یا چند معادله جبری قابل بیان است. بنابراین، در روش تقریبی معادلات جبری جایگزین معادلات دیفرانسیل می گردد.

روش های تقریبی مورد استفاده برای تعیین بار بحرانی ستون ها:

الف) اصل بقای انرژی

ب) روش Ritz

پ) روش تفاضلات محدود

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### اصل بقای انرژی

با استفاده از مفهوم تعادل خنثی، مساله تعیین بار بحرانی به برقراری تعادل در حالت مختصر خم شده تبدیل می شود.

در بخش قبل تعادل یک ستون، با در نظر گرفتن لزوم صفر بودن مجموع لنگرهای موثر بر ستون برقرار شد.

ولی اکنون، تعادل با توجه به ارضای اصل بقای انرژی برقرار می گردد.

اصل بقای انرژی به صورت زیر قابل بیان است:

یک سیستم پایستار (Conservative) زمانی در حال تعادل است که انرژی کرنشی ذخیره شده در آن برابر کار انجام یافته به وسیله نیروهای خارجی باشد.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

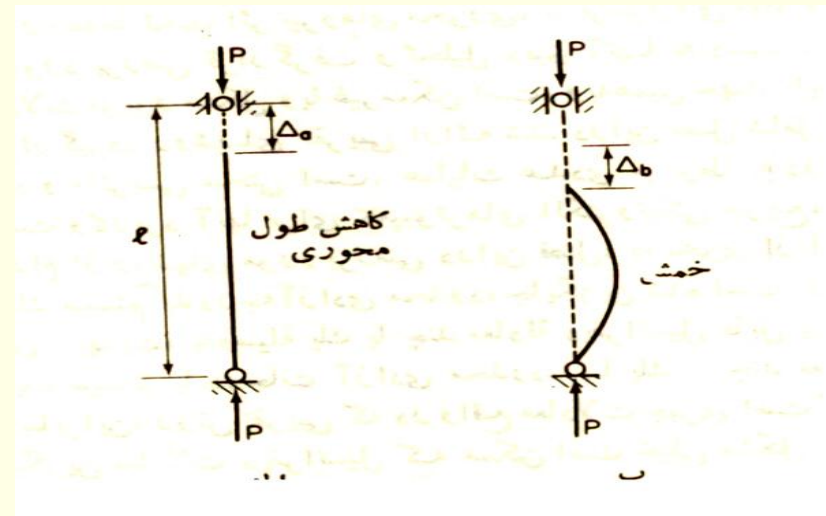
برای یک میله بارگذاری شده به صورت محوری (با بافتار مستقیم) تا زمانی که میله کاملا مستقیم بماند کار خارجی با فرمول زیر قابل بیان است:

$$W = \frac{1}{2} P \Delta_0$$

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} \Rightarrow W = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx \Rightarrow U = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\frac{P^2 L}{2EA} = \frac{P^2 L}{2EA}$$



انرژی کرنشی ذخیره شده در عضو برابر است با:

از مساوی قرار دادن کار خارجی  $W$  با انرژی کرنشی  $U$  داریم:



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

به این ترتیب می توان نتیجه گرفت که به ازاء تمام مقادیر  $P$  حالت تغییر شکل نیافته ستون یک حالت تعادل را مشخص می کند.

بر اساس اصل تعادل خنثی، رابطه تعادل برای حالت مختصر خمیده نیز صادق است.

بنابراین ضابطه انرژی برای تعیین بار بحرانی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\Delta W = \Delta U$$

کاهش طول ناشی از خمش با رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\Delta b = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

تغییر مقدار کار خارجی را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\Delta W = P \cdot \Delta_b = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

افزایش انرژی کرنشی که وابسته به افزایش کار خارجی فوق می باشد

$$\Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx$$

برای محاسبه انتگرال های بالا لازم است تابع مناسبی برای تغییر شکل  $y$  فرض شود. در واقع این فرض است که سیستم پیوسته را با سیستم گسسته تبدیل می کند.

اگر فرم تغییر شکل یافته به صورت منحنی سینوسی فرض شود، در این صورت برای تعیین وضعیت منحنی تغییر شکل کل ستون، فقط یک مولفه نظیر دامنه در وسط کافی خواهد بود.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

فرض می کنیم که:

در این صورت با جایگذاری  $y$  در انتگرال ها داریم:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\Delta U = \frac{A^2 EI \pi^4}{2L^4} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{A^2 EI \pi^4}{4L^3}$$

$$\Delta W = \frac{A^2 P \pi^2}{2L^2} \int_0^L \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{A^2 P \pi^2}{4L}$$

بر اساس اصل بقای انرژی داریم:

$$\frac{A^2 EI \pi^4}{4L^3} = \frac{A^2 P \pi^2}{4L} \Rightarrow A = 0, P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

مسیر اول تعادل

(بافتار مستقیم)

مسیر دوم تعادل

(بافتار خمیده)

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

در این حالت چون برای بیان انرژی، منحنی تغییرشکل کامل مورد استفاده قرار گرفت. به همین جهت مقدار کامل (Exact Value) بار بحرانی به دست آمد. در صورتی که یک منحنی تغییر شکل تقریبی مورد استفاده قرار می گرفت بار بحرانی تقریبی بدست می آمد.

برای یافتن نتایج مناسب باید به مشخصه های منحنی تغییر شکل توجه خاصی کرد. باید منحنی مفروض تا حد امکان بیشترین تعداد شرایط مرزی را ارضا نماید.

- شرایط مرزی هندسی (تغییر شکل و شیب)

- شرایط مرزی طبیعی (نیروی برشی و لنگر خمشی)

اگر امکان ارضای هر دو شرایط مرزی هندسی (تغییر شکل و شیب) و شرایط مرزی طبیعی (نیروی برشی و لنگر خمشی) وجود نداشته باشد لااقل باید شرایط مرزی هندسی ارضا شود.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

حال به عنوان یک منحنی تقریبی، منحنی تغییر شکل به صورت چند جمله ای زیر در نظر گرفته می شود:

$$y = a + bx + cx^2$$

شرط مرزی  $y=0$  در  $x=0$  در صورتی ارضا می شود که داشته باشیم:  $a=0$

با استفاده از شرط مرزی  $y=0$  در  $x=l$  خواهیم داشت:  $b = -cl$

بنابر این منحنی تغییرشکل به صورت زیر در می آید:

$$y = c(x^2 - xl)$$

معادله منحنی  $y = c(x^2 - xl)$  شرایط مربوط به شیب و تغییرمکان را در هر دو انتهای عضو ارضا می کند، ولی فرض بر این است که مقدار انحنا در طول عضو ثابت است ( $y'' = 2c$ ). بنابراین شرط داشتن لنگر صفر در هر یک از دو تکیه گاه عضو اقناع نمی شود.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

با جایگذاری  $y=c(x^2-xl)$  در روابط مربوط به کار خارجی ( $\Delta W$ ) و انرژی کرنشی ( $\Delta U$ )

$$\Delta W = Pc^2l^3/6$$

خواهیم داشت:

$$\Delta U = 2EIc^2l$$

با مساوی قرار دادن کار خارجی ( $\Delta W$ ) و انرژی کرنشی ( $\Delta U$ ) خواهیم داشت:

$$c^2 (Pl^3/6 - 2EI) = 0$$

جواب بدیهی:  $c=0$  (بافتار مستقیم)

جواب غیربدیهی:  $c \neq 0$  (بافتار خمیده)

$$P_{cr} = 12EI/l^2$$

مقایسه جواب کامل  $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$  با جواب  $P_{cr} = 12EI/l^2$  نشان می دهد که جواب مذکور

تقریبا ۲۱٪ خطا دارد. مقدار بحرانی عددی محاسبه شده بزرگ تر از مقدار کامل می باشد

(خاصیت روش انرژی)

## ب) روش ریتز Ritz :

روش ریتز از اصل مینیمم انرژی پتانسیل و مفهوم تعادل خنثی برای محاسبه بار بحرانی ستون بهره می گیرد. بر اساس مفهوم تعادل خنثی بار بحرانی باری است که تحت اثر آن سیستم می تواند در وضعیت اندکی خمیده به حال تعادل باشد بنابراین مساله یافتن بار بحرانی معادل تعیین حالت تغییرشکلی است که در آن تعادل سیستم امکان پذیر است. با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل، این مساله را می توان با صفر کردن مشتق اول تابع انرژی پتانسیل کلی مورد بررسی قرار داد.

### مراحل روش تقریبی Ritz

1. تعیین تابع انرژی پتانسیل کلی

2. فرض یک منحنی تغییر شکل مناسب برای سیستم

3. اعمال شرایط مرزی در منحنی فرضی

4. جایگذاری معادله منحنی تغییر شکل فرضی در تابع

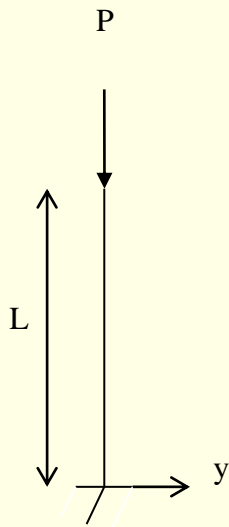
5. تعیین مشتقات اول تابع انرژی پتانسیل کلی نسبت به ضرایب معادله منحنی فرضی و مساوی صفر قرار دادن آنها

6. ایجاد معادلات تعادل و یافتن بار بحرانی (حل یک مساله مقدار ویژه)

## ب) روش ریتز Ritz :

اکنون از روش Ritz برای یافتن بار بحرانی ستون یک سر گیردار و یک سر آزاد استفاده می‌کنیم:

تابع انرژی پتانسیل کلی برای ستون عبارت است از :



$$\Pi = U - W$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} (y'')^2 dx$$

با فرض تغییر شکل های کوچک

$$W = \int_0^L \frac{P}{2} (y')^2 dx$$

$$\Pi = \int_0^L \frac{EI}{2} (y'')^2 dx - \int_0^L \frac{P}{2} (y')^2 dx$$



## ب) روش ریتز Ritz :

منحنی تغییر شکل را می توان به صورت چند جمله ای زیر در نظر گرفت:

$$y = a + bx + cx^2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow y = cx^2$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

از جایگذاری معادله منحنی تغییر شکل در تابع انرژی پتانسیل کلی خواهیم داشت:

$$\Pi = 2EIc^2L - \frac{2P}{3}c^2L^3$$

## ب) روش ریتز Ritz :

برای یافتن معادله تعادل باید مشتق تابع انرژی پتانسیل کلی نسبت به  $C$  را مساوی صفر قرار داد:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0 \Rightarrow 4EIcL - \frac{4}{3}PcL^3 = 0$$

$$\Rightarrow c\left(P - \frac{3EI}{L^2}\right) = 0$$

$$c = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$P = \frac{3EI}{L^2}$$

بافتار مستقیم

بافتار خمیده که همان مقدار بار بحرانی است.

مقایسه این حل با بار کمانش کامل  $\pi^2 EI / 4L^2$  نشان می دهد که جواب تقریبی تقریباً ۶/۲۱ درصد خطا دارد.

## ب) روش ریتز Ritz :

بار بحرانی کامل زمانی به دست می آید که یک سری بی نهایت به عنوان منحنی تغییر شکل به کار رفته باشد. بنابراین چنانچه تعداد پارامترهای تابع تغییر مکان از یک به دو افزایش داده شود جواب مطلوب تری به دست می آید.

## ت(روش تفاضلات محدود

تفاضلات محدود بر این اصل استوار است که مشتقات تابع در یک نقطه را می توان با عبارتی جبری جایگزین کرد که شامل مقدار تابع در آن نقطه و چندین نقطه همجوار است.

در حالت کلی اگر یک سیستم پیوسته با  $n$  نقطه جایگزین شود تابع نامعلوم با  $n$  متغیر جبری جایگزین شده و معادله دیفرانسیل به  $n$  معادله جبری خطی بر حسب این متغیرها تبدیل می شود.

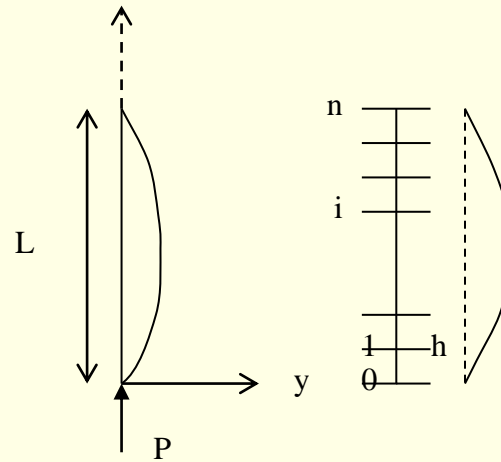
## ت(روش تفاضلات محدود

در این قسمت کاربرد روش تفاضلات محدود برای تعیین بار بحرانی یک ستون دو سر مفصلی توضیح داده می شود.

معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی یک ستون دو سر مفصلی عبارت است از:

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0$$

$$y(0) = y(L) = 0$$



برای یافتن رابطه تفاضلات محدود مربوطه دهانه عضو به  $n$  قطعه مساوی و به طول های

$h=L/n$  تقسیم می شود و تغییر مکان در انتهای قطعه  $i$  ام با  $y_i$  نشان داده می شود:

## ت(روش تفاضلات محدود

مشتق دوم در نقطه  $\hat{i}$  ام را می توان با استفاده از روش تفاضلات مرکزی به صورت زیر تعریف نمود:

$$y'_i = \frac{y_{i+h} - y_{i-h}}{2h} \quad \text{و} \quad y''_i = \frac{y_{i+h} - 2y_i + y_{i-h}}{h^2}$$

از جایگذاری مشتق دوم در معادله دیفرانسیل حاکم در نقطه  $\hat{i}$  به معادله زیر خواهیم رسید:

$$y_{i+h} - 2y_i + y_{i-h} + \frac{Ph^2}{EI} y_i = 0$$

معادله دیفرانسیل یک بیان دقیق از وضعیت تعادل است با ارضاء آن تعادل در تمام طول عضو برقرار می شود. اما در مقابل، معادله تفاضل محدود بیانگر شرایط تقریبی تعادل است و با ارضاء آن، تعادل فقط در  $x=\hat{i}$  ارضاء می شود.

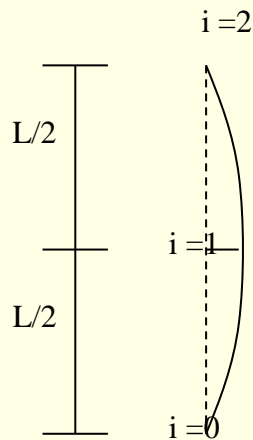
## ت(روش تفاضلات محدود

ابتدا با تقریب اول ( $n=2$ ) شروع می کنیم:

در این صورت لازم است که معادله تفاوت های محدود فقط در نقطه  $i=1$  نوشته شود.

در دو نقطه مرزی تغییر مکان و انحنای برابر صفر بوده و معادله به طور مشابه ارضاء می

شود. با نوشتن معادله تفاضل محدود در  $i=1$  خواهیم داشت:



$$y_2 - 2y_1 + y_0 + \frac{PL^2}{4EI} y_1 = 0$$

## ت(روش تفاضلات محدود

با توجه به شرایط مرزی  $y_0=y_2=0$  خواهیم داشت:

$$y_1 \left( \frac{PL^2}{4EI} - 2 \right) = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$P_{cr} = \frac{8EI}{L^2}$$

جواب بدیهی

بار بحرانی نیز با خطایی در حدود ۱۹/۰ به صورت بالا بدست می آید.

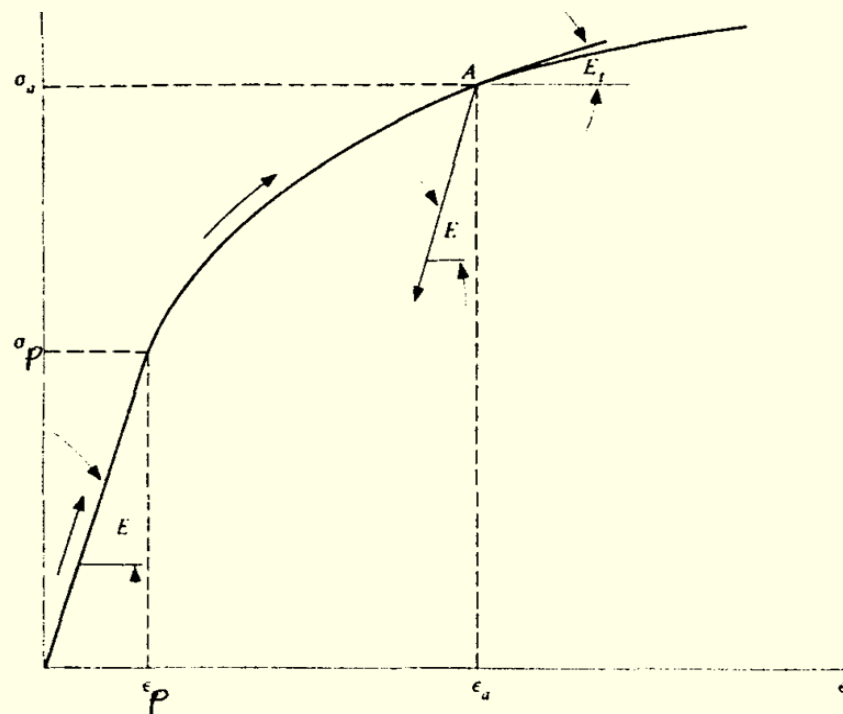
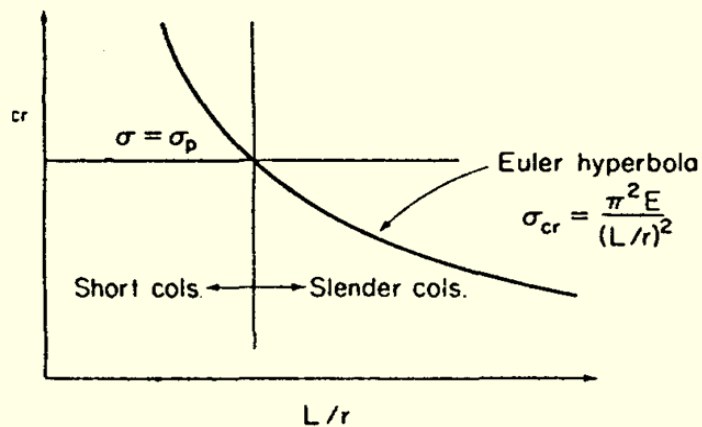


## ۵- کمانش غیر ارتجاعی ستون ها:

تا کنون در بررسی های انجام شده در مورد کمانش ستون ها، فرض بر این بود که مصالح طبق قانون هوک رفتار می کنند (کمانش الاستیک)

برای صحت فرض مذکور، تنشها در عضو نباید از تنش حد تناسب مصالح تجاوز نمایند.

در شکل زیر منحنی اولر رسم شده است و نیز یک خط افقی که معرف حد تناسب مصالح است رسم شده است.



## ۵- کمانش غیر ارتجاعی ستون ها:

- برای ستون های لاغر قبل از اینکه تنش محوری از حد تناسب تجاوز کند، بار وارده به بار اولر می رسد. بنابراین تحلیل ارتجاعی خطی برای ستون های لاغر درست است و بار اولر بار کمانش صحیح چنین عضوی را نشان می دهد.

- از طرف دیگر تنش محوری در یک ستون کوتاه قبل از اینکه بار وارده به بار اولر برسد از حد تناسب مصالح تجاوز خواهد کرد. در نتیجه تحلیل ارتجاعی برای ستون های کوتاه درست نیست و بار کمانش ستون های کوتاه باید با در نظر گرفتن رفتار غیرارتجاعی آنها تعیین شود.

- از بررسی هایی که تا کنون در مورد رفتار غیر ارتجاعی ستون ها انجام شده است یک نتیجه مهم گرفته شده است و آن عبارت است از :

## ۵- کمانش غیر ارتجاعی ستون ها:

اگر مدول ارتجاعی  $E$  با یک مدول موثر (Effective Modulus) که به مقدار تنش در هنگام کمانش بستگی دارد تعویض شود، در این صورت می توان از فرمول اولر برای ستون های کوتاه نیز استفاده نمود.

بر این اساس دو مدول موثر مهم توسط محققین ارائه شده است که عبارتند از:

الف) مدول کاهش یافته (Reduced Modulus) یا مدول دوگانه (Double Modulus)

ب) مدول مماسی (Tangent Modulus)

## ۵- کمانش غیر ارتجاعی ستون ها:

---

- علت اصلی در تجدید نظر در تئوری اولر، نتایج آزمایشات تجربی بود که نشان می دادند که فرمول اولر برای ستون های کوتاه غیر محافظه کارانه است و همواره این فرمول برای ستون های کوتاه مقادیری بزرگتر از مقادیر تجربی به دست می دهد.

- تئوری مدول مماسی نسبت به تئوری مدول دوگانه منجر به بار کمانش کوچکتری می شود و نتایج آزمایش موفقیت آمیزتر است. به همین جهت اکثر مهندسين به عنوان تئوری صحیح کمانش غیر ارتجاعی قبول کرده اند.

## الف) تئوری مدول دوگانه:

فرضیات اصلی مورد استفاده در تحلیل با استفاده از تئوری مدول دوگانه عبارتند از:

(۱) ستون ابتدا کاملاً مستقیم و بارگذاری بدون خروج از مرکز است.

(۲) ابتدا و انتهای عضو مفصلی هستند.

(۳) تغییر شکل ها به اندازه کافی کوچک هستند به طوری که انحنا با  $\gamma$  تقریب زده می شود.

(۴) همان رابطه بین تنش ها و کرنش های خمشی است که بین تنش ها و کرنش ها در کشش و فشار ساده وجود دارد.

(۵) مقاطع صفحه ای قبل و بعد از خمش، صفحه ای باقی می ماند، بنابراین کرنش های طولی از سطح خنثی با فاصله اشان به طور خطی تغییر می کنند.

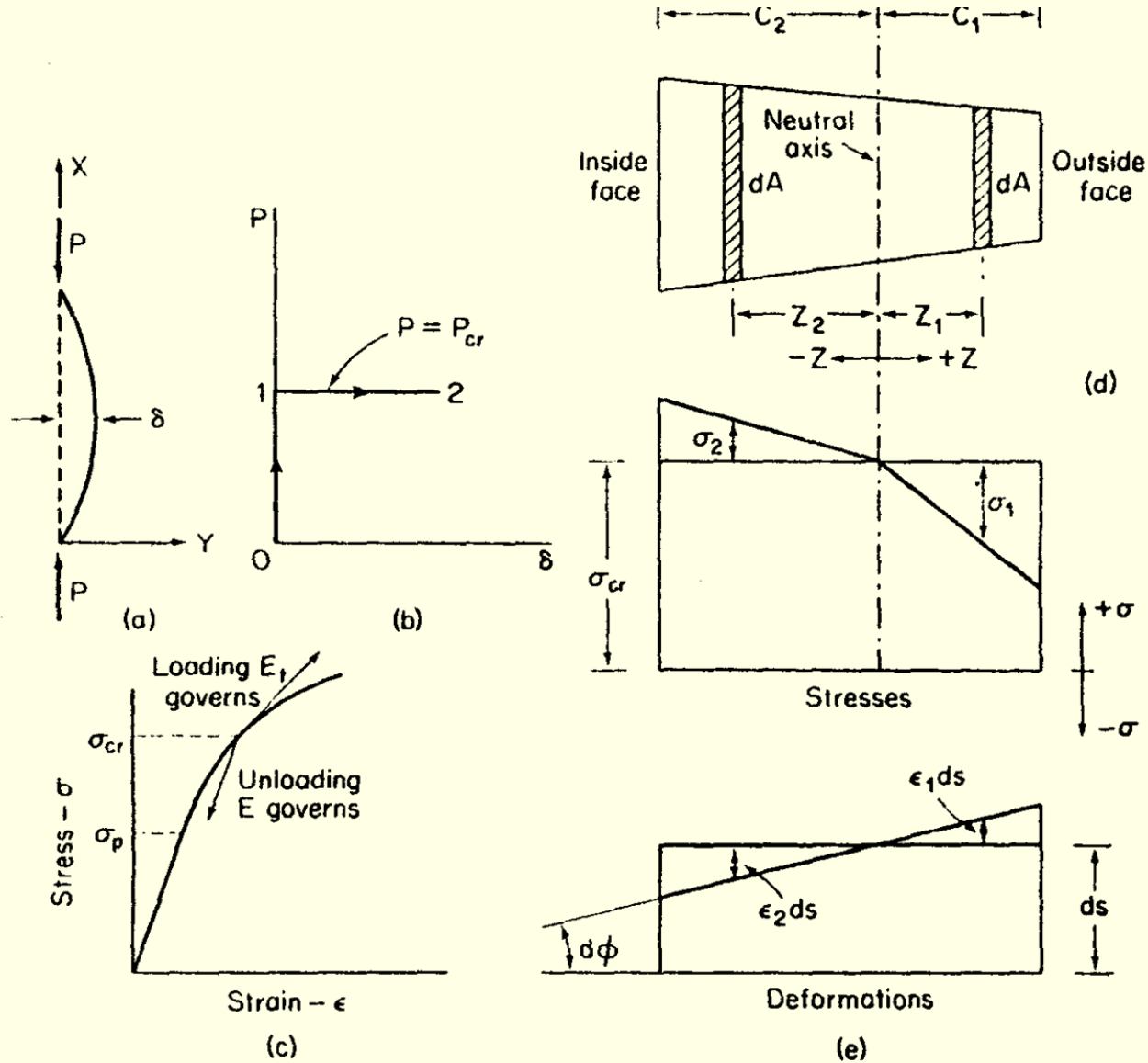
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### تعریف بار بحرانی بر اساس مفهوم تعادل خنثی:

بار بحرانی باری است که در هر دو شکل تغییر نیافته اولیه و کمی خم شده مجاور آن تعادل ممکن است. بر اساس این تعریف وقتی عضو از وضع مستقیم به وضع تغییر شکل یافته انتقال می یابد، بار محوری ثابت باقی می ماند.

ستون نشان داده شده در شکل زیر (a) را در نظر می گیریم. با وارد کردن بار محوری بر ستون مستقیم اولیه، مقدار این بار تا زمانی که به بار بحرانی برسد، افزوده می شود، سپس با خم شدن جزئی عضو، در حالی که نیروی محوری ثابت باقی می ماند، تغییر شکل نهایی عنصر حاصل می شود. به بیان دیگر رفتار ستون منطبق بر منحنی 0-1-2 در شکل (b) می باشد.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



تنش محوری که موقع خمش وجود دارد، بالاتر از حد تناسب مصالح فرض می شود. شکل (c).

در مدت خمش یک افزایش کوچک در تنش طرف مقعر ستون و یک کاهش کوچک در تنش طرف محدب آن اتفاق می افتد.

در شکل (d) ، توزیع نهایی تنش روی یک مقطع از عضو خم شده نشان داده شده است. مجموع تنش در هر نقطه از مقطع، از تنش یکنواخت محوری و تنش خمشی متغیر (کششی یا فشاری) تشکیل می شود. تغییر شکل مربوط به این توزیع خمشی تنش در شکل (e) نشان داده شده است.



