

www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

خبرنگاه تفصلي مهندسي عمران



@icivilir



icivil.ir





دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

دینامیک سازه‌ها

استاد :

جناب آقای دکتر خوشنودیان

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(کارشناس ارشد عمران گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی دکترا گرایش سازه North Carolina State University)

پائیز ۱۳۹۱

حمید کاظم

Subject:

Year:

Month:

Day:

بسم الله الرحمن الرحيم

حمید کاظم

دینامیک سازه

جناب آقای دکتر خوشنودیان

Subject:

Year:

Month:

Day:

موضوع: ...

تاریخ: ...

نام: ...

شماره: ...

$$1) g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 386.06 \text{ in/s}^2 = 32.17 \text{ ft/s}^2$$

$$2) 1 \text{ kips} = 1000 \text{ lb}$$

$$\frac{\text{kips} \cdot \text{s}^2}{\text{in}} = \text{حجم}$$

$$3) 1 \text{ ft} = 12 \text{ in} = 0.3048 \text{ m}$$

* lb وزنی را اگر بر و تقسیم کنیم lb جری بدست می آید.

$$4) \text{psi} = \text{Pound Per Square Inch} = \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

$$5) \text{kpsi} = 1000 \text{ psi}$$

$$6) \frac{\text{lb} \cdot \text{in}}{\text{sec}^2} = \text{lb جری}$$

$$w = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\text{طول نیرو}}{\text{جرم}}} \quad 20'' = 20 \text{ in} \\ 20' = 20 \text{ ft}$$

$$* \text{lb جری} = 0.4354 \text{ kg}$$

SAMAND

حمید کاظمی

Subject:

Year:

Month:

Day:

Subject:

YEAR: MONTH: DAY:

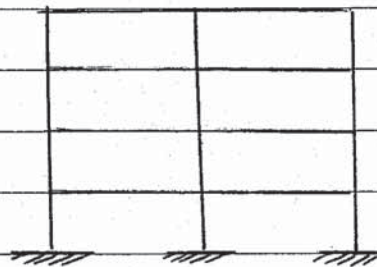
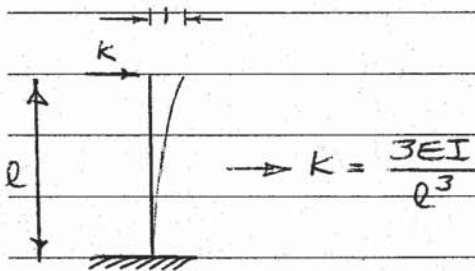
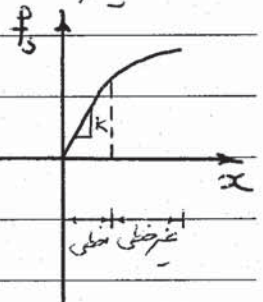
فصل دوم

معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی (حالت خطی) ۸

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \rightarrow f_I + f_D + f_S = F(t)$$

۱) $f_S = k \cdot x$ با فرض، رفتار خطی f_S نیروی فنر فیزیکی

در نسبت غیر خطی $k = k(t)$ است که تابعی از زمان می باشد



برای بدست آوردن معادلات حرکتی قیاس داریم ۱
(۱) روش کلی (تقریب)
(۲) روش Assembling

2) $f_D = c\dot{x}$

نیروی ایجاد شده در درجه با سرعت جسم ارتباط دارد.

دو نوع میرایی در سیستم داریم. اولی نوع قیاس با سرعت است. به زبان المکانات با میرایی ویسکوز یا لزج می نامند. (دومی نوع حالت میرایی با المکانات هسته تپ است)

$$f_D = c\dot{x}$$

بی انواع میرایی به شکل زیر است ۱
(۱) میرایی ویسکوز یا لزج

$$f_D = c\dot{x}$$

(۲) میرایی هسته تپ

در حالت غیر خطی و برای المکانات غیر خطی سازه میرایی هسته تپ بدای شود.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

(۱) میرایی ویسکوز

$$\Rightarrow x(t) = \bar{x} e^{i\omega t} \Rightarrow (-m\omega^2 + (k + i\omega c)) \bar{x} = F_0$$

سختی (استایلی)

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

۳. کمالات که فرکانس می باشد که با افزایش ζ فرکانس زیاد می شود. (طبق یادداشت)

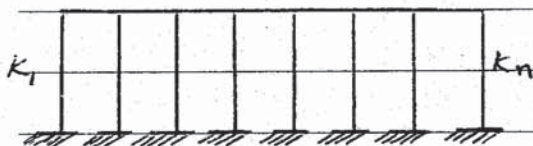
(۲) استقلال سیستم است:

$$m\ddot{x} + \frac{p}{\omega_d} + kx = \frac{p}{\omega_d} e^{i\omega_d t}$$

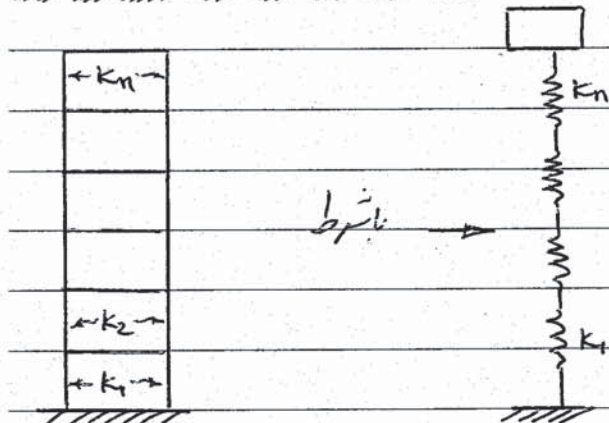
$$\rightarrow \underbrace{[-m\omega^2 + k(1 + 2i\zeta\omega)]}_{\text{سختی دینامیکی}} \bar{x} = \frac{p}{\omega_d}$$

* در تمام شکل های نمودار فرکانس و استیلا است که در ω شکل دارد در تمام شکل های نمودار فرکانس و استیلا است که در ω شکل دارد در تمام شکل های نمودار فرکانس و استیلا است که در ω شکل دارد.

سختی معادل:



$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

مثال: سازه ای به جرم m در طبقه آخر مفروض است. مطابقت تعیین می شود.

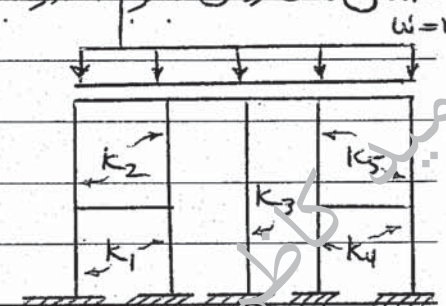
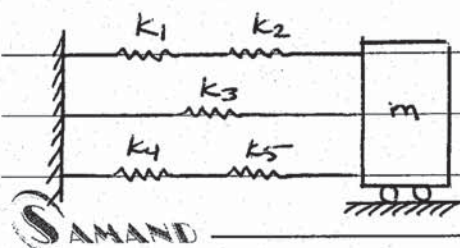
$$k_1 = 1000 \text{ kg/cm}$$

$$k_2 = 800 \text{ kg/cm}$$

$$k_3 = 500 \text{ kg/cm}$$

$$k_4 = 900 \text{ kg/cm}$$

$$k_5 = 600 \text{ kg/cm}$$



AMAND

Subject:

YEAR:

MONTH:

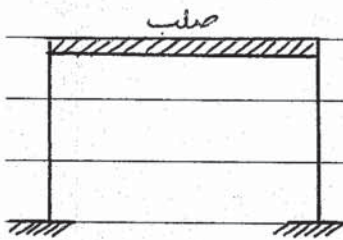
Day:

$$K_{req} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 \times k_2}{k_1 + k_2} = 444.4 \text{ kg/cm}$$

$$K_{2eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5}} = \frac{k_4 \times k_5}{k_4 + k_5} = 360 \text{ kg/cm}$$

$$\rightarrow K_{eq} = K_{1eq} + K_{2eq} + k_3 = 1304.4 \text{ kg/cm}$$

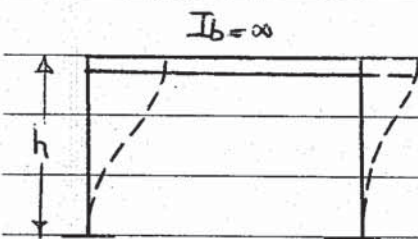
سختی صلبه
(در حالت متبیل در سقف به صورت جدول عمل کند سختی جدول با درجه صلبت زیر است)



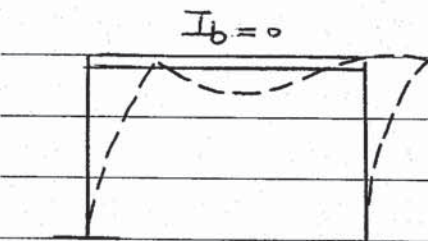
(۱) سقف صلبه

$$\rightarrow K_{eq} = \sum \frac{12EI}{h^3}$$

* در مصالح بنایی یا چوبی وقتی در برابر رلنی (با ضخامت بالای ۲۵ cm) تحمل می کنند وظایف آنها نقش محاط کنند و دستخ در برابر راد دارند
در این حالت ۴۵ این باشد



$$K = \sum \frac{12EI_c}{h^3}$$



(۲) سقف غیر صلب (الفاظ پذیر)

$$K = \sum \frac{3EI_c}{h^3}$$

(۳) سقف متحرک

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$0 < I_b < \infty \Rightarrow K = \sum \frac{12EI_c}{h^3} \left(\frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \right), \quad \rho = \frac{I_b}{4I_c}$$

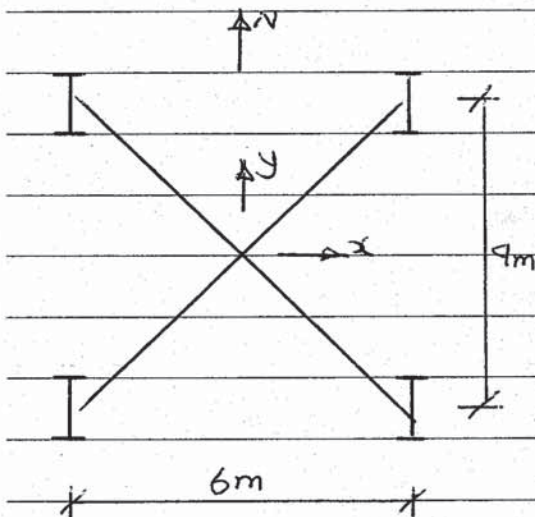
مثال: مصالح شکل پرتال صنعتی به طبقه در ابعاد $6 \times 9m$ دریاين مفروض است. ستم ضعیف در ابعاد شمال - جنوب بصورت خمشی و در ابعاد شرقی - غربی مهاربندی است. وزن سقف $150 \frac{kg}{m^2}$ و سقف در صنف خود کاملاً مهاربندی شده است. مشخصات ستم بصورت $I_x = 3445 cm^4$, $I_y = 760 cm^4$, $E = 2 \times 10^6 kg/cm^2$ هم چنین مهاربند در ابعاد شرقی - غربی از فولاد به قطر $25 mm$ ساخته شده است. مطلوب است تعیین مقدار درجه حرارت برای تعادل آزاد سازه.

(ب) در ابعاد شرقی - غربی

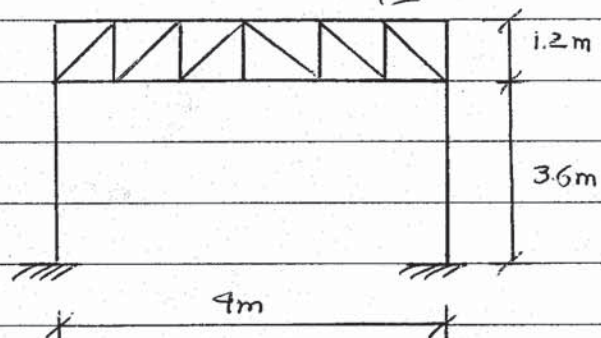
(الف) در ابعاد شمالی - جنوبی

* چون ما در محکم برای تعادل آزاد سازه مورد نظر است پس باید به معادله دوم بررسم

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



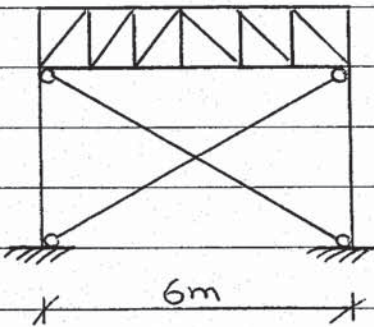
PLAN



North - South ELEVATION

* برای محاسبه جرم بار مرده + دبر از بار زنده است. (در اینجا در صندرا صنف در نظر می گیریم)

(در اینجا جهت سختی ستم داریم)



East - West ELEVATION

$$\text{جرم سقف} = \frac{W}{g} = \frac{150 \times 9 \times 6}{981} = 8.257 \frac{kg \cdot s^2}{cm}$$

(الف) ابعاد شمالی - جنوبی

$$K_{NS} = 4 \times \frac{12EI_x}{h^3} = 48 \times 2 \times 10^6 \times 3445 = 7088.5 \frac{kg}{cm}$$

$$m\ddot{x} + K_{NS}x = 0 \Rightarrow 8.257\ddot{x} + 7088.5x = 0$$

$$k = \frac{AE}{l} C_{1\theta}^2 \quad \text{سختی بهار بند با زاویه } \theta$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

ب) با افتداد شری می نویسیم: $k = \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2$ θ چهار بهار بند داریم و از فشاری که هر تنوعی کنیم

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} (2.5)^2 = 4.91 \text{ cm}^2$$

$$C_{1\theta} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3.6^2}} = 0.8575$$

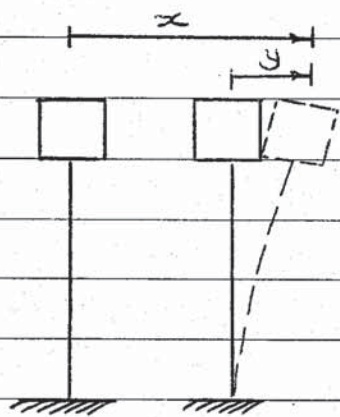
$$k = \frac{4.91 \times 2 \times 10^6}{(\sqrt{6^2 + 3.6^2}) \times 100} \times 0.8575^2 = 10315.3 \text{ kg/cm}$$

$$8.257 \ddot{x} + 20830.6 \dot{x} = 0$$

چون 2 بهار بند کشش داریم باید ضریب 2 شود.
عدت افتداد فشار را در معادله می نویسیم چون در تغییر مکان می باشد
در جهت شری غری می نویسیم و افتداد بهار بند است و همجنس آن می باشد.

* بعضی بارها در تیر نوع بار و افتداد به شتاب می کشند و بعضی دیگر (مثل خطوط لوله) در جابه جایی می کشند
بر چنین (س) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ma$ می نویسیم (برای بافتن)

معادله حرکت تحت تحریک زلزله:



$$x = y + x_g$$

$$m\ddot{x} + c\dot{y} + ky = 0 \quad \text{معادله حرکت}$$

$$\Rightarrow m(\ddot{y} + \ddot{x}_g) + c\dot{y} + ky = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{x}_g \quad \text{فرم اول حرکت}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{y} + ky = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} - c\dot{x}_g + k(x - x_g) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_g + kx_g \quad \text{فرم دوم حرکت}$$

در فرم اول تمام زلزله بصورت شتاب است که برای بافتن می باشد. در فرم دوم هم
زلزله بصورت جابه جایی می باشد که برای بافتن می باشد. استفاده می شود.

* برای تیر که اجتمه در آن است که لوله بوی گیل می باشد که اگر باشد یا که میسر فلج که انعطاف کنیم

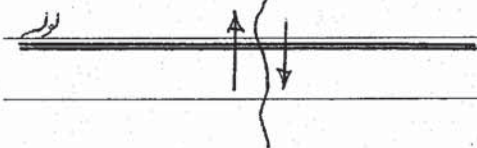
Subject:

Year:

Month:

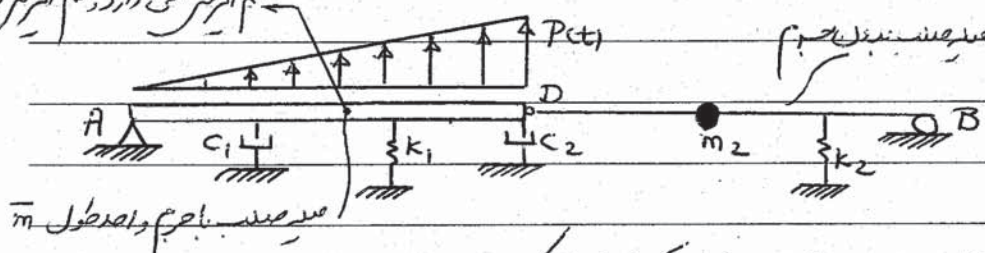
Day:

است مقاومت باری، الزام می دهد



معادله حرکت سیستم می تواند درجه آزادی در مختصات کلی باشد

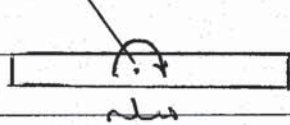
مجموع این نیروها را داریم و می توانیم از آن استفاده کنیم



نقطه D را این می بینیم و می توانیم از آنجا به جانب چپ یا راست فرض کرده $\sum F$ و $\sum M$ می نویسیم

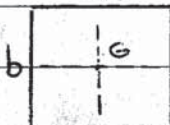
فصل استاتیست است. فقط $\sum F = ma$ و $\sum M = I\alpha$ می نویسیم

مرکز ثقل

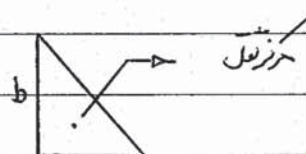


$$I_G = \frac{1}{12} m l^2$$

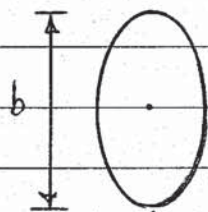
a



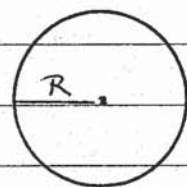
$$I_G = \frac{1}{12} (m(a^2 + b^2))$$



$$I_G = \frac{1}{18} m(a^2 + b^2)$$

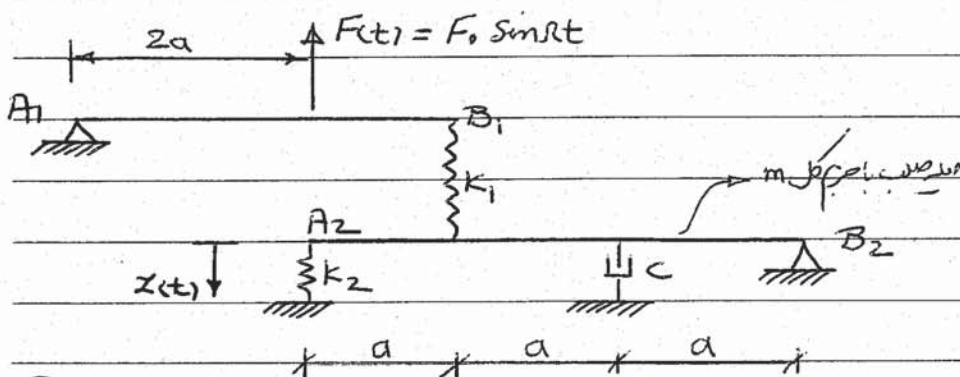


$$I_G = \frac{1}{16} m(a^2 + b^2)$$



$$I_G = \frac{1}{2} mR^2$$

مثال: مختصات کلی M^* , C^* , K^* و بارگذاری $P(x,t)$ را برای دستگاه نشان داده شده در شکل بدست آورید. تغییر مکان $z(t)$ مربوط به نقطه A_2 را به عنوان مختصات کلی دستگاه در نظر بگیرید.

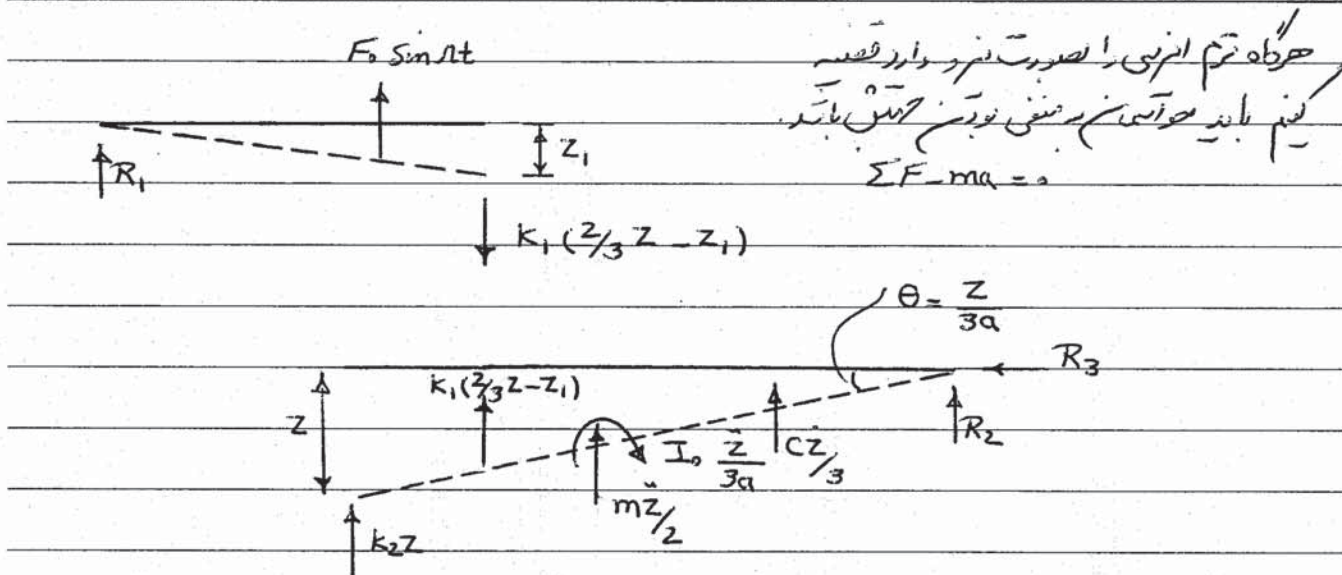


Subject:

YEAR:

MONTH:

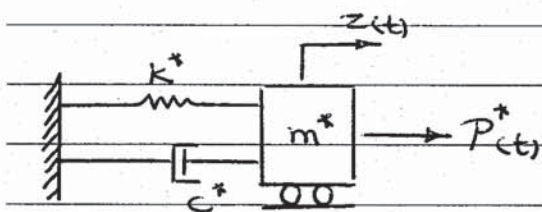
Day:



$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_{A_1} = 0 \Rightarrow K_1 \left(\frac{2}{3} Z - z_1 \right) \times 3a = F_0 \sin \omega t \times 2a \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_{B_2} = 0 \Rightarrow \frac{I_0}{3a} \ddot{Z} + \frac{3}{4} m a \ddot{Z} + K_1 \left(\frac{2}{3} Z - z_1 \right) \times 2a + 3a K_2 Z + \frac{C}{3} \dot{Z} \times a = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1), (2) \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{I_0}{3a^2} + \frac{3m}{4} \right)}_{N^*} \ddot{Z}(t) + \underbrace{\frac{C}{3}}_{C^*} \dot{Z}(t) + \underbrace{3K_2}_{K^*} Z(t) = \underbrace{-\frac{4}{3} F_0 \sin \omega t}_{P^*(t)}$$



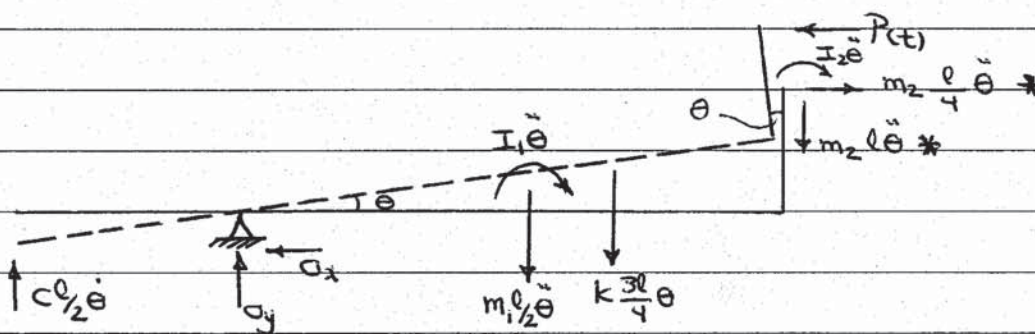
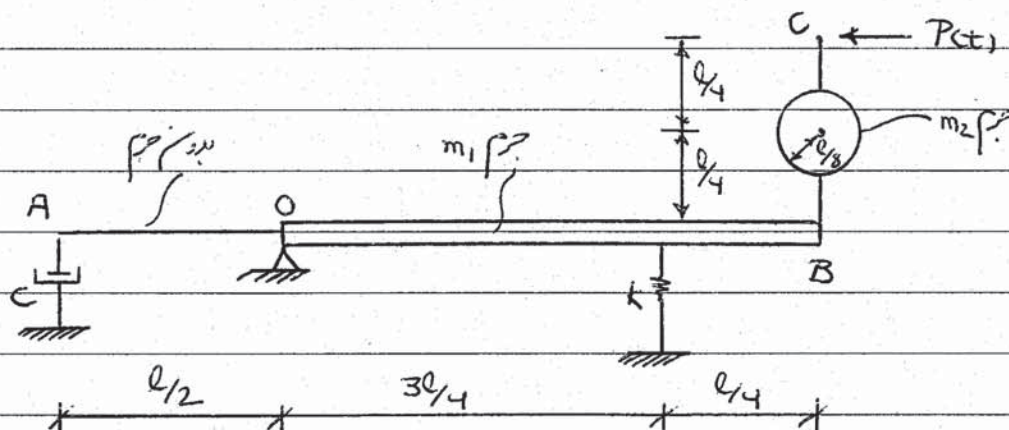
مثال در شکل مقابل در مقابل از یک میله صلب با یک طرف در O و در طرف دیگر از یک طرف
و یک انتهای میله P(t) قرار دارد. در صورتی که میله OB دارای جرم m_1 ، بصورت انحراف
در طول آن یک فنر دایره ای و یک فنر OA ، BC از میله بدول جسم برآورد و یک ورق دایره ای
انحراف m_2 بر روی میله BC متصل باشد. معادله دینامیکی حاکم را بر حسب θ
بنویسید.