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

مدول ارتجاعی  $E$  همیشه وقتی یک تار باربرداری شود، رابطه بین تنش و کرنش آن را نشان می دهد. بنابراین کاهش در تنش طرف محدب ستون ( $\sigma_1$ ) که موقع خم شدن عضو اتفاق می افتد، با کاهش کرنش نظیر آن ( $\varepsilon_1$ ) رابطه زیر را تشکیل می دهند:

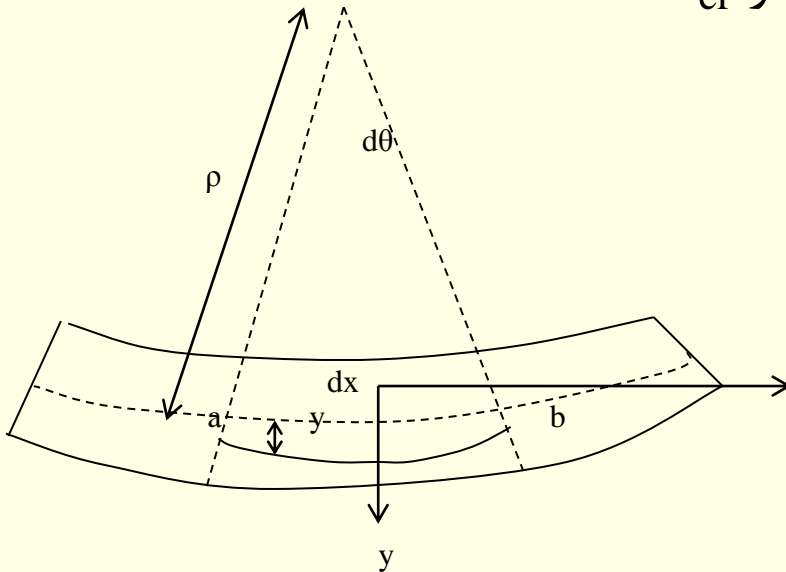
$$\sigma_1 = E\varepsilon_1$$

در طرف مقعر، خمش موجب افزایش مجموع تنش می شود، بنابراین رابطه آنی تنش خمشی  $\sigma_2$  با کرنش  $\varepsilon_2$  با مدول مماسی تعیین می شود. چون تغییر شکل های بعد از بار بحرانی خیلی کوچک فرض می شوند، از اینرو تنش های خمشی در مقایسه با  $\sigma_{cr}$  خیلی کوچک هستند و مدول مماسی  $E_t$  مطابق با  $\sigma_{cr}$  روی تمام قسمتی از سطح مقطع که تنش افزایش می یابد، می تواند قابل استفاده فرض شود. بنابراین

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$\sigma_2 = E_t \varepsilon_2$$

که در آن  $E_t$  شیب منحنی تنش- تغییر شکل نسبی در  $\sigma_{cr}$  است.  
در مبحث تیرها داشتیم:



$$\varepsilon_x = \frac{ab - dx}{dx} = \frac{(y + \rho)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{y}{\rho} \text{ و } \frac{1}{\rho} \cong y''$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

بنابراین برای حالت مورد بررسی می توان نوشت:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = z_1 y'' \rightarrow \sigma_1 = E z_1 y'' \\ \varepsilon_2 = z_2 y'' \rightarrow \sigma_2 = E_t z_2 y'' \end{cases}$$

حال تعادل بین بار خارجی و تنش های روی هر مقطع در نظر گرفته می شود. فرض براین است که در طول خمش، بار محوری ثابت باقی می ماند. بنابراین برآیند تنش های کششی و فشاری ناشی از خمش باید مساوی صفر شوند.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$\int_0^{C_1} \sigma_1 dA + \int_0^{C_2} \sigma_2 dA = 0$$

از جایگذاری دو رابطه پایین در معادله تعادل داریم:

$$\sigma_1 = z_1 y'' E \text{ و } \sigma_2 = z_2 y'' E_t$$

$$E y'' \int_0^{C_1} z_1 dA + E_t y'' \int_0^{C_2} z_2 dA = 0$$

$$Q_1 = \int_0^{C_1} z_1 dA \text{ و } Q_2 = \int_0^{C_2} z_2 dA$$

$Q_1$  و  $Q_2$  لنگرهای سطح در دو طرف محور خنثی می باشند.

$$E Q_1 + E_t Q_2 = 0$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

معادله بالا برای تعیین محور خنثی به کار می رود. چون  $E_t$  با  $E$  برابر نیست پس  $Q_1 + Q_2 \neq 0$  است و لذا محور خنثی منطبق بر محور مرکزی نیست.

شرط دوم تعادل این است که تنش های خمشی با لنگر خارجی وارده  $Py$  متعادل شوند یعنی:

$$\int_0^{C_1} \sigma_1 z_1 dA + \int_0^{C_2} \sigma_2 z_2 dA + Py = 0$$

$$y'' (E \int_0^{C_1} z_1^2 dA + E_t \int_0^{C_2} z_2^2 dA) + Py = 0$$

$$I_1 = \int_0^{C_1} z_1^2 dA \text{ و } I_2 = \int_0^{C_2} z_2^2 dA$$

$$y'' (EI_1 + E_t I_2) + Py = 0$$

با فرض

$$E_r = \frac{EI_1 + E_t I_2}{I}$$

مدول کاهش یافته،  $E_r$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

بنابراین در نهایت به معادله دیفرانسیل زیر می رسیم :

$$E_r I y'' + P y = 0$$

معادله مذکور ، معادله دیفرانسیل ستونی است که در آن تنش ها به مرحله غیرارتجاعی مصالح رسیده اند . این معادله اگر با معادله دیفرانسیل ستون الاستیک اولر -  $E I y'' + P y = 0$  - مقایسه شود ، در این صورت متوجه می شویم که هر دو معادله یکسان می باشند ، به جز اینکه  $E_r$  به جای  $E$  جایگذاری می شود .

از رابطه  $E_r = \frac{E I_1 + E_t I_2}{I}$  معلوم می شود که مقدار  $E_r$  به مشخصات تنش - کرنش مصالح و شکل سطح مقطع بستگی دارد و همیشه کوچکتر از  $E$  است .

از حل معادله خواهیم داشت :

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2}$$

بار  $P_r$  به عنوان بار مدول کاهش یافته نامیده می شود و چون داریم :

$$E_r < E$$


از این رو بار مدول کاهش یافته -  $P_r$  - همواره کوچکتر از بار اولر است .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

تنش بحرانی وابسته به بار مدول کاهش یافته نیز به صورت زیر بیان می گردد :

$$(\sigma_r)_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2}$$

بنابراین برای به دست آوردن بار و تنش مدول کاهش یافته ، لازم است که  $E_r$  ارزیابی شود.

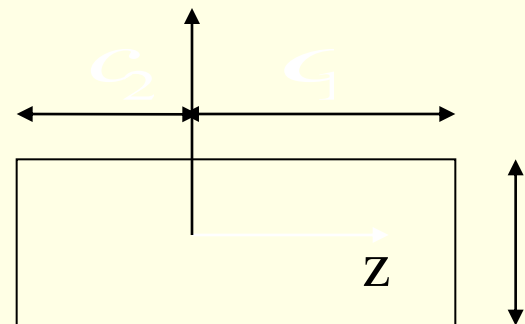
به عنوان مثال برای یک مقطع مستطیلی ( با ابعاد  و ) داریم :

$$Q_1 = \frac{b}{2} c_1^2$$

$$Q_2 = -\frac{b}{2} c_2^2$$

$$P_r$$

$$E_r \begin{cases} Ec_1^2 - E_t c_2^2 = 0 \\ E_r = \frac{EI_1 + E_t I_2}{I} \end{cases}$$



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

از این رو خواهیم داشت :

$$c_1 = \frac{h\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \quad c_2 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

در ادامه با داشتن  $c_1$  و  $c_2$  مقادیر  $I_1$  و  $I_2$  نیز قابل محاسبه خواهند بود.

$$I_1 = \frac{b}{2} c_1^3 \quad I_2 = \frac{b}{2} c_2^3$$

بنابراین رابطه مدول کاهش یافته -  $E_r$  - به صورت زیر در می آید :

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

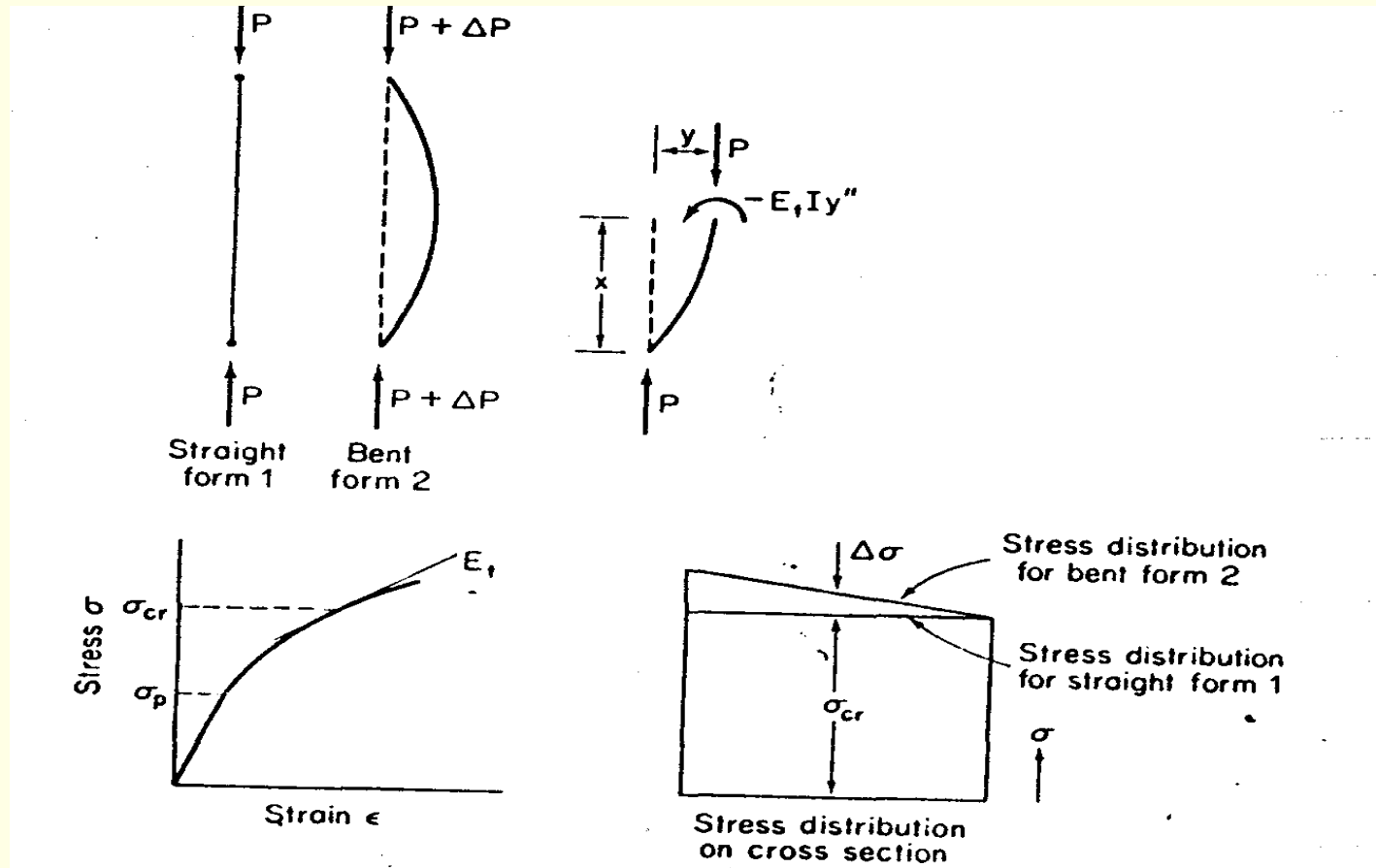
### ب ( تئوری مدول مماسی (Tangent Modulus Theory)

در این تئوری نیز فرضیات مورد استفاده در تئوری مدول دو گانه به کار می روند .

ولی این فرض که وقتی ستون از تعادل وضعیت مستقیم به تعادل وضعیت کمی خم شده عبور می کند ، بارمحوری ثابت می ماند ، دیگر صادق نمی باشد . در عوض ، در تئوری مدول مماسی فرض بر این است که بارمحوری در مدت انتقال از وضعیت مستقیم به وضعیت خم شده افزایش می یابد .

همچنین در این تئوری فرض می شود که افزایش در متوسط تنش محوری بزرگتر از کاهش در تنش ناشی از خمش در تار نهایی طرف محدب عضو است . در نتیجه برگشت کرنش روی طرف محدب اتفاق نمی افتد . تنش فشاری در تمام نقاط افزایش می یابد و مدول مماسی ناظر بر رابطه تنش - کرنش برای تمامی سطح مقطع است .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



برای شکل خم شده ستون ، لنگر خمشی داخلی در هر مقطع برابر است با :

$$M_{int} = -E_t I_y''$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

با در نظر گرفتن اینکه  $\Delta P$  در مقایسه با  $P$  قابل صرف نظر است ، لنگر خارجی  $Py$  است . پس تعادل در هر مقطع منجر به رابطه زیر می شود :

$$E_t I y'' + Py = 0$$

معادله دیفرانسیل مذکور با معادله دیفرانسیل کمانش ارتجاعی یکسان است به جز اینکه فقط  $E_t$  به جای  $E$  جایگزین شده است .

بنابراین بار بحرانی مدول مماسی به صورت زیر به دست می آید :

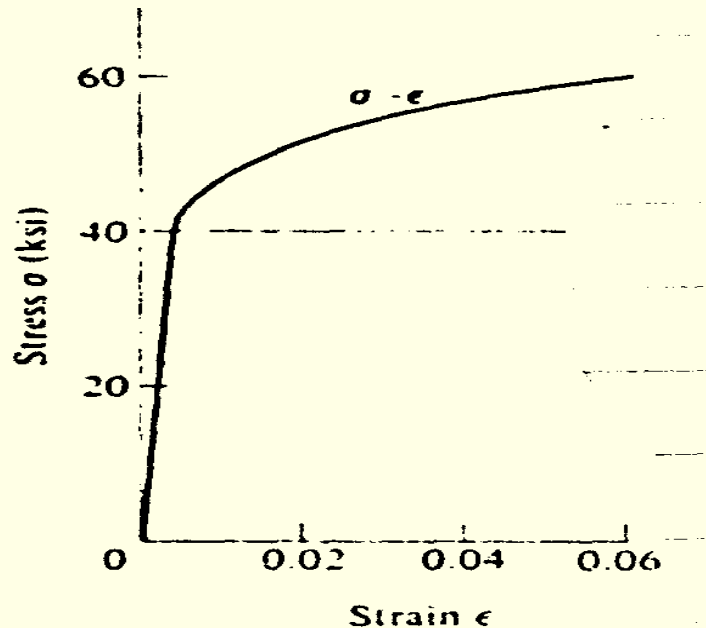
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2}$$

مقایسه بارهای بحرانی مدول مماسی و مدول کاهش یافته نشان می دهد که بار مدول مماسی همواره از بار مدول کاهش یافته کوچکتر است و برخلاف بار مدول کاهش یافته ، بار مدول مماسی مستقل از شکل سطح مقطع می باشد .

توجه شود که تئوری مدول مماسی نسبت به تئوری مدول دو گانه منجر به بار کمانش کوچکتری می شود ، و نتایج آزمایش موفقیت آمیزتر است . به همین دلیل اکثر مهندسين به عنوان تئوری صحیح کمانش غیرارتجاعی قبول کرده اند . معهدا بحث در مورد مزیت هر یک از تئوری ها ادامه دارد .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

به عنوان مثال یک ستون از جنس آلومینیوم و با مقطع مستطیلی را در نظر می گیریم که دارای رفتار تنش - کرنش زیر است :



$$E = 10600 \text{ksi} (73140 \text{MN} / \text{m}^2)$$

$$\sigma_p = 40 \text{ksi} (276 \text{MN} / \text{m}^2)$$

اطلاعات مربوط به رفتار تنش - کرنش و مدول مماسی و مدول کاهش یافته در جدول زیر ارائه شده اند .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

Stress $\sigma$ (ksi)	Tangent Modulus		Reduced Modulus	
	$E_t$ (ksi)	$l/r$	$E_r$ (ksi)	$l/r$
10	10 600	105.0	10 600	105.0
20	10 600	72.5	10 600	72.5
30	10 600	59.0	10 600	59.0
40	10 600	51.0	10 600	51.0
45	3000	26.0	5100	33.5
50	1000	14.0	2300	21.3
55	500	9.5	1300	15.3
60	400	8.1	1100	13.5

1 ksi = 6.9 MN/m<sup>2</sup>

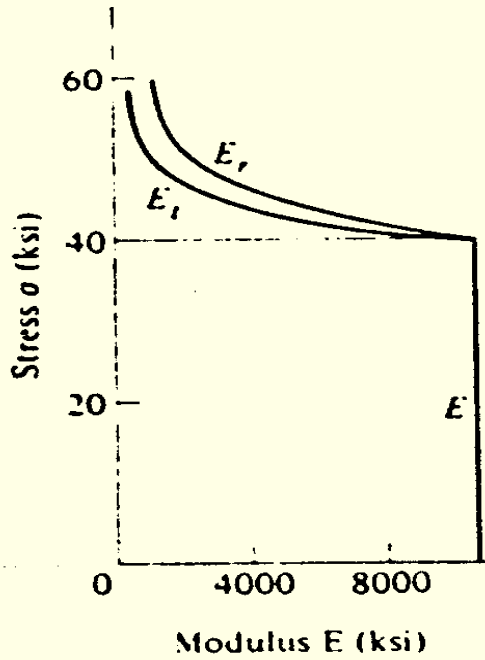
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2}$$

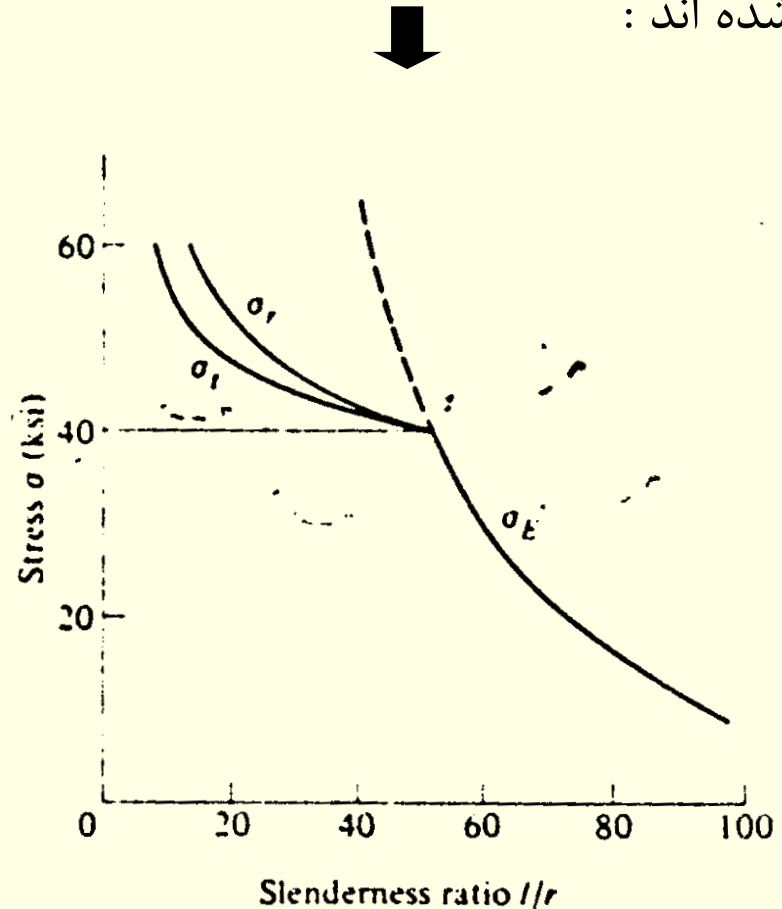
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2}$$

نمودارهای  $\sigma - E$ ،  $\sigma - E_t$  و  $\sigma - E_r$  در شکل  
بعدي نمایش داده شده اند :

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



نمودارهای  $(\sigma_t - L/r)$  ،  $(\sigma_E - L/r)$  و  $(\sigma_r - L/r)$  در شکل زیر نمایش داده شده اند :



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

ضریب لاغری متناسب با هر تراز تنش مستقیماً از روابط زیر محاسبه می شود :

$$L / r = \begin{cases} \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma}} : & \text{مدول ارتجاعی (Elastic Modulus)} \\ \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma}} : & \text{مدول مماسی (Tangent Modulus)} \\ \pi \sqrt{\frac{E_r}{\sigma}} : & \text{مدول کاهش یافته (Reduced Modulus)} \end{cases}$$

از نمودار روشن است که تفاوت بین  $\sigma_t$  و  $\sigma_r$  در  $L/r = 30$  در حدود 5% و در  $L/r = 15$  در حدود 10% است .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

پ ( تئوری مدل شانلی (Shanley's Model) برای رفتار غیر ارتجاعی ستون :

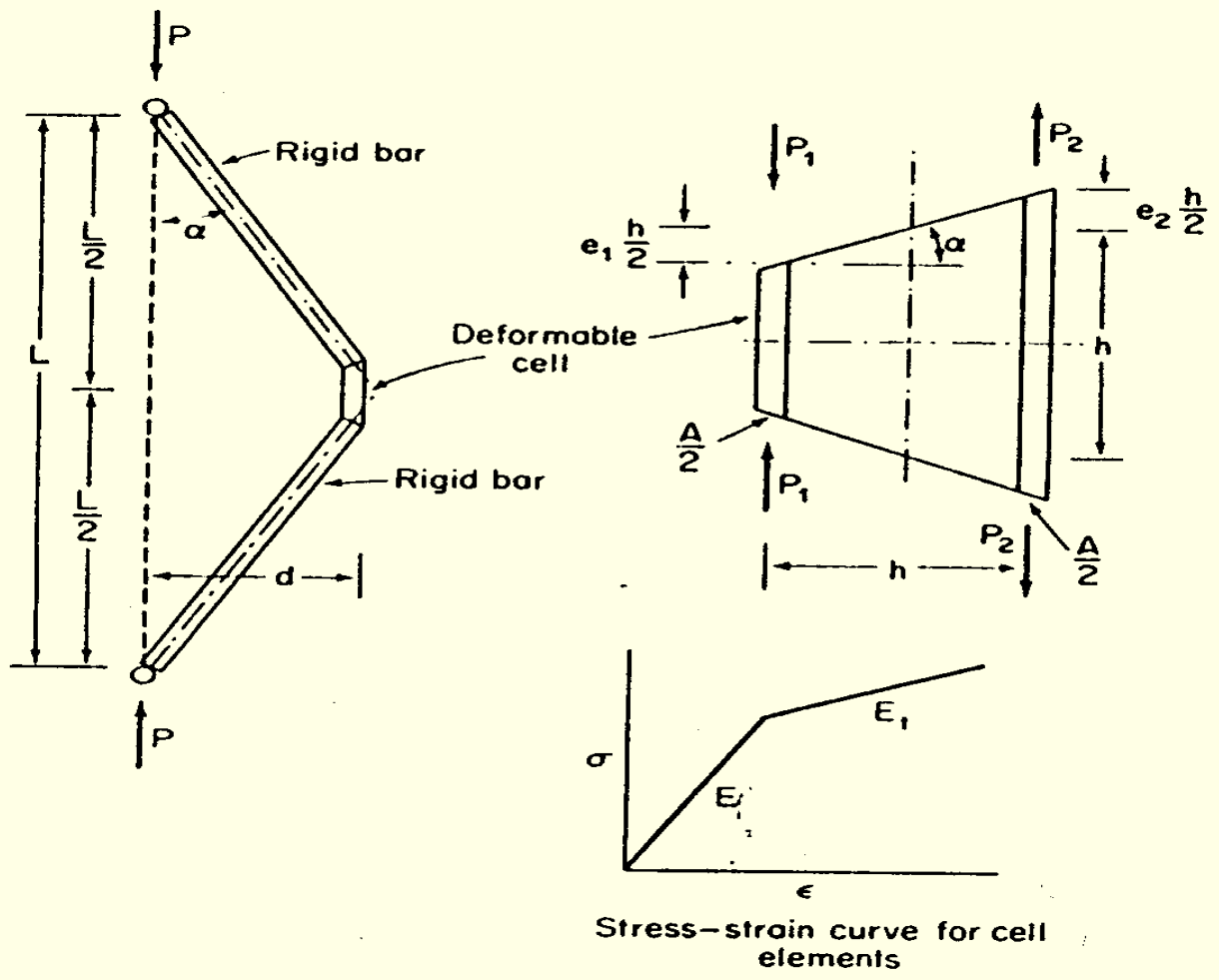
تاکنون در مورد رفتار پس بحرانی (Post Critical) یا پس کمانشی (Post Buckling) ستونها بحثی نکرده ایم . تحلیلی که در این قسمت ارائه می شود ، مربوط به رفتار ستون های غیر ارتجاعی بعد از بار بحرانی است .

شانلی (shanley) در سال ۱۹۴۷ در مقاله مشهور خویش "Inelastic Column Theory" که در Journal of the Aeronautical Science منتشر شد ، یک راه حل بسته فرم ( Closed Form Solution ) را برای رفتار پس کمانشی ستون غیر ارتجاعی ارائه داد .

شانلی یک مدل تقریبی ( Approximate Model ) از یک ستون واقعی ارائه داد . مدل شانلی شامل دو ساق بی نهایت صلب است که توسط یک سلول شکل پذیر ( Deformable Cell ) واقع در مرکز ستون به یکدیگر وصل شده اند . سلول از دو عضو محوری به فاصله  $h$  از یکدیگر ساخته شده است . هر عضو دارای سطح  $A/2$  و طول  $h$  است و طبق منحنی تنش - کرنش دوخطی زیر رفتار می کند .



# فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

اگر تغییر شکل جانبی نسبتاً کوچک باقی بماند ، با شیب ساقها  $\alpha$  از طریق رابطه زیر ، ارتباط می یابند :

$$d = \frac{\alpha L}{2}$$

$$\alpha = (e_1 \frac{h}{2} + e_2 \frac{h}{2}) / h = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{L}{4} (e_1 + e_2)$$

چون مدل تغییر شکل یافته در حال تعادل است ، لنگر خارجی در وسط ارتفاع برابر است با لنگر داخلی در این نقطه .

$$M_e = Pd = \frac{PL}{4} (e_1 + e_2) \quad \text{لنگر خارجی عبارت است از :}$$

همراه با کرنش های  $e_1$  و  $e_2$  ، نیروهای  $P_1$  و  $P_2$  نیز در اعضا سلول وجود دارد . اگر مدول موثر در دو عضو با  $E_1$  و  $E_2$  نشان داده شوند ، خواهیم داشت :

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$P_1 = e_1 E_1 \frac{A}{2} \quad P_2 = e_2 E_2 \frac{A}{2}$$

لنگر داخلی در سلول برابر است با :

$$M_i = (P_1 + P_2) \frac{h}{2} = \frac{hA}{4} (E_1 e_1 + E_2 e_2)$$

$$M_e = M_i$$

$$\frac{PL}{4} (e_1 + e_2) = \frac{hA}{4} (E_1 e_1 + E_2 e_2)$$

$$\Rightarrow P = \frac{hA}{L} \left( \frac{E_1 e_1 + E_2 e_2}{e_1 + e_2} \right)$$

در این مرحله بهتر است که یک رابطه برای بار مدول مماسی به دست آوریم . در تئوری مدول مماسی فرض بر آن است که موقع شروع خمش در هیچ نقطه از سطح مقطع ، برگشت کرنش یا باربرداری وجود ندارد . بنابراین  $E_1 = E_2 = E_t$  و در نتیجه معادله مربوط به بار  $P$  به صورت زیر در می آید :

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$P_t = \frac{E_t \cdot A \cdot h}{L}$$

اکنون می خواهیم رابطه ای بین بار وارده  $P$  و تغییر شکل جانبی  $d$  به دست آوریم . فرض می شود که هنگامی که ستون بعد از رسیدن به بار بحرانی خم می شود بار وارده  $P$  نیز افزایش می یابد . بنابراین  $E_1 = E_t$  و  $E_2$  بسته به این که در سمت محدب مدل بعد از شروع خمش برگشت تنش اتفاق بیفتد یا نیفتد مساوی  $E$  یا  $E_t$  است .

با فرض  $\tau = \frac{E_2}{E_t}$  و جایگزینی در معادله مربوط به بار  $P$  ، خواهیم داشت :

$$P = \frac{hA}{L} E_t \left( \frac{e_1 + \tau e_2}{e_1 + e_2} \right)$$

از طرفی داریم :

$$e_1 + e_2 = \frac{4d}{L} \Rightarrow e_1 = \frac{4d}{L} - e_2$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

از جایگزینی  $e_1$  در رابطه مربوط به بار  $P$  خواهیم داشت :

$$P = \frac{hAE_t}{L} \left[ 1 + \frac{L}{4d} (\tau - 1)e_2 \right]$$

$$P = P_t \left[ 1 + \frac{L}{4d} (\tau - 1)e_2 \right] \quad (\text{الف})$$

قبلاً فرض شد که وقتی ستون خم می شود بار وارده  $P$  افزایش می یابد . حال اگر فرض شود که خمش در بار مدول مماسی  $P_t$  شروع می شود ، در این صورت خواهیم داشت :

$$P = P_t + \Delta P$$

افزایش در بار  $\Delta P$  که در مدت خمش اتفاق می افتد ، برابر است با :

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{e_1 E_1 A}{2} - \frac{e_2 E_2 A}{2}$$

با در نظر گرفتن  $E_1 = E_t$  و  $\tau = \frac{E_2}{E_t}$  و  $d = \frac{L}{4} (e_1 + e_2)$  خواهیم داشت :

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

از جایگزینی  $e_1$  در رابطه مربوط به بار  $P$  خواهیم داشت :

$$\Delta P = \frac{AE_t}{2} \left[ \frac{L}{4d} - (\tau + 1)e_2 \right]$$

$$P = P_t + \frac{AE_t}{2} \left[ \frac{L}{4d} - (\tau + 1)e_2 \right] \quad \text{بنابراین داریم :}$$

$$\Rightarrow P = P_t \left[ 1 + \frac{2d}{h} - \frac{L}{2h} (\tau + 1)e_2 \right] \quad \text{( ب )}$$

با مساوی قرار دادن روابط  $P$  که توسط معادلات ( الف ) و ( ب ) بیان شد ، نتیجه زیر حاصل می شود :

$$e_2 = \frac{4d}{L(\tau - 1)} \frac{1}{\frac{h}{2d} + \frac{\tau + 1}{\tau - 1}}$$

سرانجام با جایگزین کردن رابطه مربوط به  $e_2$  در معادله ( الف ) ، رابطه مطلوب بار - تغییر شکل به دست می آید :

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$p = P_t \left( 1 + \frac{1}{\frac{h}{2d} + \frac{\tau + 1}{\tau - 1}} \right) \quad (\text{پ})$$

اکنون با استفاده از رابطه بین بار وارده  $P$  و تغییر شکل جانبی  $d$ ، رفتار پس کمانشی را می توان مورد بررسی قرار داد .

همانطور که فرض شد مدل در بار مماسی شروع به خم شدن می کند ، یعنی  $P = P_t$ ، وقتی که  $d = 0$  است . زمانی که  $d$  افزایش می یابد ، تغییر  $P$  با  $d$  به مقدار  $\tau = E_2 / E_t$  ارتباط پیدا می کند . بر حسب اینکه برگشت کرنش روی طرف محدب مدل اتفاق بیفتد یا نه این نسبت با  $1$  و یا  $E / E_t$  برابر است .

اگر برگشت تغییر شکل نسبی اتفاق نیفتد ،  $\tau = 1$  است و وقتی مدل خم می شود  $P$  در  $P_t$  ثابت باقی می ماند ، ولی خمش دربار ثابت باعث برگشت کرنش (Strain Reversal) می شود . بنابراین فرض نبودن برگشت کرنش به نتایج غیرسازگار منجر می شود و باید کنار گذاشته شود .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

با فرض اینکه برگشت کرنش اتفاق می افتد  $\tau = E / E_t$  بوده و معادله ( پ ) که بیانگر رابطه  $P - d$  است نشان می دهد که  $P$  با افزایش تغییرشکل  $d$  افزایش می یابد .

اکنون نشان داده خواهد شد که وقتی تغییرشکل  $d$  نسبت به  $h$  بزرگ می شود .  $P$  افزایش می یابد و به  $P_r$  نزدیک می شود . در تئوری مدول کاهش یافته فرض براین است که خمش در بار ثابت صورت می گیرد . بنابراین  $P_1 = P_2$  و  $E_1 e_1 = E_2 e_2$  ، در نتیجه :

$$e_2 = \frac{e_1 E_1}{E_2} = \frac{e_1 E_t}{E} = \frac{e_1}{\tau}$$

و با در نظر گرفتن  $d = \frac{L}{4} (e_1 + e_2)$  خواهیم داشت :

$$e_2 = \frac{4d}{L} \frac{1}{1 + \tau}$$

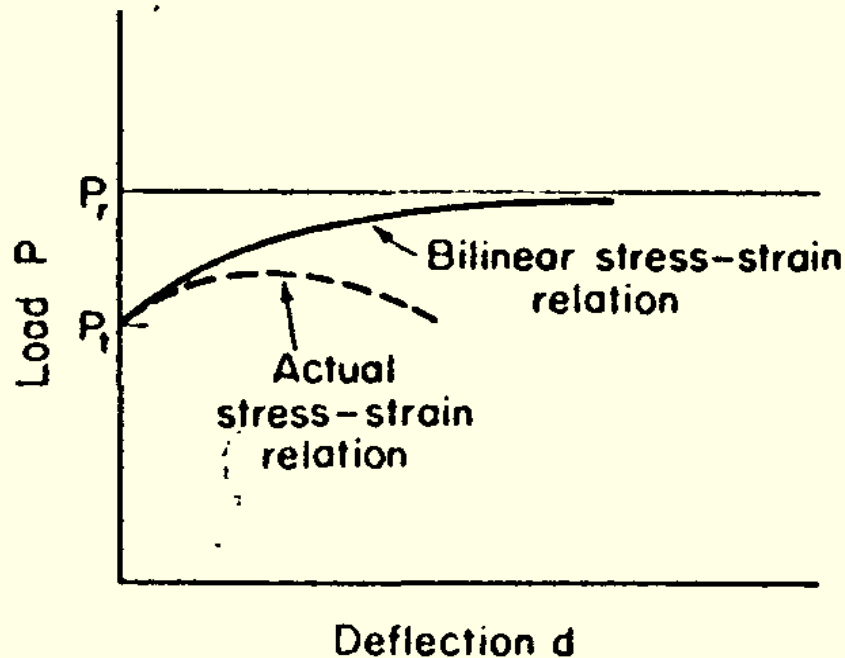
با جایگزینی  $e_2$  در معادله ( الف ) ، فرمول بار مدول کاهشی به دست می آید :

$$P_r = \frac{hAE_t}{L} \left( 1 + \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right) = P_t \left( 1 + \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right)$$



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

بنابراین وقتی تغییر شکل خیلی بزرگ می شود ،  $h/2d$  به سمت صفر میل می کند و باری که بوسیله مدل تحمل می شود ، یعنی معادله ( پ ) به بار مدول کاهش یافته یعنی معادله ( ت ) نزدیک می شود . رفتار مدل حاصل از معادله ( پ ) با منحنی پرخلاصه شده است . خمش دربارمدول مماسی شروع می شود و با افزایش یافتن بارمحوری ادامه می یابد . وقتی تغییر شکل جانبی بزرگ می شود بار محوری به بار مدول کاهش یافته نزدیکتر می شود .



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

مهمترین اختلاف بین یک ستون واقعی و این مدل این است که در یک ستون واقعی با افزایش کرنش فشاری  $E_f$  کاهش می یابد ، در حالی که در مدل مقدار آن ثابت فرض شده است . یک تقریب بهتر از رفتار بعد از کمانش نسبت به آنکه توسط خط پر در شکل بالا نشان داده شده است ، با در نظر گرفتن کاهش در  $E_f$  به دست می آید . بنابراین همانطور که توسط منحنی خط چین در شکل نشان داده شده ، مدل دارای یک بار حداکثر است که مقدار آن بین  $P_f$  و  $P_r$  قرار دارد .

اگرچه مدل شانلی ، ساده سازی بیش از حدی از رفتار ستون واقعی است ، با این حال در مورد کمانش غیر ارتجاعی ستون ، ما را به نتایج زیر رهنمون می سازد :

(۱) یک ستون در ابتدا مستقیم است و همین که از بار مدول مماسی تجاوز می کند ، شروع به خمش خواهد کرد .

(۲) در نتیجه شروع خمش ، بار محوری افزایش می یابد و به یک مقدار حداکثر می رسد که بین بار مدول مماسی و بار مدول کاهش یافته قرار دارد .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

۳) اگرچه هنگام شروع خمش ، برگشت تغییر شکل نسبی وجود ندارد ، همین که تغییر شکل های خمشی محدود حاصل می شود ، برگشت کرنش اتفاق می افتد . از تمام نتایج بدست آمده ، احتمالاً بزرگترین نتیجه آن است که حداکثر بار ستون بین بار مدول مماسی و بار مدول کاهش یافته قرار می گیرد .

یک مطالعه دقیق تراز آنچه توسط شانلی انجام شده است ، در مورد ستون های واقعی ساخته شده از مواد واقعی ، نشان می دهد که  $P_{max}$  معمولاً به  $P_t$  نزدیکتر است تا به  $P_r$  و نسبت  $P_t / P_{max}$  در حدود 1.02 تا 1.10 است . بنابراین می توان نتیجه گرفت که بار مدول مماسی به حداکثر باری که یک ستون می تواند تحمل کند ، خیلی نزدیک است .

در نهایت با توجه به مباحث مطرح شده در بخش های تئوری مدول کاهش یافته ، مدول مماسی و تئوری شانلی به دو نتیجه اساسی نائل می شویم :

۱- بار مدول کاهش یافته دارای این امتیاز ضعیف است که معیار کلاسیک پایداری ( ثابت باقی ماندن بار ) را ارضا می کند . ولی این عیب را دارد که بزرگ تر از حداکثر باری است که یک ستون غیر ارتجاعی می تواند تحمل کند .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

۲- بار مدول مماسی با نتایج آزمایش توافق دارد و تا اندازه ای محافظه کارانه است . این بار مستقل از شکل سطح مقطع است و بنابراین محاسبه آن از بار مدول کاهش یافته آسان تر است . با این همه این بار دارای توجیه تئوریک کمترین بار محوری است که ستون در آن حال شروع به خم شدن می کند . برپایه این ملاحظات ، بارمدول مماسی معمولاً به بارمدول کاهش یافته ترجیح داده می شود .

ت ) اثر ناکاملی ها در رفتار غیر ارتجاعی ستون :

همان گونه که قبلاً عنوان شد ، ستون های واقعی دارای ناکاملی هایی نظیر ناکاملی هندسی ، ناکاملی در بارگذاری و ... هستند .

این ناکاملی موجب می شود که ستون از ابتدای آغاز بارگذاری ، شروع به خمش نماید ( هر چند در بارهای کمتر از بار بحرانی نرخ خمش کم باشد ) . به میزانی که خیز جانبی ستون بزرگ تر می شود ، برگشت تنش یا برگشت کرنش در نقاطی از مقطع عرضی ستون اجتناب ناپذیر است ، زیرا محور خنثای یک مقطع الاستوپلاستیک باید دائماً حرکت کند تا این که تعادل حفظ شود .

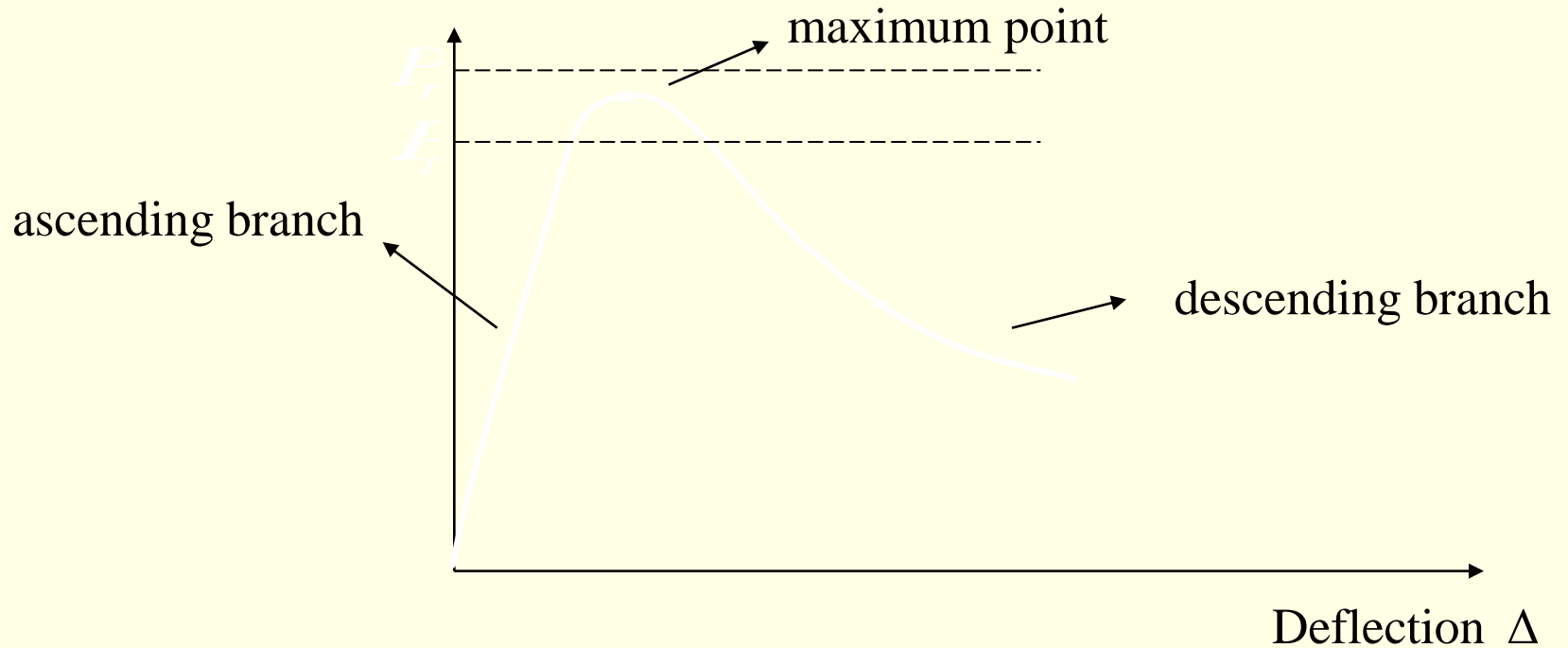
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

تئوری شانلی نشان داد که ناحیه برگشت کرنش بوسیله مدول الاستیک  $E$  کنترل می شود که بسیار بزرگتر از مدول مماسی  $E_t$  است. اگر هیچ گونه برگشت کرنش در مقطع رخ ندهد، در این صورت سختی خمشی ستون  $E_t I$  است و اگر برگشت کرنش کامل رخ دهد، سختی خمشی ستون  $P$  است. بنابراین سختی خمشی واقعی ستون بین  $E_t I$  و  $E_t t$  قرار دارد.

همچنانکه تئوری شانلی نشان داد، منحنی بار - خیز یک ستون الاستو پلاستیک دارای سه مشخصه است:

- ۱ - شاخه صعودی ( Ascending branch )
- ۲ - شاخه نزولی ( Descending branch )
- ۳ - نقطه ماکزیمم ( Maximum point )

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



مفهوم شاخه نزولی آن است که نرخ افزایش در لنگر خارجی ( ناشی از  $P\Delta$  ) بزرگتر از نرخ افزایش لنگر داخلی ( ناشی از  $EI_e y''$  ) می باشد .

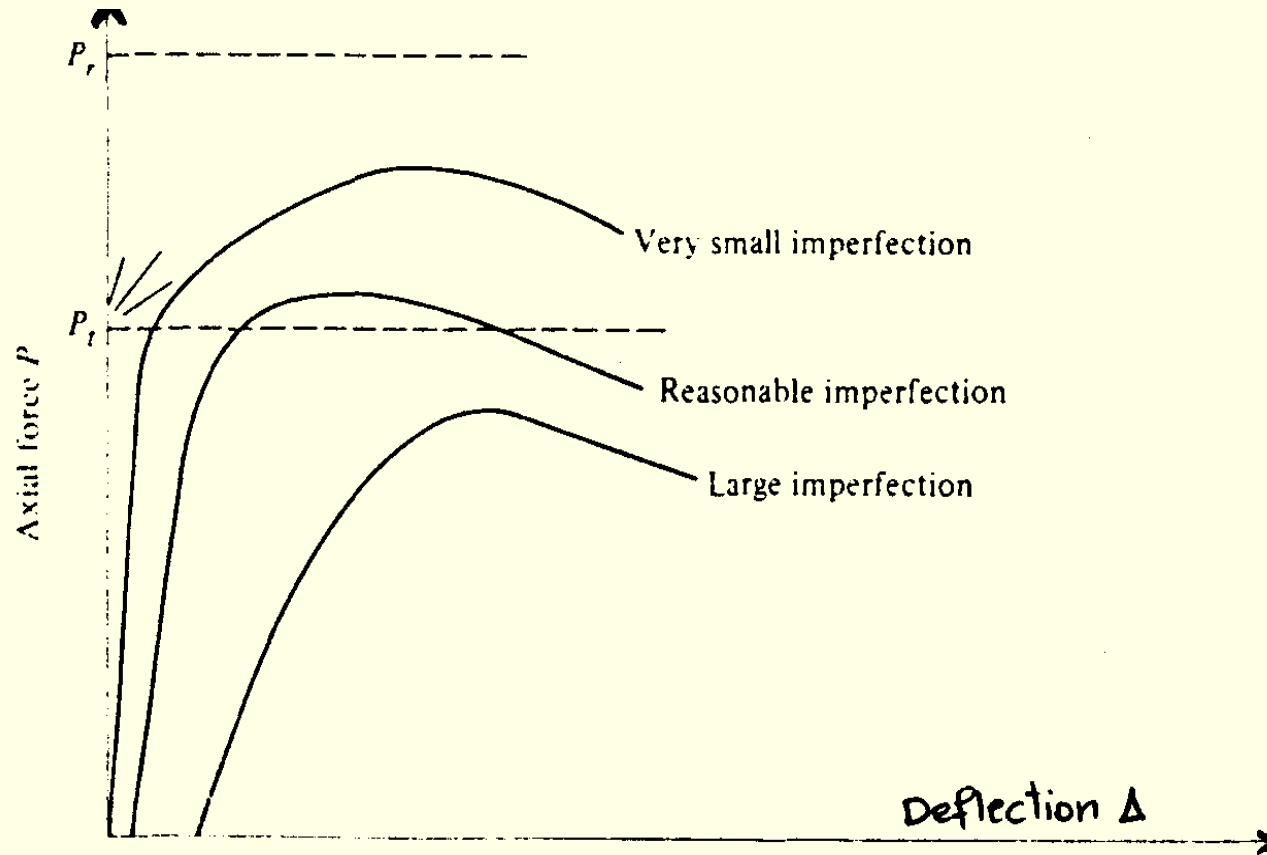
تعداد ستون خم شده ، با ابقاء تعادل بین لنگر خارجی وارده و لنگر مقاوم داخلی در هر مقطع حاصل می شود . هر دو لنگر تابعی از تغییر شکل جانبی ستون می باشند . به محض اینکه

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

تنش ها از حد تناسب تجاوز می کنند ، سختی عضو کاهش می یابد و افزایشی که در لنگر مقاوم داخلی در اثر افزایش در تغییر شکل رخ می دهد ، کمتر و کمتر می شود . در ابتدا ، یک کاهش در نسبت بار وارده مطابق با یک افزایش فرض شده در تغییر شکل برای ابقاء تعادل بین لنگرهای داخلی و خارجی کافی است . ولی عاقبت با افزایش تغییر شکل ، افزایش در لنگر بقدری کم می شود که تعادل بین آن و لنگر خارجی فقط با یک کاهش در بار وارده می تواند ابقاء شود و لذا شاخه نزولی معنی و مفهوم پیدا می کند .

برای یک ستون واقعی نقطه ماکزیمم بار - خیز ، بستگی به میزان ناکاملی ها دارد . مشخص است که طبق تئوری شانلی ، برای یک ستون کامل ، بار ماکزیمم زیر بار مدول کاهش یافته ( $P_r$ ) قرار دارد . ولی بسته به میزان ناکاملی ها نقطه ماکزیمم می تواند بزرگتر یا مساوی یا کوچکتر از بار مدول مماسی ( $P_t$ ) باشد . مشخص است که وجود ناکاملی ها ( از قبیل هندسی و بارگذاری ) نقش تعیین کننده در افزایش لنگر خارجی دارد و لذا برای حفظ تعادل بین لنگر داخلی و لنگر خارجی ، باید بار ماکزیمم کاهش یابد .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )





## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### ۶ ) بررسی رفتار ستونها با استفاده از روش عناصر محدود

همچنانکه قبلاً گفتیم ، برای استخراج رفتار ستونها بویژه رابطه بار محوری – کوتاه شدگی محوری و نیز رابطه بار محوری – خیز جانبی دو رده روش وجود دارد :

روش های کامل با جوابهای بسته فرم

( Exact Method with Closed form Solution )

( Numerical Method )

روش های عددی

در روشهای کامل با جوابهای بسته فرم که روش های تک عضوی نیز نامیده می شود ، عضو فشاری به یک سیستم گسسته تبدیل نمی شود بلکه به عنوان یک محیط پیوسته یک بعدی در نظر گرفته میشود. شرایط تغییر مکان ، شرایط تعادل و شرایط الاستوپلاستیته

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

---

توصیف می شوند و در نهایت یک پاسخ بسته فرم به دست می آید .  
روش شانلی در واقع یک روش کامل یا یک روش تک عضوی و پاسخ حاصل یک پاسخ بسته فرم برای رابطه بار محوری - خیز جانبی بود .

برای استخراج رفتار ستون ، عمدتاً از سه روش عددی استفاده می شود :

- روش تفاضلات محدود ( Finite Difference Method )

- روش قطعات محدود ( Finite Segment Method )

- روش عناصر محدود ( Finite Element Method )

در روش تفاضلات محدود ، تعداد محدودی نقطه در امتداد عضو در نظر گرفته می شوند . یک شکل آزمون تغییرشکل یافته فرض می شود . سپس درهرنقطه ، شرایط تنش می تواند الاستیک ، الاستوپلاستیک و یا پلاستیک کامل باشد . برایندهای تنش را می توان برای به دست دادن نیروی محوری و لنگرها محاسبه نمود . بنابراین معادلات دیفرانسیل تعادل را

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

می توان برای هر نقطه نوشت و حل همزمان این معادلات منجر به یک مجموعه تغییر مکان در هر نقطه می شود . سیکل تحلیل با خیزهای جدید تکرار می شود تا اینکه همگرایی حاصل شود . بنابراین رفتار بار – کوتاه شدگی محوری عضو را می توان از یک سری از این تحلیلها با نمو سازی بار یا تغییر مکان به دست آورد .

در روش قطعات محدود فرض می شود هر عضو فشاری از تعداد محدودی قطعات منشوری تشکیل شده است که هر یک از آنها شامل تعداد محدودی تارهای یک بعدی می باشند . در نتیجه، رفتار عضو را می توان بر حسب رفتار این قطعات ( بدون استفاده از معادلات دیفرانسیل پیچیده ) فرمول بندی نموده و به طور تقریبی حل کرد . ماتریس های سختی هر قطعه با استفاده از میدان کامل تغییر مکان عضو فشاری در امتداد قطعه تعیین می شوند . در تعیین ماتریس های سختی اثر نیروی فشاری در نظر گرفته می شود .

در روش عناصر محدود ، عضو فشاری به طور فیزیکی گسسته شده و به مجموعه ای از عناصر گسسته تبدیل می شود و سختی هر عنصر با استفاده از یک میدان تغییر مکان تقریبی در امتداد طول عنصر تعیین می گردد .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

امروزه با وجود کامپیوتر ، استفاده از روش های عددی بر روش های تک عضوی برتری و رجحان دارد . و در میان روش های عددی نیز ، روش های عناصر محدود بویژه برای موقعیت های پیچیده نظیر غیرخطی هندسی ، غیرخطی مصالح و کمانش محلی برای محاسبه رفتار ستونها بسیار مناسب تر می باشد و لذا در اینجا به بررسی رفتار ستون ها با استفاده از روش عناصر محدود می پردازیم .

معمولاً با استفاده از نرم افزارهای تجاری عناصر محدود نکات زیر در تحلیل در نظر گرفته می شوند :

- برای بدست آوردن نتایج دقیق و قابل اطمینان ، هر عضو ( حداقل ) به ۲۰ الی ۵۰ عضو تقسیم می شود .
- از عنصر تیری تیموشینکو برای نمایش هر عنصر استفاده می شود . در این عنصر اثر تغییرشکل های برشی نیز در نظر گرفته می شوند .
- برای ستون های فولادی یک رفتار مصالح الاستیک - کاملاً پلاستیک برای عناصر منفرد فرض می شود .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

- در تحلیل ، غیر خطی مصالح و غیر خطی هندسی - هر دو - در نظر گرفته می شوند .
- برای دنبال نمودن مسیر تعادل و گذرازنقاط بحرانی به محدوده پس بحرانی ، از روش های طول کمان استفاده می شود . در این روش یک معادله قیدی نمو بار را کنترل می کند .
- عموماً یک ناکاملی هندسی - شامل یک انحناء اولیه متقارن - برای ستون در نظر گرفته می شود .
- فرض می شود که اعضای فشاری دارای ناپایداری محلی نمی باشند .
- فرض می شود که عضو فشاری تنها در صفحه تقارن مقطع عرضی بدون پیچش، تغییر مکان پیدا می کند .
- بارگذاری عضو فشاری بدون خروج از مرکزیت در نظر گرفته می شود .
- فرض می شود که مقطع متقارن بوده و در سرتاسر طول عضو فشاری یکنواخت فرض می شود .

### 3.4 Methods to trace nonlinear prebuckling paths

In the computational algorithms the nonlinear problem is most commonly solved by the well-known Newton-Raphson method, NR method<sup>15,16,18,22,23,25-34,106,119,134,228,237-239,254</sup>. This method consists of a series of linear steps where a solution which satisfies deformation compatibility is successively corrected until it also satisfies equilibrium conditions (Figure 11a). Alternatively, smaller load increments may be repeated with correspondingly fewer iterations within each load increment as in the incremental Newton-Raphson method, INR method (Figure 11b).

For less nonlinear systems the tangent stiffness matrix need not be formulated anew for each iterative cycle. Instead, the stiffness matrix calculated at the start of the load increment can be used repeatedly until convergence is reached (Figure 11c). This modified Newton-Raphson method, MNR method gives a less accurate correction to the deformations and thus slower to converge. However, considerable savings in computation time are gained in formulating the tangent stiffness matrix.

For tracing the entire nonlinear prebuckling path an incremental method is used based on NR or MNR methods (Figures 12a,b). If the initial elastic stiffness matrix is used in the MNR scheme for all the increments (Figure 12c) the technique is termed as constant initial stiffness method, CIS method<sup>185</sup>.

The main advantage of using MNR or CIS methods is the saving in computer time in comparison with NR method. The disadvantages are that these methods suffer from poor convergence when the nonlinearity in the system is extensive.

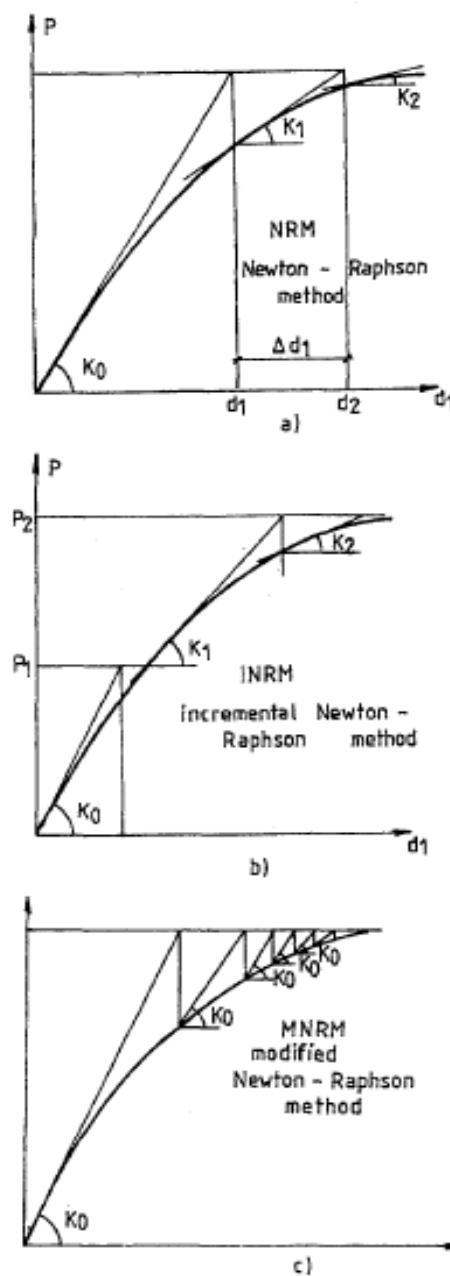


Figure 11. Newton-Raphson method

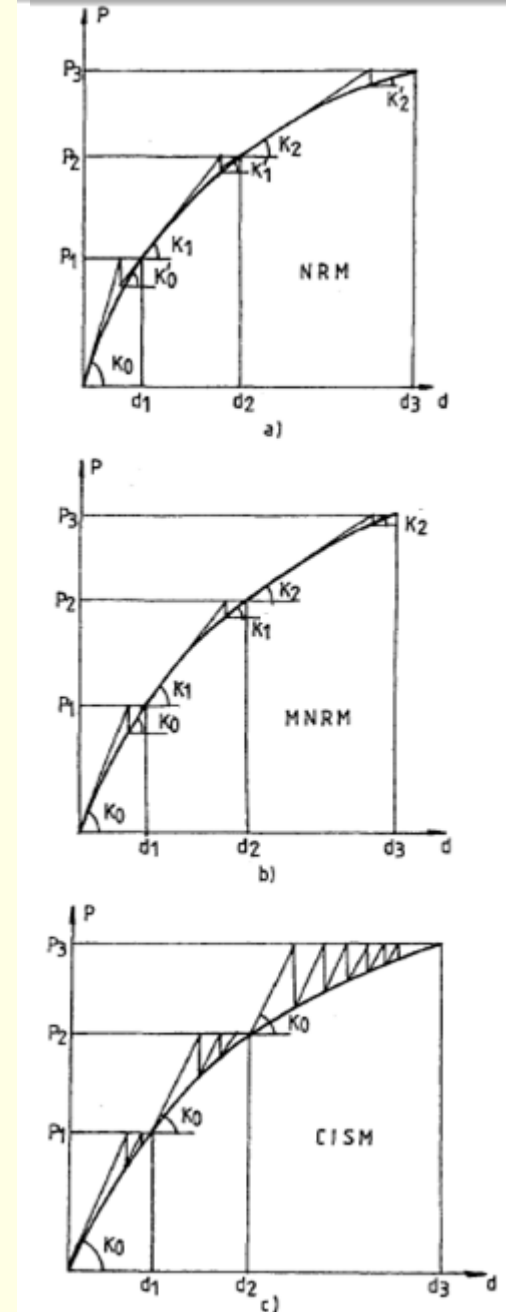


Figure 12. Methods for tracing the nonlinear path

### 3.5 Methods to overcome problems at limit points

The NR method, with various modifications, is widely used to trace nonlinear prebuckling paths. However, in the vicinity of the limit point, as the tangent stiffness matrix approaches singularity, the iteration tends to diverge. To overcome this problem and to trace the equilibrium paths through limit points into the post-critical range, several methods have been proposed:

(i) Riks-Wempner method<sup>231-234,306</sup> (Figure 13a) was conceived separately by each of the two authors. This method is known also as constant arch-length method. Starting from a point A, the next point B is determined following a plan normal to the tangent. If for each iteration the tangent stiffness matrix is the one established for point A, the procedure is known as modified Riks-Wempner method.