Subject:

Year:

Month:

Day:



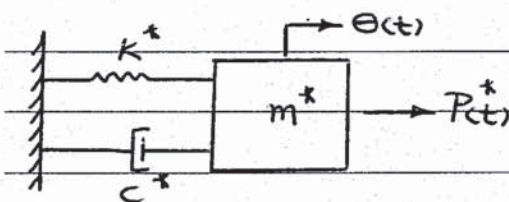
نصب دینام و درایم (اختلاف جهت و انتگرال)

$$\Sigma M_O = 0 \rightarrow (c l/2 \dot{\theta}) \times l/2 + m_1 l/2 \ddot{\theta} \times l/2 + I_1 \ddot{\theta} + (k \times 3l/4 \theta) \times 3l/4 + m_2 l \ddot{\theta} \times l + m_2 l/4 \ddot{\theta} \times l/4 + I_2 \ddot{\theta} = P(t) \times l/2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 l^2 \quad I_2 = \frac{1}{2} m_2 (l/8)^2 = m_2 l^2 / 128$$

$$\rightarrow \left(\frac{m_1 l^2}{3} + \frac{137}{128} m_2 l^2 \right) \ddot{\theta} + \frac{c l^2}{4} \dot{\theta} + \frac{9 k l^2}{16} \theta = P(t) l/2$$

M^* C^* K^* $P^*(t)$

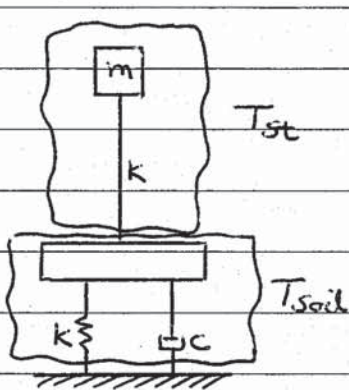


Subject:

Year:

Month:

Day:



$$T_{eq} = ?$$

$$1) T_{eq} = \sqrt{T_{st}^2 + T_{soil}^2}$$

Fema 440 → Soil structure Interaction

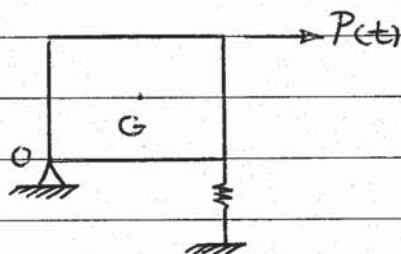
Subject:

YEAR:

MONTH:

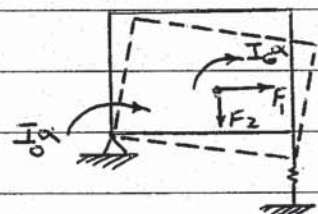
Day:

در این مثال (شکل زیر) درونی موجود دارد.
(۱) درونی خطی در مرکز ثقل به اضافه درونی
درونی در مرکز ثقل

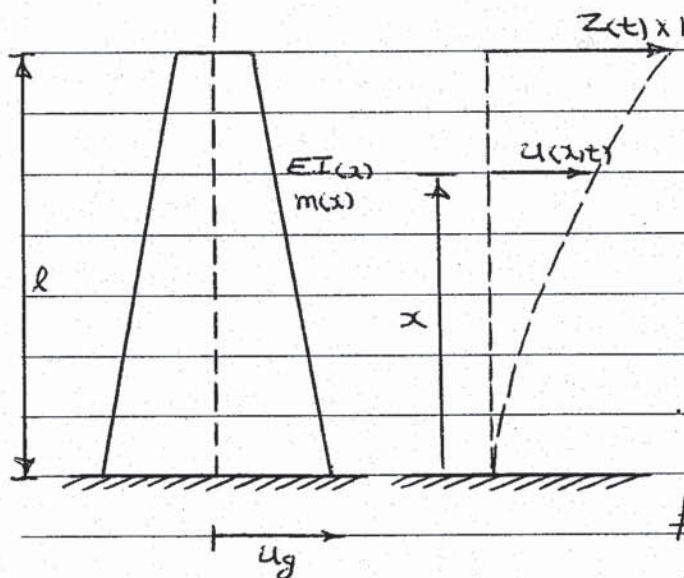


(۲) گسیل درونی در مرکز ثقل در این
$$I_O = I_G + md^2$$

این مثال را حل کنید



رسمه یک درجه آزادی با جرم و منحنی کشش (گفتیم حرکت زمین) ۸



$$u(x,t) = Z(t) \cdot \psi(x)$$

این تابع تغییر شکل

$\psi(l) = 1$
* $\psi(x)$ را به یکی انتخاب می کنیم که فرم تغییر شکل
شبه ختم خود را در بارها باشد

در این مثال تغییر فرم داخلی نیروی لرزه (انرژی) است

$$f_I = -m(x) \cdot \ddot{u}^t(x,t)$$

$$u^t(x,t) = u(x,t) + u_g(t)$$

$$f_I = -m(x) [\ddot{u}(x,t) + \ddot{u}_g(t)]$$

با استفاده از روش کار مجازی داریم ۸

$$\delta W_E = \int_0^l f_I(x,t) \cdot \delta u(x) dx = \int_0^l m(x) \ddot{u}(x,t) \delta u(x) dx$$

$$- \ddot{u}_g(t) \int_0^l m(x) \delta u(x) dx$$

$$\delta W_I = \int_0^l M(x,t) \delta k(x) dx$$

$$M(x,t) = EI(x) \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2}$$

$$\delta k(x) = \delta(u''(x))$$

SAMAND

$$\int_0^l \underbrace{f_I(x,t)}_{\text{نیرو}} \cdot \underbrace{\delta u(x)}_{\text{تغییر مکان}} dx$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$\delta W_I = \int_0^l EI u''(x,t) \cdot \delta u''(x,t) dx$$

$$\begin{cases} u(x,t) = \psi(x) z(t) & \rightarrow \text{مقیاس ثابت بر حسب مکان} \\ \ddot{u}(x,t) = \psi(x) \ddot{z}(t) & \rightarrow \text{مقیاس ثابت بر حسب زمان} \end{cases}$$

$$\delta u(x,t) = \psi(x) \delta z, \quad \delta(\ddot{u}(x,t)) = \psi(x) \delta \ddot{z}$$

$$\delta W_E = -\delta z \left[\ddot{z} \int_0^l m(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{u}_g(t) \int_0^l m(x) \psi(x) dx \right]$$

$$\delta W_I = \delta z \left[z \int_0^l EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \right]$$

$$\delta W_E = \delta W_I \Rightarrow \ddot{z} \int_0^l m(x) (\psi(x))^2 dx + z \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx + \ddot{u}_g(t) \int_0^l m(x) \psi(x) dx = 0$$

$$M^* = \int_0^l m(x) (\psi(x))^2 dx$$

$$K^* = \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx$$

$$L^* = \int_0^l m(x) \psi(x) dx \quad L^* \ddot{u}_g(t) = P^*(t)$$

$$M^* \ddot{z}(t) + K^* z(t) + L^* \ddot{u}_g(t) = 0 \rightarrow M^* \ddot{z}(t) + K^* z(t) = -L^* \ddot{u}_g(t)$$

مثال: مطابق شکل برج خنجرهای در طول l در حجم واحد طول m و سختی خمشی EI مفروض است. با فرض تابع شکل $\psi(x) = 1 - C_1 \frac{\pi x}{2l}$ ، رابطه حرکت سیستم را تحت تحریک زلزله بدست آورده، فرکانس طبیعی آن را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} M^* &= m \int_0^l (\psi(x))^2 dx = m \int_0^l \left(1 - C_1 \frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = 0.227 ml \\ K^* &= EI \int_0^l (\psi''(x))^2 dx = EI \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{4l^2}\right)^2 C_1^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{3.04 EI}{l^3} \end{aligned}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

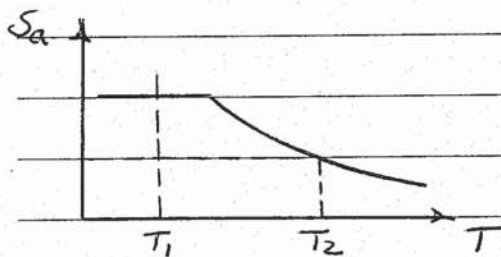
$$L^* = \int_0^l m(x) \psi(x) dx = \int_0^l m(1 - C_1 \frac{\pi x}{2l}) dx = 0.363l$$

$$0.227 ml \ddot{z}(t) + 3.04 \frac{EI}{l^3} z(t) = -0.363 ml \ddot{u}_g(t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{3.04 \frac{EI}{l^3}}{0.227 ml}} = \frac{3.66}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

نصف 4٪

$$\omega_{exact} = \frac{3.516}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \rightarrow (\text{اعداد محاسبه شده برای نرم})$$

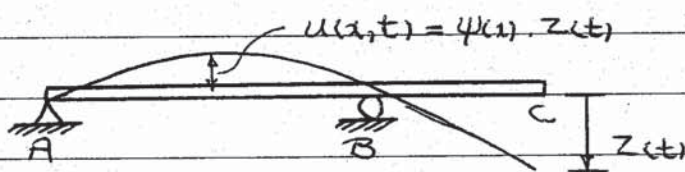


* بازتاب کردن زمان شتاب بندی را که بازه دریافت می کند کاهش می یابد. اینج کار را با جد کردن فرکانس های ای می دهند (Base Isolation). با استفاده از این سیستم بازه در صلبت محض می باشد و دیگر انتظاری نمی باشد. نتیجه را هم نداریم.

روابط زمانی برای مشخصات کلی دستگاه های درجه آزادی و

شرایط انتخاب تابع

می خواهم تابع را تعیین کنم



برای تعیین این تابع توزیع شرط

مرزی داریم و

(1) شرایط مرزی هندسی و

(2) شرایط مرزی طبیعی و

$$\psi(A) = \psi(B) = 0$$

$$\begin{cases} M(A) = 0 \rightarrow \psi''(A) = 0 \\ M(C) = 0 \rightarrow \psi''(C) = 0 \\ V(C) = 0 \rightarrow \psi'''(C) = 0 \end{cases}$$

پس اولویت به صورت زیر است و

شرط مرزی هندسی ← شرط مرزی طبیعی ← فرم تغییر شکل یافته برپای تجربه

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

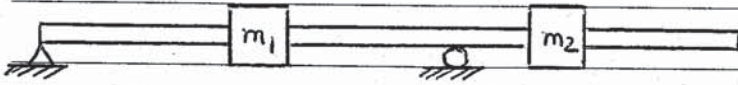
Subject:

YEAR:

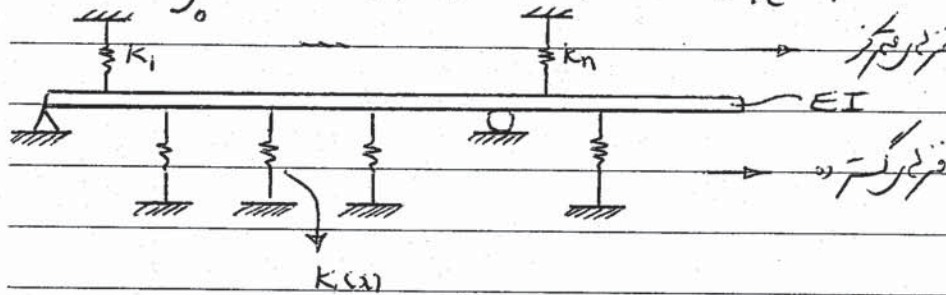
MONTH:

Day:

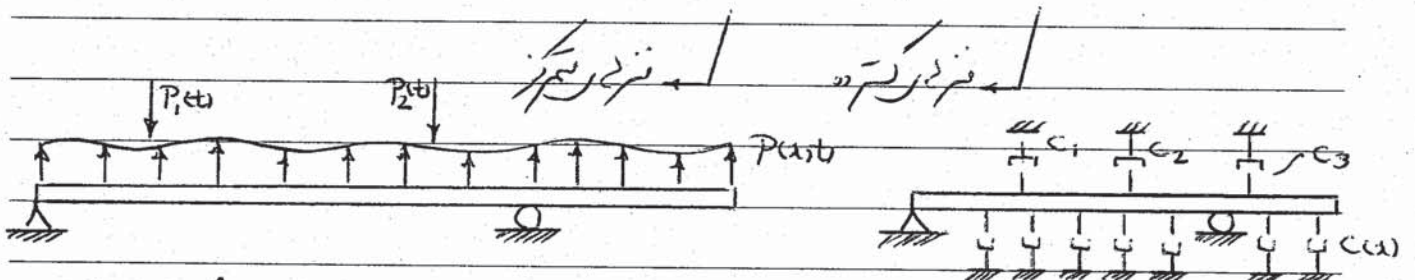
$$M^* \ddot{Z} + C^* \dot{Z} + K^* Z = P^*(t)$$



$$M^* = \int_0^l m(x) (\psi(x))^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 + \sum I_{oi} (\psi_i')^2$$



$$K^* = \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx + \sum K_i \psi_i^2 + \int_0^l K(x) (\psi(x))^2 dx$$



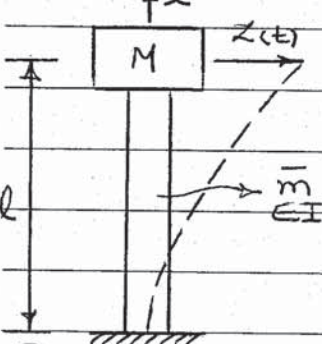
$$P^*(t) = \int_0^l P(x,t) \psi(x) dx + \sum P_i \psi_i \quad C^* = \int_0^l c(x) (\dot{\psi}(x))^2 dx + \sum c_i \dot{\psi}_i^2$$

$$\ddot{p} = -m \ddot{u}_g(t)$$

$$P^*(t) = -\ddot{u}_g(t) \left(\int_0^l m(x) \psi(x) dx + \sum m_i \psi_i \right)$$

مثال: دستگاهی در این مثال بررسی می‌کنیم. صیغی است در صورتی که یک جرم m در یک سیستم است. این صیغی برای یک جرم قرار دارد که دارای حجم $\bar{m}$ است و در یک سیستم است. این صیغی برای یک جرم قرار دارد که دارای حجم $\bar{m}$ است و در یک سیستم است.

برای محاسبات می‌توانیم صیغی صیغی در یک سیستم قرار دهیم. برای محاسبات می‌توانیم صیغی صیغی در یک سیستم قرار دهیم. برای محاسبات می‌توانیم صیغی صیغی در یک سیستم قرار دهیم.



$$M = \bar{m}l$$

* Fema 440 → Soil Structure Interaction *

Subject:

Year:

Month:

Day:

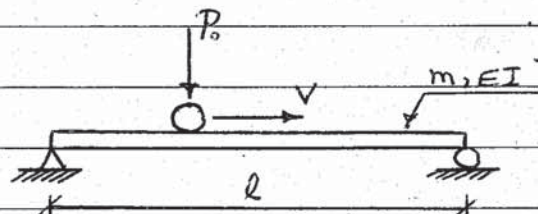
$$M^* = \underbrace{\bar{m}l (\psi(l))}_{\text{حرکت سر}} + \underbrace{\bar{m} \int_0^l (1 - \cos \frac{\pi x}{2l})^2 dx}_{\text{حرکت آزاد}} = \frac{\bar{m}l}{2\pi} (5\pi - 8)$$

$$K^* = \int_0^l EI \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2l} \right) dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{l^3} = 3.04 \frac{EI}{l^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^l \bar{m} \ddot{u}_g(t) \psi(x) dx = \bar{m}l \ddot{u}_g(t) = 2(1-\pi) \ddot{u}_g(t) \frac{l}{\pi}$$

$$\text{معادله در سازه} \left[\frac{\bar{m}l}{2\pi} (5\pi - 8) \right] \ddot{z}(t) + \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{l^3} z(t) = - \frac{2(\pi-1)}{\pi} \bar{m}l \ddot{u}_g(t)$$

مثال: یک پل (صاف ساده دارای یک تکیه ای به طول l و عرض ای با مقطع ثابت با حجم m بر هر طول و صلبیت خمشی EI می باشد. مطابق شکل زیر جریح با فزون P_0 و سرعت v از چپ حرکت اری می تری باشد. با صرف نظر کردن از عرض ای و فرض ایند $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$ باشد، معادله حکم برتر را با توجه به اطلاعات داده شده بیان نماید.



$$* \int_0^l P_0 \delta(x-vt) \sin \frac{\pi x}{l} dx = P_0 \sin \frac{\pi vt}{l}$$

$$M^* = \int_0^l m \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{ml}{2}$$

$$K^* = \int_0^l EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 EI}{2l^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \omega_{\text{exact}}$$

$$P(x,t) = \begin{cases} P_0 \delta(x-vt) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

$\delta(x) = 1$

$t_d = \frac{l}{v}$ زمان عبور جریح از تکیه

$$P^*(t) = \int_0^l P(x,t) \psi(x) dx = \int_0^l P_0 \delta(x-vt) \sin \frac{\pi x}{l} dx = P_0 \sin \frac{\pi vt}{l}$$

$$\Rightarrow P^*(t) = \begin{cases} P_0 \sin \frac{\pi vt}{l} = P_0 \sin \frac{\pi t}{t_d} & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

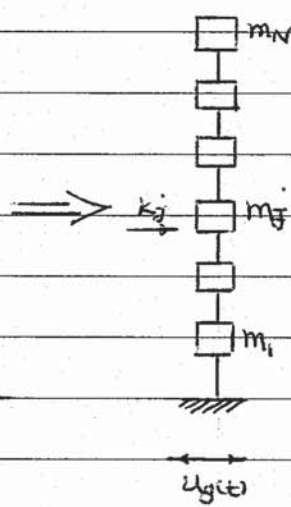
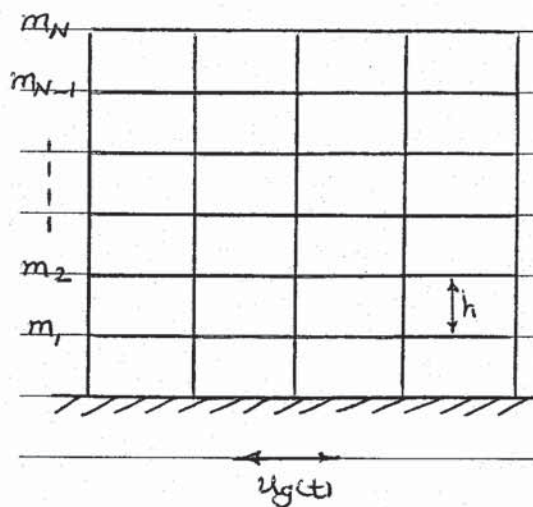
Subject:

YEAR:

MONTH:

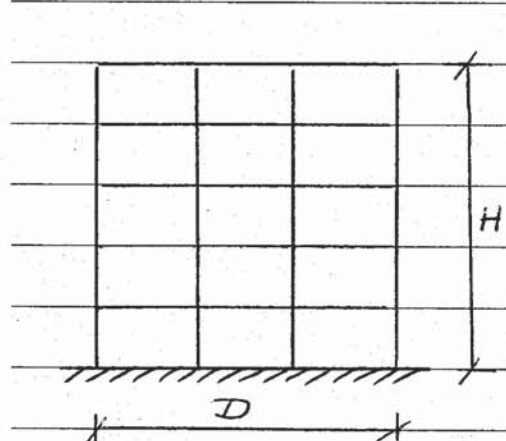
Day:

سیستم با جرم در مرکز - قاب دی برشی و



$$k_j = \frac{12EI}{h^3}$$

$$\begin{cases} N^* = \sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2 \\ K^* = \sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 \\ L^* = \sum_{j=1}^N m_j \psi_j \end{cases}$$

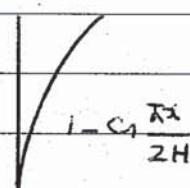
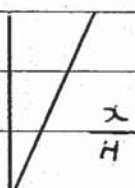
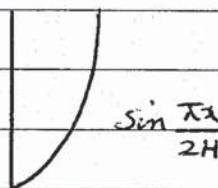


$$\begin{cases} \frac{H}{D} < 1.5 & \text{سازگرنه} \\ 1.5 < \frac{H}{D} < 3 & \text{سازگرنه} \\ \frac{H}{D} > 3 & \text{سازگرنه} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{2H}$$

$$\psi(x) = \frac{x}{H}$$

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2H}$$



$$\delta W_E = \sum_{j=1}^N f_{Ij} \delta u_j = - \sum_{j=1}^N m_j \ddot{u}_j(t) \delta u_j = \ddot{u}_g(t) \sum_{j=1}^N m_j \delta u_j$$

$$\delta W_I = \sum_{j=1}^N V_j(t) (\delta u_j - \delta u_{j-1}) \rightarrow K^* \Delta \psi$$

مثال: قاب دو طبقه ۶-۱. خواص آن داده شده در شکل با تیرهای صلب است. اثر حرکت زمین، ثابت ب. قاب و در در جرم سقف m ، ارتفاع طبقات h ، صلبیت طبقات K می باشد. تغییر مکان جانبی طبقات از پایه بصورت خطی فرض شده و این فرض را با طرح حرکت

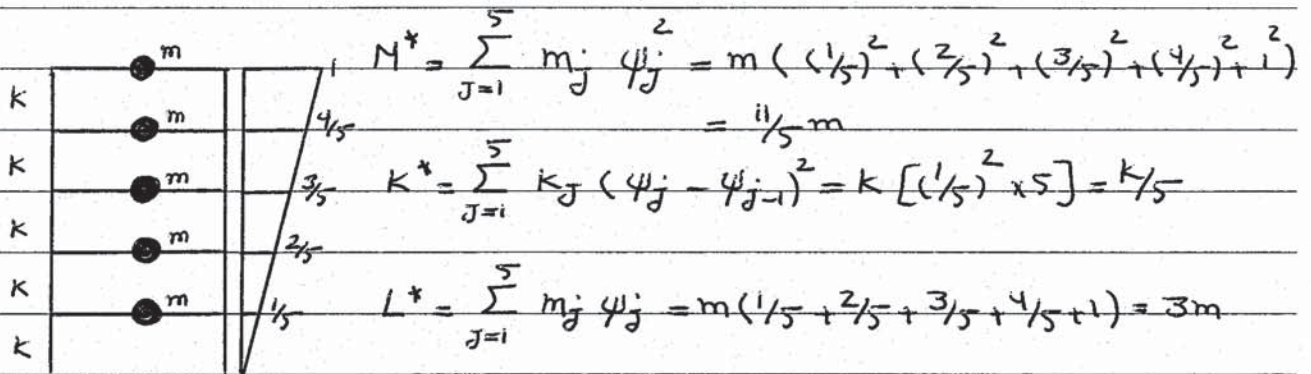
Subject:

Year:

Month:

Day:

برای این سستم را به دست آورده و فرکانس طبیعی آن را تعیین کنید



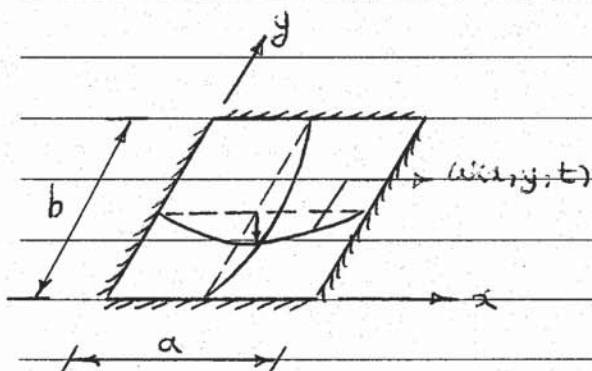
$$\frac{11}{5} m \ddot{z}(t) + \frac{K}{5} z(t) = -3m \ddot{u}_g(t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{K/5}{11/5 m}} = 0.302 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

خطای 6٪

$$\omega_{exact} = 0.2851 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

تعیین مشخصات کلی دستگاه در یک درجه آزادی برای صفحات 8



$$w(x, y, t) = z(t) \psi(x, y)$$

$$M^* = \int_0^b \int_0^a m(x, y) [\psi(x, y)]^2 dx dy + \sum m_i \psi_i^2$$

$$K^* = D \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

ν و E ضریب پواسون

E و ν مدول الاستیته

D و ضریب خمشی

و ضریب مقاومت

$$P^*(t) = \int_0^b \int_0^a p(x, y) \psi(x, y) dx dy + \sum P_i \psi_i$$

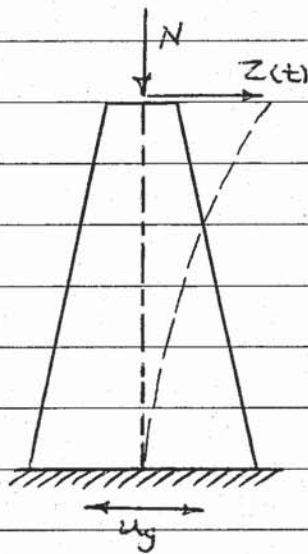
Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

محاسبه بار بحرانی



$$\delta W_I = \delta W_E$$

$$\delta W_I = \int_0^l N(x, t) \delta k(x) dx$$

$$\delta W_I = \delta Z \left[Z \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx \right]$$

$$\delta W_E = -\delta Z \left[\ddot{z} \int_0^l m(x) (\psi(x))^2 dx + \ddot{u}_g(t) \int_0^l m(x) \psi(x) dx - ZN \int_0^l (\psi'(x))^2 dx \right]$$

$$\delta W_E = \delta W_I \Rightarrow N^* \ddot{z}(t) + K^* z(t) = P^*(t)$$

$$N^* = \int_0^l m(x) (\psi(x))^2 dx$$

$$\bar{K}^* = K^* - K_G^*$$

$$K^* = \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx$$

$$K_G^* = N \int_0^l (\psi'(x))^2 dx$$

K^* : سختی کل
 K_G^* : سختی جانبی
 $\bar{K}^*$: سختی طرایی

$$\bar{K}^* = K^* - K_G^* = 0 \Rightarrow \int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx = N_{cr} \int_0^l (\psi'(x))^2 dx$$

$$N_{cr} = \frac{\int_0^l EI(x) (\psi''(x))^2 dx}{\int_0^l (\psi'(x))^2 dx}$$

مثال: برای برج آبریز مثال قبل مطلوب تعیین N_{cr}

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$$

$$\bar{K}^* = K^* - K_G^*$$

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$$

Subject:

YEAR: MONTH: Day:

$$K_G^* = N \int_0^l (\psi'(x))^2 dx = N \int_0^l \left(\frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 N}{8l}$$

$$K^* = K - K_G^* = 0 \Rightarrow \frac{\pi^4 EI}{32l^3} - \frac{N \pi^2}{8l} = 0 \Rightarrow N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

مثال: برابر مثال قبل اگر $\psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یا از فرم کلیتر $\psi(x) = \frac{1}{2l^3} x^3 + \frac{3}{2l^2} x^2$ را بپذیریم.

$$x(0, t) = x'(0, t) = 0 \Rightarrow \psi(0) = 0, \psi'(0) = 0 \Rightarrow c, d = 0 \quad (1)$$

$$\psi(l) = 1 \Rightarrow al^3 + bl^2 = 1 \quad (2)$$

$$M(l, t) = 0 \Rightarrow x''(l) = 0 \Rightarrow \psi''(l) = 0 \Rightarrow 6al + 2b = 0 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{2l^3} x^3 + \frac{3}{2l^2} x^2$$

$$K^* = \int_0^l EI (\psi'')^2 dx = \frac{9EI}{l^4} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx = \frac{3EI}{l^3}$$

$$K_G^* = N \int_0^l (\psi'(x))^2 dx = N \int_0^l \left(-\frac{3}{2} \frac{x^2}{l^3} + \frac{3x}{l^2} \right)^2 dx = \frac{6N}{5l}$$

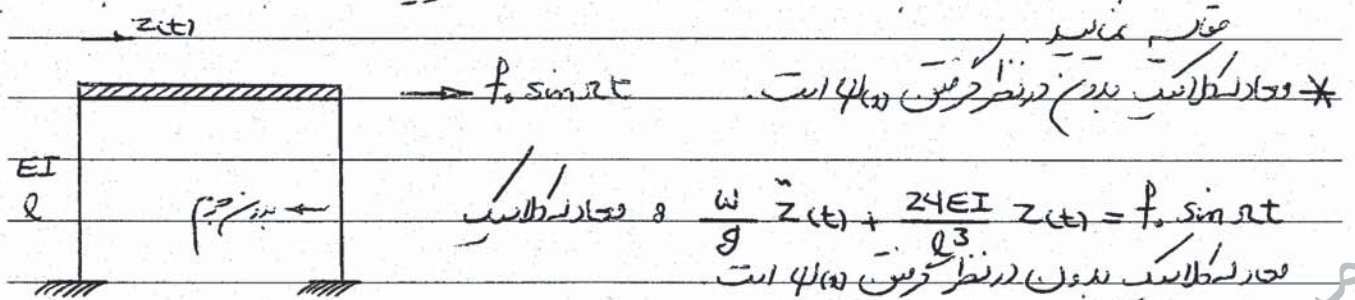
$$K^* = K_G^* \Rightarrow N = N_{cr} = 2.5 \frac{EI}{l^2} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

* این نامه ۱۳۹ نیروی بار طرأی عمادی است.

مثال: قات نشان داده شده در تصویر را در نظر گرفته مطلوب است:

الف) معادله ارتعاش سقف را فرض $\psi(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi x}{l})$ را بپذیریم و برده و با معادله طرأی آن معادله کنید. از اثر نیروی محوری در محاسبات صرف نظر کنید.

ب) بار عمودی $F \sin \omega t$ را در نظر گرفته نشان داده شده تعیین کرده و با معادله ارتعاش $z(t)$ معادله طرأی بدین فرم فرض $\psi(x)$ است.



$$M^* = \int_0^l m(x) (\psi'(x))^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 = \frac{\omega}{g} (\psi(1)) = \frac{\omega}{g}$$

SAHAND

حمید کاظمی

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$K^* = \int_0^l EI (\psi''(x))^2 dx = 2EI \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 C_1^2 \left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} = 24.35 \frac{EI}{l^3}$$

$$P^*(t) = \sum P_i \psi_i = f_0 \sin \pi t \quad \psi(x) = f_0 \sin \pi t$$

$$M \ddot{z}(t) + K^* z(t) = P^*(t)$$

$$\rightarrow \frac{W}{g} \ddot{z}(t) + 24.35 \frac{EI}{l^3} z(t) = f_0 \sin \pi t$$

$$K_G^* = N \int_0^l (\psi'(x))^2 dx = W \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{W \pi^2}{8l}$$

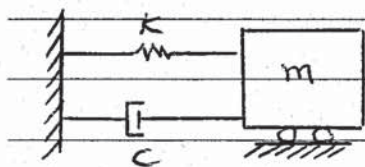
$$K^* = K_G^* \rightarrow \frac{\pi^4 EI}{4l^3} - \frac{W \pi^2}{8l} = 0 \rightarrow W = W_{cr} = \frac{2 \pi^2 EI}{l^2}$$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{بار بحرانی} \rightarrow \frac{2 \pi^2 EI}{l^2}$$

این درجه بحرانی است و با P برابر شد این تیر شروع به خم شدن می‌کند و تابع ψ (شکل است) را می‌بینیم.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta < 0.1 & \rightarrow P = \Delta \text{ هیچ تغییری ندارد} \\ 0.1 < \theta < \theta_{max} & \rightarrow \text{اثر } P = \Delta \text{ لحاظ شود} \\ \theta > \theta_{max} & \rightarrow \text{حدود بحرانی شود} \end{array} \right.$$

۱) پاسخ سیستم یک درجه آزادی تحت اثر ارتعاش آزاد:



$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

$$\rightarrow x = x_e(t) + x_p(t)$$

$x_e(t)$: جواب عمومی ارتعاش آزاد

$x_p(t)$: جواب خصوصی ارتعاش اجباری

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

الف) ارتعاش آزاد بدون میرایی

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array} \right. \rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Subject:

YEAR:

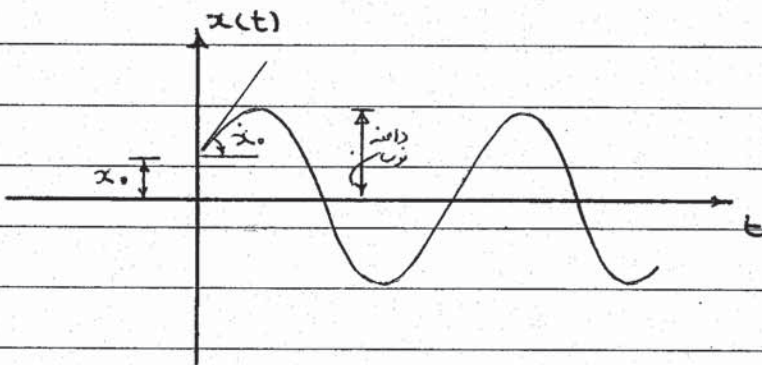
MONTH:

Day:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \cos(\omega t - \theta) \end{cases} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}$$

دامنه نوسان



ب) ارتعاش آزاد با میرایی

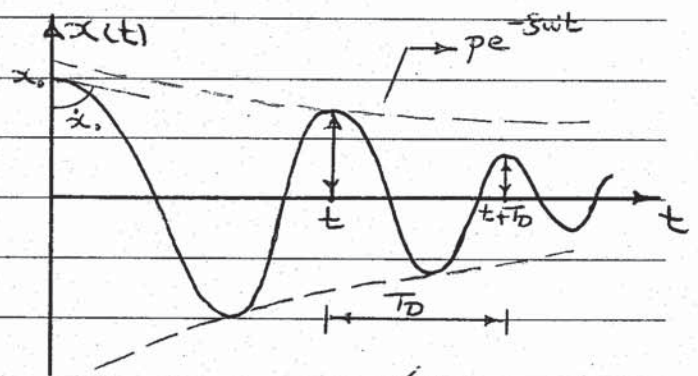
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$t = 0 \rightarrow x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$$

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right]$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega}$$

سازه فولاد $3\% < \xi < 5\%$
سازه بتنی $5\% < \xi < 7\%$
سازه لرزه‌ای $10\% < \xi < 15\%$



سیستم کمی وجود دارد میرایی سیستم را بالا ببرد. این سیستم کم میرایی را تا $\xi = 0.5$ بالایی برد

سیستم به محض محل هم‌رنگی میرایی کم تغییر می‌کند.

Subject:

YEAR:

MONTH:

DAY:

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right) & \text{اسکلی} \\ \frac{1}{2n\pi} \ln\left(\frac{x_k}{x_{k+n}}\right) & \text{نسکلی} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_n = x_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n$$

روش تزلزل گارنتی

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} \left[x_0 c_1 \omega_d t + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right]$$

$$x(t+T_D) = e^{-\xi \omega (t+T_D)} \left[x_0 c_1 \omega_d (t+T_D) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d} \right) \sin \omega_d (t+T_D) \right]$$

$$\frac{x(t)}{x(t+T_D)} = e^{\xi \omega T_D} = e^{\frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{x(t)}{x(t+T_D)} = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi \xi$$

روش نیم دایره

$$x_{i+N} = \frac{1}{2} x_i \rightarrow x_j = \frac{1}{2} x_i \rightarrow \frac{x_i}{x_j} = 2$$

$$\frac{x_i}{x_j} = 2 = e^{\xi \omega N T_D} \Rightarrow \ln 2 = \xi \omega N T_D$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{0.11}{N}$$

اگر عدد از N برپایه دایره نوبت نصف شود نسبت میرایی از رابطه بالا بدست می آید و این روش بر عدت نسبت سه برابر می آید برپایه نصف کاهش می یابد.

$$10\% < \xi < 20\%$$

مثال: قاب زان داده شده در تصویر تحت اثر نیروی 20000 kg در فاصله 1 cm حرکت کرده پس از آن می شود تا شروع به ارتعاش کند و در حالت میرایی 0.8 در آنجا می ماند. ضایع زمانی تفاوت ارتعاش 1.55 باشد. ضایع جانبی، نسبت انتقال در دایره ارتعاش را عدد از 0.8 در ارتعاش تعیین کنید.

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{20000}{1} = 20,000 \text{ kg/cm}$$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = 2\pi \xi \rightarrow \ln \frac{1}{0.8} = 2\pi \xi \rightarrow \xi = 3.5\%$$

نیروی لرزه‌ای در فونیک به نیروی اطلاق می‌شود که با تابع $P(t) = P_0 \sin \omega t$ یا $P_0 C_1 \omega t$ تعریف شود که در آن P_0 دامنه یا مقدار اثر نیرو و ω فرکانس تحریک یا فرکانس نیرو می‌باشد.

Subject:

Year:

Month:

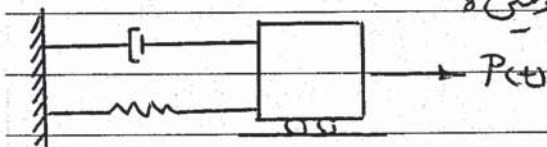
Day:

$$\frac{x_7}{x_1} = e^{-\xi \omega N T_D} \quad (\xi = 3.5\%, N = 6, T_D = 1.5s)$$

$$\omega = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{T_D \sqrt{1-\xi^2}} = 4.192 \text{ rad/sec}$$

$$\frac{x_7}{x_1} = e^{-0.035 \times 4.192 \times 6 \times 1.5} = 0.262 \text{ cm}$$

۲) پاسخ سیستم یک درجه آزادی تحت اثر ارتعاش اجباری لرزه‌ای است



الف) ارتعاش اجباری بدون میرایی

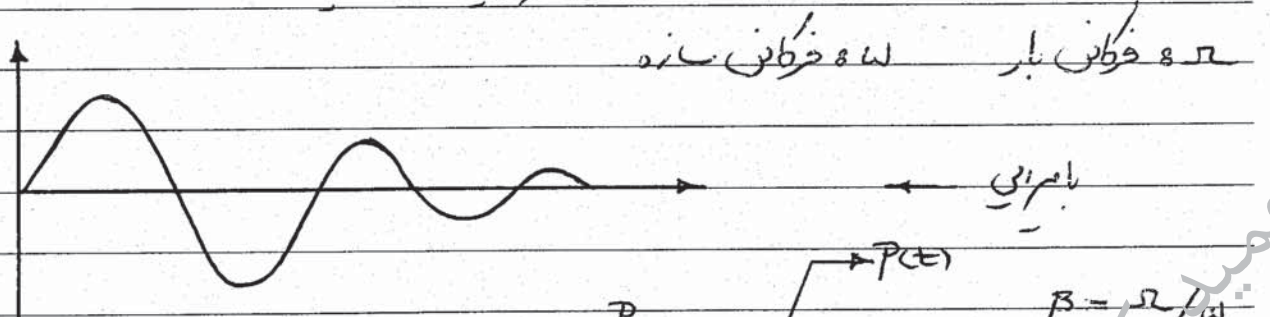
$$m\ddot{x} + kx = P(t) = P_0 \sin \omega t \text{ یا } P_0 C_1 \omega t$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \rightarrow \begin{cases} x_c(t) = A \sin \omega t + B C_1 \omega t \\ x_p(t) = D \sin \omega t \text{ یا } D C_1 \omega t \end{cases}$$

$$m \ddot{x}_p(t) + k x_p(t) = P_0 \sin \omega t \rightarrow D = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

* اگر بار P_0 بصورت استاتیکی باشد $x_{st} = \frac{P_0}{k}$
 * اگر بار $P_0 \sin \omega t$ بصورت دینامیکی باشد جواب اندر میرایی داشته باشیم بصورت زیر می‌آید
 $x_d = D = \frac{P_0/k}{1-\beta^2}$

$$\text{ضرب زلزله‌ای} = \frac{\text{مقدار تغییر مکان زلزله‌ای}}{\text{مقدار تغییر مکان استاتیکی}} = \frac{\frac{P_0/k}{1-\beta^2}}{P_0/k} = \frac{1}{1-\beta^2}$$



$$x(t) = A \sin \omega t + B C_1 \omega t + \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \omega t$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

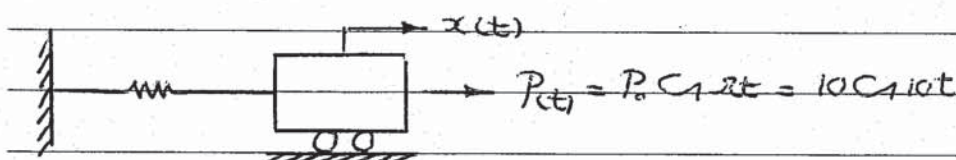
Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

مثال در ستون آن داده شده در شکل کت نام بارگذاری جابجایی $P_0 \sin \omega t$ قرار دارد
در صورتی که فن دارای سختی 40 N/cm و 98.1 N باشد نام سیستم از حالت سکون شروع
به حرکت نماید $(x = x(0) = 0)$ تغییر مکان در ستون را بصورت تابعی از زمان بدست
آورید.



حالت اجباری نامرئی داریم

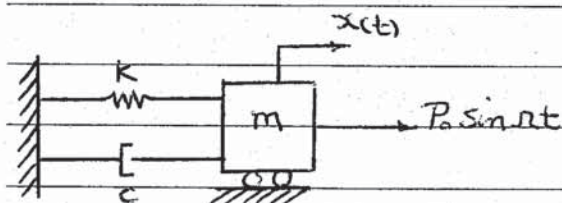
$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0/k}{1-\beta^2} \sin \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{\frac{98.1}{9.81}}} = 20 \quad \sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{N/m/s}^2}}$$

$$x_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{10}{40} = 0.25 \text{ cm} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0.5$$

$$\begin{cases} \text{اگر شرط اولیه} \Rightarrow x(0) = 0 \Rightarrow B + \frac{P_0/k}{1-\beta^2} = 0 \Rightarrow B = \frac{0.25}{1-0.5^2} = 0.33 \\ \text{اگر شرط اولیه} \Rightarrow \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t - \frac{P_0/k}{1-\beta^2} \omega \sin \omega t \\ \Rightarrow \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{P_0/k}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \cos \omega t) = \underbrace{0.33 \sin 20t}_{\text{نامرئی}} + \underbrace{0.33 \cos 20t}_{\text{نامرئی}}$$



(ب) ارتعاش اجباری با میرایی

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) = P_0 \sin \omega t \quad | \quad P_0 \sin \omega t$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \rightarrow \begin{cases} x_c(t) = e^{-\zeta \omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) \\ x_p(t) = M \sin \omega t + N \cos \omega t \end{cases}$$

با بارگذاری در صورتی که تغییر مکان را بدست آوریم

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$M = \frac{P_0}{k} \left[\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]$$

$$N = \frac{P_0}{k} \left[\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_d t + B C_1 \omega_d t] + \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \omega t - 2\xi\beta C_1 \omega t]$$

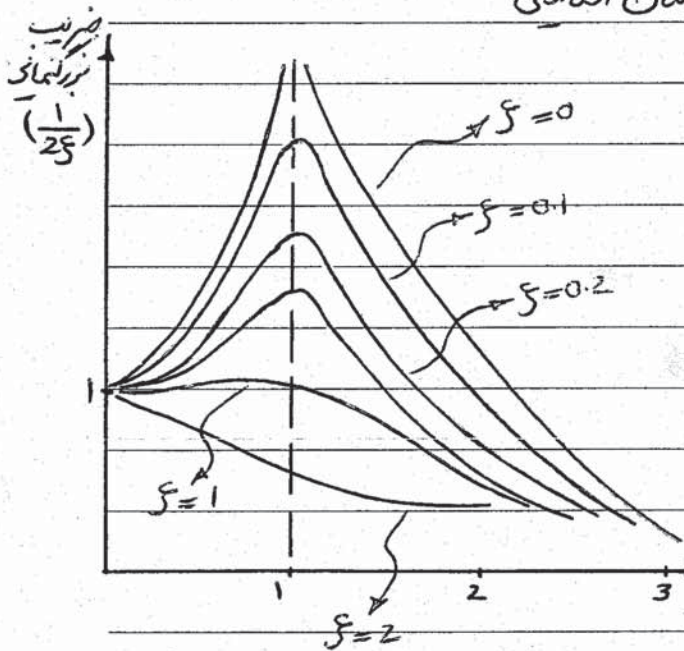
این قسمت قابل صرف نظر کردن است

$$x(t) = x_p(t) = L \sin(\omega t - \alpha)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right)$$

$$L = \frac{P_0}{k} \left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-1/2}$$

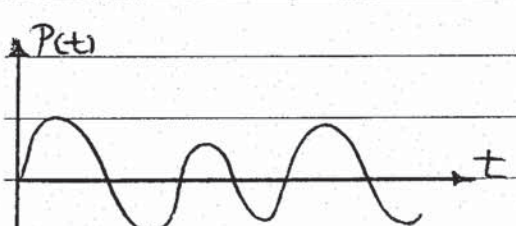
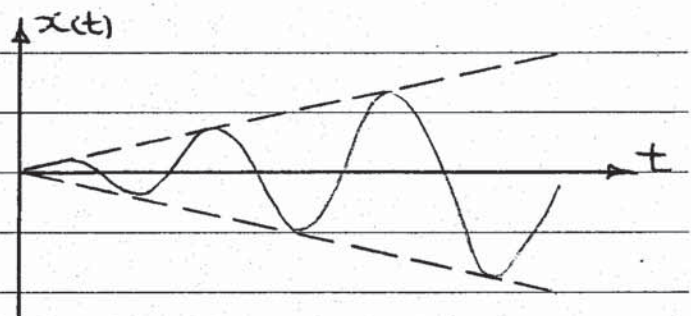
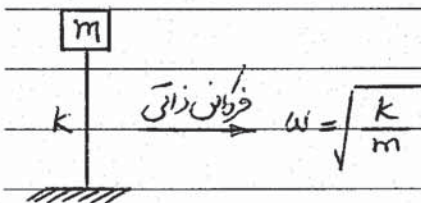
ضرب زینتی = $\frac{\text{مداثر تغییر مکان دینامیکی}}{\text{مداثر تغییر مکان ایستاتی}} = \frac{L}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$



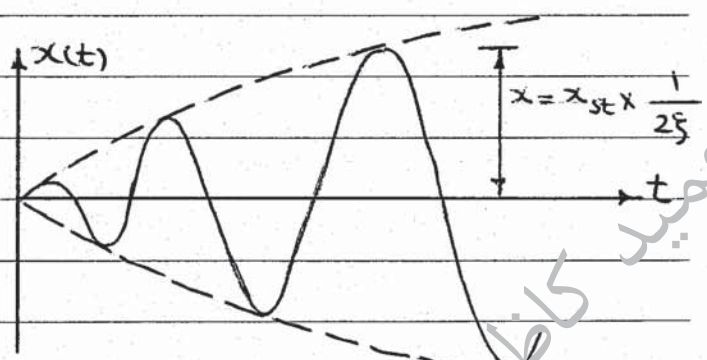
در حالت بدون میرایی وقتی $\beta=1$ شود شدید
بخشی دصعد. در حالت با میرایی شدید در $\beta=1$
اتفاق می افتد و مقدار کمی شیب پیدا می کند