(ii) Wessels method<sup>29</sup> introduces a two-step calculation procedure (Figure 13b), which avoid the inversion of the tangent stiffness matrix.

(iii) Ramm method<sup>228</sup> (Figure 13c) consists of a further modification of the Riks-Wempner method. The idea is to update the condition of orthogonality expressed in the Riks-Wempner method at each iteration. By means of this technique it is in fact possible to increase the quality of intersection between the equilibrium path and the control surface. Similar to the other methods, a modified Ramm method can be used, when the tangent stiffness matrix is updated only once at each iteration.

(iv) Crisfield method<sup>57-63,72,305</sup> (Figure 13d) can also be considered as a modification of the classical Riks-Wempner method. This method uses a sphere with the centre at the last known point and the iteration is performed along a circle. In the modified Crisfield method the tangent stiffness matrix is updated only at the beginning of each load increment.

The Lanczos algorithm for overcoming problems at the limit points is also presented in [215,222].

A general presentation of the methods to overcome problems at the limit points is given in [29,70,119].

Borri<sup>29</sup> shows that the modified Ramm method is the fastest iteration procedure.

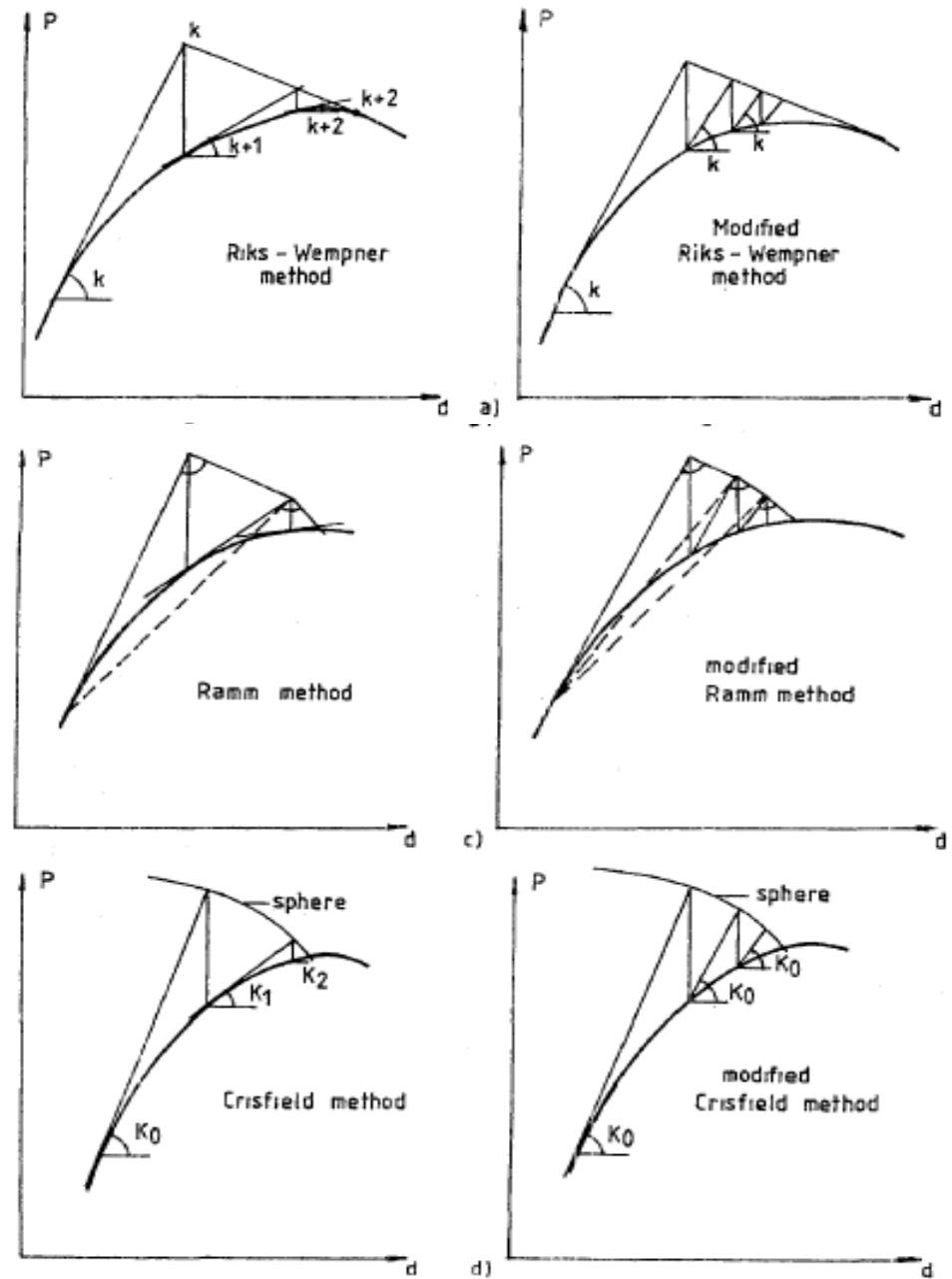
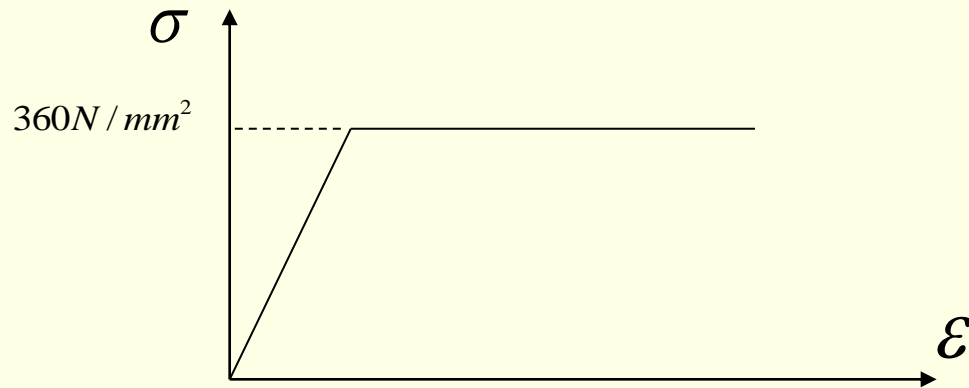


Figure 13. Methods for overcoming problems at limit point

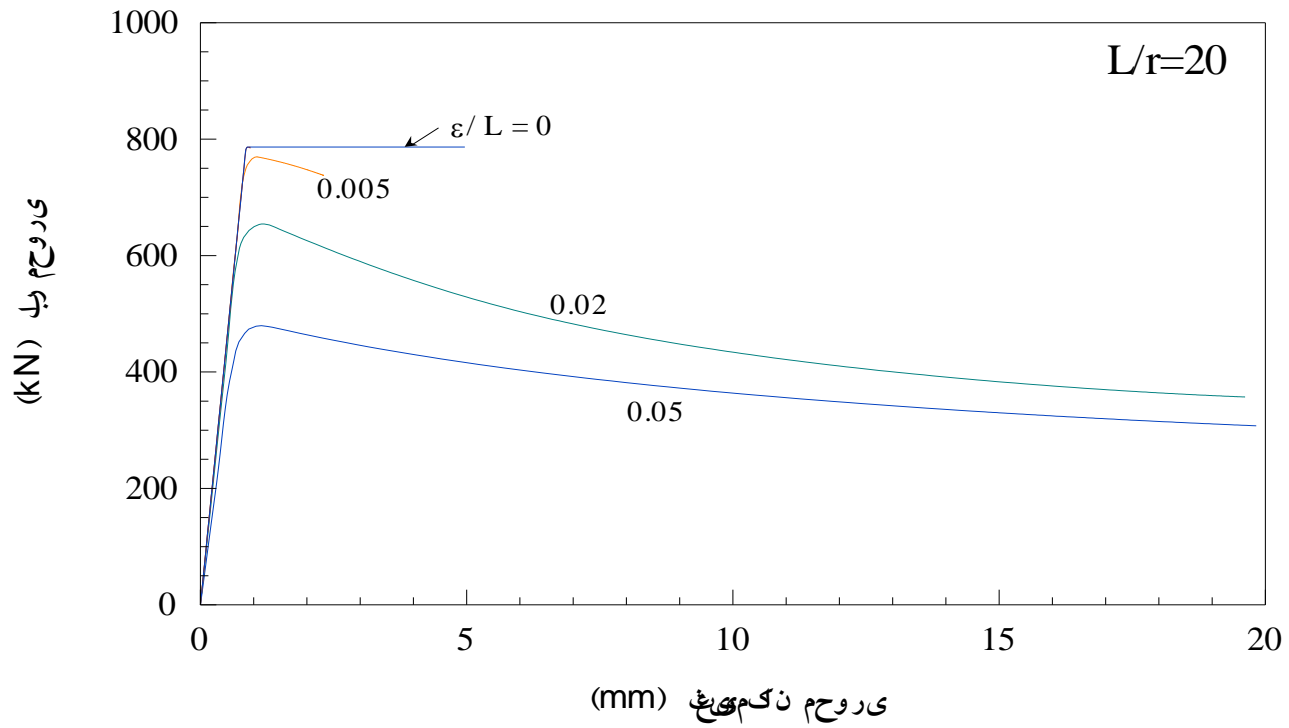
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

در اینجا یک ستون با مقطع لوله ای به شعاع  $41.275mm$  و به ضخامت دیواره  $9.52mm$  را در نظر می گیریم . برای تعیین اثرات ضریب لاغری عضو فشاری در رفتار بار محوری - تغییر مکان محوری ، چهار طول مختلف - یعنی  $3000mm, 2000mm, 500mm$  ،  $5000mm$  را در نظر می گیریم . ضرایب لاغری متناظر با این اعضای فشاری به ترتیب عبارتند از  $200, 120, 80, 20$  . رفتار الاستوپلاستیک مصالح به صورت زیر در نظر گرفته می شود (مرجع: شیدائی م. و عابدی ک.، ۱۳۸۱، بررسی رفتار کمانشی اعضای فشاری به روش اجزای محدود، مجموعه مقالات اولین کنفرانس سازه های جدار نازک / ایران، ارومیه، ایران، ۱۳۱ - ۱۳۸).

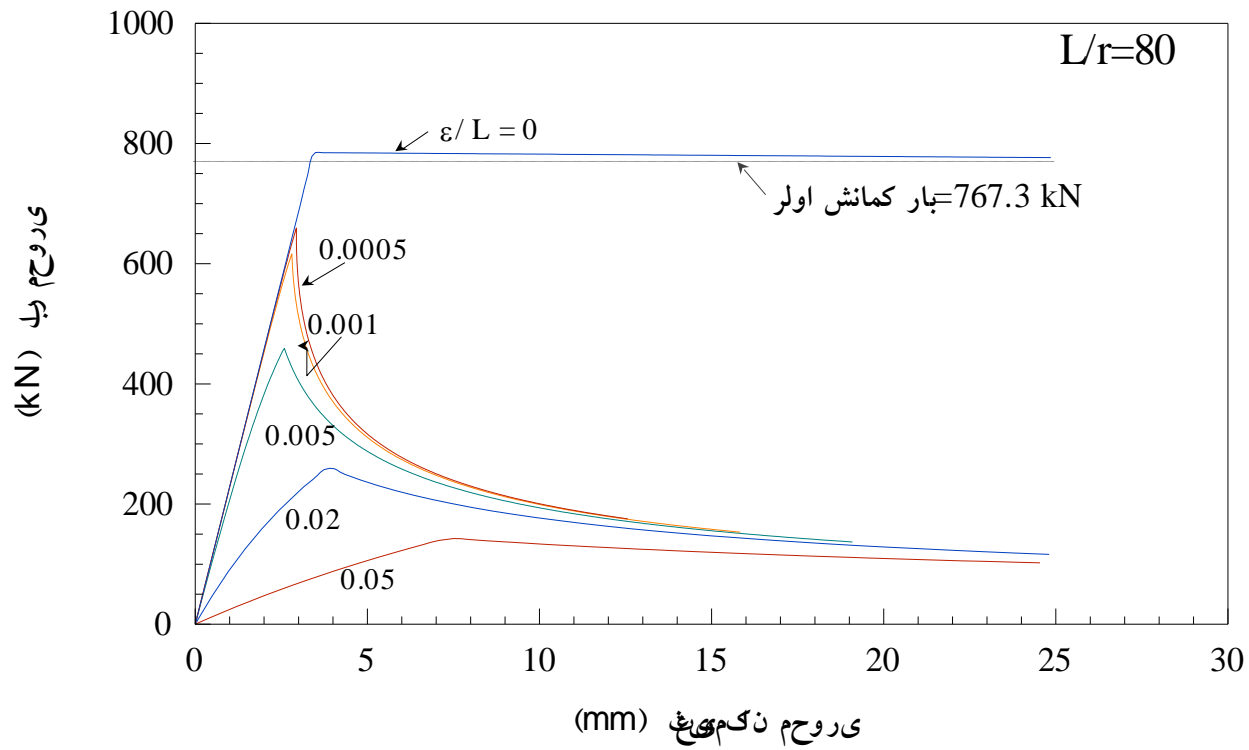


در هنگام اعمال یک انحنای اولیه به اعضای فشاری به عنوان ناکاملی اولیه ، ۵ مقدار مختلف برای دامنه ماکزیمم ناکاملی در طول عضو ، به صورت  $0.005L, 0.0005L, 0.0$  ،  $0.05L, 0.02L$  در نظر گرفته می شوند .

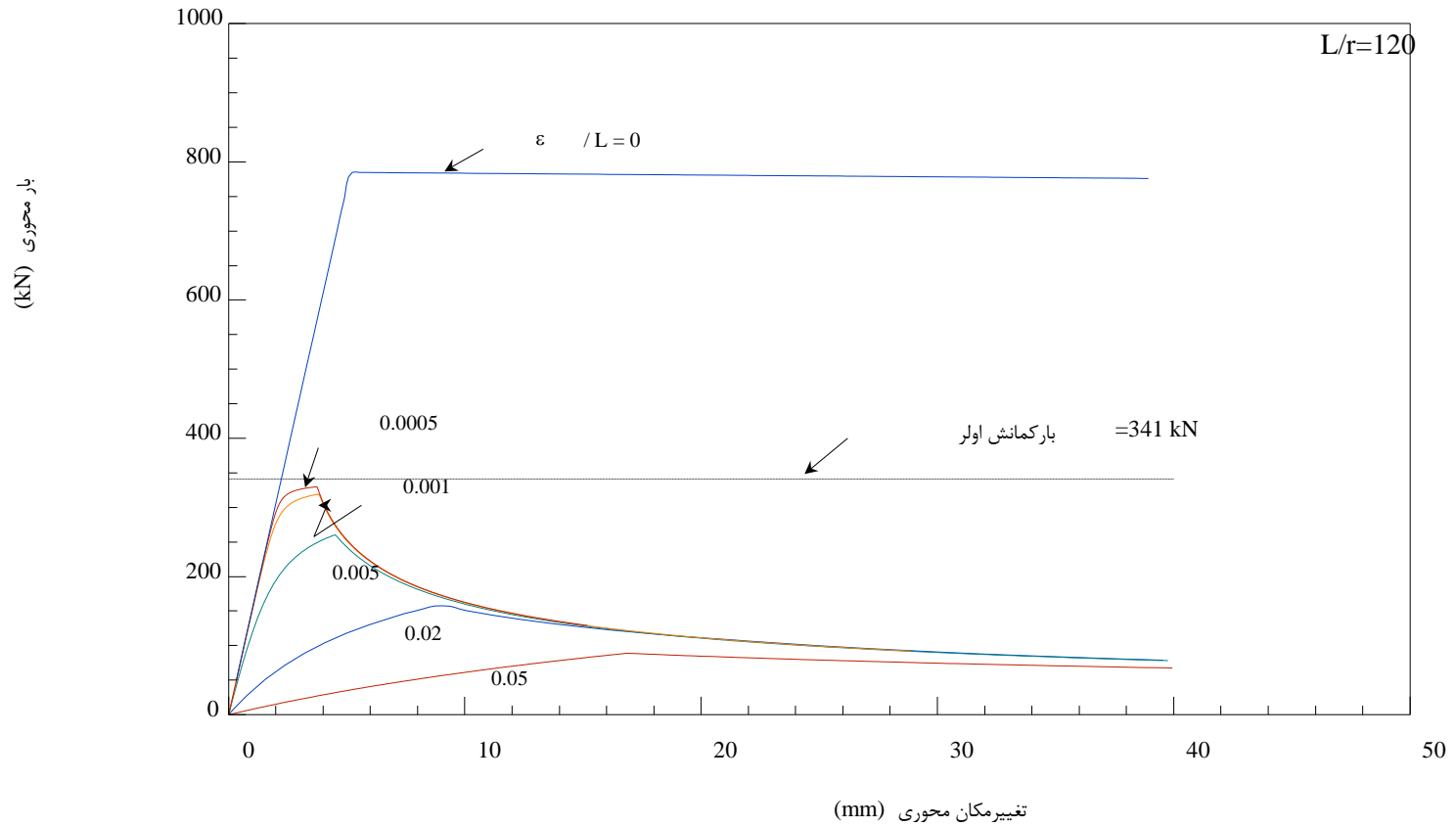




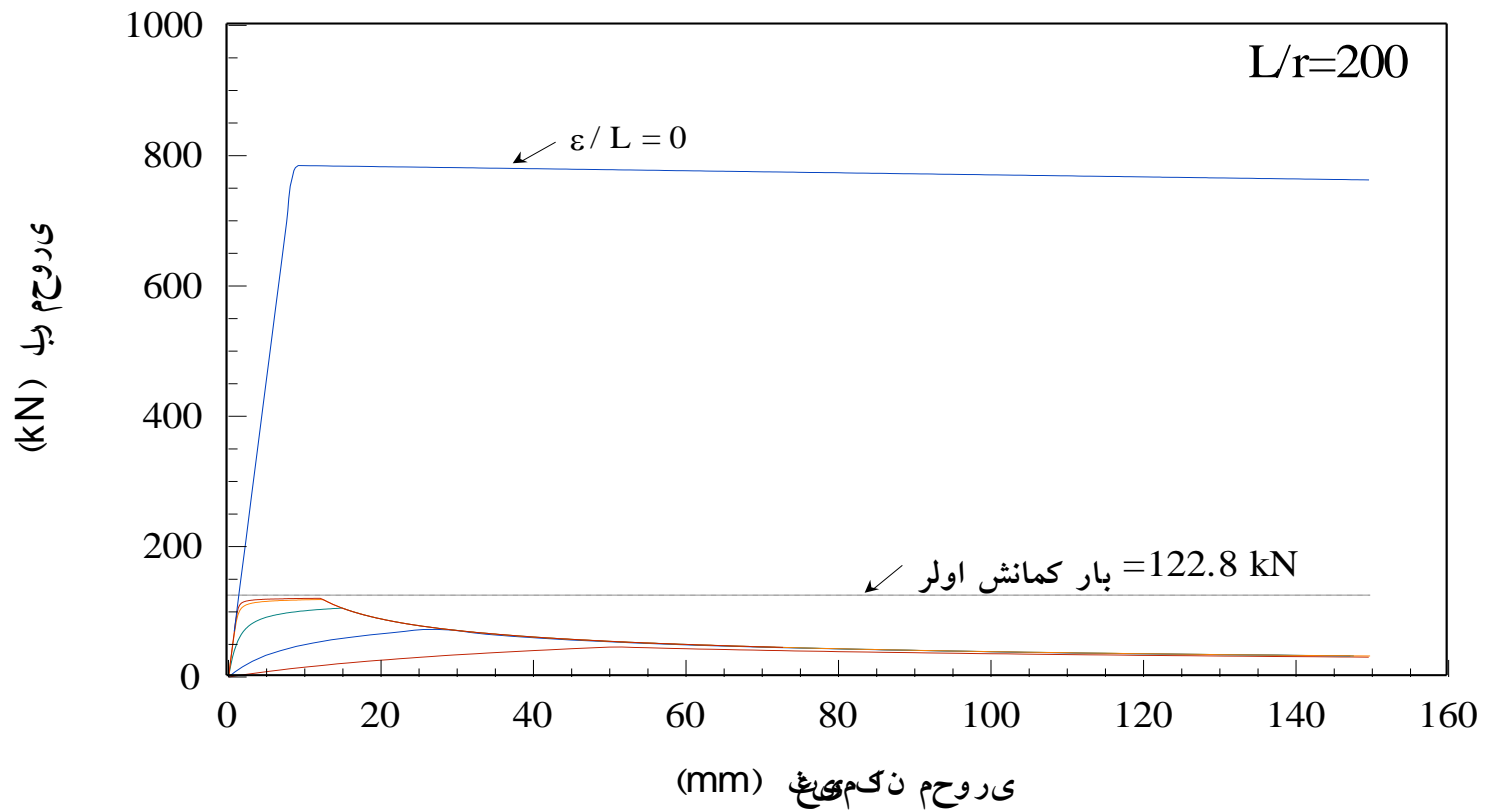
رفتار بار محوری - تغییر مکان محوری عضو فشاری بازای  $L/r=20$



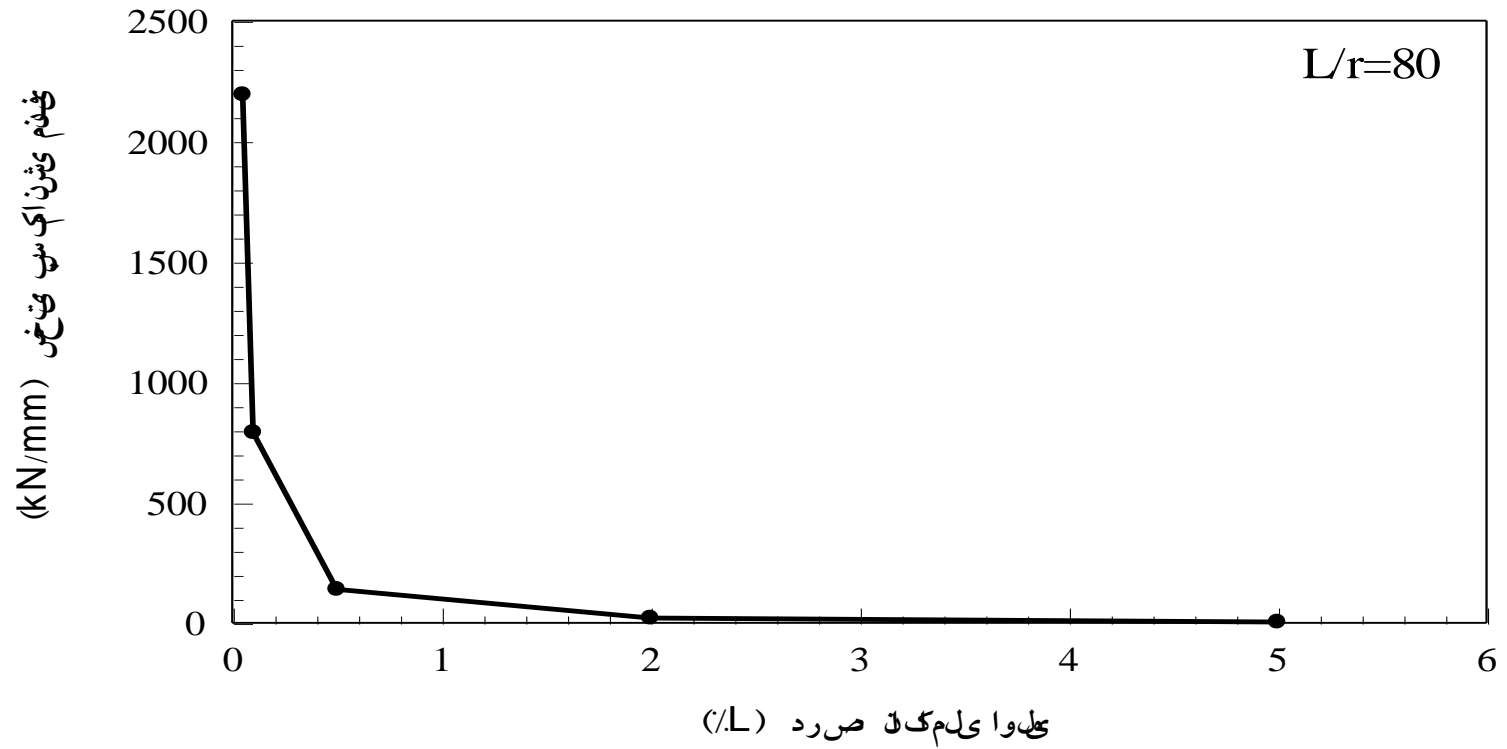
رفتار بار محوری - تغییر مکان محوری عضو فشاری بازای  $L/r=80$



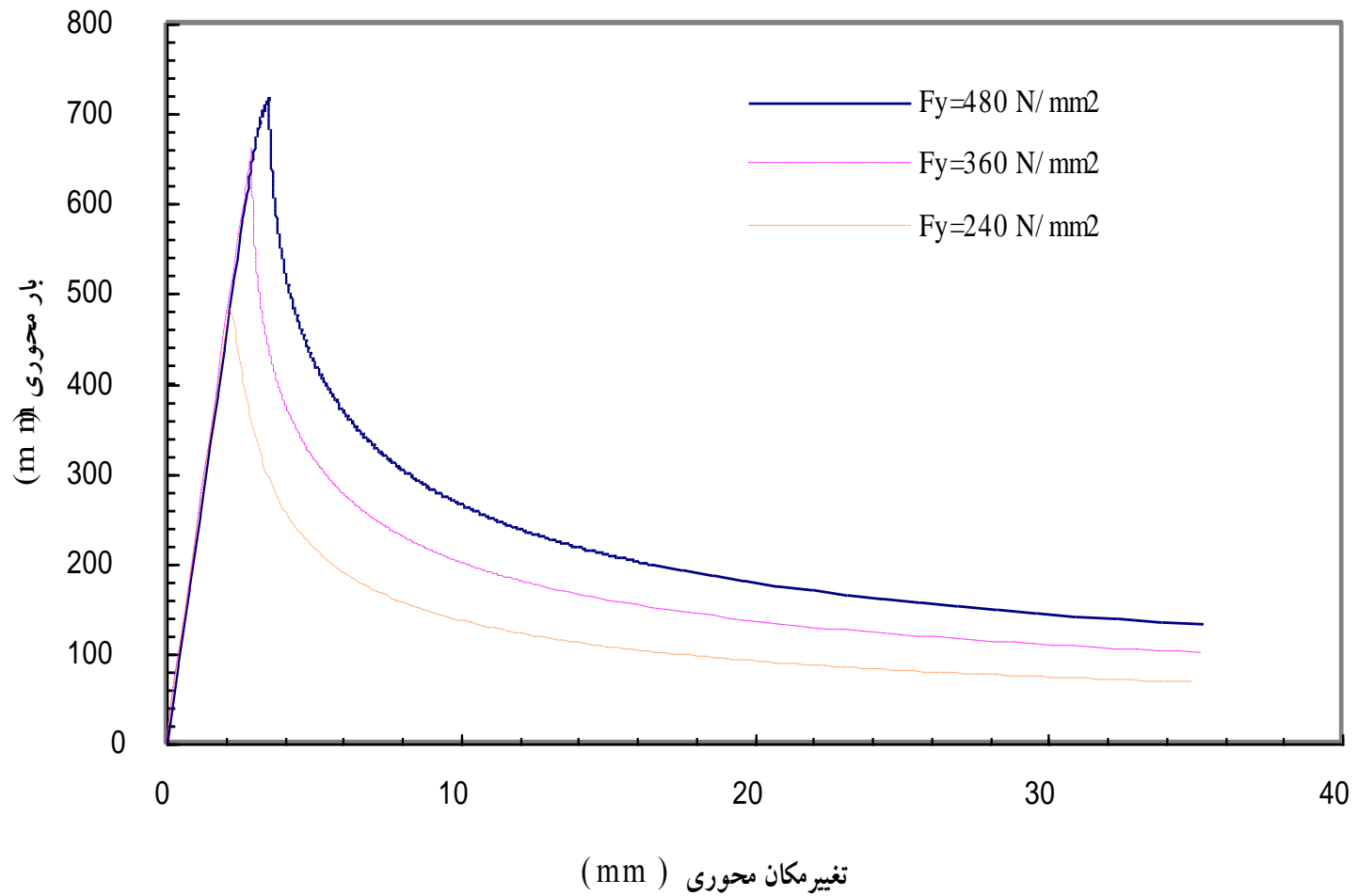
رفتار بار محوری-تغییر مکان محوری عضو فشاری بازای  $L/r=120$



رفتار بار محوری-تغییر مکان محوری عضو فشاری بازای  $L/r=200$



نمودار تغییرات سختی پس کمانشی منفی - ناکاملی اولیه بازای  $L/r=80$



رفتار بار محوري-تغییر مکان محوري عضو فشاري بازاي مقادير مختلف تنش تسلیم مصالح. ( $L/r=80$ ,  $\epsilon=0.0005L$ )

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

در بررسی منحنی های ارائه شده ، اشاره به چند نکته مهم در رفتار ستونها می تواند مفید باشد :

- ۱- با افزایش ناکاملی ، بار حدی ماکزیمم ستون کاهش پیدا می کند .
- ۲- با افزایش ناکاملی ، سختی منفی پس کمانشی کاهش می یابد .
- ۳- در ستونهای کوتاه و ستونهای بلند لاغر، سختی منفی پس کمانشی دارای مقدار کمی می باشد .
- ۴- در ستونهای با ضریب لاغری متوسط، سختی منفی پس کمانشی دارای مقدار بسیار بزرگی می باشد .
- ۵- مقدار ناکاملی ، عملاً اثری در بار نهایی پس کمانشی ندارد .
- ۶- با افزایش تنش جاری شدن، بارهای ماکزیمم ستون افزایش پیدا می کند ولی تاثیر اندکی در مقدار بار نهایی پس کمانشی دارد .

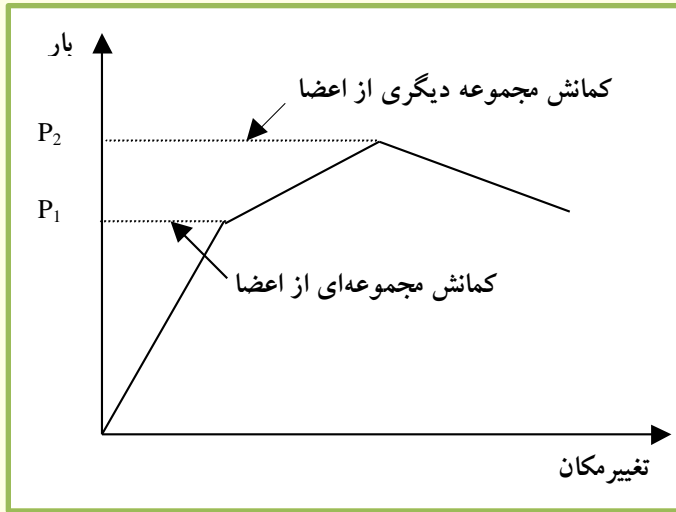
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

---

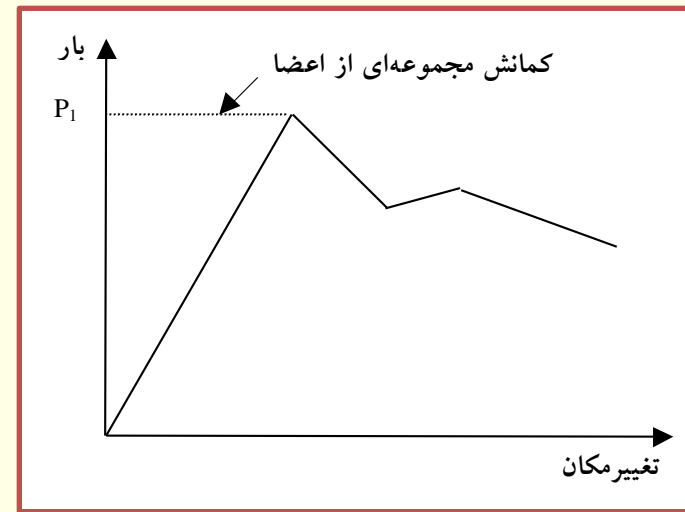
لازم به ذکر است که باید به اثر سختی منفی پس کمانشی ستونها، در رفتار سازه ها بعد از وقوع کمانش ستون یا عضو فشاری مذکور توجه شود (باز توزیع استاتیکی، باز توزیع دینامیکی، کمانش پیشرونده، کمانش محلی و فروجهش عضوی بحث هایی هستند که در این ارتباط مطرح می شوند).



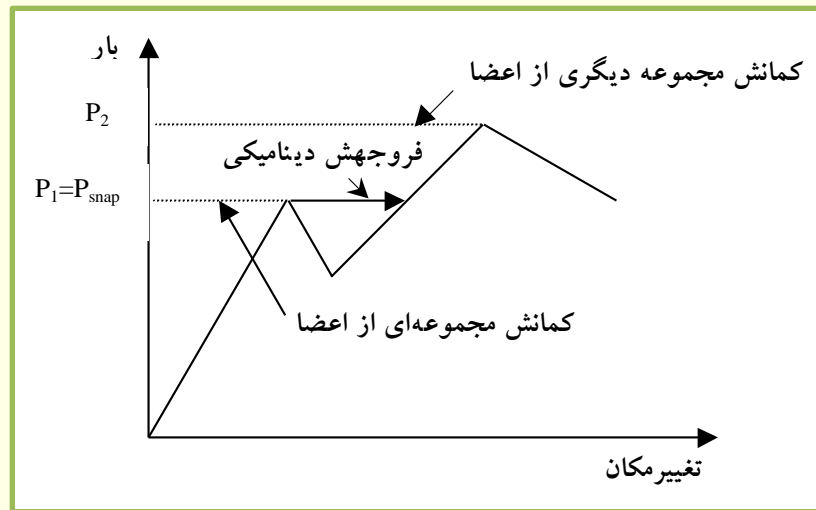
## انواع مکانیسم های خرابی متداول در سازه ها



خرابی موضعی سازه بدون فروجهش.



خرابی کلی سازه.



خرابی موضعی سازه با فروجهش دینامیکی.

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

---

### ۷ - پایداری تیر ستونها

- تیر ستونها اعضایی هستند که تحت اثر خمش و فشار محوری قرار دارند. خمش ممکن است که در اثر لنگرهای وارد به انتهای عضو به وجود آید، و یا در اثر بارهای قائمی که به طور جانبی بر روی عضو وارد می شوند، باشد.

- بنابراین تیرستونها، اعضای سازه ای یک بعدی هستند که علاوه بر نیروهای فشار محوری تحت اثر نیروهای جانبی و لنگرهای خمشی انتهایی نیز می باشند. اعضای قائم در قابهای با اتصالات صلب که تحت اثر نیروهای جانبی قرار دارند از نوع تیر- ستون می باشند .

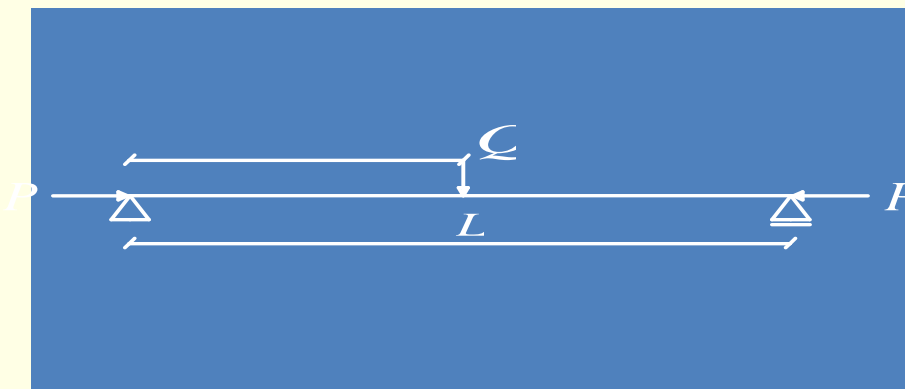
- لازم به یادآوری است که در تحلیل ستونهای با بار خارج از مرکز، خمش یک تاثیر فرعی بود ، در حالی که در تحلیل تیر ستونها، خمش و فشار محوری آگاهانه وارد می شوند .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

در این بخش رفتار تیر ستون با بار جانبی متمرکز و تیر ستون بابر جانبی گسترده را مورد بررسی قرار می دهیم .

### الف - تیر ستون با بار جانبی متمرکز

یک عضو با تکیه گاههای ساده و به طول  $L$  را در نظر می گیریم . همان گونه که در شکل زیر نشان داده می شود، به طور همزمان بار جانبی  $Q$  در وسط دهانه و نیروی محوری  $P$  بر آن وارد می شوند .

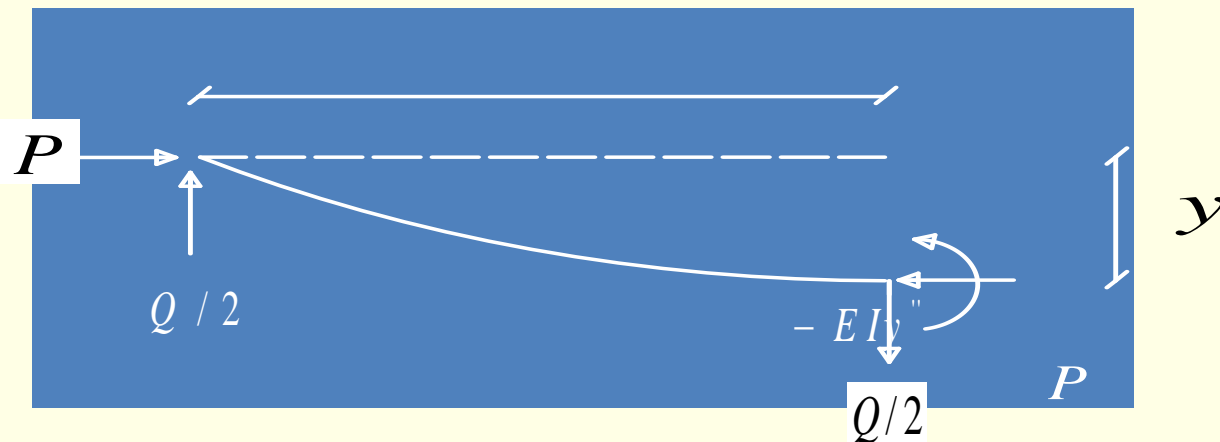


## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

- فرض براین است که مصالح ساختمانی طبق قانون هوک رفتار می کنند (خطی مصالح) و تغییرشکل ها کوچک باقی می مانند (خطی هندسی).

- عضو در جهت جانبی مهاربندی شده است، به طوری که فقط می تواند در صفحه قائم خم شود. مواردی که عضو به این صورت مهاربندی نشده است و در نتیجه علاوه بر صفحه قائم به طور جانبی هم خم می شود، در مبحث کمانش پیچشی در نظر گرفته می شود.

- اگر محورهای مختصات آن طور که در شکل نشان داده شده است، انتخاب شوند، رابطه تعادل لنگرها برای قطعه ای از تیر ستون به طول عبارت است از:



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$EIy'' + Py = \frac{-Qx}{2}$$

$$y'' + k^2 y = \frac{-Qx}{2EI}$$

با فرض  $k^2 = \frac{P}{EI}$  خواهیم داشت :

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$y = A \sin kx + B \cos kx - \frac{Qx}{2P}$$

برای یافتن ضرایب ثابت  $A$  و  $B$  ، شرایط مرزی را اعمال می کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x = L/2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow A = \frac{Q}{2kP} \frac{1}{\cos(kL/2)}$$

بنابراین جواب عمومی  $y$  به صورت زیر به دست می آید :

$$y = \frac{Q}{2kP} \left[ \frac{\sin kx}{\cos(kL/2)} - kx \right]$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

به جای اینکه تغییر شکل تمام عضو را در نظر بگیریم مطلوبتر است که از این به بعد توجه خود را به تغییر شکل وسط دهانه یعنی  $\delta$  محدود کنیم. با قرار دادن  $x = L/2$  در جواب عمومی  $y$ ، رابطه زیر به دست می آید:

$$\delta = \frac{Q}{2kP} \left[ \frac{\sin(kL/2)}{\cos(kL/2)} - \frac{kL}{2} \right]$$

با فرض  $u = \frac{kL}{2}$  خواهیم داشت :

$$\delta = \frac{Q}{2kP} (tgu - u)$$

با ضرب و تقسیم کردن رابطه مربوط به  $\delta$  در  $L^3 / 24EI$  خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{QL^3}{48EI} \frac{24EI}{kPL^3} (tgu - u)$$

$$\delta = \frac{QL^3}{48EI} \frac{3}{(kL/2)^3} (tgu - u)$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

با فرض  $\delta_0 = \frac{QL^3}{48EI}$  ، که همان خیز تیز تحت اثر فقط بار  $Q$  می باشد، خواهیم داشت:

$$\delta = \delta_0 \frac{3(tgu - u)}{u^3}$$

برای ساده کردن رابطه فوق، از بسط سری تیلور  $tgu$  استفاده می کنیم:

$$tgu = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + \dots$$

با جایگزین کردن  $tgu$  در رابطه مربوط به  $\delta$  خواهیم داشت:

$$\delta = \delta_0 \left(1 + \frac{2}{5}u^2 + \frac{17}{105}u^4 + \dots\right)$$

با توجه به این که داریم:  $u = \frac{kL}{2}$  و  $k^2 = \frac{P}{EI}$  ، از این رو  $u^2$  به صورت زیر به دست می آید:

$$u^2 = \frac{k^2 L^2}{4} = \frac{PL^2}{4EI} = \frac{P}{EI} \frac{L^2}{4} \frac{\pi^2}{\pi^2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$\Rightarrow u^2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{P}{P_{cr}} = 2.46 \frac{P}{P_{cr}}$$

$$\Rightarrow \delta = \delta_0 \left[ 1 + 0.984 \frac{P}{P_{cr}} + 0.998 \left( \frac{P}{P_{cr}} \right)^2 + \dots \right]$$

یا به طور تقریبی خواهیم داشت :

$$\Rightarrow \delta = \delta_0 \left[ 1 + \frac{P}{P_{cr}} + \left( \frac{P}{P_{cr}} \right)^2 + \dots \right]$$

چون مجموع سری های هندسی داخل کروشه،  $\left( 1 / 1 - \frac{P}{P_{cr}} \right)$  است، رابطه  $\delta$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$\delta = \delta_0 \frac{1}{(1 - P / P_{cr})}$$



## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

معادله فوق با تقریب خیلی نزدیک ، حداکثر تغییرشکل یک عضو دارای تکیه گاههای ساده را معلوم می کند که به طور همزمان به وسیله یک بار جانبی  $Q$  و یک بار محوری  $P$  خم می شود . این معادله نشان می دهد که حداکثر تغییرشکل عضو برابر است با  $\delta_0$  (حداکثر تغییرشکلی که اگر فقط  $Q$  بر عضو وارد شود، اتفاق می افتد) ضرب در یک ضریب افزایش که به نسبت  $P / P_{cr}$  بستگی دارد.

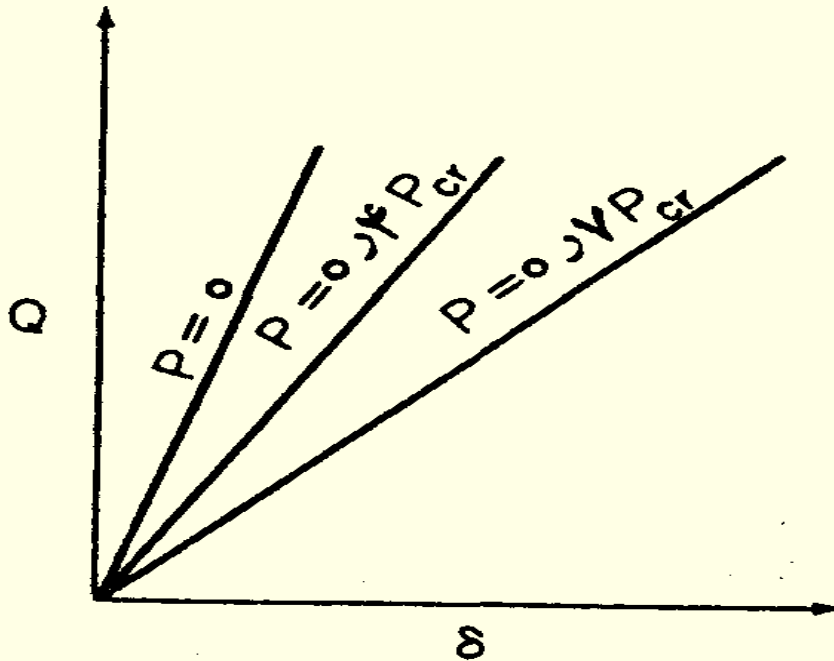
بنابراین تاثیر نیروی محوری، بزرگ کردن تغییرشکلی است که اگر نیروی محوری وجود نداشت، اتفاق می افتاد.

معادله  $\delta = \delta_0 \frac{1}{(1 - P / P_{cr})}$  نشان می دهد که با نزدیک شدن  $P / P_{cr}$  به واحد ، تغییرشکل تیر ستون به طور نامحدود افزایش می یابد . به بیان دیگر ، با نزدیک شدن نیروی محوری به بار بحرانی، مقاومت عضو در برابر تغییرشکل جانبی صفر می شود. بنابراین باید کردن نیروی محوری که در آن سختی خمشی برابر صفر است، می توان بار بحرانی یک عضو را تعیین کرد.

اکنون مشخصات بار- تغییرشکل تیر- ستون مذکور را مورد بررسی قرار می دهیم:

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

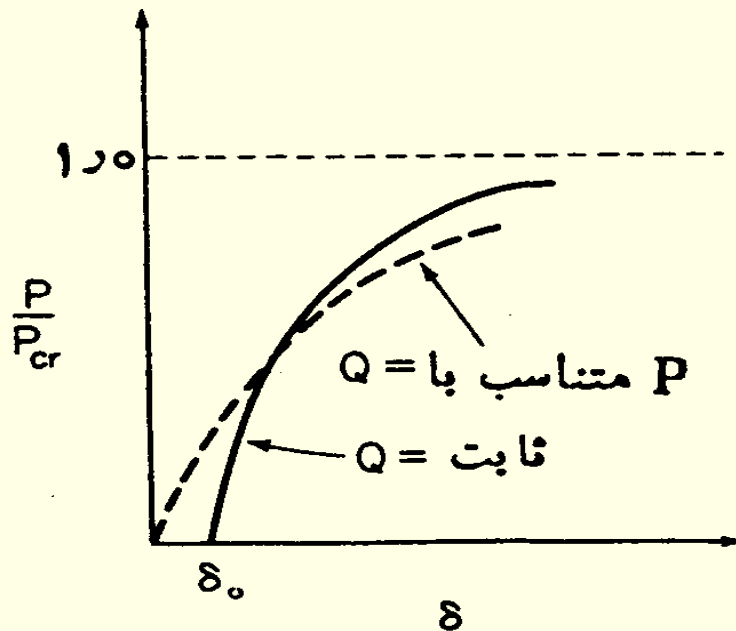
- در شکل زیر تغییرات  $\delta$  بر حسب  $Q$  برای حالات  $P = 0$  و  $P = 0.4P_{cr}$  و  $P = 0.7P_{cr}$  رسم شده است. چون سختی خمشی یک عضو با شیب رابطه بار جانبی - خیز جانبی متناسب است، این منحنی ها به وضوح نشان می دهند که:
- افزایش بار محوری، موجب کاهش سختی خمشی می شود.
  - رابطه بین  $Q$  و  $\delta$  ، که می دانیم برای  $P = 0$  خطی است، به شرط این که  $P$  ثابت باشد، برای  $P \neq 0$  نیز خطی باقی می ماند.



$$\delta = \delta_0 \frac{1}{(1 - P / P_{cr})}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

اگر به  $P$  اجازه تغییر داده شود ، همان گونه که در شکل زیر نشان داده شده است ، رابطه بار  $P$  - خیز جانبی  $\delta$  خطی نیست . این مطلب صرفنظر از اینکه  $Q$  ثابت باقی بماند (منحنی توپر) و یا با افزایش  $P$  افزایش یابد (منحنی خط چین ) ، صحیح است . بنابراین تغییر شکل یک تیرستون یک تابع خطی از  $Q$  است ولی یک تابع غیر خطی از  $P$  می باشد . اگر  $P$  و  $Q$  هر دو به طور همزمان افزایش یابند ، رابطه بار - تغییر شکل غیر خطی است .



$$\delta = \delta_0 \frac{1}{(1 - P/P_{cr})}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

اکنون می خواهیم ببینیم چگونه لنگر خمشی بوسیله فشار محوری تحت تاثیر قرار می گیرد . حداکثر لنگر خمشی در عضو برابر است با :

$$M_{\max} = \frac{QL}{4} + P\delta$$

$$\Rightarrow M_{\max} = \frac{QL}{4} + \frac{PQL^3}{48EI} \frac{1}{1 - (P/P_{cr})}$$

یا

$$\Rightarrow M_{\max} = \frac{QL}{4} \left[ 1 + \frac{PL^2}{12EI} \frac{1}{1 - (P/P_{cr})} \right]$$

با ساده کردن جمله داخل کروشه خواهیم داشت :

$$\Rightarrow M_{\max} = \frac{QL}{4} \left[ 1 + 0.82 \frac{P}{P_{cr}} \frac{1}{1 - (P/P_{cr})} \right]$$

$$\Rightarrow M_{\max} = \frac{QL}{4} \left[ 1 + \frac{1 - 0.18P/P_{cr}}{1 - (P/P_{cr})} \right] = M_0 \frac{1 - 0.18P/P_{cr}}{1 - (P/P_{cr})}$$













## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \left[ 1 + \frac{5PL^2}{48EI} \frac{1}{1 - (P / P_{cr})} \right]$$

با ساده کردن جمله داخل کروشه ، مقدار ماکزیمم  $M$  به دست می آید :

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \left[ 1 + 1.03P / P_{cr} \frac{1}{1 - (P / P_{cr})} \right]$$

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \left[ \frac{1 + 1.03P / P_{cr}}{1 - (P / P_{cr})} \right] \quad M_0 = \frac{wL^2}{8}$$

$M_0$  حداکثر لنگری است که اگر نیروی محوری حضور نداشت ، به دست می آمد .

$$M_{\max} = M_0 \frac{1 + 1.03P / P_{cr}}{1 - (P / P_{cr})}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

بنابراین حداکثر خیز جانبی تیر ستون  $\delta = \delta_0 \frac{1}{1 - (P / P_{cr})}$  و حداکثر لنگر خمشی

$$M_{\max} = M_0 \frac{1 + 1.03P / P_{cr}}{1 - (P / P_{cr})}$$

، هر دو برابر با حاصل ضرب دو جمله هستند :

- الف ) حداکثر تغییر شکل و یا لنگری که فقط به علت نیروی جانبی به وجود می آید .  
 ب ) یک ضریب افزایش که تاثیر نیروی محوری را دخالت می دهد .

آنچه که قابل توجه است ، تشابه موجود بین روابط حداکثر خیز جانبی و حداکثر لنگر خمشی تیر ستون برای تیر با بار جانبی متمرکز و تیر با بار جانبی گسترده است .

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

### پ - خرابی تیر ستون ها Failure of Beam Columns

تا کنون تحلیل تیرستون را به رفتار ارتجاعی ، محدود کرده ایم ، ولی اکنون می خواهیم رفتار غیر ارتجاعی و نیز خرابی ان را در نظر بگیریم .

یک عضو با تکیه گاههای ساده و تحت اثر بارگذاری متقارن را در نظر می گیریم . این عضو به طور همزمان با لنگرهای انتهایی  $M$  خم و با نیروهای محوری  $P$  فشرده می شود . ( رابطه  $M$  با  $P$  متناسب است  $e = \frac{M}{P}$  )

$Jezek$  نشان داد که با استفاده از فرضیات زیر یک حل بسته فرم ، برای مشخصات بار- تغییرشکل تیر ستون بعد از حد تناسب می توان به دست آورد . این فرضیات عبارتند از :  
- عضو دارای مقطع مستطیلی شکل است

- عضو دارای یک مصالح ساختمانی ایده آل الاستو - پلاستیک است

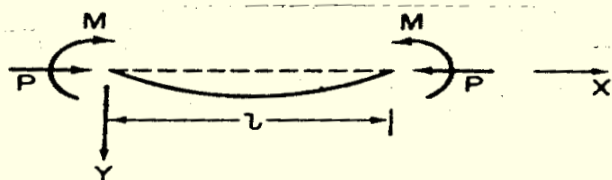
- شکل خمش عضو یک منحنی نیم سینوسی است . (  $y = \delta \sin \frac{\pi x}{L}$  )

- تغییرشکل ها محدود ، ولی به اندازه کافی کوچک هستند به طوری که انحنا می تواند با مشتق دوم -  $y''$  - تقریب شود

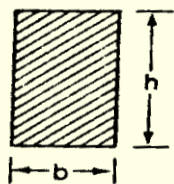
- عضو در ابتدا مستقیم است

- خمش حول محور اصلی اتفاق می افتد

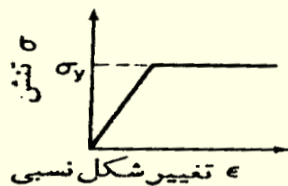
## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



الف



ب



ج

اگر محورهاى مختصات به صورت شکل بالا انتخاب شوند ، در این صورت لنگر خمشی خارجی در فاصله از مرکز برابر است با :

$$M_{ext} = M + Py$$

رابطه مذکور صرف نظر از اینکه آیا از حد تناسب مصالح ساختمانی تجاوز شده است یا خیر ، صحیح است .

مشخصات لنگر مقاوم داخلی به شکل توزیع تنش در عضو بستگی دارد . تا موقعی که قانون

هوک صحیح باقی می ماند ، لنگر داخلی با رابطه زیر مشخص می شود :

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

بنابراین خواهیم داشت :

$$M_{ext} = M_{int} \quad M + Py = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

با توجه به فرض  $y = \delta \sin \frac{\pi x}{L}$  ، رابطه انحنای به شکل زیر نوشته می شود :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\delta \pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

بنابراین با جایگزینی انحنای در معادله تعادل لنگرها خواهیم داشت :

$$M + Py = -EI \frac{\delta \pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

رابطه مذکور برای وسط دهانه به صورت زیر در می آید :

$$M + P\delta = \frac{EI \delta \pi^2}{L^2}$$

با فرض اینکه  $M$  با  $P$  متناسب است (  $e = \frac{M}{P}$  ) ، خواهیم داشت :

$$P(e + \delta) = \frac{EI \delta \pi^2}{L^2} = \delta P_E, \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$







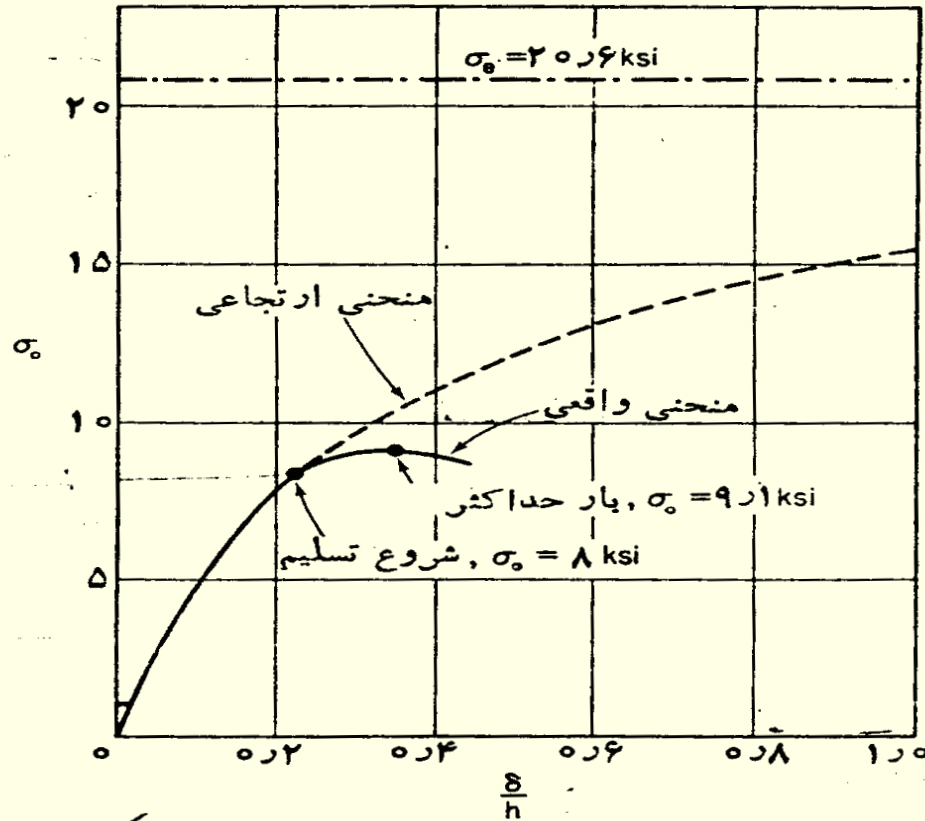








## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )



$$k_0 = \frac{P}{bh}$$

## فصل سوم : پایداری ستونها ( و تیر ستونها )

نتایج ارائه شده برای یک مقطع مستطیلی با مصالح ساختمانی ارتجاعی – پلاستیک کامل ، نمونه ای از رفتاری است که توسط سایر اشکال و مصالح ساختمانی نشان داده می شود . ولی تعیین بارحداکثر برای غالب مقاطع و مصالح ساختمانی دیگر مستلزم سعی بیشتری است . در اغلب موارد راه حل هایی بسته فرم ، نظیر نوعی که در اینجا ارائه شد ، مطرح نیست و روش های عددی تنها وسیله به دست آوردن بار حداکثر هستند .