$\beta=1 \rightarrow \text{ضرب زینتی} = \frac{1}{2\xi}$

فروتنی سازه = فروتنی ای بار یعنی



$P(t) = \sin \omega t \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = 1$



سوال ۶ قبل

8

→ K ($\frac{\text{kg}}{\text{cm}}$)

سوال ایسا

Wm
30

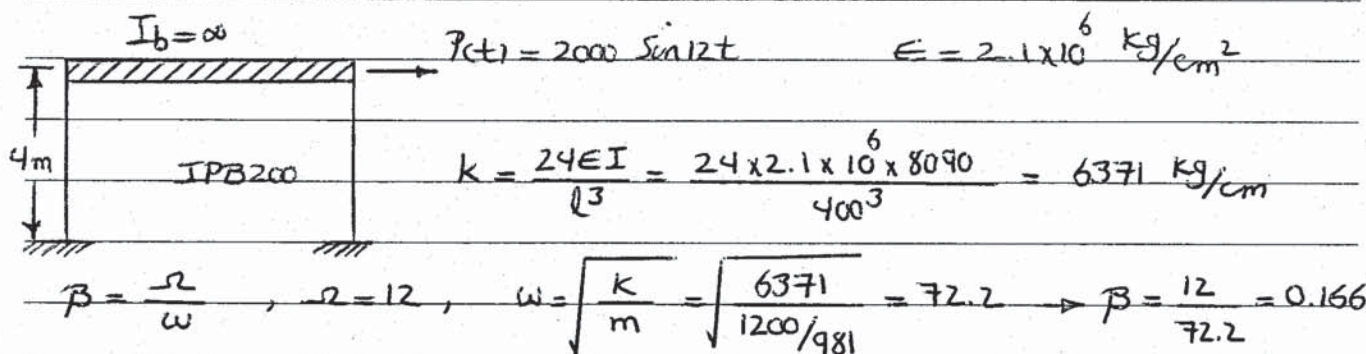
MONTH: $\sqrt{\frac{1 \text{ g/m}}{2 \text{ cm}}}$ DAY: 21

YEAR:

MONTH:

DAY: 32

مثال: قاب فولادی (ن) داده شده در شکل از دو ستون IPB200 با میان انبر 8090 cm^4 و ترافق بهار صلب شکل شده است. نیروی افقی $P_{ct1} = 2000 \text{ Sin } 12^\circ$ در تراز تیر قاب وارد می شود. اگر وزن تیر فولادی قاب برابر 1200 N باشد و در محاسبه باید از دستگاه در دو حالت بدون میرایی و با میرایی $\lambda = 5$ و نسبت α و β



$\xi = 0 \rightarrow x(t) = \frac{P_0/k}{1-\beta^2} \sin \omega t$ (الف) بدون مِزْأَلِي

$$\rightarrow x(t) = \frac{2000/6371}{1 - (0.166)^2} \times \sin 12t \rightarrow x(t) = 0.322 \sin 12t$$

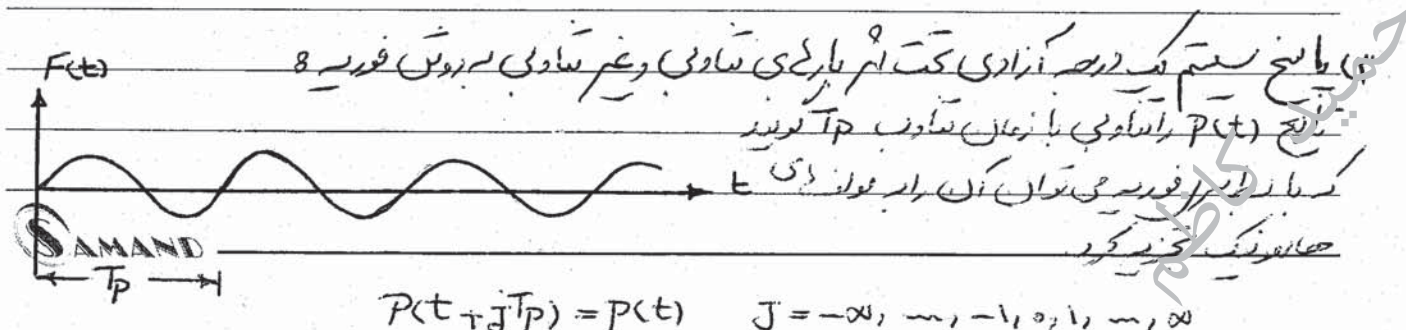
(ف) نامی ۵

$$s = 5j \rightarrow x(t) = \frac{P_0}{K} \times \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \times \left[(1-\beta^2) \sin \omega t - 2\zeta\beta \cos \omega t \right]$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{2000}{6371} \times \frac{1}{(1-0.166^2)^2 + (2 \times 0.05 \times 0.166)^2} \left[(1-0.166^2) \sin \omega t - 2 \times 0.05 \times 0.166 C_d \omega t \right]$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = 0.3138 \sin 12t - 5.356 \times 10^{-3} C_{12} t$$

انواع سقف (۱) صلب (۲) نیمه صلب (۳) انقطاع پذیر
 اگر سقف صلب باشد تحت شرایطی این نام به اجاره تکمیل (نوع دیگری می رسد و دی آنم سقف انقطاع
 پذیر باشد این نام به مردم می گذارند تکمیل (نوع دیگری انجام می برد) سقف نیمه صلب در این نام 2800
 بحث شده است ولی در این نام به بسیاری نرودی شده است



تابع تناوبی تابعی است که مستقی از آن که در محدوده زمانی T_p تعریف شده است، در صورت نامحدود تکرار گردد. اغلب نیروی دینامیکی در صورت تناوبی و یا ترکیبی تناوبی می باشد.

Subject:

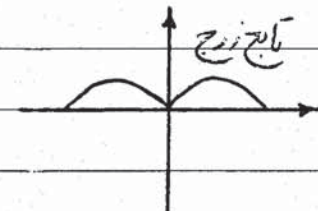
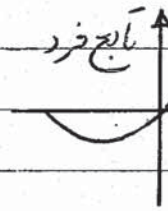
Year: Month: Day:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \quad \text{سری فوری}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) dt$$

T_p زمان تناوب بارگذاری

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \cos \frac{2n\pi}{T_p} t dt$$



$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \sin \frac{2n\pi}{T_p} t dt$$

$$\begin{cases} F(-t) = -F(t) \Rightarrow \text{اگر تابع فرد باشد} \\ F(t) = F(t) \Rightarrow \text{اگر تابع زوج باشد} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_n = 0, b_n \neq 0 \\ a_0, a_n \neq 0, b_n = 0 \end{cases}$$

$$a_0 \rightarrow x(t) = \frac{a_0}{k}$$

$$b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \rightarrow x(t) = \frac{b_n/k}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left[(1-\beta_n^2) \sin \frac{2n\pi}{T_p} t + 2\xi\beta_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \right]$$

$$\beta_n = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{2n\pi/T_p}{\omega}$$

$$a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \rightarrow x(t) = \frac{a_n/k}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left[2\xi\beta_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t + (1-\beta_n^2) \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \right]$$

جواب کلی

$$x(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left[(a_n \times 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)) \sin \frac{2n\pi}{T_p} t + (a_n(1-\beta_n^2) - b_n \times 2\xi\beta_n) \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \right] \right] \quad \beta_n = \frac{n\omega}{\omega}$$

$$\xi = 0 \rightarrow x(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\beta_n^2} (a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t) \right]$$

$$\begin{cases} \int \sin ax dx = -1/a \cos ax \\ \int \cos ax dx = 1/a \sin ax \end{cases}$$

$$1) \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$2) \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$3) \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

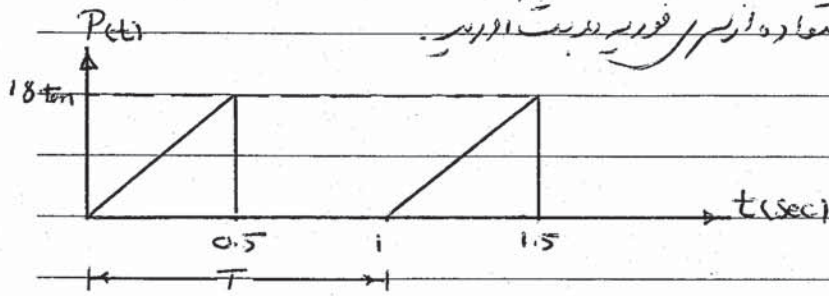
Subject:

Year:

Month:

Day:

مثال ۳ بارگذاری زلزله داده شده را با استفاده از سیر فوریه بدست آورید.



تابع زلزله است و نه فرکانس

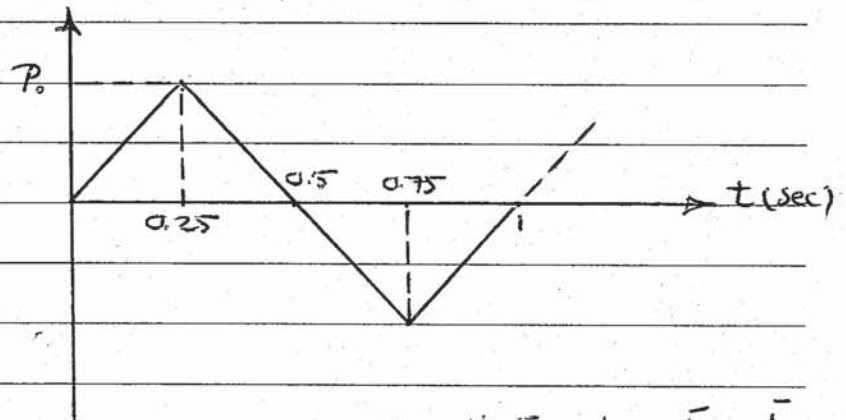
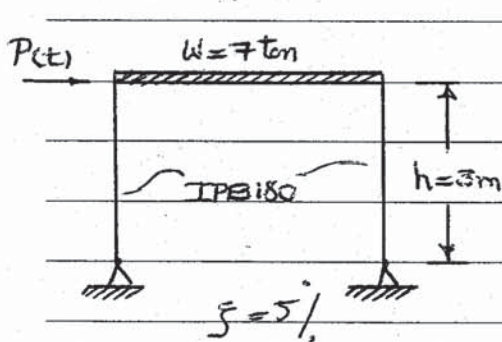
$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt = \frac{1}{1} \int_0^1 \frac{18}{0.5} t dt = 4.5$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \cos \frac{2n\pi t}{T_p} dt = \frac{2}{1} \int_0^{0.5} 36t \cos \frac{2n\pi t}{1} dt = \begin{cases} \frac{-36}{n^2\pi^2} & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \sin \frac{2n\pi t}{T_p} dt = 2 \int_0^{0.5} 36t \sin \frac{2n\pi t}{1} dt = \begin{cases} \frac{72}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

مثال ۴ قاعده با مشخصات زلزله داده شده کت آن سیر فوریه بدست آورید.

الف) سیر فوریه $P(t)$ با صیر فوریه بدست آورید.
ب) مقدار تغییر مکان در شانه دهم را بر حسب P_0 بدست آورید.



تابع پتانسیل خود است بنابراین $a_0 = a_n = 0$

$$P(t) = \begin{cases} 4P_0 t & 0 \leq t \leq 0.25 \\ 4P_0 t + 2P_0 & 0.25 \leq t \leq 0.75 \\ 4P_0 t - 4P_0 & 0.75 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P_{ct1} \cdot \frac{\sin 2n\pi t}{T_p} dt = \frac{2}{1} \left[\int_0^{0.25} 4P_0 t \sin 2n\pi t dt + \int_{0.25}^{0.75} (-4P_0 t + 2P_0) \sin 2n\pi t dt + \int_{0.75}^1 (4P_0 t - 4P_0) \sin 2n\pi t dt \right]$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{چون} \\ \frac{8P_0}{\pi^2} \frac{\sin n\pi}{2} \quad \text{چون} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P_{ct1} = \frac{8P_0}{\pi^2} \left(\sin 2\pi t - \frac{1}{9} \sin 6\pi t + \frac{1}{25} \sin 10\pi t - \frac{1}{49} \sin 14\pi t + \dots \right)$$

$$K = \frac{6EI}{L^3} = \frac{6 \times 2.1 \times 10^6 \times 3830}{(300)^3} = 1787.33 \text{ kg/cm} = 178733 \text{ kg/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{178733}{7000/9.81}} = 15.83 \text{ rad/sec}$$

$$\xi = 5\% \Rightarrow \omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 15.83 \sqrt{1 - (0.05)^2} = 15.81 \text{ rad/s}$$

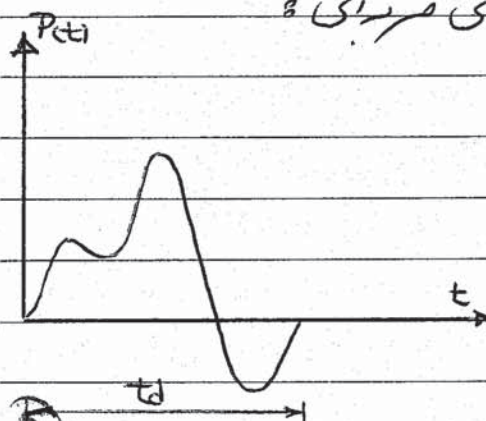
مقدار تعیین شده

$$x(t) = 5.4 \times 10^{-6} P_0 \sin(2\pi t - 0.05) - 1.2 \times 10^{-6} P_0 \sin(6\pi t + 0.28) + 5.7 \times 10^{-8} \sin(10\pi t + 0.07) - 1.3 \times 10^{-8} \sin(14\pi t + 0.01) + \dots$$

از آنجا که سیستم در بعد مبرهنه است

$$x(10) = (-0.27 - 0.33) 10^{-6} P_0 = -0.6 \times 10^{-6} P_0$$

۱۴ تحلیل دینامیکی دستگاه یک درجه آزادی تحت بارگذاری نمره ای ضربی



برای بدین جهت نمودار پاسخ سیستم تحت اثر بار ضربی سه روش وجود دارد:

(۱) اشتغال دو حال

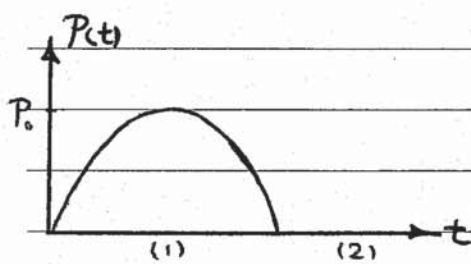
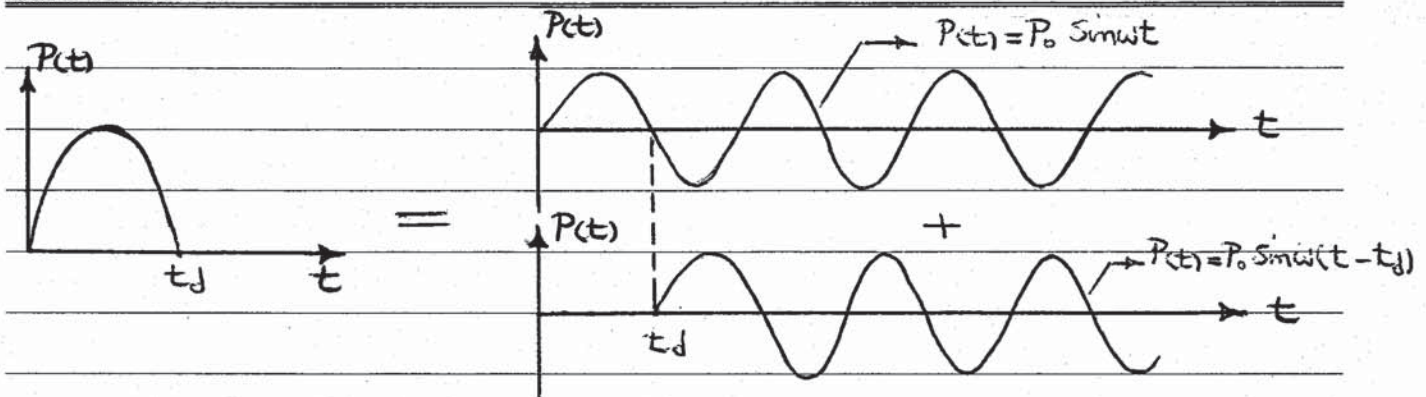
(۲) روش حل طرایی (حل معادلات تفاضلی)

(۳) ترکیب جیبی تابع و در حل کلی است و وجود دارد

نیروی ضربی بزرگ است که در زمانی بسیار کوتاه و بی محدود اثر می کند.

Subject:

YEAR: MONTH: Day:



الف) نیروی ضربی نیم موج سینوسی

سرع روش حل طرکسی دوم

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} P(t) = P_0 \sin \omega t & t \leq t_d \\ P(t) = 0 & t > t_d \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{تدوره بارگذاری کامل}} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{\pi}{t_d}$$

مرحله (۱) :

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = P_0 \sin \frac{\pi}{t_d} t$$

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \rightarrow x_1(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega t)$$

مرحله (۲) : ارتعاش آزادی داریم در شطراوت اولیاش، شطراوت انهایی حالت (۱) است

$$x_1(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\pi}{t_d} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow x_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t_d - \beta \sin \omega t_d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi = \omega t_d \quad \omega = \beta \omega_n \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \pi = \beta \omega_n t_d \rightarrow \omega_n t_d = \frac{\pi}{\beta}$$

$$\rightarrow x_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \frac{\pi}{\beta} - \beta \sin \frac{\pi}{\beta}) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{\beta \sin \frac{\pi}{\beta}}{1-\beta^2}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$\dot{x}_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} (\Omega C_1 \Omega t_d - \beta \omega C_1 \omega t_d)$$

$$\dot{x}_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} (\Omega C_1 \pi - \beta \omega C_1 \frac{\pi}{\beta})$$

$$\dot{x}_1(t_d) = \frac{-P_0}{k} \times \frac{\Omega}{1-\beta^2} (1 + C_1 \frac{\pi}{\beta})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t_d) = x_2(t_d) \\ \dot{x}_1(t_d) = \dot{x}_2(t_d) \end{array} \right.$$

$$t > t_d \rightarrow x_2(t) = \frac{\dot{x}_2(t_d)}{\omega} \sin \omega t' + x_2(t_d) C_1 \omega t' \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(t_d) = x_2(t_d) \\ \dot{x}_1(t_d) = \dot{x}_2(t_d) \end{array} \right.$$

$$t' = t - t_d \rightarrow x_2(t') = \frac{-P_0}{k} \times \frac{\beta}{1-\beta^2} \left[(1 + C_1 \frac{\pi}{\beta}) \sin \omega t' + \sin \frac{\pi}{\beta} \times C_1 \omega t' \right]$$

حال به دنبال جواب حد اکثر سیم هستیم

الف) جواب حد اکثر در هر حله اول باشد $(\beta < 1)$

$$x_1(t) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} (\Omega C_1 \Omega t - \beta \omega C_1 \omega t) = 0$$

$$\rightarrow \Omega t = 2n\pi + \omega t \rightarrow t_{max} = \frac{2n\pi}{\Omega \pm \omega}$$

$$\text{با فرض } n=1 \text{ و } t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega} = \frac{2\pi}{\Omega(1 + 1/\beta)} \leq t_d$$

$$\Omega t_d = \pi \rightarrow t_{max} = \frac{2\pi}{1 + 1/\beta} \leq \Omega t_d$$

$$\Rightarrow t_{Max} = \frac{2\pi}{1 + 1/\beta} \leq \pi \Rightarrow \beta \leq 1 \Rightarrow \Omega \leq \omega \Rightarrow \frac{\pi}{t_d} \leq \frac{2\pi}{T}$$

اگر t_d نسبت به زمان شروع بزرگ باشد سازه زمان کمی طول ببرد و در این صورت پاسخ حد اکثر در هر حله اول رخ می دهد

$$\Rightarrow t_d \geq T/2 \rightarrow \text{پایان حله اول در هر حله اول}$$

برای $t = t_{max}$ حله اول پاسخ در هر حله اول (القای اجباری) خواهد بود

SAMAND

$$t_{Max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega} \leq t_d$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

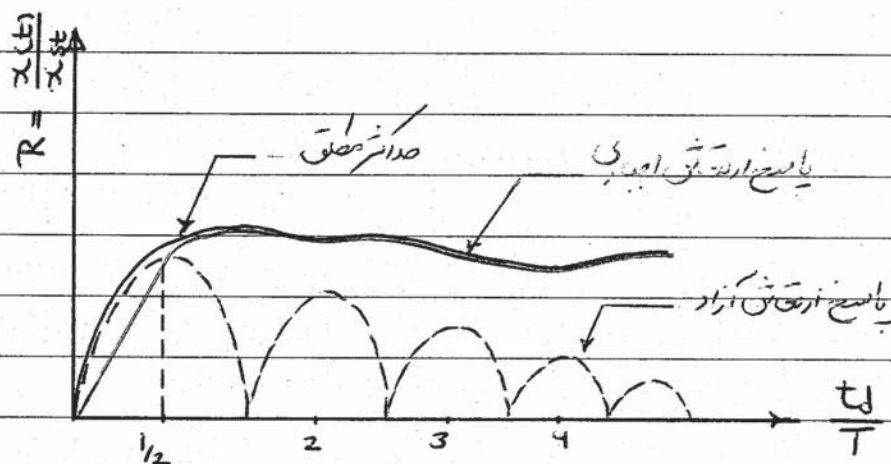
Day:

ب) جواب حد اکثر در حله دوم باشد ($\beta > 1$)

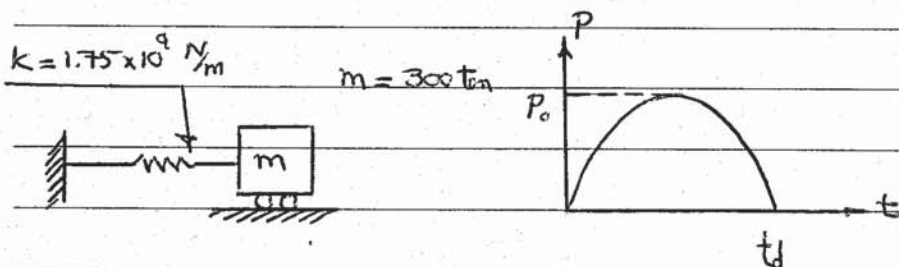
$$\begin{aligned} \text{حد اکثر پاسخ} &= \sqrt{\left(\frac{\ddot{x}(t_d)}{\omega}\right)^2 + \dot{x}(t_d)^2} = \frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \left[\left(1 + C_1 \frac{\pi}{\beta}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{\beta} \right]^{1/2} \\ &= \frac{P_0}{k} \frac{2\beta}{1-\beta^2} \times C_1 \frac{\pi}{2\beta} \end{aligned}$$

ضرب زنجیری

$$\begin{cases} t \leq t_d \rightarrow D = \frac{\sin \pi t_{Max} - \beta \sin \omega t_{Max}}{1-\beta^2} & \beta < 1 \quad \frac{1}{2} - \frac{t_d}{T} > \frac{1}{2} \\ t > t_d \rightarrow D = \frac{2\beta}{1-\beta^2} C_1 \frac{\pi}{2\beta} & \beta > 1 \quad \frac{1}{2} - \frac{t_d}{T} < \frac{1}{2} \end{cases}$$



مثال: در سیستم درجه آزادی مطابق شکل تحت اثر نیروی ضربی نیم موج قرار دارد. برای دو حالت $t_d = 0.055$ و $t_d = 0.0855$ ضرب زنجیری را بدست آورید.



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3 \times 10^5}{1.75 \times 10^9}} = 0.082 \text{ sec}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 76.624$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

الف) $t_d = 0.005 \text{ s}$

$$n = \frac{\pi}{t_d} = \frac{\pi}{0.005} = 628.3$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = 8.2 > 1 \rightarrow \text{پایخ مدانتر در هر حد ارتعاش آزاد است}$$

$$D = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cdot \frac{\pi}{2\beta} = \frac{2 \times 8.2}{1-8.2^2} \cdot \frac{\pi}{2 \times 8.2} = 0.243$$

ب) $t_d = 0.05 \text{ s}$

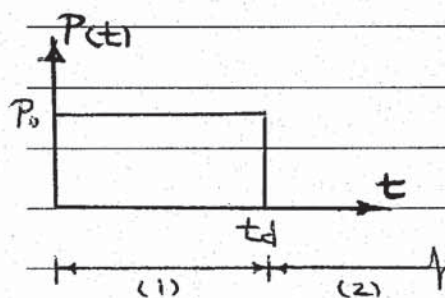
$$n = \frac{\pi}{t_d} = \frac{\pi}{0.05} = 62.83$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{62.83}{76.624} = 0.8 < 1 \rightarrow \text{پایخ مدانتر در هر حد ارتعاش اجباری است}$$

$$t_{Max} = \frac{2\pi}{\Omega(1+1/\beta)} = \frac{2\pi}{62.83(1+\frac{1}{0.82})} = 0.045 \text{ sec} < t_d$$

$$D = \frac{\sin \Omega t_{Max} - \beta \sin \omega t_{Max}}{1-\beta^2} = \frac{\sin 62.83 \times 0.045 - 0.82 \times \sin 76.62 \times 0.045}{1-0.82^2}$$

$$= 1.698 > 1$$



ب) بار فزاینده ای متناهی

$$m\ddot{x} + kx = P(t) = \begin{cases} P_0 & t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + kx = P_0$$

مرحله اول

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t) \quad t \leq t_d$$

$$x_1(t_d) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t_d)$$

$$\dot{x}_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \omega \sin \omega t_d$$

SHAMAND

مرحله دوم

حیدر کاظمی

Subject:

YEAR:

MONTH:

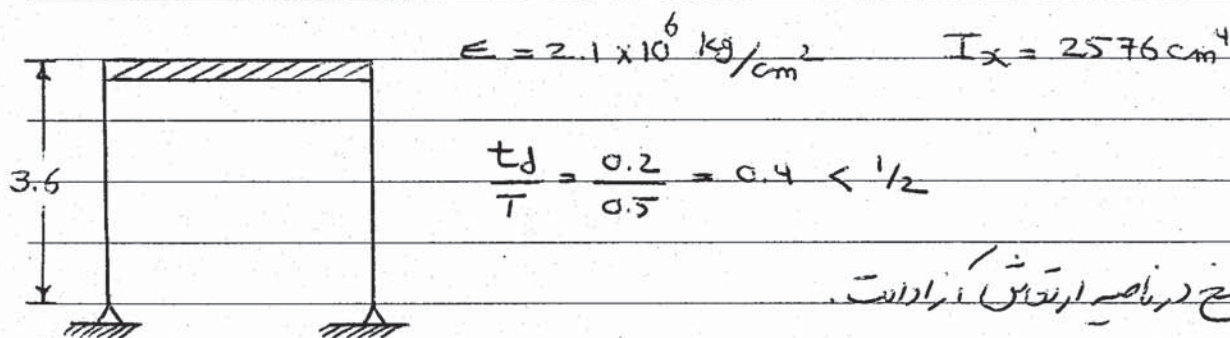
Day:

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{P_0}{k} [c_1 w(t - t_d) - c_1 w t] \quad t \geq t_d$$

$$\text{ضریب نزدیکی} = \begin{cases} D = 2 \sin \frac{\pi t_d}{T} & \frac{t_d}{T} \leq \frac{1}{2} \quad \text{آرد} \\ 2 & \frac{t_d}{T} > \frac{1}{2} \quad \text{اصبار} \end{cases}$$

* برای طراحی تیرهای عرضی هم ضریب ضربه لحاظ می شود که توسط ضریب ضربه ضرایب در طراحی ارائه می شود

مثال: ساختمان نیمه طبقه بصورت قاب یک طبقه با دو تیر عمودی و یک تیر صلب میل شده است. ارتفاع قاب 3.6m و زمان شروع 0.5s است. ستونهای از مقطع IPB با مشخصات زیر می باشد. با فرض منظور کردن از میرایی حداکثر پاسخ قاب را بر اساس ضریب ضربه ای مقطعی به مقدار 1.82 ton به مقدار 0.2s را تعیین کنید.



$$D = 2 \sin \frac{\pi t_d}{T} = 2 \sin (0.4\pi) = 1.902$$

$$k = 2 \times \frac{3EI}{L^3} = \frac{6 \times 2.1 \times 10^6 \times 2576}{360^3} = 696 \text{ kg/cm}$$

$$x_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{1820}{696} = 2.61 \text{ cm}$$

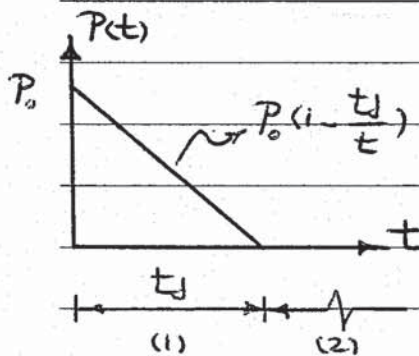
$$x_{Max} = D \cdot x_{st} = 1.902 \times 2.61 = 4.96 \text{ cm}$$

حداکثر تغییر مکان در ناحیه ارتعاش آزاد است که در نظر می گیریم. نسبت در مدت زمان پاسخ اثر ضربه بسیار کم است. نی براد در نظر گرفتن صرف نظر می کنیم.

از میرایی از 1/10 به 1/15 افزایش باید در حدود 1/5، 1/6 در پاسخ سیستم اثر دارد.

Subject:

YEAR: MONTH: Day:



ج) بار ضربی مثلثی

مرحله ۱

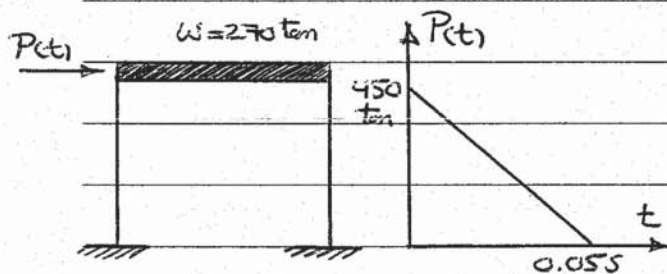
$$x_1(t) = \frac{P_0}{K} (1 - \cos \omega t) + \frac{P_0}{K t_d} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \right) \quad t \leq t_d$$

مرحله ۲

$$\begin{cases} x_1(t_d) = \frac{P_0}{K} \left(\frac{\sin \omega t_d}{\omega t_d} - \cos \omega t_d \right) \\ \dot{x}_1(t_d) = \frac{P_0}{K} \left(\frac{\cos \omega t_d}{t_d} + \omega \sin \omega t_d - \frac{1}{t_d} \right) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \frac{P_0}{K \omega t_d} (\sin \omega t - \sin \omega (t - t_d)) - \frac{P_0}{K} \cos \omega t$$

مثال: سازه نشان داده شده با سختی $180,000 \text{ ton/m}$ فرض است. کمترین سازه 270 ton باشد. بار ضربی مثلثی نشان داده شده مطابق شکل ضربی مثلثی و مشخصات بار.



$$K = 180,000$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{180,000 \times 10^3 \times 9.81}{270,000}} = 80.8 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{80.8} = 0.078 \text{ sec}$$

* در این نامگذاری زمان لازم صلب بودن پرورد است. اگر $T < 0.06$ باشد سیستم را صلب فرض می کنند.

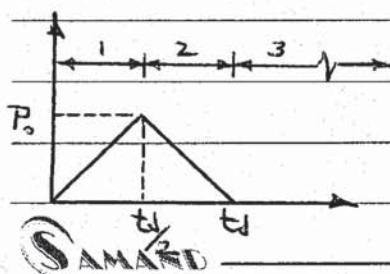
زمان تناوب برای سازه های 0.15 و 0.25 است (0.1 N)

$$t_d = 0.05 \rightarrow \frac{t_d}{T} = \frac{0.05}{0.078} = 0.64 \rightarrow D = 1.3$$

$$x_{\text{Max}} = x_{\text{st}} \cdot D = \frac{T P_0}{K} \times D = \frac{450}{180,000} \times 1.3 = 0.00325 \text{ m} = 3.25 \text{ mm}$$

$$V_{\text{Max}} = \frac{K}{2} \times x_{\text{Max}} = \frac{180,000}{2} \times 0.00325 = 293 \text{ ton}$$

د) بار ضربی متساوی الاغی



کرافت در هر لحظه بار را با هم وجود است. بنام اینج دیگر

اولی بار را می نویسم

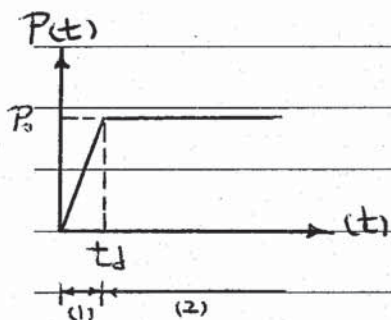
Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

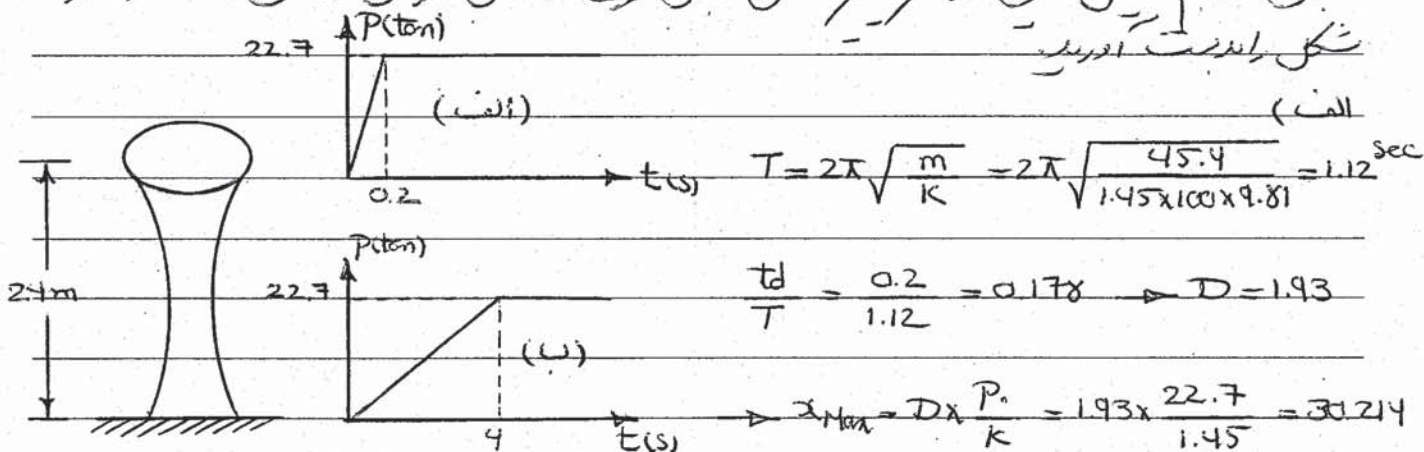
۵) پاسخ سیستم یک درجه آزادی تحت اثر بار ننداز ثابت با مساحت مقطع اولیه ۸ اگر زمان t_d زیاد باشد انتظار می رود که بار نندازی شبیه به بار استاتیکی باشد بنابر این D به یک تمایل می شود. اما اگر t_d کوچک باشد بار ننداز به حالت دینامیکی تمایل دارد.



$$P(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_d} P_0 & t \leq t_d \\ P_0 & t > t_d \end{cases}$$

$$R = \frac{x_{dyn}}{x_{st}} = \begin{cases} R_1 = \frac{1}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) & t \leq t_d \\ R_2 = 1 + \frac{1}{\omega t_d} (\sin \omega(t - t_d) - \sin \omega t) & t > t_d \end{cases}$$

مثال: منبع حرارتی نشان داده شده در شکل به حالت بحرانی برابر 45.4 ton دارد. صلبیت جانبی مخزن $1.45 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$ است. با فرض اینکه منبع بصورت سیستم یک درجه آزادی عمل نماید بدون زخم تکامل (صوت صدای تغییر شکل جانبی مخزن در مقابل سازه ای نشان داده شده در شکل را بدست آورید.



* در مخازن زیر دریایی اگر آب به بدنه مخزن وارد شود توسط خاک این مخزن خفه می شود و در مخزن بی آب مخزن توخالی باشد آن مخزن خالی از لوله توسط خاک به بدنه مخزن انتقال می دهد.

* در این نامه ۲۸ صحت کثرتی برای مخزن در نظر دارد.

* در این نامه مخزن از معنی $R = 3$ می باشد.

$$x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

اندازه دینامیک

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\frac{t_d}{T} = \frac{4}{1.12} = 3.57 \rightarrow D = 1.08$$

(ب)

$$\rightarrow x_{Max} = D \times \frac{P_0}{k} = 1.08 \times \frac{22.7}{1.45} = 16.91 \approx x_{st} = 15.66$$

* طبق این نامه ۲۸۰۰۰ نفر از زمان شروع کمتر از ۰.۵s شد می توانست کلیت استاسیل برود اما در غیر اینصورت باید کلیت دنیا سلی صورت گیرد

* در آیین نامه ۲۸۰۰۰ نفر برای فصلی که $(\frac{B}{R})_{min} = 0.1$ و برابر محاسبه $(\frac{B}{R})_{min} = 0.5$ می باشد این مقدار برابر محاسبه برش یا در زبانی را بدست می دهیم و با این فرورد در این نامه می باشد

صورت این مقدار کلیت یافته و صورت $(\frac{B}{R})_{min} = 0.35$ می باشد

روش های حل عددی (Numerical Methods)

سیستم یک درجه آزادی خطی

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_e(t)$$

$$\rightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{F_e(t)}{m}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d\dot{x}(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{x}(s) ds$$

$$\rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds$$

$$t_0 = t_k, \quad t = t_{k+1} \quad \rightarrow \Delta t = t_{k+1} - t_k$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{x}(s) ds \\ x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(s) ds \end{cases}$$

انواع روش های حل عددی برای معادلات پاشخ سیستم بر طبق موارد زیر می باشد

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_k \Rightarrow \int_{t_k}^t \ddot{x}(t) dt = \int_{t_k}^t \ddot{x}_k dt \Rightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}_k = \ddot{x}_k (t - t_k)$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

(1) شتاب ثابت (Constant Acceleration)

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t_k) = \ddot{x}_k \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{x} dt = \dot{x}_k + \ddot{x}_k \Delta t$$

$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\dot{x}_k + \ddot{x}_k (t - t_k)] dt = x_k + \dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_k (\Delta t)^2$$

(2) شتاب متوسط (Constant Average Acceleration)

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{2} (\ddot{x}(t_k) + \ddot{x}(t_{k+1})) = \frac{1}{2} (\ddot{x}_k + \ddot{x}_{k+1}) \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{2} (\ddot{x}_k + \ddot{x}_{k+1}) dt = \dot{x}_k + \frac{1}{2} \ddot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_{k+1} \Delta t$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\dot{x}_k + \frac{1}{2} (\ddot{x}_k + \ddot{x}_{k+1}) (t - t_k)] dt$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{4} \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \frac{1}{4} \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2$$

(3) شتاب خطی (Linear Acceleration)

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t_k) + \left[\frac{\ddot{x}(t_{k+1}) - \ddot{x}(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right] (t - t_k)$$

$$= \ddot{x}_k + \left[\frac{\ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k}{t_{k+1} - t_k} \right] (t - t_k) \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\ddot{x}_k + \left(\frac{\ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k}{t_{k+1} - t_k} \right) (t - t_k) \right] dt$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \frac{1}{2} \ddot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_{k+1} \Delta t$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\dot{x}_k + \ddot{x}_k (t - t_k) + \frac{1}{2} \frac{(\ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k)}{t_{k+1} - t_k} (t - t_k)^2 \right] dt$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{3} \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2$$

روش نیومارک B روش خطی است که این روش را در سری نبرد

(4) روش نیومارک B

در هر گام $k+1$ ، رابطه زیر را در معادله تعادل دینامیکی می‌بایست داریم:

$$\ddot{x}_{k+1} + 2\xi\omega_n \dot{x}_{k+1} + \omega_n^2 x_{k+1} = \frac{F_{k+1}}{m}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + (1-\delta)\Delta t \ddot{x}_k + \delta\Delta t \ddot{x}_{k+1} \\ x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Delta t^2 \ddot{x}_k + \alpha(\Delta t)^2 \ddot{x}_{k+1} \end{cases}$$

$\delta=0, \alpha=0$	←	(1) روش شتاب ثابت
$\delta=1/2, \alpha=1/4$	←	(2) روش شتاب متوسط ثابت
$\delta=1/2, \alpha=1/6$	←	(3) روش خطی

هدف اینست که اطلاعات هر گام $k+1$ ، از اطلاعات هر گام k بدست آوریم.

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_{k+1} + 2\xi\omega_n (\dot{x}_k + (1-\delta)\Delta t \ddot{x}_k + \delta\Delta t \ddot{x}_{k+1}) \\ & + \omega_n^2 (x_k + \dot{x}_k \Delta t + (\frac{1}{2} - \alpha)\Delta t^2 \ddot{x}_k + \alpha(\Delta t)^2 \ddot{x}_{k+1}) \\ & = F_{k+1}/m \end{aligned}$$

بهرت کردن، رابطه بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{k+1} &= -\left(\frac{\omega_n^2}{\beta}\right)x_k - \left(2\xi\omega_n + \omega_n^2\Delta t\right)\dot{x}_k - \left(\frac{\delta}{\beta}\right)\ddot{x}_k + \frac{1}{m\beta}F_{k+1} \\ \beta &= 1 + 2\xi\omega_n\delta\Delta t + \omega_n^2\alpha\Delta t^2 \\ \delta &= 2\xi\omega_n(1-\delta)\Delta t + \omega_n^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Delta t^2 \end{aligned}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\dot{x}_{k+1} = - \left(\frac{\omega_n^2 \Delta t \delta}{\beta} \right) x_k + \left(\frac{\beta - 2\zeta\omega_n \delta \Delta t - \omega_n^2 \delta (\Delta t)^2}{\beta} \right) \dot{x}_k$$

$$+ \left(\frac{\beta \Delta t - \delta(\beta + \delta) \Delta t}{\beta} \right) \ddot{x}_k + \left(\frac{\delta \Delta t}{m\beta} \right) F_{k+1}$$

$$x_{k+1} = \left(\frac{\beta - \omega_n^2 \alpha (\Delta t)^2}{\beta} \right) x_k + \left(\frac{\beta \Delta t - 2\zeta\omega_n \alpha \Delta t^2 - \omega_n^2 \alpha \Delta t^3}{\beta} \right) \dot{x}_k$$

$$+ \left(\frac{1/2 \beta \Delta t^2 - \alpha(\beta + \delta) \Delta t^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k + \left(\frac{\alpha \Delta t^2}{m\beta} \right) F_{k+1}$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = F_N \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + H_N \times F_{k+1}$$

$$\Rightarrow q_{k+1} = F_N \cdot q_k + H_N \cdot F_{k+1}$$

$$F_N = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \beta - \omega_n^2 \alpha (\Delta t)^2 & \beta \Delta t - 2\zeta\omega_n \alpha \Delta t^2 - \omega_n^2 \alpha \Delta t^3 & 1/2 \beta \Delta t^2 - \alpha(\beta + \delta) \Delta t^2 \\ \omega_n^2 \delta \Delta t & \beta - 2\zeta\omega_n \delta \Delta t - \omega_n^2 \delta (\Delta t)^2 & \beta \Delta t - \delta(\beta + \delta) \Delta t \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \omega_n^2 \Delta t & -\delta \end{bmatrix}$$

$$H_N = \frac{1}{m\beta} \begin{bmatrix} \alpha (\Delta t)^2 \\ \delta \Delta t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \beta = 1 + 2\zeta\omega_n \delta \Delta t + \omega_n^2 \alpha \Delta t^2 \\ \delta = 2\zeta\omega_n(1 - \delta) \Delta t + \omega_n^2 (1/2 - \alpha) \Delta t^2 \end{cases}$$

نسبت انرژی در برای انتخاب Δt لازم است:

(۱) $\Delta t < T/10$ (برای شتاب بار سینی ۸ فقط لازم داریم)

(۲) رفتار غیر خطی را آن در حد تا تغییرات سختی لحاظ کرد.

(۳) بارگذاری باید به گونه باشد که بارگذاری را درست نشانند.

Subject:

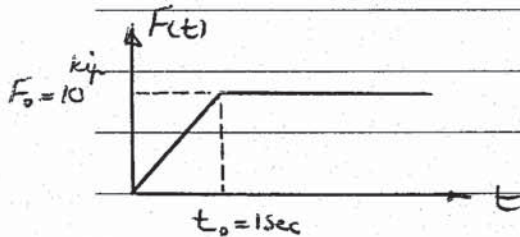
Year:

Month:

Day:

مثال ۵ با استفاده از روش شتاب ثابت متوسط با فرض اینکه $\Delta t = 0.02^s$ باشد، با توجه به اطلاعات داده شده، مطلوبیت تغییر یا تغییر سیستم

$$m = 1 \frac{k \cdot s^2}{in} \quad \xi = 0.05 \quad T_n = 1 \text{ Sec}$$



$$\alpha = 1/4, \quad \delta = 1/2$$

$$\begin{cases} B = 1 + 2(0.05) \times 2\pi \times 0.5 \times 0.02 + (2\pi)^2 \times 0.25 (0.02)^2 = 1.010231 \\ \delta = 2 \times 0.05 \times 2\pi \times 0.5 \times 0.02 + (2\pi)^2 (0.25) (0.02)^2 = 0.010231 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.99609 & 0.01986 & 0.000099 \\ -0.39079 & 0.98596 & 0.0099 \\ -39.0786 & -1.40353 & -0.0103 \end{bmatrix}}_{F_N} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.000099 \\ 0.009899 \\ 0.98987 \end{bmatrix}}_{H_N} F_{k+1}$$

$$\text{فرض: } x_0 = \dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0$$

$$1) t_1 = \Delta t = 0.02 \text{ sec} \rightarrow F_{k+1} = 0.2 \text{ kips} \quad (k+1 = 1)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = F_N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + H_N \times 0.2 = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00198 \\ 0.198 \end{bmatrix}$$

$$2) t_2 = 2\Delta t = 0.04 \text{ sec} \rightarrow F_{k+1} = 0.4 \text{ kip} \quad (k+1 = 2)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = F_N \times \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00198 \\ 0.198 \end{bmatrix} + H_N \times 0.4 = \begin{bmatrix} 0.00012 \\ 0.00786 \\ 0.39039 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

K	time (s)	F_k (kip)	x_k (in)	$\dot{x}_k$ (in/s)	$\ddot{x}_k$ (in/s ²)
0	0	0	0	0	0
1	0.02	0.2	0.00002	0.00198	0.19799
2	0.04	0.4	0.00012	0.00798	0.39039
3	0.06	0.6	0.00037	0.01751	0.57431
4	0.08	0.8	0.00085	0.03072	0.74697
5	0.1	1	0.00163	0.04725	0.9058
6	0.12	1.2	0.00277	0.06679	1.0485

در روش حل عددی مایع سازه باروش θ Wilson
 از فرض کنیم اطلاعات زمان t را داریم و بدینال اطلاعات زمان $t + \Delta t$ حتم برای
 این کار اطلاعات در روش شتاب خطی برای زمان $t + \theta \Delta t$ ($\theta = 1.4$) بدست می آوریم
 و با تصحیح به $t + \Delta t$ می رسم
 $\alpha = 1/6, \delta = 1/2 \rightarrow$ روش شتاب خطی

در این روش داریم:

$$\ddot{x}_{k+\theta} + 2\xi\omega_n \dot{x}_{k+\theta} + \omega_n^2 x_{k+\theta} = \frac{F_{k+\theta}}{m}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+\theta} = \dot{x}_k + \frac{1}{2} \ddot{x}_k \theta \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_{k+\theta} \theta \Delta t \\ x_{k+\theta} = x_k + \dot{x}_k \theta \Delta t + \frac{1}{3} \ddot{x}_k \theta^2 (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \ddot{x}_{k+\theta} \theta^2 (\Delta t)^2 \end{cases}$$

رایج نیرو در احم بصورت زیر خود احم داشت:

$$F_{k+\theta} = F_k + \frac{t_{k+\theta} - t_k}{t_{k+1} - t_k} (F_{k+1} - F_k) = F_k$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\ddot{x}_{k+\theta} = -\left(\frac{\omega_n^2}{\beta}\right) x_k - \left(\frac{2\xi\omega_n + \omega_n^2\theta\Delta t}{\beta}\right) \dot{x}_k - \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \ddot{x}_k + \frac{1}{m\beta} (F_{k+\theta} (F_{k+1} - F_k))$$

$$\beta = 1 + \xi\omega_n\theta\Delta t + \frac{1}{6}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2$$

$$\gamma = \xi\omega_n\theta\Delta t + \frac{1}{3}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2$$

t_k در $t_{k+\theta}$ $\rightarrow \frac{F_k}{m} = \ddot{x}_k + 2\xi\omega_n\dot{x}_k + \omega_n^2 x_k$

$$\rightarrow \ddot{x}_{k+\theta} = -\left(\frac{\theta\omega_n^2}{\beta}\right) x_k - \left(\frac{2\xi\omega_n\theta + \omega_n^2\theta\Delta t}{\beta}\right) \dot{x}_k - \left(\frac{\gamma - 1 + \theta}{\beta}\right) \ddot{x}_k + \left(\frac{\theta}{m\beta}\right) F_{k+1}$$