با توجه به این حقیقت که تعیین بار حداکثر یک تیر ستون همواره پیچیده و وقت گیر است ، باری که در آن تسلیم شروع می شود، غالباً به جای بارحداکثر به عنوان حد ارتفاع ساختمانی در نظر گرفته می شود . بار مطابق با شروع تسلیم ، یک معیار جالب توجه برای طرح است ، چون به دست آوردن آن نسبتاً ساده است و یک برآورد محافظه کارانه از بار خرابی واقعی را نشان می دهد .

البته یک معیار طرح نیمه تجربی دیگری که بر مبنای معادله اندرکنش Interaction Equation استوار است ، به دست آمده که هم دقیق و هم نسبتاً کاربرد ساده ای دارد .

# فصل چهارم

## پایداری قاب ها

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

### ۱- مقدمه :

در یک قاب معمولاً اعضا به طور صلب در گرهها به یکدیگر متصل هستند . در نتیجه هیچ عضو فشاری نمی تواند کمانش کند ، مگر اینکه کلیه اعضای قاب همزمان تغییرشکل یابند . به بیان دیگر ، گیرداری ارتجاعی در انتهای یک عضو فشاری، نه فقط به اعضایی که مستقیماً در دو انتها به آن متصل هستند، بلکه به تمام اعضای تشکیل دهنده قاب نیز بستگی دارد . بنابراین برای بدست آوردن بار بحرانی اعضای فشاری یک قاب ، لازم است که پایداری کل قاب به صورت یک واحد منفرد بررسی شود.

در اینجا ذکر یک نکته بسیار مهم، ضروری است. در یک قاب ساده مانند قاب پرتال ، کمانش یک ستون، معادل ناپایداری کل قاب است. ولی در قابهای پیچیده، کمانش یک عضو فشاری نمی تواند حتماً بیانگر ناپایداری کمانشی قاب باشد. بلکه تحت شرایطی می تواند به عنوان کمانش محلی **Local Buckling** مطرح شود که در واقع اثر موضعی در رفتار قاب دارد.

بنابراین شاید بتوان برای قابهای ساده، با قضاوت مهندسی بار کمانش یک عضو فشاری خاصی را پیدا کرده و از آن بار کمانشی قاب را بدست آورد، ولی برای قابهای پیچیده این عمل امکان پذیر نخواهد بود.



## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

- پس باید به دنبال روشهایی باشیم که دارای ویژگیهای زیر باشند :
- الف ) قابلیت استخراج بار بحرانی قابهای پیچیده را داشته باشند ؛
  - ب ) توانایی ارائه یک تحلیل کیفی از رفتار پایداری قاب را داشته باشند ؛
  - پ ) قابلیت پیاده سازی در یک برنامه کامپیوتری را داشته باشند ؛

لازم به ذکر است که در این فصل نیز ابتدا به بررسی پایداری ارتجاعی قابها و سپس به کمانش غیر ارتجاعی آنها خواهیم پرداخت .

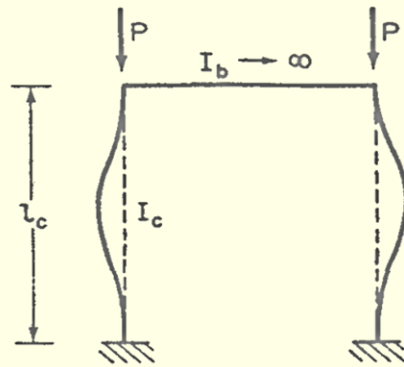
### ۲- تحلیل کیفی پایداری یک قاب ساده :

در این بخش به بررسی کیفی اثر سایر اجزای یک قاب در رفتار پایداری یک ستون در آن قاب می پردازیم :

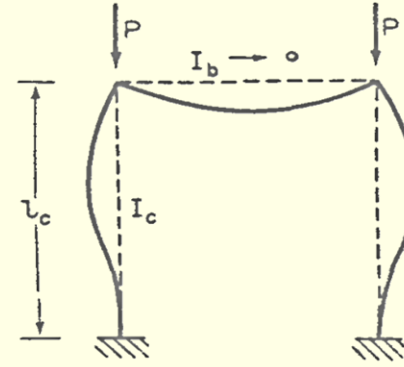
مطالعه مورد نظر خود را با یک قاب یک طبقه و یک دهانه شروع می کنیم . فرض بر این است که بارهای خارجی  $P$  مستقیماً روی ستون ها عمل می کنند ، به طوری که قبل از کمانش در هیچ یک از اعضاء قاب لنگر خمشی وجود ندارد .

برای تحلیل قابها آنها را به دو دسته تقسیم می کنیم : قابهای بدون حرکت جانبی و قابهایی که در آنها حرکت افقی گرههای فوقانی آزاد است .

# فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

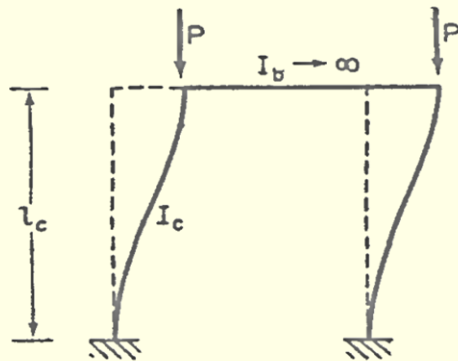


الف  $P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_c}{l_c^2}$

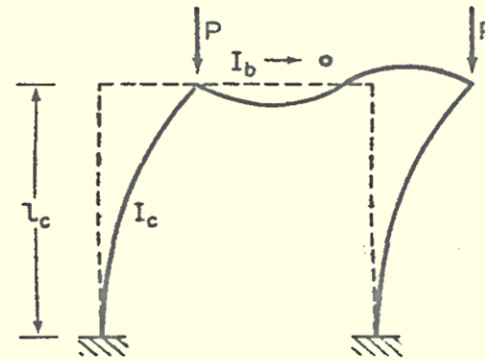


ب  $P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI_c}{l_c^2}$

بدون حرکت جانبی



ج  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{l_c^2}$



د  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{4l_c^2}$

با حرکت جانبی

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

## الف- قاب بدون حرکت جانبی

تحت اثر بار بحرانی ، قاب به صورتی که در شکل بالا با خط توپر نشان داده شده است ، کمانش می کند . واضح است که در این قاب ساده ، وقتی بار وارده برابر بار بحرانی ستون ها است ، کمانش رخ می دهد .

واضح است که انتهای بالایی هر ستون توسط تیری که با آن یک گره صلب تشکیل می دهد به طور ارتجاعی گیردار است . بنابراین بار بحرانی ستون نه تنها به سختی ستون ، بلکه به سختی تیر نیز بستگی دارد .

اگر سختی تیر بی نهایت فرض شود ، مسئله خیلی ساده می شود ، یعنی وقتی قاب تغییر شکل می یابد تیر باید مستقیم باقی بماند ( شکل الف ) و ستونها در انتهای بالایی نه می توانند چرخش کنند و نه انتقال یابند . تحت این شرایط ستونها مانند حالت دو سر ثابت رفتار می کنند و بار بحرانی قاب چهار برابر بار اولر ستونها است .

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_c / 2)^2}$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

همچنین می توان فرض کرد تیر بی نهایت انعطاف پذیر باشد. این بدان معناست که تیره‌یچ قیدی روی دوران انتهای بالای ستون ایجاد نمی کند ( شکل ب )، در این حالت ستونها مثل حالت یک انتها ثابت و انتهای دیگر مفصلی رفتار می کنند و بار بحرانی قاب تقریباً دو برابر بار اولر ستونها است

$$(P_{cr} = \frac{20.2EI_c}{L_c^2})$$

برای یک قاب واقعی ، انعطاف پذیری تیر بین دو حالت حدی فوق قرار دارد. بنابراین بار بحرانی چنین قابی که در آن از حرکت جانبی جلوگیری می شود دارای حدود زیر است :

$$2P_e < P_{cr} < 4P_e$$

$$= P_e \quad \text{بار اولرستون}$$

$$= P_{cr} \quad \text{مقدار بار بحرانی وارده}$$

## فصل چهارم : تحليل پایداری قابها

## ب- قاب با حرکت جانبی

اگر سختی تیر بی نهایت فرض شود، قاب به صورتی که در شکل (ج) نشان داده شده است، کمانش می کند.

حرکت جانبی انتهای بالایی ستون ها ، آزاد ولی چرخش آنها غیر ممکن است. بنابراین بار بحرانی قاب با بار اولر ستونها برابر است، یعنی داریم :

$$(P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{4L_c^2})$$

از طرف دیگر ، اگر تیر بی نهایت انعطاف پذیر باشد همان تونه نه در شکل ( د ) نشان داده شده است ، انتهای فوقانی ستون ها برای هر دو حالت دوران و حرکت جانبی آزاد هستند . در این حالت ، ستونها مثل اینکه در پایین ثابت و در بالا آزاد هستند ، رفتار می کنند و بار بحرانی قاب با یک چهارم بار اولر ستونها برابر است

$$(P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{4L_c^2})$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

بنابراین بار بحرانی قابی که حرکت جانبی گره‌های بالایی آن آزاد است باید بین  $P_e$  و  $\frac{1}{4} P_e$  قرار گیرد ، یعنی داریم :

$$\frac{1}{4} P_e < P_{cr} < P_e$$

مقایسه نتایج کمانش قاب بدون حرکت جانبی (کمانش متقارن Symmetric Buckling) با کمانش قاب با حرکت جانبی نشان می دهد که صرفنظر از سختی اعضا ، بار لازم برای ایجاد کمانش متقارن بزرگتر از بار لازم برای ایجاد کمانش دارای حرکت جانبی است .

بنابراین کمانش قاب همیشه از نوع توام با حرکت جانبی خواهد بود مگر اینکه از حرکت جانبی آن جلوگیری شود که در این صورت قاب باید در حالت متقارن کمانش کند .

محققین نشان داده اند که این نتیجه گیری برای قابهای چند طبقه هم صحیح است .

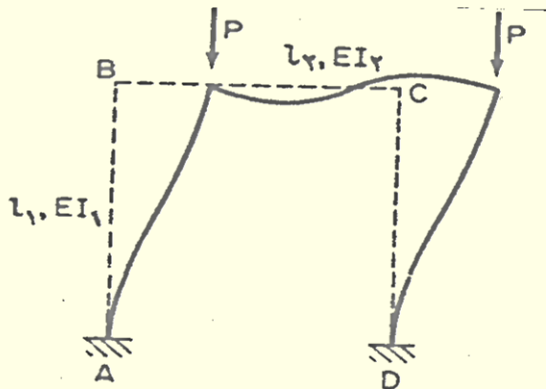
## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

## ۳- محاسبه بار بحرانی قابها با استفاده از روش تعادل خنثی :

در این بخش به عنوان یک نمونه، بار بحرانی قاب ساده پرتال را با استفاده از روش تعادل خنثی به دست می آوریم تا بخشی از پیچیدگی های استفاده از روش تعادل خنثی در تعیین بار بحرانی یک قاب را به نمایش گذاریم.

قاب شکل زیر را در نظر می گیریم که در پایین گیردار و بالای آن در حرکت جانبی آزاد است. فرض می شود که مصالح ساختمانی قاب طبق قانون هوک رفتار می کنند و تغییر شکل ها کوچک هستند و قبل از کمانش در قاب خمش وجود ندارد. برای مشخصات ستون زیر نویس ۱ و برای مشخصات تیر زیر نویس ۲ در نظر گرفته می شود.

وقتی قاب کمانش می کند، وضعیتی را به خود می گیرد که با خط پر در شکل زیر نشان داده شده است.

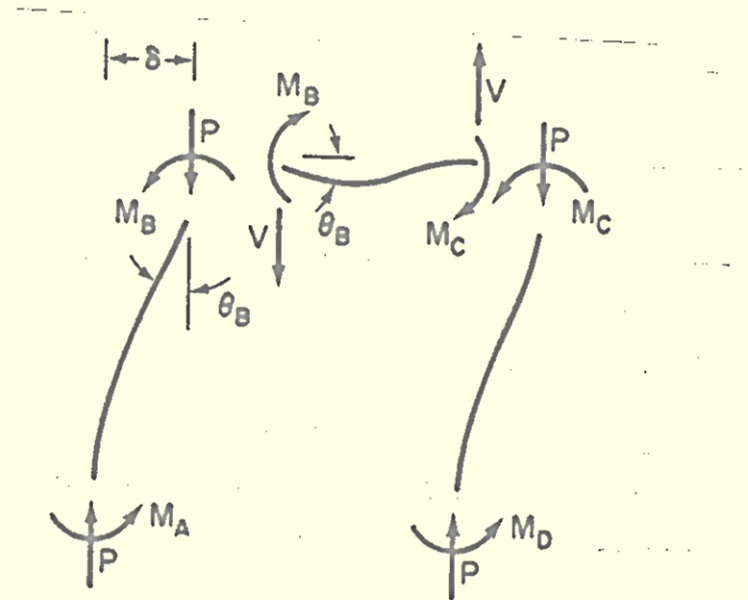
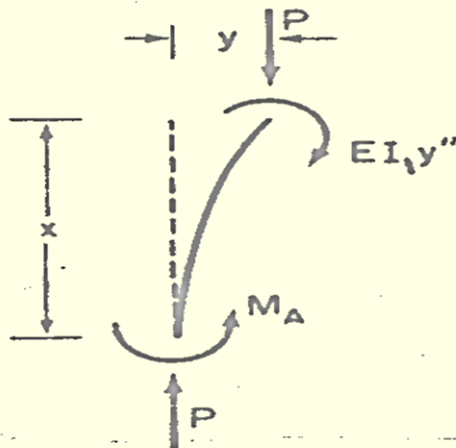


## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

نیروهای عمل کننده بر هر یک از اعضاء ، وقتی قاب به این طریق تغییر شکل یابد ، در شکل زیر نشان داده شده اند . باید توجه کرد که نیروهای برشی  $V$  ناشی از خمش عضو افقی در مقایسه با بار وارده  $P$  ، هنگام بررسی اعضای قائم صرفنظر می شوند .

با محورهای مختصات نشان داده شده در شکل زیر ، معادله تعادل لنگر برای عضو قائم برابر است با :

$$EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = M_A$$





## فصل چهارم : تحليل پایداری قابها

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1^2 y = \frac{M_A}{EI_1}$$

با فرض  $k_1^2 = \frac{P}{EI_1}$  خواهیم داشت:

$$y = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x + \frac{M_A}{P}$$

جواب معادله دیفرانسیل عبارت است از:

برای یافتن ضرایب  $A$  و  $B$ ، از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = -\frac{M_A}{P}$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y = \frac{M_A}{P} (1 - \cos k_1 x)$$

بنابراین خواهیم داشت:

جابجایی افقی ستون در  $x = L_1$  با  $\delta$  نشان می دهیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{M_A}{P} (1 - \cos k_1 L_1)$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

$$\delta = \frac{M_A + M_B}{P}$$

از طرف دیگر تعادل لنگر لازم می دارد که :

بنابراین از جایگزین کردن  $\delta$  در رابطه مربوط به  $\delta = \frac{M_A}{P} (1 - \cos k_1 L_1)$  خواهیم داشت :

$$(f) \quad M_A \cos k_1 L_1 + M_B = 0$$

حال معادله دیگری که نماینده شرط تعادل عضو افقی است ، به دست خواهد آمد . با به کار بردن رابطه شیب - افت برای عضو افقی خواهیم داشت :

$$M_B = \frac{2EI_2}{L_2} (2\theta_B + \theta_C)$$

اما با توجه به وضعیت تغییر شکل داریم :  $\theta_B = \theta_C$  بنابراین  $M_B = \frac{6EI_2}{L_2} \theta_B$

شرط سازگاری در گره  $B$  لازم می دارد که  $\theta_B$  حاصل از رابطه با شیب  $x = L_1$  ،  $dy/dx$

حاصل از معادله  $y = \frac{M_A}{P} (1 - \cos k_1 x)$  برابر باشد .

## فصل چهارم : تحليل پایداری قابها

$$\frac{M_B L_2}{6EI_2} = \frac{M_A}{k_1 EI_1} \sin k_1 L_1$$

از آنجا داریم:

$$(ب) \quad \frac{6I_2}{k_1 I_1 L_2} M_A \sin k_1 L_1 - M_B = 0$$

معادلات (الف) و (ب) شرایط تعادل قاب هستند.

معمولاً یک قاب دارای  $n$  عضو،  $n$  معادله از هر یک از این دو نوع معادله لازم دارد. اگر چه در مورد فعلی چون اعضاء قائم یکسان هستند، دو معادله کفایت می کند.

برای تعیین شرط پایداری، دترمینان معادلات (الف) و (ب) را برابر صفر قرار می دهیم:

$$M_A (\cos k_1 L_1) + M_B = 0$$

$$M_A \left( \frac{6I_2 \sin k_1 L_1}{k_1 I_1 L_2} \right) - M_B = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos k_1 L_1 & 1 \\ \frac{6I_2 \sin k_1 L_1}{k_1 I_1 L_2} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

$$\Rightarrow \frac{tgk_1 L_1}{k_1 L_1} = \frac{-I_1 L_2}{6I_2 L_1}$$

باربحرانی کوچکترین ریشه این معادله است .

برای مثال اگر فرض کنیم  $I_1 = I_2 = I$   $L_1 = L_2 = L$  در این صورت خواهیم داشت :

$$\frac{tgkL}{kL} = -\frac{1}{6} \Rightarrow kL = 2.71$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{7.34EI}{L^2}$$

پس مقدار مذکور باربحرانی قاب پرتالی است که تکیه گاههای تحتانی آن گیردار و حرکت جانبی گرههای فوقانی آن آزاد است . توجه شود که این بار بحرانی همان طور که قبلاً گفته شد ، در

$$\frac{\pi^2 EI}{4L^2} < P_{cr} = \frac{7.34EI}{L^2} < \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ محدوده فرار دارد .}$$

بررسی یک قاب پرتال ساده ( بدون حرکت جانبی ) را نیز می توان به طریقه ذکر شده در بالا انجام داده و بار بحرانی را محاسبه کرد .

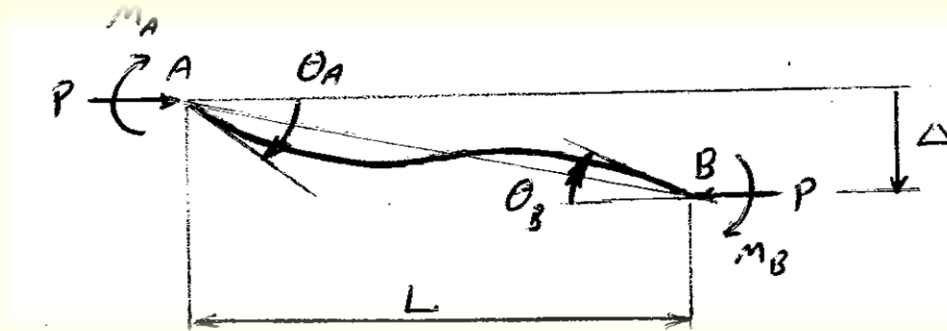
## فصل چهارم : تحليل پايداري قابها

آنچه که مشهود است ، استفاده از روش تعادل خنثی برای یافتن بار بحرانی یک قاب ساده مستلزم محاسبات زیاد و طولانی است و کارایی مطلوبی ندارد .

اگر قاب مورد نظر ، یک قاب پیچیده ای باشد ، استفاده از روش تعادل خنثی بسیار مشکل و شاید حتی ناممکن باشد ؛ بنابراین باید به دنبال روشهایی باشیم که بتواند آن سه شرط مورد نظر ارائه شده در مقدمه این فصل را برآورده نماید .

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

۴- تاثیر نیروی محوری بر روی سختی خمشی - استخراج رابطه شیب - افت اصلاح شده ( Modified Slope - Deflection Relationship )



معادله شیب - افت روش مناسبی برای بیان سختی خمشی یک عضو فراهم می کند .  
بر مبنای معادله شیب - افت ، لنگر انتهایی  $M_A$  را که در انتهای  $A$  از یک تیر  $AB$  ایجاد می شود بر حسب دوران های  $\theta_A$  و  $\theta_B$  و جابجایی  $\Delta$  در یک انتهای عضو نسبت به انتهای دیگر، مشخص می کند. این معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \left( 2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\Delta}{L} \right)$$

$M_{AB}$  می توان به صورت زیر نوشت:

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

$$M_{AB} = C_1 \theta_A + C_2 \theta_B + C_3 \frac{\Delta}{L}$$

$$C_1 = \frac{4EI}{L}$$

$$C_2 = \frac{2EI}{L}$$

$$C_3 = \frac{-6EI}{L^2}$$

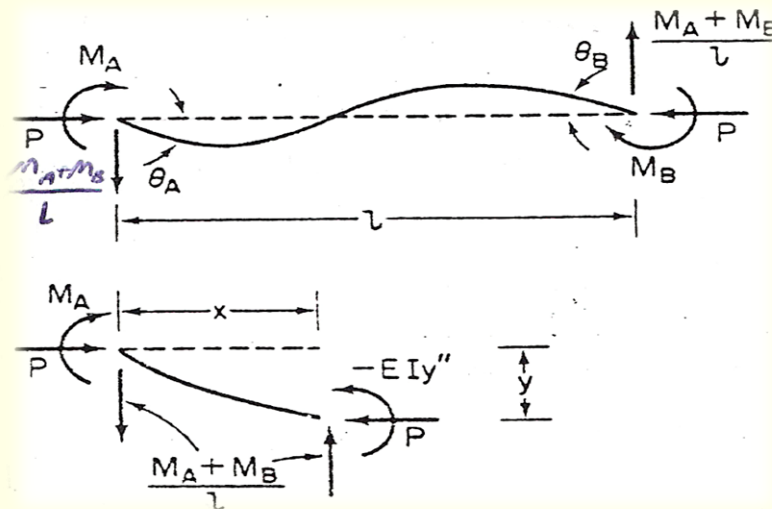
که در آن  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  ضرایب سختی ( Stiffness Coefficients ) می باشند . در تحلیل خطی سازه ها ، معمولاً از تاثیر نیرو های محوری روی سختی خمشی اعضای خمشی صرف نظر می شود و بر طبق آن ضرایب  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  را تعیین می کنند . تا موقعی که نیروی محوری در مقایسه با بار بحرانی عضو، کوچک باشد می توان همچنان از تاثیر نیرو های محوری روی سختی خمشی اعضاء صرف نظر کرد، ولی وقتی نسبت بار محوری به بار بحرانی نسبتاً بزرگ شود، سختی خمشی به علت فشار محوری به طور قابل ملاحظه ای کاهش می یابد و دیگر نمی توان از این کاهش در تغییر سختی صرف نظر کرد.

پس لازم است فرمی از معادله شیب - افت را که شامل تاثیر نیرو های محوری روی سختی خمشی می باشد ، به دست آوریم. به بیان دیگر لازم است ضرایب  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  در معادله شیب - افت برای یک عضو که همزمان تحت فشار محوری و خمش قرار می گیرد محاسبه شوند.

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

در انجام محاسبات بهتر است که دوران گرهها  $(\theta)$  و چرخش عضو  $(\frac{\Delta}{L})$  جداگانه در نظر گرفته شوند .

عضو  $AB$  را طبق شکل زیر در نظر می گیریم که روی آن نیروهای محوری فشاری عمل می کنند و انتهای آنها به اندازه  $\theta_B$  و  $\theta_A$  دوران کرده اند و در نتیجه لنگرهای  $M_B$  و  $M_A$  در انتهای آنها ایجاد شده است . چون انتقال گرهها بعداً به طور جداگانه در نظر گرفته خواهد شد ، فرض بر این است که دو انتهای عضو نسبت به یکدیگر به طور مورب انتقال نمی یابند . محورهای مختصات در جهات نشان داده شده انتخاب می شوند ، لنگرها و دوران های موجود در دو انتهای عضو ، طبق علامت قرار دادی شیب - افت ، در جهت عقربه های ساعت مثبت فرض می شوند .





## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

لنگر خارجی در فاصله  $x$  از نقطه  $A$  برابر است با :

$$M_{Ext} = M_A + Py - (M_A + M_B) \frac{x}{L}$$

با مساوی قرار دادن این رابطه با لنگر مقاوم داخلی  $-EI(d^2 y / dx^2)$  خواهیم داشت :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \left( \frac{x}{L} \right)$$

با فرض  $k^2 = \frac{P}{EI}$  معادله دیفرانسیل به صورت زیر به دست می آید :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{M_A}{EI} \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{M_B x}{EIL}$$

جواب معادله دیفرانسیل مذکور برابر است با :

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_A}{P} \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{M_B}{P} \frac{x}{L}$$

برای به دست آوردن ضرایب  $A$  و  $B$  از شرایط مرزی استفاده می کنیم :

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = \frac{M_A}{P}$$

$$x = L \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A = \frac{-M_A}{P} \frac{\cos kL}{\sin kL} - \frac{M_B}{P} \frac{1}{\sin kL}$$

بنابراین با جایگذاری ضرایب  $A$  و  $B$ ، معادله  $y$  به صورت زیر در می آید:

$$y = \frac{M_A}{P} \left( -\frac{\cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx + \frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{M_B}{P} \left( -\frac{\sin kx}{\sin kL} + \frac{x}{L} \right)$$

نیز به صورت زیر به دست می آید :

$$y' = \frac{M_A}{P} \left( \frac{1}{L} - k \frac{\sin kL \cdot \sin kx + \cos kL \cdot \cos kx}{\sin kL} \right) + \frac{M_B}{P} \left( \frac{1}{L} - \frac{k \cos kx}{\sin kL} \right)$$

با انجام عملیات مثلثاتی می توان  $y'$  را به صورت زیر خلاصه کرد :

$$y' = \frac{M_A}{PL} \left[ 1 - \frac{kL \cos k(L-x)}{\sin kL} \right] + \frac{M_B}{PL} \left( 1 - \frac{kL \cos kx}{\sin kL} \right)$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

دوران انتهای  $A - \theta_A$  - با قرار دادن  $x = 0$  به دست می آید :

$$\theta_A = \frac{M_A}{PL} (1 - kL \cot gkL) + \frac{M_B}{PL} \left(1 - kL \frac{1}{\sin kL}\right)$$

اگر صورت و مخرج رابطه مربوط به  $\theta_A$  در  $L$  ضرب شوند و  $k^2 EI$  به جای  $P$  جایگذاری شود ، نتیجه زیر حاصل می شود :

$$\theta_A = \frac{M_A L}{k^2 L^2 EI} (1 - kL \cot gkL) + \frac{M_B L}{k^2 L^2 EI} \left(1 - kL \frac{1}{\sin kL}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{EI}{L} \\ \Phi_n = \frac{1}{(kL)^2} (1 - kL \cot gkL) \\ \Phi_f = \frac{1}{(kL)^2} \left(kL \frac{1}{\sin kL} - 1\right) \end{array} \right.$$

$$\theta_A = \frac{M_A}{K} \Phi_n - \frac{M_B}{K} \Phi_f$$

که در آن داریم :

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

به طور مشابه دوران در انتهای **B** عضو می تواند با قرار دادن  $x = L$  در معادله مربوط به  $\theta_B$  به دست آید :

$$\theta_B = \frac{M_A}{PL} \left(1 - kL \frac{1}{\sin kL}\right) + \frac{M_B}{PL} (1 - kL \cot gkL)$$

$$\theta_B = \frac{M_A L}{k^2 L^2 EI} \left(1 - kL \frac{1}{\sin kL}\right) + \frac{M_B L}{k^2 L^2 EI} (1 - kL \cot gkL)$$

$$\theta_B = \frac{-M_A}{K} \Phi_f + \frac{M_B}{K} \Phi_n$$

و در نهایت  $\theta_B$  نیز به صورت زیر به دست می آید :

از حل دو معادله مربوط به  $\theta_A$  و  $\theta_B$ ،  $M_A$  و  $M_B$  به صورت زیر به دست می آیند :

$$M_A = \frac{K(\theta_A \cdot \Phi_n + \theta_B \cdot \Phi_f)}{\Phi_n^2 - \Phi_f^2}$$

$$M_B = \frac{K(\theta_B \cdot \Phi_n + \theta_A \cdot \Phi_f)}{\Phi_n^2 - \Phi_f^2}$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

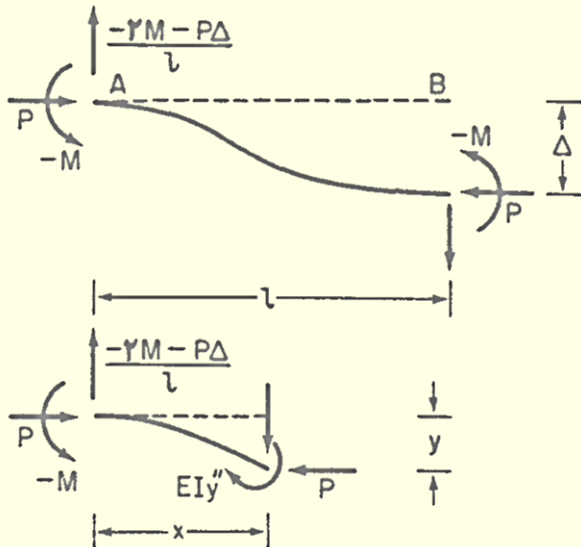
با فرض  $\alpha_n = \frac{\Phi_n}{\Phi_n^2 - \Phi_f^2}$  و  $\alpha_f = \frac{\Phi_f}{\Phi_n^2 - \Phi_f^2}$  تایج نهایی زیر به دست می آیند:

$$M_A = \frac{EI}{L} (\alpha_n \theta_A + \alpha_f \theta_B)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} (\alpha_n \theta_B + \alpha_f \theta_A)$$

اکنون باید برای همین عضو، رابطه بین لنگرهای انتهایی و جابجایی گرهها نسبت به یکدیگر - یعنی  $\Delta$  - را در نظر بگیریم:

تغییر شکل نشان داده شده در شکل زیر، با جابجا کردن انتهای عضو نسبت به یکدیگر به مقدار  $\Delta$  و با مساوی نگه داشتن دوران های انتهایی  $\theta_B$  و  $\theta_A$  با صفر حاصل شده است:



## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

با مساوی قرار دادن لنگرهای داخلی و خارجی ، در فاصله  $x$  از  $A$  ، رابطه زیر به دست می آید :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = M \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) + \frac{Px\Delta}{L}$$

با فرض  $k^2 = \frac{P}{EI}$  معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر به دست می آید :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{M}{EI} \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) + \frac{k^2 x\Delta}{L}$$

جواب معادله دیفرانسیل مذکور به صورت زیر به دست می آید :

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M}{P} \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) + \frac{x\Delta}{L}$$

ضرایب  $A$  و  $B$  را با استفاده از شرایط مرزی به دست می آوریم :

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = \frac{M}{P}$$

$$x = L \Rightarrow y = \Delta \Rightarrow A = \frac{-M \cos kL + 1}{P \sin kL}$$

## فصل چهارم : تحليل پایداری قابها

با جایگزین کردن نتایج **A** و **B** در معادله مربوط به **y** نتیجه نهایی زیر حاصل می شود :

$$y = \frac{M}{P} \left[ -\frac{\sin kx}{\sin kL} (1 + \cos kL) + \cos kx + \frac{2x}{L} - 1 \right] + \frac{x\Delta}{L}$$

**y'** نیز به صورت زیر به دست می آید :

$$y' = \frac{M}{P} \left[ -\frac{k \cos kx}{\sin kL} (1 + \cos kL) - k \sin kx + \frac{2}{L} \right] + \frac{\Delta}{L}$$

در **x = L** رابطه  $dy/dx = 0$  داریم که منجر به نتیجه زیر می شود :

$$0 = \frac{M}{P} \left[ -\frac{k \cos kL}{\sin kL} (1 + \cos kL) - k \sin kL + \frac{2}{L} \right] + \frac{\Delta}{L}$$

از رابطه مذکور  $\frac{\Delta}{L}$  به صورت زیر به دست می آید :

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{-M}{PL} \left( -kL \frac{1}{\sin kL} - kL \cot kL + 2 \right)$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

که از آن داریم :

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{-M}{K} (\Phi_n - \Phi_f) = \frac{-M}{K} \frac{\Phi_n^2 - \Phi_f^2}{\Phi_n + \Phi_f}$$

$$M = -K \frac{\Delta}{L} (\alpha_n + \alpha_f)$$

از این جا  $M$  به صورت زیر به دست می آید :

از ترکیب رابطه مربوط به  $M_A$  و  $M_B$  با رابطه فوق ، رابطه نهایی شیب - افت برای عضو تحت اثر خمش و نیروی محوری به صورت زیر به دست می آید :

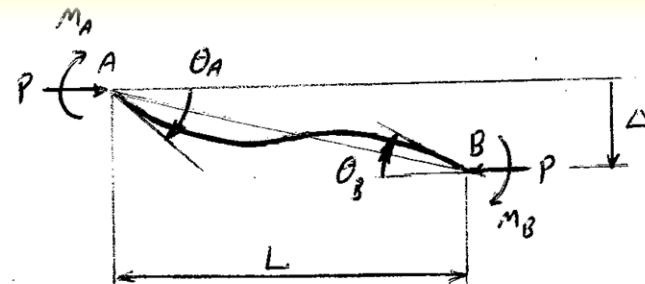
$$M = \frac{EI}{L} \left[ \alpha_n \theta_A + \alpha_f \theta_B - (\alpha_n + \alpha_f) \frac{\Delta}{L} \right]$$

بدیهی است که اگر  $P = 0$  باشد در این صورت  $\alpha_n = 4$  و  $\alpha_f = 2$  به دست خواهد آمد .



## روابط شیب - افت اصلاح شده

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[ \alpha_n \theta_A + \alpha_p \theta_B - (\alpha_n + \alpha_p) \frac{\Delta}{L} \right]$$



$$\alpha_n = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL}$$

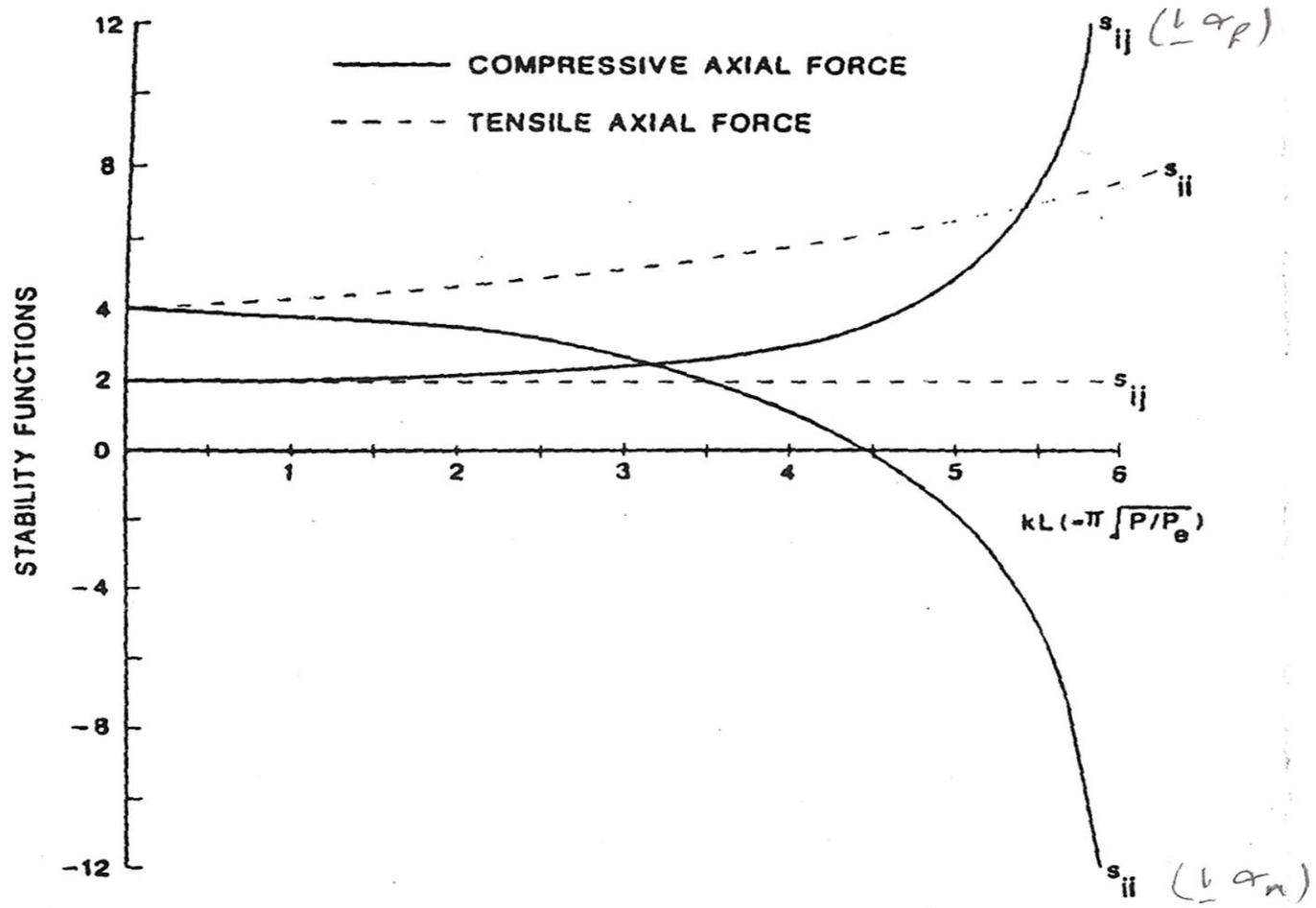
$$\alpha_p = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL}$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad kL = \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}, \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

توضیح: در کتاب پایداري Chen، بان نامهای  $\alpha_n$  و  $\alpha_p$  بترتیب از نامهای  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  استفاده شده است.

نکته: اگر  $P=0$  باشد در این صورت  $\alpha_n=4$  و  $\alpha_p=2$  بدست خواهد آمد.

# روابط شیب - افت اصلاح شده



## شکل دیگر روابط شیب - افت اصلاح شده

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[ 4\phi_3 \theta_A + 2\phi_4 \theta_B - 6\phi_2 \frac{\Delta}{L} \right]$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha_n + \alpha_R}{6} = \frac{s(1+c)}{6}$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_n}{4} = \frac{s}{4}$$

$$\phi_4 = \frac{\alpha_R}{2} = \frac{sc}{2}$$

$$\left( \phi_1 = \phi_2 - \frac{PL^2}{12EI}, \phi_2 = \frac{1}{3}(2\phi_3 + \phi_4) \right)$$

(توجه: اگر  $P=0$  باشد  $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 1$  خواهد بود.)

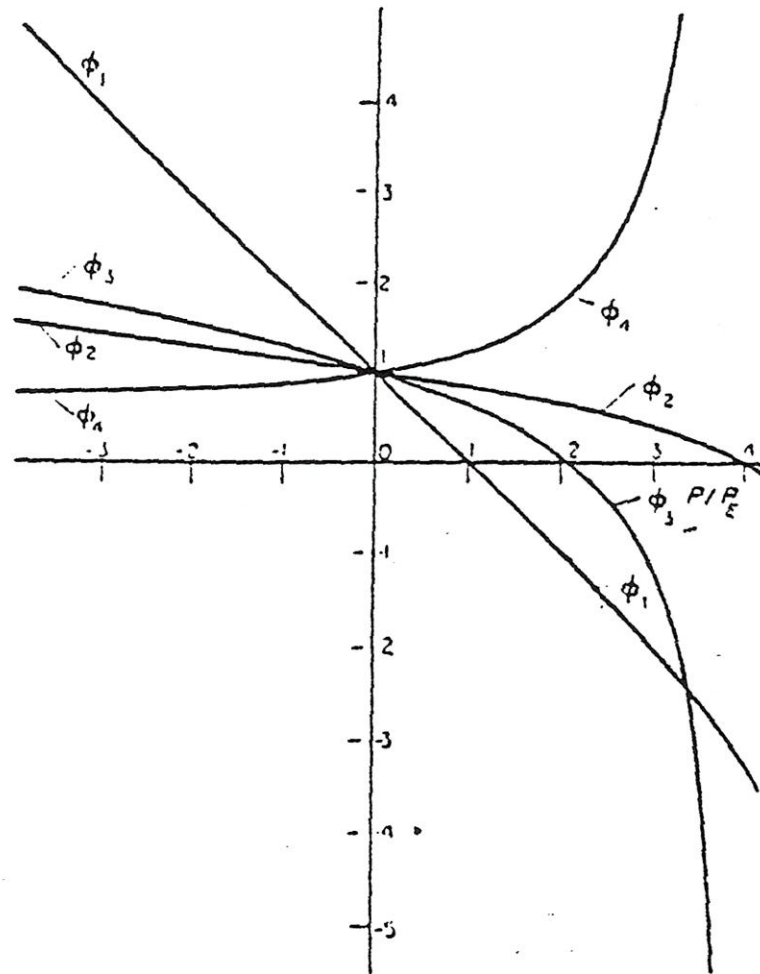
$$s = \frac{(1 - 2\alpha \cot \alpha) \alpha}{\tan \alpha - \alpha}, \quad c = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cot \alpha}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{PL}}{2} \left( = \frac{kL}{2} \right), \quad P = \frac{P}{P_E}, \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

شکل دیگر روابط شیب - افت اصلاح شده:

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[ s\theta_A + sc\theta_B - s(1+c) \frac{\Delta}{L} \right]$$

# شکل دیگر روابط شیب - افت اصلاح شده



## فصل چهارم : تحليل پایداری قابها

### ۵- تعیین بار بحرانی قاب ها با استفاده از روابط شیب - افت اصلاح شده

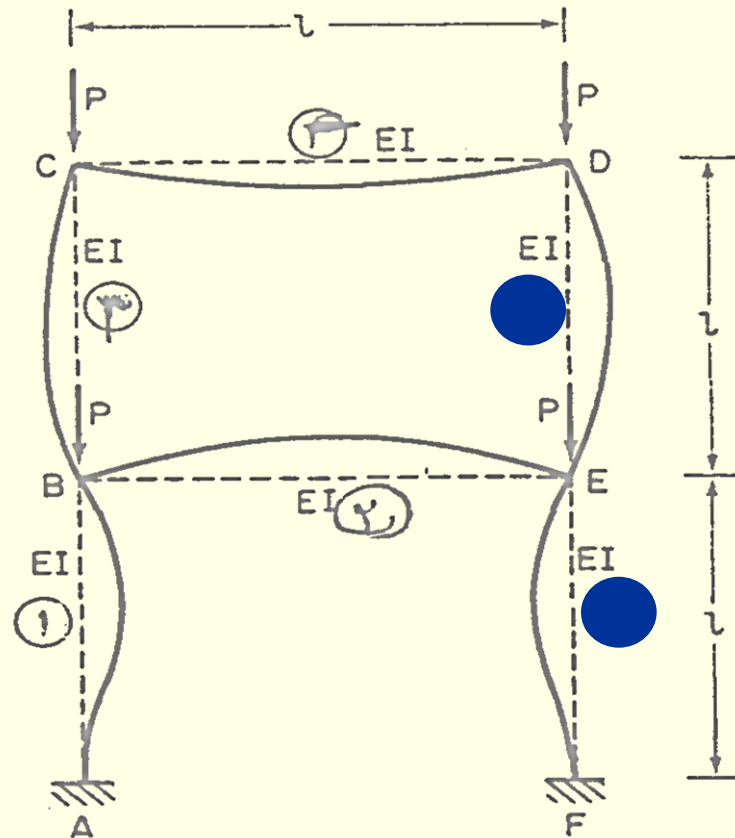
این روش اساساً مشابه روش قبلی است با این تفاوت که برای اعمال شرایط تعادل بجای حل معادله دیفرانسیلی تعادل از روابط شیب-افت اصلاح شده استفاده می شود .

مراحل تعیین بار بحرانی قاب ها با استفاده از روابط شیب - افت عبارتند از :

- الف ) تحلیل اولیه سازه و تعیین نیروهای محوری در داخل اعضاء بر حسب بار وارده اسمی
- ب ) تعیین لنگرهای انتهایی اعضاء با استفاده از روابط شیب - افت اصلاح شده
- پ ) نوشتن معادلات تعادل لنگر در گرههای آزاد قاب (و روابط برش در صورت حرکت جانبی)
- ت ) تعیین یک دستگاه معادلات بر حسب دورانهای گرههای آزاد (و  $\Delta$  های مربوط به هر عضو)
- ث ) مساوی صفر قرار دادن دترمینان ضرایب و به دست آوردن بارهای بحرانی و مدهای کمانش قاب ها

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

به عنوان مثال بار بحرانی قاب دو طبقه زیر را می خواهیم تعیین نماییم . فرض بر این است که از حرکت جانبی قاب جلوگیری شده و سختی خمشی  $EI/L$  برای کلیه اعضا یکسان است .  
اعضای قاب را به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است ، شماره گذاری می کنیم :



## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

با توجه به تقارن قاب ، تنها نیمی از آن لازم است که در تحلیل در نظر گرفته شود . با سختی خمشی  $K = EI / L$  ، لنگرها بر طبق معادله شیب - افت اصلاح شده به دست می آیند :

$$M_{BA} = K(\alpha_{n1}\theta_B)$$

$$M_{BE} = K(\alpha_{n2}\theta_B + \alpha_{f2}\theta_E)$$

$$M_{BC} = K(\alpha_{n3}\theta_B + \alpha_{f3}\theta_C)$$

$$M_{CB} = K(\alpha_{n3}\theta_C + \alpha_{f3}\theta_B)$$

$$M_{CD} = K(\alpha_{n4}\theta_C + \alpha_{f4}\theta_D)$$

چون در اعضای افقی نیروی محوری وجود ندارد ، لذا :

$$\alpha_{n2} = \alpha_{n4} = 4$$

$$\alpha_{f2} = \alpha_{f4} = 2$$

$$\theta_E = -\theta_B$$

$$\theta_D = -\theta_C$$

همچنین به علت تقارن داریم :

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

بنابراین نتایج زیر حاصل می شوند:

$$M_{BA} = K(\alpha_{n1}\theta_B)$$

$$M_{BE} = K(2\theta_B)$$

$$M_{BC} = K(\alpha_{n3}\theta_B + \alpha_{f3}\theta_C)$$

$$M_{CB} = K(\alpha_{n3}\theta_C + \alpha_{f3}\theta_B)$$

$$M_{CD} = K(2\theta_C)$$

توجه شود که  $\alpha_{n1}$  و  $\alpha_{n3}$  و  $\alpha_{f3}$  با در نظر گرفتن اثر نیروی محوری P در عضو ۳ و نیروی محوری P۲ در عضو ۱ محاسبه می شوند.

در این مرحله معادلات تعادل لنگر را در گره های آزاد B و C می نویسیم:



## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0$$

از جاگذاری لنگرهای بدست آمده، در معادلات مذکور دو معادله اصلی زیر بدست می آیند:

$$\theta_B (\alpha_{n1} + \alpha_{n3} + 2) + \theta_C (\alpha_{f3}) = 0$$

$$\theta_B (\alpha_{f3}) + \theta_C (\alpha_{n3} + 2) = 0$$

برای بدست آوردن شرط پایداری دترمینان این معادلات را برابر صفر قرار می دهیم و از

آنجا بار بحرانی را بدست می آوریم:

$$P_{cr} = \frac{12.6EI}{l^2}$$

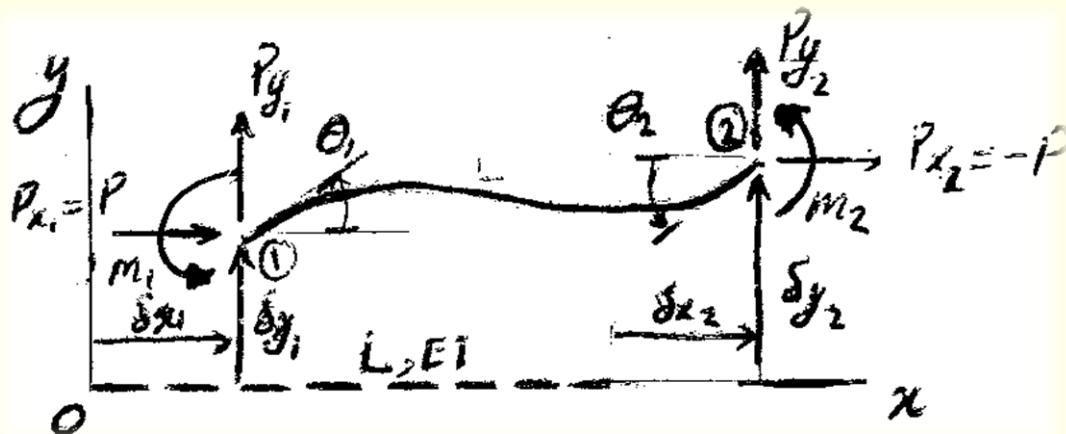
### ۶- تحلیل بار بحرانی قابها با استفاده از روش تحلیل ماتریسی سازه ها

در روش معمول تحلیل ماتریسی سازه ها در هنگام تعیین ماتریس سختی عضو از اثر نیروی محوری در رفتار خمش عضو صرف نظر کردیم.

ولی در بررسی پایداری سازه های قاب بندی شده نیروی محوری بر توزیع لنگر خمشی و از آنجا بر مولفه های مربوط به خمش و برش در ماتریس سختی عضو اثر داده می شود.

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب مسطح در مختصات محلی

عضو نشان داده شده در شکل زیر را در نظر می گیریم:



معادلات تعادل برای این عضو عبارتند از :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_{x1} + P_{x2} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_{y1} + P_{y2} = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 + P_{y2}L + P(\delta_{y2} - \delta_{y1}) = 0 \quad (3)$$

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب مسطح در مختصات محلی

معادلات شیب افت اصلاح شده برای این عضو به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2EI}{L} (2\phi_3\theta_1 + \phi_4\theta_2 - 3\phi_2(\delta_{y2} - \delta_{y1})) \\ m_2 &= \frac{2EI}{L} (2\phi_3\theta_2 + \phi_4\theta_1 - 3\phi_2(\delta_{y2} - \delta_{y1})) \end{aligned} \quad (4)$$

اگر مقادیر بدست آمده برای  $m_2$  و  $m_1$  را در معادله تعادل لنگر (3) جایگذاری کنیم روابط مربوط به نیروی برشی (با توجه به معادله 2) به شکل زیر به دست می آیند:

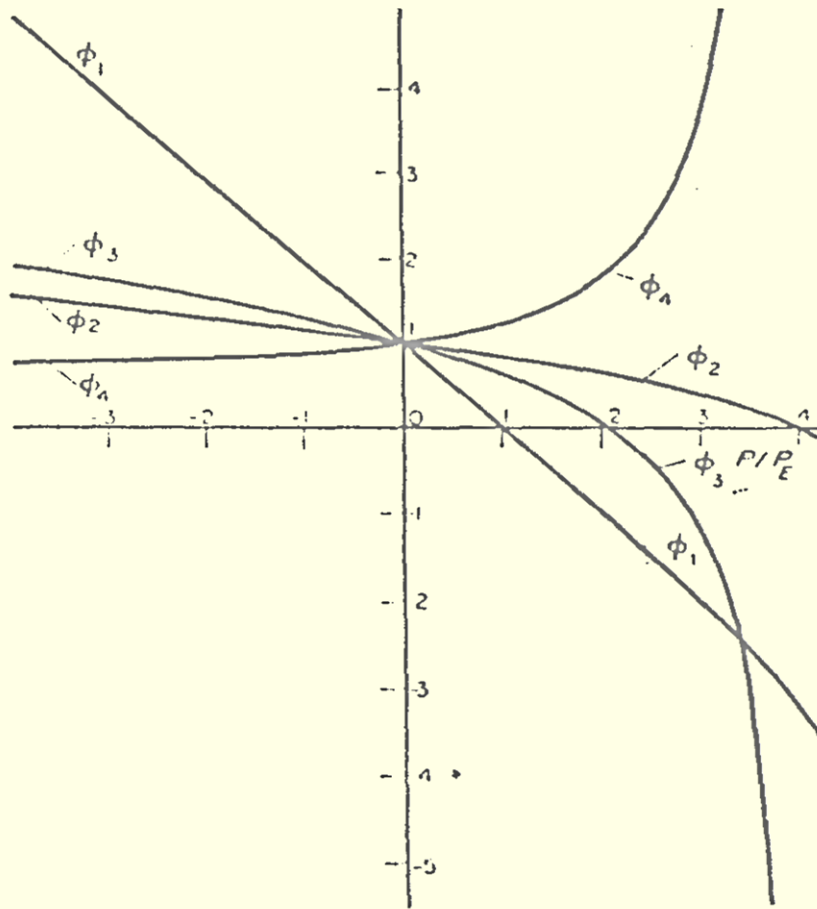
$$P_{y1} = P_{y2} = \frac{12EI}{L^3} \phi_1 (\delta_{y1} - \delta_{y2}) + \frac{6EI}{L^2} \phi_2 (\theta_1 + \theta_2) \quad (5)$$

$$\phi_1 = \frac{S(1+C)}{6} \phi_2 - \frac{PL^2}{12EI}$$

## تعيين ماتريس سختي عضو قاب مسطح در مختصات محلي

لازم به ذكر است كه تمامی توابع  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  به ازای  $P=0$  برابر واحد هستند و

در شكل زیر نشان داده شده اند:



## تعیین ماتریس سختی عضو قاب مسطح در مختصات محلی

برای تکمیل معادلات بار - تغییر مکان لازم است که بارهای انتهایی  $P_{x1}$  و  $P_{x2}$  بر حسب تغییر مکان های انتهایی  $\delta_{x1}, \delta_{x2}$  بیان شوند. لذا داریم :

$$P_{x1} = -P_{x2} = \frac{EA}{L} (\delta_{x1} - \delta_{x2}) \quad (5)$$

لازم به ذکر است که در تحلیل مذکور فرض های زیر را عملاً در نظر گرفته ایم :

۱- تغییر شکل ها کوچک هستند.

۲- تغییر شکل ها در محدوده ارتجاعی هستند.

## تعيين ماتريس سختي عضو قاب مسطح در مختصات محلي

در نهايت بر اساس روابط (4) و (5) و (6) خواهيم داشت:

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ m_1 \\ \hline P_{x2} \\ P_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI\phi_1}{L^3} & \frac{6EI\phi_2}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI\phi_2}{L^2} & \frac{4EI\phi_3}{L} \\ \hline & \text{sym.} & \\ \hline & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI\phi_1}{L^3} & \frac{6EI\phi_2}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI\phi_2}{L^2} & \frac{2EI\phi_3}{L} \\ \hline \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{12EI\phi_1}{L^3} & -\frac{6EI\phi_2}{L^2} \\ & & \frac{4EI\phi_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \hline \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

اکنون که ماتريس سختي اصلاح شده عضو قاب در مختصات محلي مشخص شد می توان ماتريس های سختي اصلاح شده اعضا در مختصات کلي و نیز ماتريس سختي کل سازه را تشکیل داد.