با انتگرال گیری از t_k به $t_{k+\theta}$ بدست می آید

$$\begin{cases} \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{(t_{k+\theta} - t_k)} (\ddot{x}_{k+\theta} - \ddot{x}_k) = \ddot{x}_k + \theta (\ddot{x}_{k+\theta} - \ddot{x}_k) \\ \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{(t_{k+\theta} - t_k)} (\dot{x}_{k+\theta} - \dot{x}_k) = \dot{x}_k + \frac{1}{\theta} (\dot{x}_{k+\theta} - \dot{x}_k) \\ x_{k+1} = x_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{(t_{k+\theta} - t_k)} (x_{k+\theta} - x_k) = x_k + \frac{1}{\theta} (x_{k+\theta} - x_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \theta (\ddot{x}_{k+\theta} - \ddot{x}_k) \\ \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \frac{1}{\theta} (\dot{x}_{k+\theta} - \dot{x}_k) = \dot{x}_k + \frac{1}{2} \ddot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_{k+\theta} \Delta t \\ x_{k+1} = x_k + \frac{1}{\theta} (x_{k+\theta} - x_k) = x_k + \dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{3} \ddot{x}_k \theta (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \ddot{x}_{k+\theta} \theta (\Delta t)^2 \end{cases}$$

$$q_{k+1} = F_N q_N + H_N F_{k+1}$$

$$q_{k+1} = F_W q_k + H_W F_{k+1}$$

$$H_W = \frac{1}{m\beta} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \theta^2 (\Delta t)^2 \\ \frac{1}{2} \theta (\Delta t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Subject:

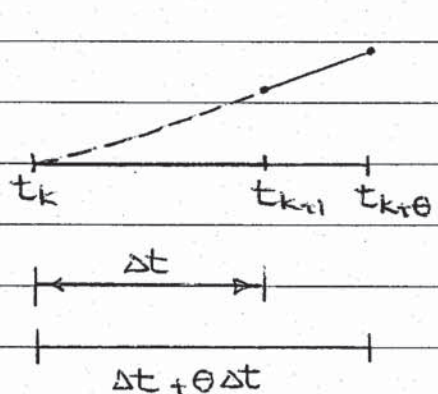
YEAR:

MONTH:

Day:

$$\begin{cases} \beta = 1 + \xi \omega_n \theta \Delta t + \frac{1}{6} \omega_n^2 \theta^2 \Delta t^2 \\ \gamma = \xi \omega_n \theta \Delta t + \frac{1}{3} \omega_n^2 \theta^2 \Delta t^2 \end{cases}$$

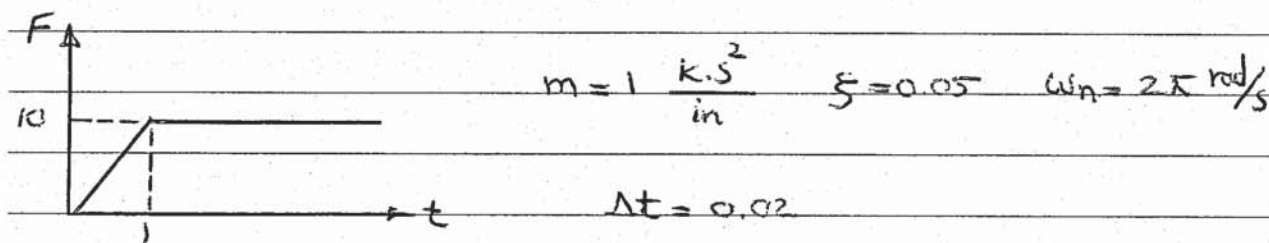
$$F_w = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \beta - \frac{1}{6} \omega_n^2 \theta^2 \Delta t^2 & \beta \Delta t - \frac{1}{3} \xi \omega_n \theta \Delta t - \frac{1}{6} \omega_n^2 \theta^2 \Delta t^2 & \frac{1}{6} (2\beta - \theta - \gamma + 1) \theta \Delta t^2 \\ -\frac{1}{2} \omega_n^2 \theta \Delta t & \beta - \xi \omega_n \theta \Delta t - \frac{1}{2} \omega_n^2 \theta \Delta t^2 & \frac{1}{2} (\beta - \theta - \gamma + 1) \Delta t \\ -\omega_n^2 & -2\xi \omega_n - \omega_n^2 \Delta t & \frac{1}{\theta} (\beta \theta - \theta - \gamma + 1) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = F_w \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + H_w F_{k+1}$$

$$H_w = \frac{1}{m\beta} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \theta^2 (\Delta t)^2 \\ \frac{1}{2} \theta \Delta t \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال و بارده به اطلاعات داده شده مطابقت بخش پاسخ سیستم تحت اثر بارگذاری ثابت
 داده شده با فرض استفاده از روش Wilson- θ با فرض $\theta = 1.4$



$$\beta = 1 + 0.05 \times 2\pi \times 1.4 \times 0.02 + \frac{1}{6} (2\pi)^2 \times (1.4)^2 (0.02)^2 = 1.013955$$

$$\gamma = 0.05 \times 2\pi \times 1.4 \times 0.02 + \frac{1}{3} (2\pi)^2 (1.4)^2 (0.02)^2 = 0.0191135$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.969475 & 0.019817 & 0.000148 \\ -0.54509 & 0.980423 & 0.00586 \\ -38.9351 & -1.39837 & 0.009532 \end{bmatrix}}_{F_w} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.000129 \\ 0.013807 \\ 0.986237 \end{bmatrix}}_{H_w} F_{k+1}$$

$$t = \Delta t = 0.02$$

$$x_0 = \dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = F_w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + H_w \times 0.2 = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00276 \\ 0.19725 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

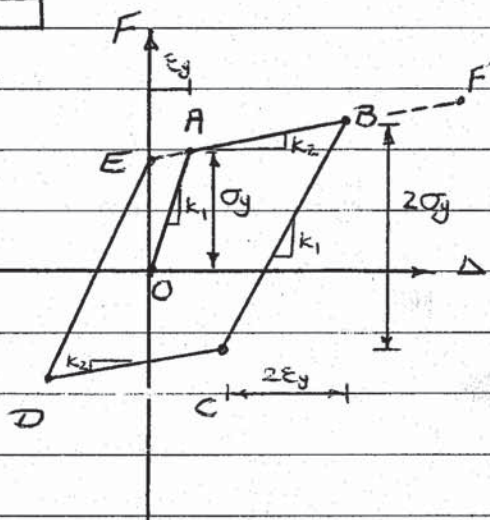
$$t = 2\Delta t = 0.04$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = F_{w2} \times \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00276 \\ 0.19725 \end{bmatrix} + H_{w2} \times 0.4 = \begin{bmatrix} 0.00016 \\ 0.00937 \\ 0.38775 \end{bmatrix}$$

با این آمار داده‌ها می‌توانیم در این روش صحیح جواب‌های Newmark-β را بدست آوریم. در هر مرحله زمانی با Δt ثابت در روش یک بار عمل می‌کنیم.

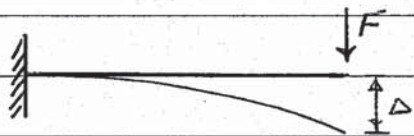
فصل سوم

آنالیز غیر خطی سیستم‌ها (درجه آزادی)

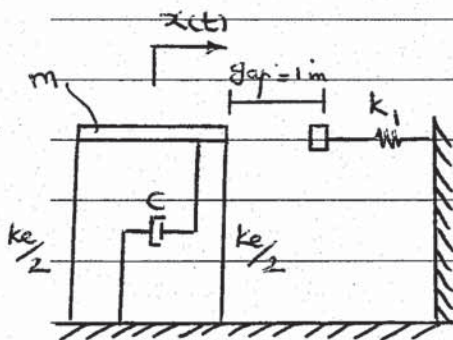


در صورت OA یعنی k_1 است. در محدوده AB سازه تحت افزایش نیرو را ندارد پس با شکل موازی می‌ماند. k_2 می‌شود ($k_2 = \alpha k_1$) اگر نقطه B رسیدیم و بار را افزایش دهیم سازه تلاش می‌کند اما اگر بار را آهسته‌تر دریم با صاف شدن k_1 می‌تواند

$$\alpha = \begin{cases} 3/5 \text{ تا } 5/3 & \text{کارایی زیاد} \\ 0 & \text{کارایی کمی} \end{cases} \quad (k_2 = \alpha k_1)$$



مثال: و معادله حرکت سیستم را بدست آوریم.



$$\begin{aligned} x(0) &= -5 \text{ inch} \\ \dot{x}(0) &= 0 \text{ inch/s} \\ \ddot{x}(0) &= 0 \text{ inch/s}^2 \\ \xi &= 5\% \end{aligned}$$

$$k_e = 631.65 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

$$m = 1 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$$

$$k_1 = 355.3 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

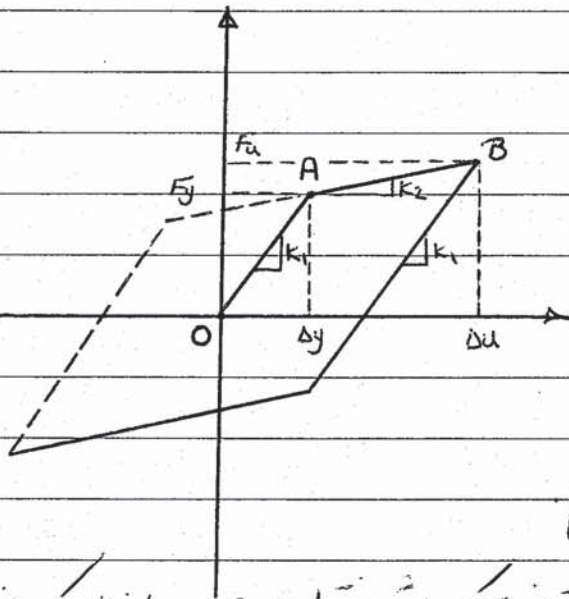
Subject:

Year:

Month:

Day:

* در آنالیز غیر خطی اول بارگذاری قائم را می دهیم و
تنش را در آن عضو یکبارگی کنیم و بعد بار را برزیم
و بار را به اعلی می بینیم



وقتی از A عبور می کنیم فاصله مان تغییر نمی
می دهد

نقطه A تا حدی می تواند طول برد و تا نقطه B می رسد

* برابر کنترل داریم و لغزش می گیریم ضریب باری نداریم

$$S.F = 1.75 \leftarrow \text{در این نامه ۲۸}$$

* در این نامه های دنیا آمده شده که اگر مقاومت بیشتر از محاسبه باشد و فقط این محاسبه بار را برزیم ضریب
اضافه مقاومت می ۱.۷۵ را ۳ در نظر گرفته می اندازد

حل مثال ۸

در آنالیز غیر خطی زمان ساز و بار همواره تغییر پیدا می کند

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \leq 1 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{ke}{m}} = \sqrt{\frac{631.65}{1}} = 25.13 \rightarrow T_n = 0.25 \text{ Sec} \\ x(t) > 1 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{ke+k_1}{m}} = \sqrt{\frac{631.65+355.3}{1}} = 31.42 \rightarrow T_n = 0.2 \text{ Sec} \end{array} \right.$$

$$\xi = 5\% \rightarrow \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) \leq 1 \rightarrow \omega_d = 25.13 \sqrt{1-(0.05)^2} = 25.1 \text{ rad/s} \\ x(t) > 1 \rightarrow \omega_d = 31.42 \sqrt{1-0.05^2} = 31.38 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$

حالت اول ۸ $x(0) = -5$ $\dot{x}(0) = 0$ شرایط اولیه

رابطه ارتعاش آزاد با میرایی بصورت زیر می باشد

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left[x_0 \cos \omega_d t + \left[\frac{\xi \omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \right] \sin \omega_d t \right]$$

$$x < 1 \Rightarrow x(t) = e^{-1.257t} \left[-5 \cos 25.1t - 0.25 \sin 25.1t \right]$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[x_0 c_1 \omega_d t + \left(\frac{\zeta \omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_d t \right]$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[\dot{x}_0 c_1 \omega_d t - \left(\frac{\omega_n x_0 + \zeta \dot{x}_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_d t \right]$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[\dot{x}_0 c_1 \omega_d t - \left(\frac{\omega_n x_0 + \zeta \dot{x}_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_d t \right]$$

$$\dot{x}(t) = 125.8 e^{-1.257t} \sin 25.1t$$

حال باید سیستم در چه لحظه ای تغییر سختی در سیستم رخ می دهد پس باصل عدد زیر را می توانیم

$$x(t) = 1 \Rightarrow t_1 = 0.07337 \text{ sec}$$

حل لازم است در این مرحله سرعت را بدست آوریم و در عنوان اطلاعات اولیه حالت دوم در نظر بگیریم.

$$\dot{x}(t=0.07337) = 110.5 \text{ in/s}$$

حالت دوم

$$t > t_1 \rightarrow k = k_e + k_1 \quad (x(t_1) = 1 \text{ in} \quad \dot{x}(t_1) = 110.5 \text{ in/s})$$

$$x(t) = e^{-1.571(t-0.07337)} \left[c_1 31.38(t-0.07337) + 3.571 \sin 31.38(t-0.07337) \right]$$

$$\dot{x}(t) = e^{-1.571(t-0.07337)} \left[36.99 \sin 31.38(t-0.07337) + 110.5 c_1 31.38(t-0.07337) \right]$$

$$x(t) = 1 \Rightarrow t_2 = 0.15487 \text{ sec} \Rightarrow \dot{x}(t_2) = -101.8 \text{ in/sec}$$

سیستم یک درجه آزادی با سختی غیر خطی

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_e x(t) = F_e(t)$$

k_e و سختی الاستیک سیستم خطی

$$\begin{cases} t_k & \text{اطلاعات در زمان } t_k & m\ddot{x}_k + c\dot{x}_k + k_e x_k = F_k & (*_k) \\ t_{k+1} & \text{اطلاعات در زمان } t_{k+1} & m\ddot{x}_{k+1} + c\dot{x}_{k+1} + k_e x_{k+1} = F_{k+1} & (*_{k+1}) \end{cases}$$

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + (1-\delta) \ddot{x}_k \Delta t + \delta \ddot{x}_{k+1} \Delta t$$

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t + (1/2 - \alpha) \ddot{x}_k \Delta t^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2$$

$$F_I(t) + F_d(t) + F_s(t) = F_e(t)$$

SAMANT

Subject:

YEAR:

MONTH:

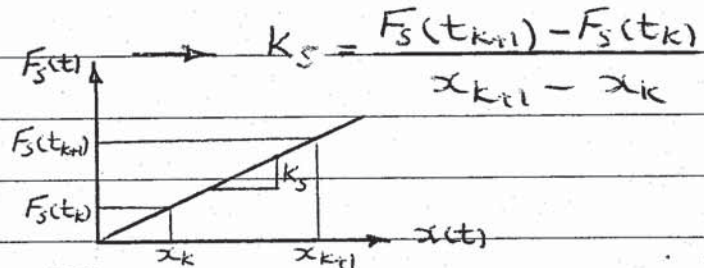
Day:

حالت خطی

$$F_I(t) = m \ddot{x}(t)$$

$$F_d(t) = c \dot{x}(t)$$

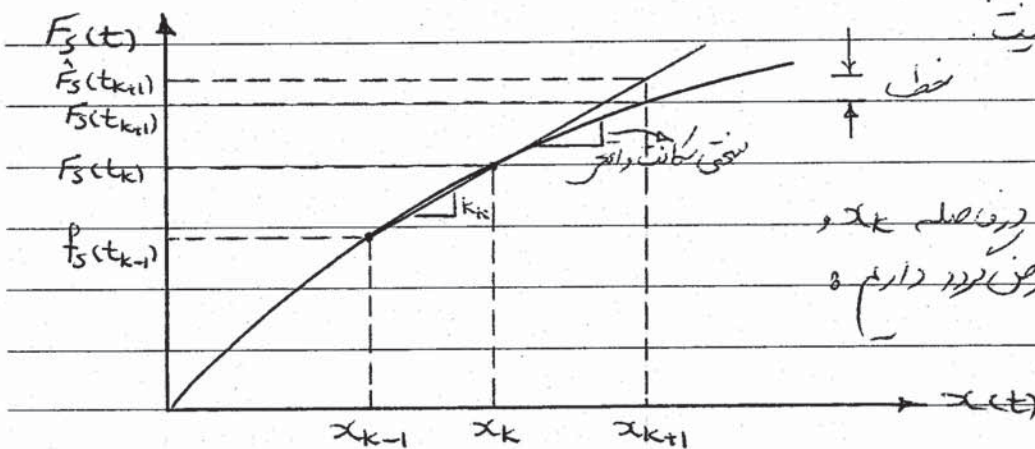
$$F_s(t) = k_s x(t)$$



تفاضل زوفا (در زمان) k و k_{+1} را بصورت زیر داریم. البته این معادلات را در حالت غیر خطی می نویسیم.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{*k} m (\ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k) + c (\dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k) + (F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k)) = F_{k+1} - F_k \\ & \xrightarrow{*k+1} \underbrace{\quad}_{\Delta \ddot{x}} + \underbrace{\quad}_{\Delta \dot{x}} + \underbrace{\quad}_{\Delta F_s} = \underbrace{\quad}_{\Delta F} \\ & \Rightarrow m \Delta \ddot{x} + c \Delta \dot{x} + \Delta F_s = \Delta F \quad (a) \end{aligned}$$

* (حالت غیر خطی را در اینجا به خط صاف $F_s = k_s x$ صاف می کنیم)



$$F_s(x_{k+1}) = F_s(x_k) + \left[\frac{F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \right] (x_{k+1} - x_k) \quad (b)$$

$$\rightarrow k_s = \left[\frac{F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \right] = \frac{\Delta F_s}{\Delta x} \quad (c) \quad k_s \text{ و } k_k \text{ نقطه شیب}$$

$$m \Delta \ddot{x} + c \Delta \dot{x} + k_s \Delta x = \Delta F \quad \text{با جایگزینی رابطه (c) در رابطه (a)}$$

$$k_s = k_k = \frac{F_s(x_k) - F_s(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

* چون $F_s(x_{k+1})$ را نداریم از خط مماس نقطه x_k استفاده می کنیم تا با خط همراه است.

SAHAND

$$\rightarrow F_s(x_{k+1}) = F_s(x_k) + (F_s(x_k) - F_s(x_{k-1})) (x_{k+1} - x_k)$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

در روش نیومارک بیا داریم

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k = (1-\delta) \ddot{x}_k \Delta t + \delta \ddot{x}_{k+1} \Delta t \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x = x_{k+1} - x_k = \dot{x}_k \Delta t + (1/2 - \alpha) \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2 \quad (2) \end{cases}$$

$$m \Delta \ddot{x} + c \Delta \dot{x} + \Delta F_s = \Delta F \quad (3)$$

رابطه (1)، (2)، و (3) را در رابطه (3) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(2), (1)} m \Delta \ddot{x} + c \left[(1-\delta) \ddot{x}_k \Delta t + \delta \ddot{x}_{k+1} \Delta t \right] + k_s \left[\dot{x}_k \Delta t + (1/2 - \alpha) \ddot{x}_k \Delta t^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2 \right] &= \Delta F \quad (4) \end{aligned}$$

$$\Delta \ddot{x} = \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \Delta \ddot{x} \quad (5)$$

رابطه (4) را به نودای مرتبه‌ی یکم

از رابطه حذف می‌کنیم

$$(4), (5) \Rightarrow \left[m + c\delta(\Delta t) + k_s\alpha(\Delta t)^2 \right] \Delta \ddot{x} + c\ddot{x}_k \Delta t + k_s \left[\dot{x}_k \Delta t + 1/2 \ddot{x}_k (\Delta t)^2 \right] = \Delta F$$

$$\Rightarrow \Delta \ddot{x}_k = \frac{\Delta F - c\ddot{x}_k \Delta t - k_s \left[\dot{x}_k \Delta t + 1/2 \ddot{x}_k (\Delta t)^2 \right]}{m + c\delta(\Delta t) + k_s\alpha\Delta t^2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= m + c\delta(\Delta t) + k_s\alpha(\Delta t)^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rightarrow \Delta \ddot{x} &= \frac{1}{\beta} \Delta F - \frac{k_s \Delta t}{\beta} \dot{x}_k - \left(\frac{c\Delta t + 1/2 k_s (\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k \end{aligned} \right.$$

$$1) \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \Delta \ddot{x} = \ddot{x}_k + \frac{1}{\beta} \Delta F + \left(\frac{k_s \Delta t}{\beta} \right) \dot{x}_k - \left(\frac{c\Delta t + 1/2 k_s (\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k$$

$$= \frac{1}{\beta} \Delta F - \left(\frac{k_s \Delta t}{\beta} \right) \dot{x}_k + \left(\frac{\beta - c\Delta t - 1/2 k_s (\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k$$

$$2) \dot{x}_{k+1} = \frac{\delta \Delta t}{\beta} \Delta F + \left(\frac{\beta - \delta k_s \Delta t^2}{\beta} \right) \dot{x}_k + \left(\frac{\beta \Delta t - c\delta(\Delta t)^2 - 1/2 k_s \delta(\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k$$

$$3) x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = \left(\frac{\alpha(\Delta t)^2}{\beta} \right) \Delta F + x_k + \left(\frac{\beta \Delta t - k_s \alpha \Delta t^3}{\beta} \right) \dot{x}_k$$

$$+ \left(\frac{1/2 \beta (\Delta t)^2 - c\alpha(\Delta t)^3 - 1/2 k_s \alpha (\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k$$

$$\Delta F \text{ و بارگذاری خارجی (} F_{k+1} - F_k = \Delta F \text{)}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{F}{m}$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = F_N^{(n)} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + H_N^{(n)} \Delta F \quad H_N = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 \\ \delta \Delta t \\ 1 \end{bmatrix} \Delta F$$

$$F_N^{(n)} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \beta & \beta \Delta t - k_s \alpha (\Delta t)^3 & \frac{1}{2} \beta \Delta t^2 - c \alpha \Delta t^3 - \frac{1}{2} k_s \alpha \Delta t^4 \\ 0 & \beta - \delta k_s (\Delta t)^2 & \beta \Delta t - c \delta (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} k_s \delta (\Delta t)^3 \\ 0 & -k_s \Delta t & \beta - c \Delta t - \frac{1}{2} k_s (\Delta t)^2 \end{bmatrix}$$

$$C = 2\xi \omega_n m$$

$$\beta = m + C\delta(\Delta t) + K_s \alpha (\Delta t)^2$$

مثال و مثال پس را با استفاده از روش نیاب متوسطات حل کنید

$$k_e = 631.65 \frac{\text{kip}}{\text{in}}, \quad k_1 = 355.3 \frac{\text{kip}}{\text{in}}, \quad m = 1 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}, \quad \xi = 5\%$$

$$\omega_n = 25.13 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T_n = 0.25 \text{ Sec} \Rightarrow C = 2\xi \omega_n m$$

$$\rightarrow C_1 = 2 \times 0.05 \times 25.13 \times 1 = 2.513 \frac{\text{k} \cdot \text{s}}{\text{in}} \quad \text{و } \beta_1, C_1, \text{ و } \alpha_1 \text{ محاسبه کنید}$$

روش نیاب متوسطات ($\delta = 1/2, \alpha = 1/4$)

شرایط اولیه

$$x(0) = -5 \text{ in}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \text{ in/s}$$

$$\Delta t = 0.005 \text{ Sec} \rightarrow \beta_1 = 1 + 2.513 \times 1/2 \times 0.005 + 631.65 \times 1/4 \times (0.005)^2 = 1.01023$$

و F_N محاسبه کنید

$$F_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.00498 & 0.000012 \\ 0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0 & -3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix}$$

H_N به بارگذاری خارجی وابسته است

در اینجا $H_N = 0$ است

(3) محاسبه شرایط اولیه اولیه

$$\ddot{x}(0) = -\frac{c}{m} \dot{x}(0) - \frac{k_s}{m} x(0) = -\left(\frac{2.513}{1}\right) \times 0 - \left(\frac{631.65}{1}\right) \times (-5) = 3158.27 \text{ in/s}^2$$

$$t = \Delta t = 0.005 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = F_N^{(n)} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3158.27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.96092 \\ 15.63144 \\ 3094.303 \end{bmatrix}$$

(4) محاسبه t

و $t = n \Delta t$

$$F_3 = (k_1 x_1) + (k_2 x_2)$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$t = 2\Delta t = 0.015 \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = F_{N_1}^{(m)} \begin{bmatrix} -4.96092 \\ 15.63144 \\ 3094.303 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.84478 \\ 30.82410 \\ 2982.76 \end{bmatrix}$$

$$t = 15\Delta t = 0.075 \text{ s} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{15} \\ \dot{x}_{15} \\ \ddot{x}_{15} \end{bmatrix} = F_{N_1}^{(m)} \begin{bmatrix} 0.61268 \\ 113.32 \\ -671.81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.16875 \\ 109.109 \\ -1012.47 \end{bmatrix}$$

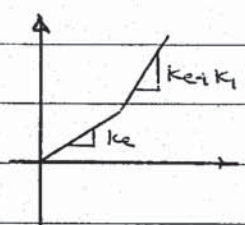
در این مرحله $x_{15} = 1.2$ بی در محدوده $14\Delta t < t < 15\Delta t$ یعنی باید عرض شود
در این مرحله Δt را کاهش می دهیم زیرا اعلی نیست و مقدار کاهش را می دانیم. به این علت به سه اعشار
می رویم، آن را به صورت زیر اصلاح می کنیم.
اصلاح شتاب ه

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{15}^{Modified} &= -\left(\frac{c_2}{m}\right)\dot{x}_{15} - \left(\frac{F_3(x_{15})}{m}\right) = -\left(\frac{3.142}{1}\right)109.109 - \left[\frac{631.65}{1}x_1\right. \\ &\quad \left.+ \left(\frac{631.65 + 355.31}{1}\right)(1.16875 - 1)\right] = -1140.98 \end{aligned}$$

به این شکل شتاب و اوج نیازمند است.
حال با یعنی جدید ω_n ، β و به تبع این F_N تغییر می کند. F_N را می نویسیم
(۲) محاسبه مجدد ω_n ، β و F_N ه

$$\omega_n = 31.42 \text{ rad/s} \rightarrow c_2 = 2 \times 0.05 \times 31.42 \times 1 = 3.142 \text{ K.s/in}$$

$$\beta_2 = 1 + 31.42 \times \frac{1}{2} \times 0.005 + (631.65 + 355.31) \frac{1}{4} \times 0.005^2 = 1.01402$$

$$F_{N_2}^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.00497 & 0.000012 \\ 0 & 0.987834 & 0.004931 \\ 0 & -4.86656 & 0.972343 \end{bmatrix}$$


$$t = 16\Delta t \quad \text{و محاسبه در } t = n\Delta t$$

$$\begin{bmatrix} x_{16} \\ \dot{x}_{16} \\ \ddot{x}_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.00497 & 0.000012 \\ 0 & 0.987834 & 0.004931 \\ 0 & -4.86656 & 0.972343 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.16875 \\ 109.109 \\ 1140.98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.69692 \\ 102.156 \\ -1640.41 \end{bmatrix}$$

↓
 $\begin{bmatrix} \ddot{x}_{15} \\ \dot{x}_{15} \\ x_{15}^{Modified} \end{bmatrix}$

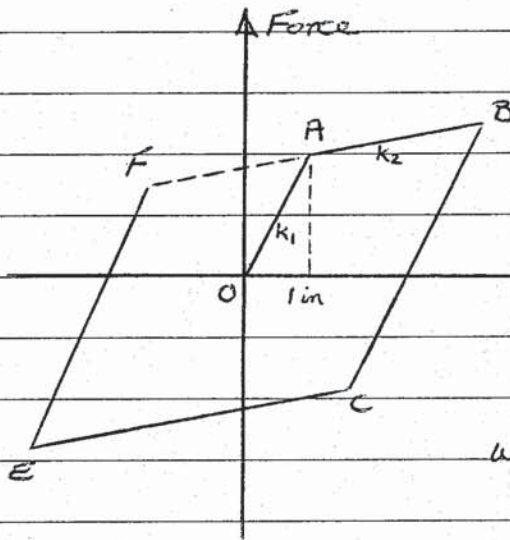
Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

مثال: فرض کنید یک درگاه از دی با حجم $1 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$ و میرایی 5% داشته باشیم. با فرض اینکه سختی اولیه $631.65 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$ باشد و با توجه به سختی رفتار آن داده شده برای $x > 1 \text{ in}$ سختی به 25% سختی اولیه کاهش یابد. با فرض $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ و سیستم از حالت درین تغییر شکل اولیه و بی با سرعت اولیه $40 \frac{\text{in}}{\text{s}}$ شروع به حرکت می کند. با استفاده از روش نیو-راونگ مقادیر مطلوب تغییر یافته سیستم



$$m = 1 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$$

$$\xi = 5\%$$

$$k_1 = 631.65 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

$$k_2 = 0.2 k_1 = 126.33 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

$$\omega_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 25.13 \text{ rad/s} & x \ll 1 \rightarrow T_n = 0.25 \text{ s} \\ \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 11.24 \text{ rad/s} & x \gg 1 \rightarrow T_n = 0.56 \text{ s} \end{cases}$$

$$C_1 = 2 \times 0.05 \times 25.13 \times 1 = 2.513 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}}{\text{in}}$$

$$C_2 = 2 \times 0.05 \times 11.24 \times 1 = 1.124 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}}{\text{in}}$$

$$\Delta t = 0.005$$

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 40 \frac{\text{in}}{\text{s}} \rightarrow \ddot{x}_0 = -\frac{C_1}{m} \dot{x}_0 - \frac{k_1}{m} x_0 = -100.531 \frac{\text{in}}{\text{s}^2}$$

$$\text{از این شیب استفاده می کنیم} \rightarrow \delta = 1/2, \alpha = 1/4$$

$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{2} \times 2.513 \times 0.005 + \frac{1}{4} (631.65) (0.005)^2 = 1.01023$$

$$F_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.00498 & 0.000012 \\ 0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0 & -3.12623 & 0.979745 \end{bmatrix}$$

$$t = \Delta t = 0.005 \text{ sec}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = F_N^{(n)} \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ -100.53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.197975 \\ 39.18981 \\ -223.546 \end{bmatrix}$$

$$F_{S,1} = 631.65 \times 0.197975 = 125.05 \text{ kip}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$t = 2\Delta t = 0.01 \text{ Sec}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = F_{N_1}^{(n)} \begin{bmatrix} 0.197975 \\ 39.18981 \\ -223.546 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.390392 \\ 37.7771 \\ -341.537 \end{bmatrix}$$

$$F_{S,2} = 631.65 \times 0.390392 = 246.59 \text{ kip}$$

$$t = 6\Delta t = 0.03 \text{ Sec}$$

$$\begin{bmatrix} x_6 \\ \dot{x}_6 \\ \ddot{x}_6 \end{bmatrix} = F_{N_1}^{(n)} \times \begin{bmatrix} 0.905802 \\ 30.26189 \\ -648.210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \\ -729.688 \end{bmatrix}$$

$$F_{S,6} = 631.65 \times 1 + 126.33 (1.048499 - 1) = 637.78 \text{ kips}$$

$$t = 0.029 \text{ sec} \quad \text{این تغییر یعنی بصیرت دهنی}$$

در این مرحله کاری را انجام می دهیم اصلاح شتاب است

$$\ddot{x}_6 = -\left(\frac{c_2}{m}\right)\dot{x}_6 - \left[\frac{F_S(x_6)}{m}\right] = \text{اصلاح شتاب}$$

$$= \frac{1.124}{1} \times 26.81715 - \left[\frac{631.65 \times 1 + 126.33 (1.048499 - 1)}{1} \right] = -667.923$$

$$\beta_2 = 1 + 1.124 \times \frac{1}{2} \times 0.005 + 126.33 \times \frac{1}{4} \times 0.005^2 = 1.0036 \quad \text{اصلاح } F_N$$

$$\Rightarrow F_{N_2}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.004996 & 0.000012 \\ 0 & 0.998427 & 0.004982 \\ 0 & -0.62939 & 0.992827 \end{bmatrix}$$

$$t = 7\Delta t = 0.035 \text{ Sec}$$

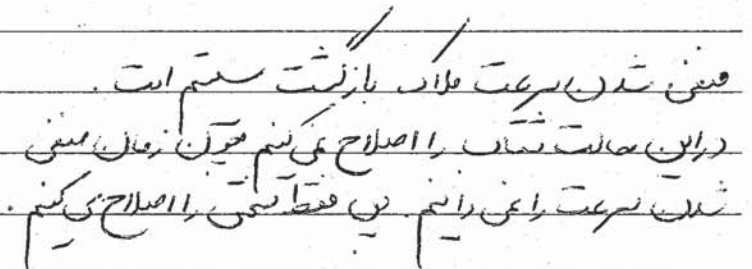
$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \dot{x}_7 \\ \ddot{x}_7 \end{bmatrix} = F_{N_2}^{(n)} \times \begin{bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \\ -667.923 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.17416 \\ 23.44731 \\ -680.011 \end{bmatrix}$$

$$F_{S,7} = 631.65 \times 1 + 126.33 (1.17416 - 1) = 653.66 \text{ kips}$$

SUBJECT:

YEAR: MONTH: Day:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{14} \\ \hat{x}_{14} \\ \hat{x}_{14} \end{bmatrix} = F_{N_2}^{(n)} \begin{bmatrix} 1.564722 \\ 2.464424 \\ 705.767 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.568247 \\ -1.05513 \\ 702.256 \end{bmatrix}$$



$c/2xy \rightarrow t = 15 \Delta t = 0.075$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{15} \\ \hat{\dot{x}}_{15} \\ \hat{\ddot{x}}_{15} \end{bmatrix} = F_{N_1}^{(n)} \begin{bmatrix} 1.568247 \\ -1.05513 \\ 702.256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.554341 \\ 4.50722 \\ 681.687 \end{bmatrix}$$

آمار داری بتواند خوش بیدار است. 2×2 می باشد

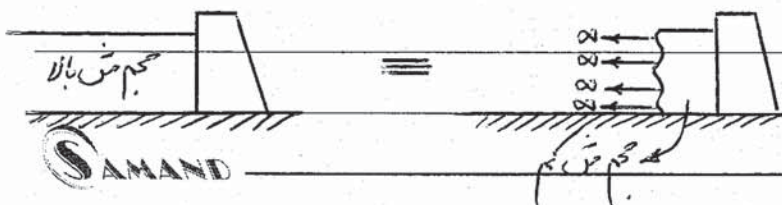
$$t = 36 \Delta t = 0.18 \text{ sec}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{36} \\ \dot{\tilde{x}}_{36} \\ \ddot{\tilde{x}}_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.00498 & 0.000012 \\ 0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0 & 3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.38752 \\ -11.1242 \\ 561.531 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.43598 \\ -8.25808 \\ 584.935 \end{bmatrix}$$

$$F_{s,36} = -560.4 \text{ kN}$$

$$= 631.68 \times 1 + 126.33 \times 0.568 - 631.65 \times (1.568 + 0.4318) = -559.77$$

در جوابی حق شنیدی نهاد الحلال ای نه دلت
تقریبی ای و در رأس عت آغاس مال اورد



Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

مثال: با توجه به مثال قبل در مورد سازه در گام ششم شتاب اصلاح خورد سازه را برای پنج سیم به صورت کلی خواص در بر.

$$\begin{bmatrix} x_6 \\ \dot{x}_6 \\ \ddot{x}_6 \end{bmatrix} = F_{N_1}^{(n)} \begin{bmatrix} 0.905802 \\ 30.26189 \\ -648.210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \\ -729.688 \end{bmatrix}$$

$$F_{s,6} = 631.65 \times 1 + 126.33 (1.048499 - 1) = 637.78 \text{ kips}$$

اصول آرایش ۱
اصلاح سازه $F_{s,6} = -m\ddot{x}_6 - c\dot{x}_6 = -1 \times (-729.688) - 1.124 \times 26.81715 = 699.55 \text{ kips}$

$$\Delta F_{s,6} = 699.55 - 637.78 = 61.76 \text{ kips} \rightarrow \text{برسم کلی سازه}$$

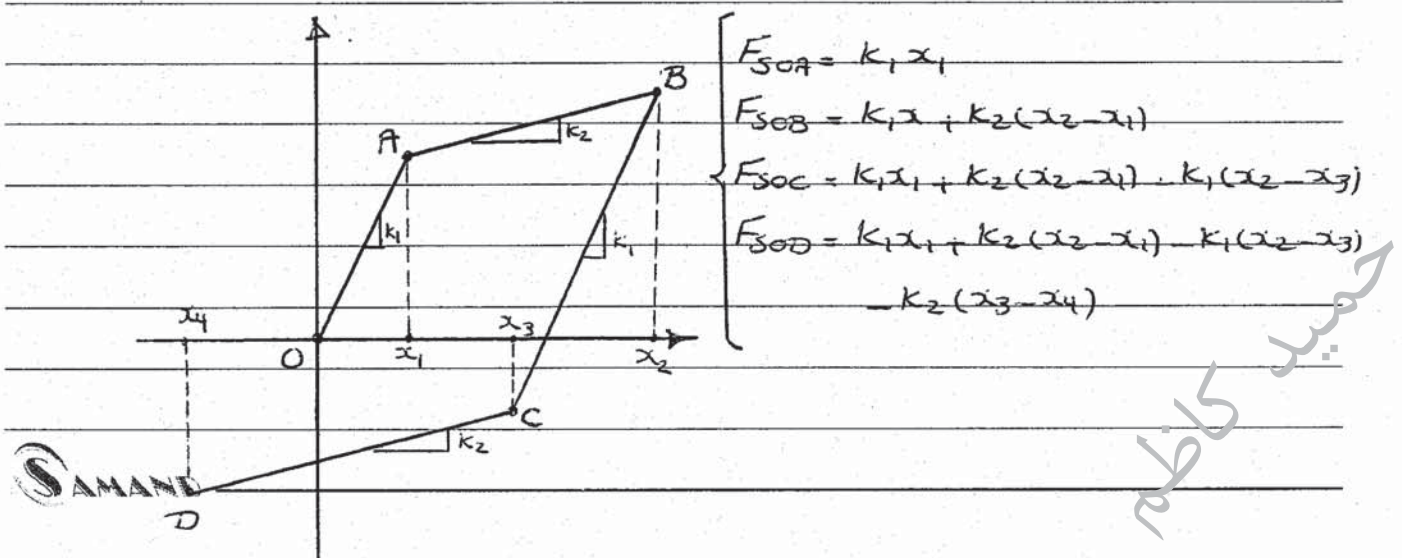
$$m\ddot{x}_7 + c\dot{x}_7 + kx_7 = \Delta F_s$$

این ΔF_s را خورد سازه خارجی ندارد.

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \dot{x}_7 \\ \ddot{x}_7 \end{bmatrix} = F_{N_2}^{(n)} \begin{bmatrix} x_6 \\ \dot{x}_6 \\ \ddot{x}_6 \end{bmatrix} + H_N^{(n)} \Delta F_s$$

$$H_N^{(n)} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 \\ \delta \Delta t \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1.0036} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (0.005)^2 \\ \frac{1}{2} (0.005) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00006 \\ 0.002491 \\ 0.996413 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \dot{x}_7 \\ \ddot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.004996 & 0.00012 \\ 0 & 0.998427 & 0.004982 \\ 0 & 0.62939 & 0.992827 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \\ -729.688 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00006 \\ 0.002491 \\ 0.996413 \end{bmatrix} \times 61.76 = \begin{bmatrix} 1.174106 \\ 23.29351 \\ -679.792 \end{bmatrix}$$



Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

فصل چهارم

سیستم سازه درجه آزادی (صلب مطلق) :

سیستم معادل یک سیستم $6 \times 3 = 18$ درجه آزادی باشد.

رابطه سیستم یک درجه آزادی به شرح زیر بوده :

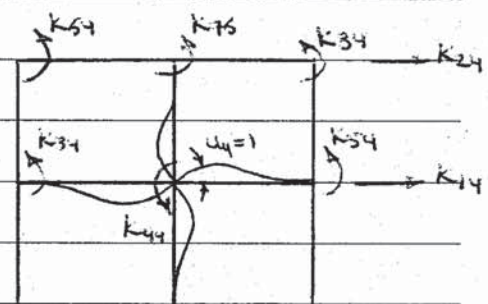
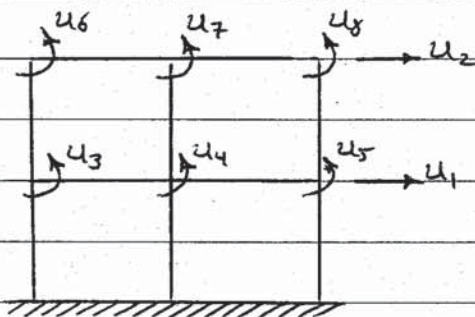
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

در سیستم سازه درجه آزادی با معادله ای طرف هستیم :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

ماتریس مدتی :

در سازه ای با تعداد طبقات کم از یک می محوری صرف نظر می کنیم.
 با فرض صلبیت اعضای گشتی در جهات آزادی افقی رابطه سازه درجه آزادی تقلیل می دهیم.



برای محاسبه گشتی که تغییر مکان واحد در راستای یک درجه آزادی می دهیم و جهت آزادی را می بینیم.

$$F_s = K x = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{s1} \\ F_{s2} \\ \vdots \\ F_{sN} \end{bmatrix}$$

ماتریس مدتی :

صالح تعریف گشتی است با این تفاوت که به جای تغییر مکان واحد سرعت واحد داریم. یعنی جهت مقدار نیروی ایجاد شده در امتداد نام به علت سرعت واحد درجه آزادی در راستای تمام سطوح درجه آزادی نسبت باشد.

Subject:

YEAR:

MONTH:

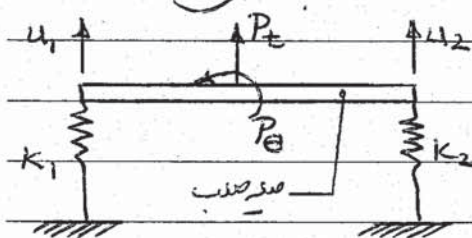
Day:

$$\underline{F_D} = \underline{C} \underline{\dot{u}} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{D1} \\ F_{D2} \\ \vdots \\ F_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم m_{ij} عبارت از نیروی خارجی در امتداد نام حرکت شتاب واحد در امتداد درجه آزادی j ام

$$\underline{F_I} = \underline{m} \underline{\ddot{u}} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{I1} \\ F_{I2} \\ \vdots \\ F_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix}$$

مثال: ه مضاعف شکل صند صلب تغییرات در حجم کل m در دو انتهای مندر روی دو نفر بانجی k_1 و k_2 صلب در دو حرکت نفری تنها مسکن مضاعف شکل قرار دارد با فرض دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل حرکت را بنویسید.



$k_{21} = k_{12} = 0$ چون اثر یک گروه y در راستای x تغییر نمی‌کند.
واحد حجم در گروه y را بنویسیم در گروه y نیروی ایجاد می‌شود.
لازم است دو انتگرال بگیریم؟

$$\begin{matrix} k_{11} = k_1 & k_{21} = 0 & k_{12} = 0 & k_{22} = k_2 \end{matrix} \Rightarrow \underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\ddot{u}}_1 = 1 \quad \underline{\ddot{u}}_2 = 0 \Rightarrow \frac{m}{l} \times \frac{x}{l} \times (\ddot{u} = 1) = \underline{F_I}$$

برای $\ddot{u}_2 = 1$ نیروی انحرافی مثلثی در تیر ایجاد می‌شود.

YEAR: MONTH: DAY:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ & & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \frac{m}{6}$$

$$P_2 = P_{T/2} + P_{\theta/2}$$

m_4	k_4
m_3	k_3
m_2	k_2
m_1	k_1

$$\frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_t}{2} - \frac{P_\theta}{l} \\ \frac{P_t}{2} + \frac{P_\theta}{l} \end{bmatrix}$$

برای کارهای خاصه و قضاوت من توانم هم داد و ستد بکنم تا عاقلان منی قضاوت شود.

اربعاش آزاد سیم چند درجه آزادی

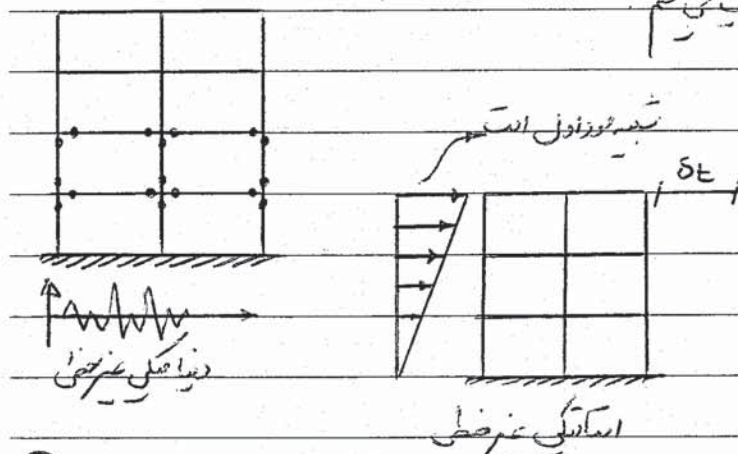
روش مورد بررسی روش مورداست. دانش شکل مورد
علاقه است با موردی جانبی.

- (۱) ابتدائی حصہ

- (۲) زمانه‌ی خطی و

- (۳) انسان کی غرض

- ۱۶) دنیا میں کسی غیر مختص و کل عضو کے ایسا باند غیر مختص دیکھ کر خوف دہی برابر گلاب سے نہ ہوا۔ 0.05 طول عضو از انفصل
- Material, یا غیر مختص تعریف می کنند



روش آنتی‌کلیغ غرضی برای سازه‌های
تلف‌محور، مناسبی ندارد و برای سازه‌های
ایست. روش آنتی‌کلیغ محورها روشی
با نام MPA مطرح کرده‌اند که یک سازه
را با مواد اول و یک سازه با مواد دوم و
با مواد SRSS سازه را می‌دهد.

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2 + k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & -m_4\omega^2 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0$$

نمود انتخاب بین 4 روش چیست؟ در Fema 356 توضیح داده شده است که برای
رنگین نمودن، شکل ساده شده انتخاب روش بررسی شده است.

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (1)$$

$$x = a C_1(\omega t - \alpha) \quad (2) \quad \text{باستفاده از روش آزاد داریم}$$

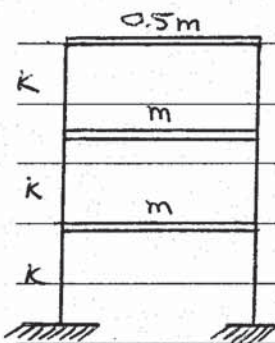
$$(1), (2) \Rightarrow (-\omega^2 m a + k a) C_1(\omega t - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 m + k) a C_1(\omega t - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^2 m + k = 0 \Rightarrow \det |k - \omega^2 m| = 0$$

از حل دترمینان فرکانس طبیعی سیستم $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ نسبت می‌دهد. از این فرکانس طبیعی موردی ساخته می‌شوند $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$

مثال برای ساختن برشی نشان داده شده در شکل مطلوب تقسیم فرکانس طبیعی و شکل
مورد نمونه.



$$m = \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$k - \omega^2 m = \begin{bmatrix} k - \frac{1}{2}m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} 1 - \beta/2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \beta & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \beta \end{bmatrix} \quad (\beta = m\omega^2)$$

برای حل اینگونه درجه‌های مرتبه ۲ ماتریس $Algebra \text{ } F \times 2$ درجه‌های را حسب ω, k, m حل کن پس $k=m=1$ قرار ده و بعد به حسب ω را رسم کرده و به این ترتیب در

SUBJECT:

YEAR: MONTH: DAY:

$$|k - \omega^2 m| = 0 \rightarrow \omega_1 = 0.518 \sqrt{k/m}$$

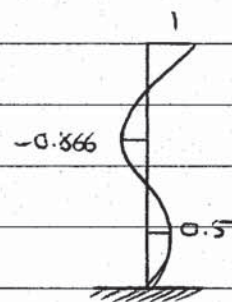
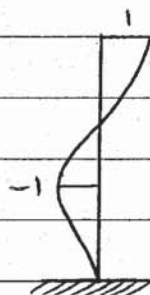
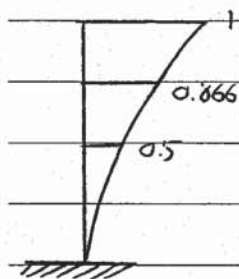
$$\omega_2 = 1.414 \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = 1.932 \sqrt{k/m}$$

$$(k - \omega^2 m) \varphi_i = 0 \rightarrow k \begin{bmatrix} 1 - \beta_{1/2} & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \beta_1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \beta_1 \end{bmatrix} \varphi_i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.866 & -1 & 0 \\ 0 & 1.732 & -1 \\ 0 & -1 & 1.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{فرم } \varphi_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad m \geq n$$

$$\varphi_{11} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0.866 - \varphi_{21} = 0 \\ -\varphi_{21} + 1.732 \varphi_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_{21} = 0.866 \quad \varphi_{31} = 0.5$$



در این نامه ۲۸ اثر عددی با لایم توسط نیروی شلای اعمال می شود و در این نامه ای دیگر این اثر توزیع می شود.