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب مسطح در مختصات محلی

اگر فرض کنیم که:

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ m_1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix}, \delta_1 = \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{x2} \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$P_1 = k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2$$

$$P_2 = k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2$$

$k_{11}$  و  $k_{12}$  و  $k_{21}$  و  $k_{22}$  به صورت زیر می باشند:



## تعيين ماتريس سختي عضو قاب مسطح در مختصات محلي

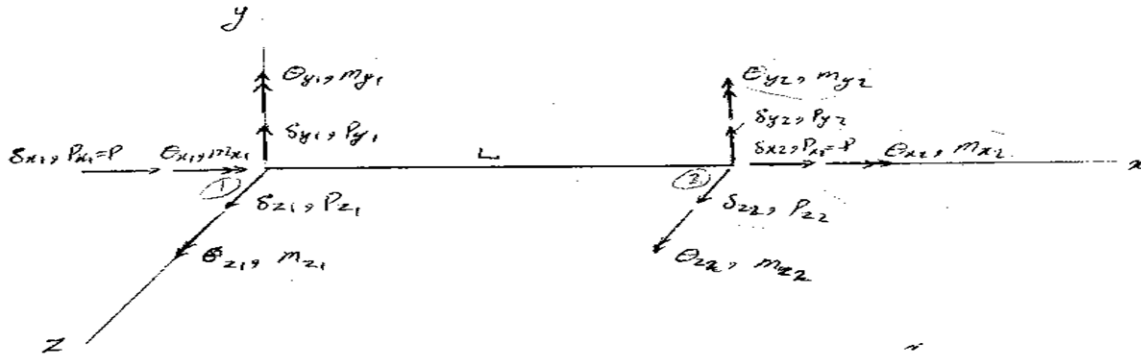
$$k_{11} = \begin{vmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI\phi_1/L^3 & 6EI\phi_2/L^2 \\ 0 & 6EI\phi_2/L^2 & 4EI\phi_3/L \end{vmatrix}$$

$$k_{12} = \begin{vmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI\phi_1/L^3 & 6EI\phi_2/L^2 \\ 0 & -6EI\phi_2/L^2 & 2EI\phi_4/L \end{vmatrix}$$

$$k_{22} = \begin{vmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI\phi_1/L^3 & -6EI\phi_2/L^2 \\ 0 & -6EI\phi_2/L^2 & 4EI\phi_3/L \end{vmatrix}$$

# تعیین ماتریس سختی عضو قاب فضایی در مختصات محلی

ماتریس سختی عضو قاب فضایی در مختصات محلی



ماتریس سختی را می توانیم با داشتن به معادله تعادل زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_{x1} = -P_{x2} = \frac{EA}{L} (\delta_{x1} - \delta_{x2}) \\ P_{y1} = -P_{y2} = \frac{12EI_z}{L^3} \Phi_{1z} (\delta_{y1} - \delta_{y2}) + \frac{6EI_z}{L^2} \Phi_{2z} (\theta_{z1} + \theta_{z2}) \\ m_{z1} = \frac{EI_z}{L} (4\Phi_{3z} \theta_{z1} + 2\Phi_{4z} \theta_{z2} - 3\Phi_{2z} (\delta_{y2} - \delta_{y1})) \\ m_{z2} = \frac{EI_z}{L} (4\Phi_{3z} \theta_{z2} + 2\Phi_{4z} \theta_{z1} - 3\Phi_{2z} (\delta_{y2} - \delta_{y1})) \end{cases}$$

برای عضو قاب فضایی به معادله تعادل دیگر به شکل زیر نیز باید در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_{z1} = -P_{z2} = \frac{12EI_y}{L^3} \Phi_{1y} (\delta_{z1} - \delta_{z2}) + \frac{6EI_y}{L^2} \Phi_{2y} (\theta_{y1} + \theta_{y2}) \\ m_{y1} = \frac{EI_y}{L} (4\Phi_{3y} \theta_{y1} + 2\Phi_{4y} \theta_{y2} - 3\Phi_{2y} (\delta_{z2} - \delta_{z1})) \\ m_{y2} = \frac{EI_y}{L} (4\Phi_{3y} \theta_{y2} + 2\Phi_{4y} \theta_{y1} - 3\Phi_{2y} (\delta_{z2} - \delta_{z1})) \\ m_{x1} = -m_{x2} = \frac{GJ}{L} (\theta_{x1} - \theta_{x2}) \end{cases}$$

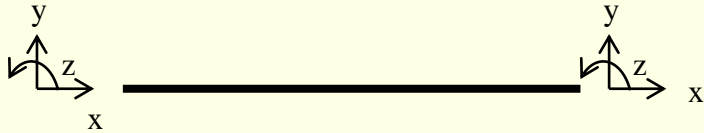
توجه: مقادیر  $\Phi_{1z}, \Phi_{2z}, \Phi_{3z}, \Phi_{4z}$  را با  $\Phi_{1y}, \Phi_{2y}, \Phi_{3y}, \Phi_{4y}$  جایگزین می کنند.  
 مقادیر  $\Phi_{1x}, \Phi_{2x}, \Phi_{3x}, \Phi_{4x}$  را با  $\Phi_{1y}, \Phi_{2y}, \Phi_{3y}, \Phi_{4y}$  جایگزین می کنند.

## تعيين ماتريس سختي عضو قاب فضايي در مختصات محلي

$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\delta_{x1}$
0	$\frac{12EI_z}{L^3} \phi_{1z}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	0	$\frac{-12EI_z}{L^3} \phi_{1z}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	$\delta_{y1}$
0	0	$\frac{12EI_y}{L^3} \phi_{1y}$	0	$\frac{-6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	0	0	$\frac{-12EI_y}{L^3} \phi_{1y}$	0	$\frac{-6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	$\delta_{z1}$
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{-GJ}{L}$	0	0	$\theta_{x1}$
0	0	$\frac{-6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	$\frac{4EI_y}{L} \phi_{3y}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	$\frac{2EI_y}{L} \phi_{3y}$	0	$\theta_{y1}$
0	$\frac{6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L} \phi_{3z}$	0	$\frac{-6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L} \phi_{3z}$	$\theta_{z1}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\delta_{x2}$
0	$\frac{-12EI_z}{L^3} \phi_{1z}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3} \phi_{1z}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	$\delta_{y2}$
0	0	$\frac{-12EI_y}{L^3} \phi_{1y}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3} \phi_{1y}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	$\delta_{z2}$
0	0	0	$\frac{-GJ}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0	$\theta_{x2}$
0	0	$\frac{-6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	$\frac{2EI_y}{L} \phi_{3y}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2} \phi_{2y}$	0	$\frac{4EI_y}{L} \phi_{3y}$	0	$\theta_{y2}$
0	$\frac{6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L} \phi_{3z}$	0	$\frac{-6EI_z}{L^2} \phi_{2z}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L} \phi_{3z}$	$\theta_{z2}$

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب فضایی در مختصات محلی

مختصات محلی را به صورت زیر در نظر می گیریم:



ابتدا ماتریس سختی در صفحه XY را بدست می آوریم. به دیگر فرض می کنیم که تغییر مکان ها در صفحه XY انجام می گیرند.

روابط زیر را در صفحه XY خواهیم داشت:

$$\phi_{1z} = \frac{S_z(1+C_z)}{6} - \frac{PL^2}{12EI_z} \quad \text{و} \quad \phi_{2z} = \frac{S_z(1+C_z)}{6}$$

$$\phi_{3z} = \frac{S_z}{4} \quad \text{و} \quad \phi_{4z} = \frac{S_z \cdot C_z}{2}$$

$$C_z = \frac{2\alpha_z - \sin 2\alpha_z}{\sin 2\alpha_z - 2\alpha_z \cos 2\alpha_z} \quad \text{و} \quad S_z = \frac{(1 - 2\alpha_z \cdot \cot 2\alpha_z)\alpha_z}{\text{tg}\alpha_z - \alpha_z}$$

که در آنها  $C_z$  و  $S_z$  به صورت زیر تعریف می شوند:

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب فضایی در مختصات محلی

$$\alpha_z = \frac{\pi\sqrt{\rho_z}}{2}, \rho_z = \frac{P}{P_{EZ}}, P_{EZ} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

\(\alpha\_z\) نیز به صورت زیر تعریف می شود:

بنابراین ماتریس های سختی در صفحه XY به صورت زیر می باشند:

$$k_{11} = \begin{vmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z \phi_{1z}/L^3 & 6EI_z \phi_{2z}/L^2 \\ 0 & 6EI_z \phi_{2z}/L^2 & 4EI_z \phi_{3z}/L \end{vmatrix}$$

$$k_{12} = \begin{vmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z \phi_{1z}/L^3 & 6EI_z \phi_{2z}/L^2 \\ 0 & -6EI_z \phi_{2z}/L^2 & 2EI_z \phi_{3z}/L \end{vmatrix}$$

$$k_{22} = \begin{vmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z \phi_{1z}/L^3 & -6EI_z \phi_{2z}/L^2 \\ 0 & -6EI_z \phi_{2z}/L^2 & 4EI_z \phi_{3z}/L \end{vmatrix}$$

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب فضایی در مختصات محلی

اکنون ماتریس سختی در صفحه XZ را بدست می آوریم.

به عبارت دیگر فرض می کنیم که تغییر مکان ها در صفحه XZ انجام می گیرند.

روابط زیر را در صفحه XZ خواهیم داشت:

$$\phi_{1y} = \frac{S_y(1+C_y)}{6} - \frac{PL^2}{12EI_y} \quad \text{و} \quad \phi_{2y} = \frac{S_y(1+C_y)}{6}$$

$$\phi_{3y} = \frac{S_y}{4} \quad \text{و} \quad \phi_{4y} = \frac{S_y \cdot C_y}{2}$$

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب فضایی در مختصات محلی

که در آنها  $C_y$  و  $S_y$  به صورت زیر تعریف شده اند: و  $\alpha_y$  نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_y = \frac{2\alpha_y - \sin 2\alpha_y}{\sin 2\alpha_y - 2\alpha_y \cos 2\alpha_y} \quad S_y = \frac{(1 - 2\alpha_y \cdot \cot 2\alpha_y)\alpha_y}{\operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y}$$

$$\alpha_y = \frac{\pi \sqrt{\rho_y}}{2} \quad \rho_y = \frac{P}{P_{Ey}} \quad P_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}$$

اکنون با ملحوظ داشتن پیچش حول محور  $x$  ( $\theta_x$ ) ماتریس سختی برای صفحه  $xz$  را به صورت زیر بدست می آوریم:

## تعیین ماتریس سختی عضو قاب فضایی در مختصات محلی

$$k_{11} = \begin{vmatrix} 12EI_y \phi_{1y}/L^3 & 0 & -6EI_y \phi_{2y}/L^2 \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -6EI_y \phi_{2y}/L^2 & 0 & 4EI_y \phi_{3y}/L \end{vmatrix}$$

$$k_{12} = \begin{vmatrix} -12EI_y \phi_{1y}/L^3 & 0 & -6EI_y \phi_{2y}/L^2 \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ 6EI_y \phi_{2y}/L^2 & 0 & 2EI_y \phi_{4y}/L \end{vmatrix}$$

$$k_{22} = \begin{vmatrix} 12EI_y \phi_{1y}/L^3 & 0 & 6EI_y \phi_{2y}/L^2 \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ 6EI_y \phi_{2y}/L^2 & 0 & 4EI_y \phi_{3y}/L \end{vmatrix}$$



## مراحل تعیین بار بحرانی قابها با به روش تحلیل ماتریسی سازه ها

- با صرف نظر کردن از اثر اصلاحی نیروی محوری (با فرض  $P=0$ ) در کلیه اعضای قاب، ماتریس سختی کل سازه تشکیل می شود،
- به عنوان اولین تکرار از اولین گام محاسبات، آنالیز استاتیکی به ازاء یک تراز معین بار اسمی  $\lambda_1 P$  انجام گرفته، نیروهای محوری اعضا محاسبه می شوند.
- سپس به ازای نیروهای محوری فشاری موجود در اعضا ماتریس سختی اصلاح شده سازه را باید تشکیل داد و سپس با این ماتریس سختی مجدداً سازه را آنالیز کرد و نیروهای محوری جدیدی را بدست آورد (تکرار بعدی). در صورتی که نیروهای محوری محاسبه شده در این تکرار با نیروهای محوری محاسبه شده در ابتدای تحلیل متفاوت باشند در این صورت با نیروهای محوری بدست آمده مجدداً ماتریس سختی اصلاح شده دیگری را باید تشکیل داد و با آن سازه را تحلیل نمود

## مراحل تعیین بار بحرانی قابها با به روش تحلیل ماتریسی سازه ها

- تا زمان نیل به همگرایی باید تکرارها را ادامه داد. بنابراین نتایج تحلیل هنگامی صحیح است که فشارهای محوری حاصل از تحلیل، در داخل یک رواداری از پیش تعیین شده، نزدیک به آن فشارهای محوری باشند که با استفاده از آنها ماتریس سختی اصلاح شده که در آنالیز مورد استفاده قرار گرفته ایجاد شده است. (لازم به ذکر است که معمولاً در سه تکرار همگرایی حاصل می شود).
- دترمینان ماتریس سختی اصلاح شده محاسبه می شود در صورتی که برابر با صفر نباشد سلسله عملیات فوق مجدداً به ازای تراز بار  $\lambda_2 P$  انجام می گیرد (گام بعدی) و آنقدر این عملیات را تکرار می شود تا اینکه به ازای باری چون  $\lambda_n P$  (در گام  $n$ ام) دترمینان ماتریس سختی صفر شود به این ترتیب بار بحرانی قاب  $\lambda_n P$  می باشد.

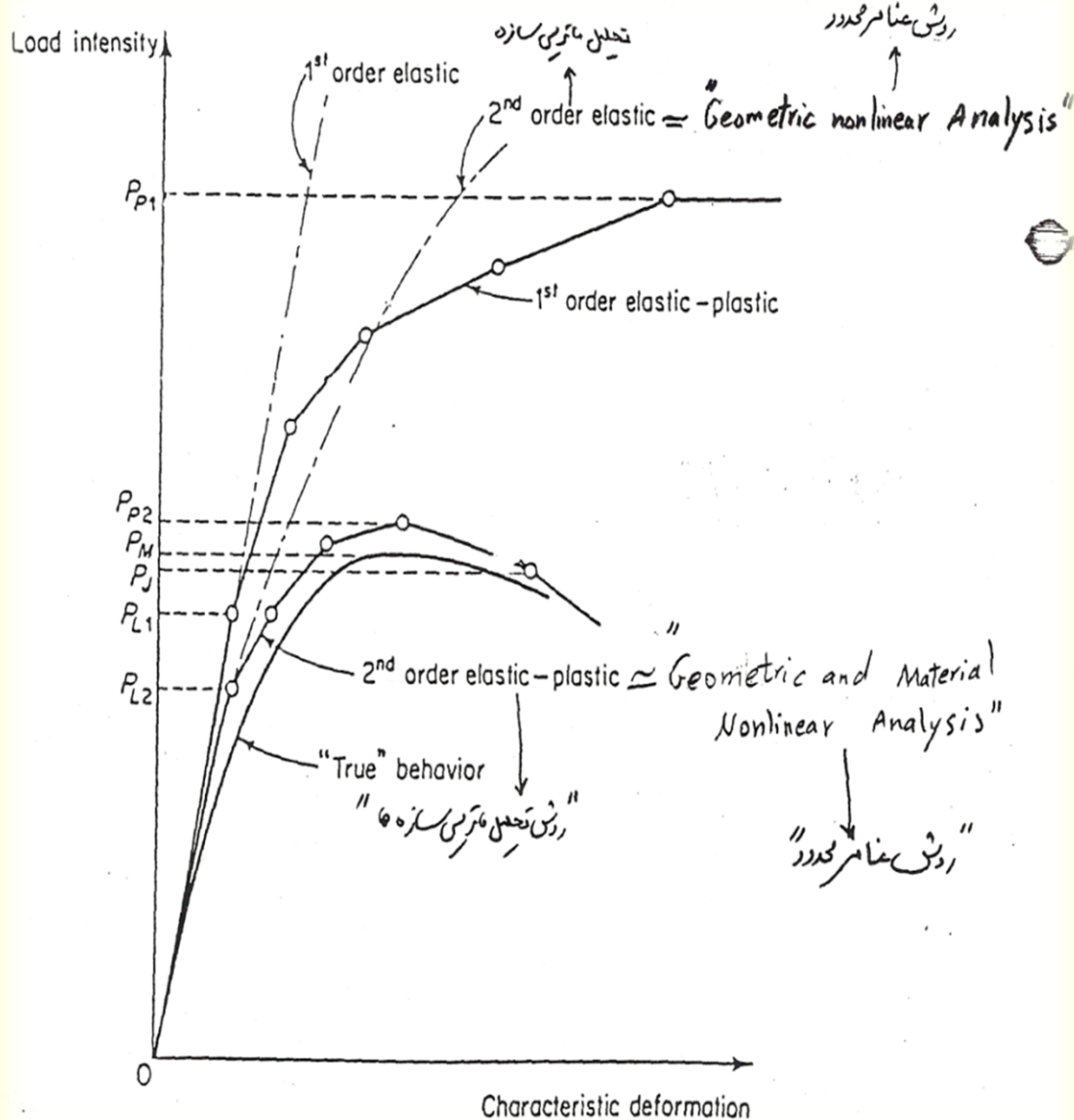
## رده بندی روشهای مختلف تعیین بار بحرانی

(1) تحلیل الاستیک مرتبه اول

(2) تحلیل الاستیک مرتبه دوم

(3) تحلیل الاستو پلاستیک مرتبه اول

(4) تحلیل الاستو پلاستیک کامل



### (1) تحلیل الاستیک مرتبه اول

- سازه بدون ناکاملی در نظر گرفته شده و بارگذاری به صورتی در نظر گرفته می شود که هیچگونه خمش اولیه ای پیش از کمانش در عضو ایجاد نشود (perfect system)
- با استفاده از مفهوم تعادل خنثی، بار بحرانی الاستیک سازه با تحلیل مقادیر ویژه سیستم کامل بدست می آید.
- بار بحرانی محاسبه شده، بار نظیر نقطه دوشاخگی تعادل سازه کامل است.
- منحنی بار-جابجایی متناظر به صورت یک منحنی دوطرفی خواهد بود.
- روشهای نمونه برای محاسبه بار بحرانی الاستیک سازه کامل:

○ روش معادلات دیفرانسیل تعادل

○ روش معادلات شیب-افت اصلاح شده

○ روش ماتریس سختی

## رده بندی روشهای مختلف تعیین بار بحرانی

### (2) تحلیل الاستیک مرتبه دوم

- عبارت است از تحلیل الاستیک سازه ناکامل.
- چنین تحلیلی در واقع تحلیلی فقط از نوع تحلیل غیرخطی هندسی است که در آن رفتار بار- تغییر مکان الاستیک سازه بخاطر اثرات ثانویه (  $P-\delta$  یا  $P-\Delta$  ) به صورت غیرخطی بوده و در نهایت به منحنی روش تحلیل الاستیک مرتبه اول مماس می گردد.
- با توجه به اینکه در تحلیل الاستیک مرتبه دوم معادلات تعادل بر اساس هندسه تغییر شکل یافته سازه فرمولبندی می شوند و هندسه سازه طی مراحل اعمال بار تغییر می یابد، جواب این نوع تحلیل ها با استفاده از روشهای تکراری بدست می آید.
- بار به صورت نموی اعمال می شود و واکنش غیرخطی سازه با مجموعه ای از تحلیل های خطی در هر تکرار تقریب سازی می شود، هندسه سازه که در هر چرخه از تحلیل به کار می رود عبارت است از هندسه تغییر شکل یافته سازه در انتهای چرخه قبلی.
- روش تحلیل ماتریسی توضیح داده شده در بخش قبلی، و روش عناصر محدود با در نظر گرفتن فقط عامل غیر خطی هندسی نمونه هایی از تحلیل الاستیک مرتبه دوم هستند.

### (3) تحلیل الاستو پلاستیک مرتبه اول

- اگر از اثر ناپایداری صرف نظر شده و صرفاً تسلیم پلاستیک مصالح مورد توجه قرار گیرد خرابی سازه در اثر تشکیل مکانیسم کمانش پلاستیک پدید می آید.
- یک مکانیسم کمانش پلاستیک هنگامی تشکیل می شود که تعداد مفصل های پلاستیک ایجاد شده در سازه به حدی باشد که سازه به صورت استاتیکی ناپایدار شود.
- بار مکانیسم کمانش پلاستیک ( $P_p$ ) حداکثر ظرفیت باربری سازه خواهد بود.

### (4) تحلیل الاستو پلاستیک کامل

- روشهای تحلیل عناصر محدود با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی هندسی و مصالح در این نوع تحلیل ها می باشند.

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

۸- تحلیل ارائه شده در بخش تعیین بار بحرانی قاب ها با استفاده از روش تحلیل ماتریسی سازه ها (با به کار گیری روابط شیب- افت اصلاح شده) در واقع یک تحلیل الاستیک از مرتبه دوم است.

در این تحلیل فرض می شود که قاب الاستیک است ولی معادلات تعادل روی بافتار تغییر شکل یافته فرمول بندی می شود.

لنگرها در اعضا با در نظر گرفتن حاصل ضرب نیروی محوری موجود در اعضا و خیز جانبی آنها بزرگ نمایی می شوند و در نتیجه تغییر شکل ها با یک نرخ سریع تری نسبت به بار افزایش پیدا می کنند به عبارت دیگر سازه رفتار غیر خطی نرم شونده از خود نشان می دهد.

سرانجام این تغییر شکل ها کاملاً بزرگ شده تا اینکه به هنگام رسیدن بار وارده به بار کمانش قاب به بی نهایت میل می کند.

ویژگی های تحلیل الاستیک از مرتبه دوم عبارتند از:

(الف) فرض می شود که تغییر شکل ها کوچک هستند.

(ب) از اثر تغییر شکل های برشی صرف نظر می شود.

(پ) تحلیل از نکته نظر هندسی خطی است. یعنی ماتریس های سختی در کلیه ترازهای بار در بافتار تغییر شکل نیافته تشکیل می شوند. (بنابراین از تغییر شکل های محوری اعضا صرف نظر می شود).

(ت) تغییر شکل ها در محدوده الاستیک هستند. بنابراین فرض بر این است که پلاستیسیته رخ نمی دهد.

(ث) اثر نیروهای محوری اعضا در سختی خمشی آنها در نظر گرفته می شود.

(ج) این تحلیل مشخصه بار – تغییر مکان قاب را تا رسیدن به بار بحرانی بدست می دهد که شامل غیر خطی های هندسی نیز می باشد.



## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

چ) این تحلیل شامل  $n$  گام است که هر گام نیز خود شامل چند تکرار می باشد.

لازم به ذکر است که اگر قبل از رسیدن به بار بحرانی پلاستیسیته اتفاق بیفتد در این صورت تحلیل الاستیک مرتبه دوم تخمین واقع بینانه ای از رفتار واقعی سازه را به دست نمی دهد..لذا در این حالت باید یک تحلیل الاستوپلاستیک مرتبه دوم باید انجام داد که رفتار بسیار نزدیکی به رفتار واقعی سازه را به دست خواهد داد.

تحلیل الاستوپلاستیک مرتبه دوم دارای همان ویژگی های تحلیل الاستیک مرتبه دوم است مگر اینکه تغییر شکل ها دیگر صرفا در محدوده الاستیک نیستند بلکه وقوع پلاستیسته نیز در نظر گرفته می شود. بنابراین در ماتریس سختی عضو علاوه بر اعمال ضرایب  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  و  $\varphi_3$  و

که بیانگر اثر نیروی محوری در سختی خمشی عضو می باشد باید اثر وقوع پلاستیسیته نیز به نحو مناسبی اعمال شود.

برای نیل به رفتار واقعی سازه قابی باید یک تحلیل غیر خطی مصالح و تغییر شکل های بزرگ انجام داد. به عبارت دیگر باید در تحلیل ، غیر خطی های مصالح و هندسی تواما باید در نظر گرفته شوند.

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

## ۷- تحلیل خطی سازی شده کمانش (Linearized Buckling Analysis):

یکی از روش های یافتن بار بحرانی سازه ها به طور عام - و قابها به طور خاص - استفاده از روش تحلیل خطی کمانش یا تحلیل خطی سازی شده کمانش می باشد.

ماتریس های سختی در زمان ها (یا ترازهای بار)  $t$  و  $t-\Delta t$  را  ${}^t K, {}^{t-\Delta t} K$  در نظر می گیریم که بردارهای متناظر بارهای خارجی آنها  ${}^t R, {}^{t-\Delta t} R$  می باشند.

تراز بار  ${}^{t-\Delta t} R$  می تواند بار صفر یا بار مرده و ماتریس سختی  ${}^{t-\Delta t} K$  می تواند ماتریس سختی بافتار تغییر شکل نیافته یا ماتریس سختی بافتار تغییر شکل یافته متناظر با بار مرده باشد.

در تحلیل خطی سازی شده کمانش فرض می کنیم که در هر زمان  $\tau$  یا تراز بار ماتریس سختی عبارت است از:

$${}^\tau K = {}^{t-\Delta t} K + \lambda ({}^t K - {}^{t-\Delta t} K)$$

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

و بردار بار متناظر آن عبارت است از:

$${}^{\tau}R = {}^{t-\Delta t}R + \lambda({}^tR - {}^{t-\Delta t}R)$$

و  $\lambda$  فاکتور مقیاسی است.

در بار خرابی یا کمانش ماتریس سختی مماسی تکین است و بنابراین داریم:

$$\det {}^{\tau}K = 0$$

که می توان آن را به صورت معادل زیر نوشت:

$${}^{\tau}K\phi = 0$$

که در آن  $\phi$  یک بردار غیر صفر است.

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

از جایگذاری  ${}^t K$  در معادله بالا خواهیم داشت:

$$\left[ {}^{t-\Delta t} K + \lambda ({}^t K - {}^{t-\Delta t} K) \right] \phi = 0$$

$${}^{t-\Delta t} K \phi = \lambda ({}^{t-\Delta t} K - {}^t K) \phi = 0$$

که یک ویژه مساله تعمیم یافته است. ویژه مقادیر  $\lambda_i$  و  $i=1,2,\dots,n$  بارهای کمانش را بدست می دهد. و  $\phi_i$  نمایشگر مدهای کمانش متناظر می باشند.

فرض می کنیم که ماتریس های  ${}^t K, {}^{t-\Delta t} K$  هر دو معین مثبت می باشند. ولی باید یادآوری شود که در حالت کلی  ${}^t K, {}^{t-\Delta t} K$  نامعین است بنابراین ویژه مساله مورد نظر می تواند دارای ویژه مقادیر مثبت و منفی باشد اما مشخص است که ما به دنبال کوچکترین ویژه مقدار مثبت می باشیم بنابراین معادله بالا را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$${}^t K \phi = \gamma {}^{t-\Delta t} K \phi$$

$$\gamma = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

ویژه مقادیر  $\lambda_1$  همگی مثبت هستند ما به دنبال کوچکترین ویژه مقادیر  $\gamma_1$  می باشیم. بنابراین با بدست آوردن کوچکترین آن کوچکترین مقدار  $\lambda_1$  به دست می آید.

با بدست آوردن  $\lambda_1$  بار کمانش (یا خرابی) به صورت زیر به دست می آید:

$$R_{buckling} = {}^{t-\Delta t} R + \lambda_1 ({}^t R - {}^{t-\Delta t} R)$$

چند نکته مهم در مورد تحلیل خطی سازی شده کمانش عبارتند از:

الف) رابطه  ${}^\tau K = {}^{t-\Delta t} K + \lambda ({}^t K - {}^{t-\Delta t} K)$  بیانگر این است که تحلیل خطی سازی شده کمانش می تواند حتی در هنگام وجود غیر خطی های هندسی و مصالح نیز انجام گیرد.

## فصل چهارم : تحلیل پایداری قابها

(ب) رابطه

$${}^t K \phi = \gamma^{t-\Delta t} K \phi$$

بیانگر این است که عناصر ماتریس

سختی از زمان  $t-\Delta t$  به بعد به صورت خطی تغییر می کنند و شیب تغییر از طریق اختلاف از زمان  $t-\Delta t$  تا زمان  $t$  تعیین می شود.

(پ) تحلیل خطی سازی شده کمانش تخمین معقولی از بار خرابی سازه است اگر تغییر مکان های پیش از خرابی نسبتا کوچک باشند و هر گونه تغییر در خواص مصالح به طور قابل ملاحظه ای فرض خطی بودن را نقض نکند.

(ت) اگر تغییر مکان های پیش از خرابی بزرگ باشند در این صورت تحلیل خطی سازی شده کمانش بار خرابی را بیش از اندازه واقعی تخمین خواهد زد. مگر این که حالت بارگذاری متناظر با  $\Delta t$  به اندازه کافی به بار خرابی نزدیک باشد.

ث) حتی اگر بار کمانش خطی سازی شده را نتوان به عنوان تخمینی از بار بحرانی واقعی سازه مورد استفاده قرار دادولی می توان از مدهای کمانش به عنوان یک ناکاملی در مدل سازه ای استفاده کرد.

ج) از رابطه  ${}^t K = {}^{t-\Delta t} K + \lambda({}^t K - {}^{t-\Delta t} K)$  می توان برای قاب ها با در نظر داشتن

روش تحلیل ماتریسی سازه ها استفاده نمود.