آنانچه عددی از این اثر است که با سطح سطح را از اثر عددی مختلف بدست می آوریم

خاصیت اتحاد مذکور

$$\varphi_j^T \cdot m \cdot \varphi_i = 0$$

$$\varphi_j^T \cdot c \cdot \varphi_i = 0$$

$$\varphi_j^T \cdot k \cdot \varphi_i = 0$$

$$\Phi_i^T \cdot M \cdot \Phi_i = M_i \rightarrow \text{جرم مورد نیاز}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$1) \Phi_i^T \cdot m \cdot \Phi_i = M_i \quad \text{جرم مورد نیاز}$$

شکل مورد نیاز است به جرم فرکانس می بینیم بصورتی که جرم مورد نیاز واحد شود برابر اینضابطه Φ_i را بر $\sqrt{M_i}$ تقسیم می کنند.

$$\Phi_i^T \cdot m \cdot \Phi_i = 1$$

$$\Phi^T \cdot m \cdot \Phi = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \Phi_i^T \cdot K \cdot \Phi_i = M_i \omega_i^2 \xrightarrow{\text{Normalize}} \Phi_i^T \cdot K \cdot \Phi_i = \omega_i^2$$

$$\Phi^T \cdot K \cdot \Phi = \omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

$$3) \Phi_i^T \cdot C \cdot \Phi_i = 2 \xi_i \omega_i M_i \rightarrow \Phi_i^T \cdot C \cdot \Phi_i = 2 \xi_i \omega_i$$

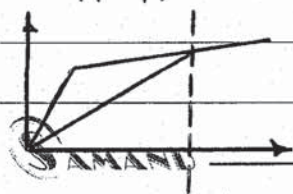
هر مقدار هستی با تغییر شکل بهتری داشته باشیم برای بهتری است یعنی در موردی بالاتر میرایی بهتری است.

$$C = a[E] + b[K]$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \omega_j & \omega_i \\ -1 & 1 \\ \omega_j & \omega_i \end{bmatrix} \times \frac{\omega_j \omega_i}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \end{bmatrix}$$

نکته: ω_j و ω_i فرکانس مورد نیاز در زمان
نکته: ω_j و ω_i درصد میرایی بحرانی در
موردی نام در زمان

نکته: ω_j و ω_i باید طوری باشد که بالای 90٪ فرکانس ساز و آما می کنند. معمولاً 5٪ و 2٪ و 10٪ می باشد.



تفسیر فیزیکی تعادله و کار انجام شده توسط نیروی انحرافی در $\{in\}$ (در حالت تعین مکانی در $\{in\}$ و $\{out\}$ برابر صفر است)

Subject:

Year: Month: Day:

حال با توجه به تعاریف در مثال که دینامیک خطی با استفاده از روش مودال سیستم چون سختی ثابت است با این فرض سیستم سختی است. دینامیک مودال برای حالت خطی بررسی می شود.

اثر غرض در این است و

(۱) Material و k در طول زمان تغییر می کند

(۲) صندلی و فرمان تغییر شکل افتد و در این است که عدد یک کم بر میسد کامل فرق می کند در حالت تغییر شکل بزرگ $\sin \theta \neq \theta$ و $\cos \theta \neq 1$ بنابراین روابط فوق می کند و کار تحیده می گردد

کنترل دینامیک سیستم های صند درجه آزادی و

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t)$$

با استفاده از ارتعاش آزاد φ_i و رابطه می آوریم

$$[\varphi] = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$$

$$\varphi_i^{N \times 1}$$

فرد مثال u سیستم با برابری اساس نیروی دینامیک است و داریم

$$u(t) = \varphi \cdot y(t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i \cdot y_i(t)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \dots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \varphi \dot{y}(t) \\ \ddot{u}(t) = \varphi \ddot{y}(t) \end{cases}$$

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t)$$

$$m \varphi \ddot{y} + c \varphi \dot{y} + k \varphi y = p(t)$$

رابطه φ^T ضرب می بینیم و

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{\Phi}} \ddot{\underline{\underline{y}}} + \underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{\Phi}} \dot{\underline{\underline{y}}} + \underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{k}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{p}}(t)$$

جدول رابطه می بنویسم

$$\underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{\Phi}} \ddot{\underline{\underline{y}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Phi}}_{11} \\ \underline{\underline{\Phi}}_{21} \\ \vdots \\ \underline{\underline{\Phi}}_{N1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Phi}}_{11} & \underline{\underline{\Phi}}_{12} & \dots & \underline{\underline{\Phi}}_{1N} \\ \underline{\underline{\Phi}}_{21} & \underline{\underline{\Phi}}_{22} & \dots & \underline{\underline{\Phi}}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{\Phi}}_{N1} & \underline{\underline{\Phi}}_{N2} & \dots & \underline{\underline{\Phi}}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_N \end{bmatrix} = \underline{\underline{M}}_i \ddot{\underline{\underline{y}}}$$

مورد مورد مورد مورد

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}}_i \ddot{\underline{\underline{y}}}_i + \underline{\underline{C}}_i \dot{\underline{\underline{y}}}_i + \underline{\underline{K}}_i \underline{\underline{y}}_i = \underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{p}}(t)$$

$$\rightarrow \ddot{\underline{\underline{y}}}_i + \frac{\underline{\underline{C}}_i}{\underline{\underline{M}}_i} \dot{\underline{\underline{y}}}_i + \frac{\underline{\underline{K}}_i}{\underline{\underline{M}}_i} \underline{\underline{y}}_i = \frac{\underline{\underline{\Phi}}_i^T}{\underline{\underline{M}}_i} \underline{\underline{p}}(t)$$

$$\rightarrow \ddot{\underline{\underline{y}}}_i + 2\underline{\underline{\zeta}}_i \omega_i \dot{\underline{\underline{y}}}_i + \omega_i^2 \underline{\underline{y}}_i = \frac{\underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{p}}(t)}{\underline{\underline{M}}_i} \quad \underline{\underline{M}}_i = \underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{\Phi}}_i$$

روش های عملی تعیین فرکانس در طبیعت و شکل مورد

(1) روش استودولا

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}}_i = \omega_i^2 \underline{\underline{m}} \underline{\underline{\Phi}}_i$$

$$\rightarrow \underline{\underline{f}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}}_i = \omega_i^2 \underline{\underline{f}} \underline{\underline{m}} \underline{\underline{\Phi}}_i \quad (\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{K}}^{-1})$$

ک و ماتریس معکوس
ف و مکتور معکوس (K⁻¹)

$$\Rightarrow \underline{\underline{I}} \underline{\underline{\Phi}}_i = \omega_i^2 \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\Phi}}_i$$

برای حل طبق رابطه زیر یک شکل موردی
اولیه فرض می کنیم و تکرار می شود
می بینیم معادلات D معادلات معادلات
می باشد

$$\rightarrow \frac{\underline{\underline{\Phi}}_i}{\omega_i^2} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\Phi}}_i$$

$$\rightarrow \frac{\{\underline{\underline{\Phi}}\}^1}{\omega^2} = [\underline{\underline{D}}] \{\underline{\underline{\Phi}}\}^0 \rightarrow \{\underline{\underline{\Phi}}\}^1 = [\underline{\underline{D}}] \{\underline{\underline{\Phi}}\}^0$$

$$\rightarrow \{\underline{\underline{\Phi}}\}^2 = [\underline{\underline{D}}] \{\underline{\underline{\Phi}}\}^1 \rightarrow \{\underline{\underline{\Phi}}\}^r = [\underline{\underline{D}}] \{\underline{\underline{\Phi}}\}^{r-1}$$

$$\rightarrow \frac{\underline{\underline{\Phi}}_i^{(r)}}{\omega_i^2} = \underline{\underline{\Phi}}_i^{(r)} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\Phi}}_i^{(r-1)}, \quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{m}}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

در هر مرحله $\{\bar{\phi}\}^r$ و $\{\phi\}^{r-1}$ با هم اختلاف ناچیز دارند

$$\{\bar{\phi}\}^r = \frac{1}{\omega^2} \{\phi\}^r = \frac{\{\phi\}^{r-1}}{\omega^2}$$

$$\{\bar{\phi}\}^{r-1} = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \{\bar{\phi}\}^r = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{\omega^2} = \frac{m}{k} x_1 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m x_1}}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{11} \\ \bar{\phi}_{12} \\ \vdots \\ \bar{\phi}_{1n} \\ \bar{\phi}_{1n} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \vdots \\ \phi_{1n} \\ \phi_{1n} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\phi}_{1n} = \frac{\phi_{1n}}{\omega^2}$$

	0.5m
K	m
K	m
K	

$$K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{\omega^2} M = K^{-1} M = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 3/2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{\bar{\phi}\}^1 = D \{\phi\}^0 = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 3/2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 9.5 \\ 8 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \{\phi\}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8421 \\ 0.4737 \end{bmatrix} \quad (\{\phi\}^2 = \frac{\{\bar{\phi}\}^1}{9.5 \frac{m}{k}})$$

$$\{\phi\}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8421 \\ 0.4737 \end{bmatrix} \rightarrow \{\bar{\phi}\}^2 = D \{\phi\}^1 = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 3.6579 \\ 3.1579 \\ 1.8158 \end{bmatrix} \rightarrow \{\phi\}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8663 \\ 0.4964 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8663 \\ 0.4964 \end{bmatrix} \rightarrow \{\bar{\phi}\}^3 = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 3.723 \\ 3.223 \\ 1.8597 \end{bmatrix} \rightarrow \{\phi\}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8657 \\ 0.4995 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\{\phi\}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8657 \\ 0.4995 \end{bmatrix} \rightarrow \{\bar{\phi}\}^4 = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 3.7309 \\ 3.2309 \\ 1.8652 \end{bmatrix} \rightarrow \{\phi\}^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.866 \\ 0.499 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.866 \\ 0.499 \end{bmatrix} \rightarrow \{\bar{\phi}\}^5 = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 3.7319 \\ 3.2319 \\ 1.8659 \end{bmatrix} \rightarrow \{\phi\}^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.866 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \omega_1^2 = \frac{1}{\frac{m}{k} \times 3.7319} \rightarrow \omega_1 = 0.518 \sqrt{k/m}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.866 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

مورد دوم در
مورد اول

$$\{\phi\}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \{\phi\}^r = \{\phi\}^r - \frac{(\{\phi\}^T \cdot \{\phi\}^r)}{(\{\phi\}^T \cdot \{\phi\})} \{\phi\}$$

اصلاح شود

$$\Rightarrow \{\phi\}^0 = \{\phi\}^0 - \frac{\{\phi\}^T \cdot \{\phi\}^0}{\{\phi\}^T \cdot \{\phi\}} \{\phi\}$$

اصلاح شود

با این کار اثر مورد اول حذف می شود
حذف می شود

$$\Rightarrow \{\phi\}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.8666 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.8666 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8666 \\ 0.5 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8666 \\ 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.866 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \{\phi\}^0 = \begin{bmatrix} 1.5773 \\ -0.5 \\ -0.713 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\bar{\phi}\}^1 = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 0.6546 \\ -0.1341 \\ -0.4227 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2048 \\ -0.6457 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

DAY:

$$\{\bar{\phi}\}' = \{\phi\}' - \frac{\{\phi\}'^T \underline{M} \{\phi\}'}{\{\phi\}'^T \underline{M} \{\phi\}'} \times \{\phi\}' = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ -0.2047 \\ -0.6457 \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\phi}\}^2 = D \{\phi\}' \rightarrow \{\bar{\phi}\}^2 = \frac{m}{K} \begin{bmatrix} 0.4452 \\ 0.0549 \\ 0.3503 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\phi\}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1232 \\ -0.7867 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}^2 = \{\phi\}^2 - \frac{\{\phi\}'^T \underline{M} \{\phi\}^2}{\{\phi\}'^T \underline{M} \{\phi\}'} \{\phi\}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.123 \\ -0.786 \end{bmatrix}$$

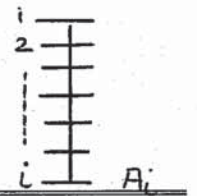
$$\{\bar{\phi}\}^3 = D \{\phi\}^2 = \frac{m}{K} \begin{bmatrix} 0.4670 \\ -0.033 \\ 0.4098 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = 1.414 \sqrt{K/m}$$

(۲) روش حل تدریجی

1		K_1	m_1	
2		K_2	m_2	
3		K_3	m_3	$m_1 \ddot{u}_1$
$\vdots$				$m_2 \ddot{u}_2$
$i-1$			m_{i-1}	$m_3 \ddot{u}_3$
i		K_{i-1}	m_i	
$i+1$		K_i	m_{i+1}	$m_{i-1} \ddot{u}_{i-1}$
		K_{i+1}		$K_{i-1}(u_i - u_{i-1})$
$n-2$			m_{n-2}	
$n-1$		K_{n-2}	m_{n-1}	
n		K_{n-1}	m_n	
		K_n		

$\sum_{j=1}^{i-1} m_j \ddot{u}_j = K_{i-1}(u_i - u_{i-1})$



$A_1 = 1 \rightarrow$ باید $A_{n+1} = 0$ (فرض شود)

Subject:

YEAR: MONTH: Day:

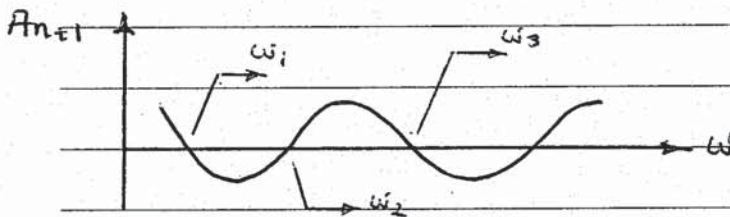
$$u = A \sin \omega t \rightarrow \sum_{j=1}^{i-1} m_j (-A_j \omega^2 \sin \omega t) = k_{i-1} (A_i \sin \omega t - A_{i-1} \sin \omega t)$$

تغییر مکان سقف iام

$$\Rightarrow A_i = A_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} m_j A_j$$

لذا اوله را عدد فرض می کنیم و دافعه بالا ترنس طبقه را یک در نظری می بینیم. اگر لایه عدد درستی باشد باید دافعه پایین ترین طبقه (A_{n+1}) برابر صفر شود. اگر نه باید دوباره سعی در تغییر کنیم.

ω فرضی $\rightarrow A_{n+1}$



این روش فقط برای سیستم شکل قابل بررسی است.

مثال: برای سیستم نشان داده شده در شکل مطلوبت تعیین فرکانس طبیعی و شکل مود مربوطه با استفاده از روش آزمون و خطا.

X برای امتحان می توان به روش های ساده عددی استفاده کرد و با تغییر دادن \omega و محاسبه A_{n+1} می توان به فرکانس طبیعی رسید.

	l	جرم	A	mA	$\sum mA$	$\frac{1}{k_{i-1}}$	$\frac{\omega^2}{k_{i-1}} \sum mA$	$A_i = A_{i-1} - \frac{\omega^2 \sum mA}{k_{i-1}}$
m								
k								
$2m$	1	1m	1	m	m	$\frac{1}{k}$	0.3	0.7
$2k$	2	2m	0.7	1.4m	2.4m	$\frac{1}{2k}$	0.36	0.34
$3m$	3	3m	0.34	1.02m	3.42m	$\frac{1}{3k}$	0.342	0.002 A_{n+1}
$3k$								

$\omega^2 = \alpha (k/m)$

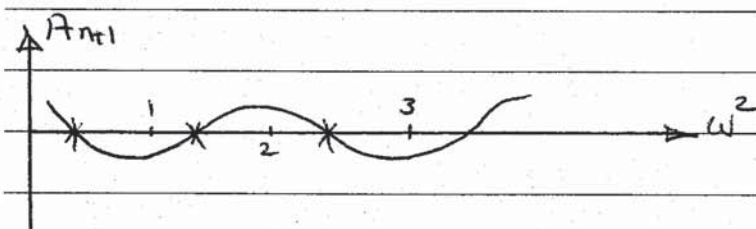
α	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.7	2	2.3	2.6	3
A_{n+1}	9.5907	0.2587	0.002	0.333	0.445	0.33	0.128	0.1227	0.479	0.67	0.525	0.1093	-2

L	A_{i-1}	ω^2	K_{i-1}	$m_{i-1} A_{i-1}$	$\sum_{j=1}^i m_j A_j$	$\omega^2 / K_{i-1} \sum m_j A_j$	$A_i = A_{i-1} - (\omega^2 / K_{i-1} \sum m_j A_j)$
1		αK_m					A_1
2	A_1	αK_m	K_1	$m_1 A_1$			A_2
3	A_2	αK_m	K_2	$m_2 A_2$			A_3

* در رزله سه مولفه داریم اما آنچه به عنوان 100، 30 در نظری نرم مولفه نیست بلکه تخمین از جهت اثر رزله است.

تغیلات بازو 42° بحرانی برای سلامت می باشد
* اگر مولفه تارکچه زمانی داشته باشیم باید حدوداً بدین ضریب اعمال کنیم چون برآورد یک یک در زمان یک و دیگری نیست.

در روش کمی استاتیک و کسین طینی ← 100/ + 30/ است. یک مولفه است
در روش تارکچه زمانی ← 100/ + 100/ است. دو مولفه است.



$$\omega_1 = 0.55 \sqrt{K_m}$$

$$\omega_2 = 1.14 \sqrt{K_m}$$

$$\omega_3 = 1.6 \sqrt{K_m}$$

مورد	A_1	A_2	A_3
اول	1	0.7913	0.3425
دو	1	-0.3041	-0.5596
سه	1	-1.5655	1.1681

فصل پنجم

سیستم صند درجه آزادی غیر خطی 8

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + [k(x)] x(t) = F(t)$$

$$M \ddot{x}_{k+1} + C \dot{x}_{k+1} + k x_{k+1} = F_{k+1} \quad 8 \quad \text{معادله تعادل دینامیکی}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + (1-\delta) \ddot{x}_k \Delta t + \delta \ddot{x}_{k+1} \Delta t \\ x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t + (1/2 - \alpha) \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2 \end{array} \right.$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$m \Delta \ddot{x} + c \Delta \dot{x} + k \Delta x = \Delta F$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = (1-\delta) \ddot{x}_k \Delta t + \delta \ddot{x}_{k+1} \Delta t \\ \Delta x = \dot{x}_k \Delta t + (\frac{1}{2}-\alpha) \ddot{x}_k \Delta t^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} \Delta t^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{k+1} - x_k & \Delta \dot{x} &= \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k & \Delta \ddot{x} &= \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k \\ \Delta F &= F_{k+1} - F_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \Delta \ddot{x} + c [(1-\delta) \ddot{x}_k \Delta t + \delta \ddot{x}_{k+1} \Delta t] + k [\dot{x}_k \Delta t + (\frac{1}{2}-\alpha) \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} \Delta t^2] = \Delta F \\ \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \Delta \ddot{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \Delta \ddot{x} + (1-\delta) \Delta t c \ddot{x}_k + \delta \Delta t c \ddot{x}_{k+1} + \delta \Delta t c \Delta \ddot{x} + \Delta t k \dot{x}_k + (\frac{1}{2}-\alpha) \Delta t^2 k \ddot{x}_k + \alpha \Delta t^2 k \ddot{x}_{k+1} + \alpha (\Delta t)^2 k \Delta \ddot{x} = \Delta F$$

بازنویس $\Rightarrow \Delta \ddot{x} = (M + \delta \Delta t c + \alpha \Delta t^2 k)^{-1} (\Delta F - \Delta t c \ddot{x}_k - \Delta t k \dot{x}_k - \frac{1}{2} \Delta t^2 k \ddot{x}_k)$

بازنویس $\underline{B} = \underline{M} + \delta \Delta t \underline{c} + \alpha (\Delta t)^2 \underline{k}$

$$\begin{cases} \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \Delta \ddot{x} = (\underline{B}^{-1}) \Delta F - (\Delta t \underline{B}^{-1} \underline{k}) \dot{x}_k + (\underline{I} - \Delta t \underline{B}^{-1} \underline{c} - \frac{1}{2} \Delta t^2 \underline{B}^{-1} \underline{k}) \ddot{x}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \Delta \dot{x} = (\delta \Delta t \underline{B}^{-1}) \Delta F - (\underline{I} - \delta \Delta t^2 \underline{B}^{-1} \underline{k}) \dot{x}_k + (\Delta t \underline{I} - \delta (\Delta t)^2 \underline{B}^{-1} \underline{c} - \frac{1}{2} \delta (\Delta t)^3 \underline{B}^{-1} \underline{k}) \ddot{x}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta x = (\alpha \Delta t^2 \underline{B}^{-1}) \Delta F + x_k + (\Delta t \underline{I} - \alpha \Delta t^3 \underline{B}^{-1} \underline{k}) \dot{x}_k + (\frac{1}{2} \Delta t^2 \underline{I} - \alpha (\Delta t)^3 \underline{B}^{-1} \underline{c} - \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^4 \underline{B}^{-1} \underline{k}) \ddot{x}_k \end{cases}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

DAY:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = F_N^{(n)} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + H_N^{(n)} \Delta F$$

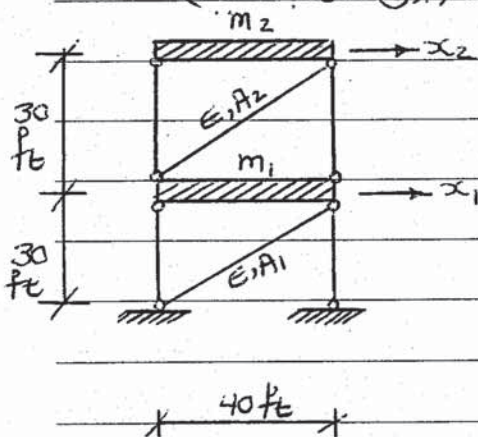
$$H_N^{(n)} = \begin{bmatrix} \alpha (\Delta t)^2 \bar{B}^{-1} \\ \delta \Delta t \bar{B}^{-1} \\ \bar{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$B = M + \delta \Delta t C + \alpha (\Delta t)^2 K$$

I, K, C, M, B

$$F_N^{(n)} = \begin{bmatrix} I & (\Delta t)I & -\alpha (\Delta t)^3 \bar{B}^{-1} K & \frac{1}{2} \Delta t^2 I & -\alpha \Delta t^3 \bar{B}^{-1} C & -\frac{1}{2} \alpha \Delta t^4 \bar{B}^{-1} K \\ 0 & I & -\delta \Delta t^2 \bar{B}^{-1} K & \Delta t I & -\delta (\Delta t)^2 \bar{B}^{-1} C & -\frac{1}{2} \delta \Delta t^3 \bar{B}^{-1} K \\ 0 & -\Delta t \bar{B}^{-1} K & I & -\Delta t \bar{B}^{-1} C & -\frac{1}{2} \Delta t^2 \bar{B}^{-1} K & \end{bmatrix}$$

مثال: قاب پاره‌بندی شده در تصویر است. در صورتی که $m_1 = m_2 = 1 \text{ k.s}^2$ باشد، $E = 37500 \text{ ksi}$ ، $A = A_1 = A_2 = 2.5 \text{ in}^2$ ، $\alpha = 20\%$ باشد. مطلوب است تعیین پاسخ سیستم در صورتیکه این سیستم تحت اثر شتاب اولیه درگرفته قرار گیرد. $\ddot{x}_1 = 0.002 \text{ in/s}^2$ و $\ddot{x}_2 = 0.002 \text{ in/s}^2$ (درش شتاب ثابت) $(l_1 = 12 \text{ in})$ $(x_1)_0 = (x_2)_0 = 0$ ، $(\dot{x}_1)_0 = 30$ ، $(\dot{x}_2)_0 = 50 \text{ in/s}$



$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \frac{EA_1 C_1^2}{l_1}$$

$$K_2 = \frac{EA_2 C_2^2}{l_2}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA_1 C_1^2}{l_1} + \frac{EA_2 C_1^2}{l_2} & -\frac{EA_2 C_1^2}{l_2} \\ -\frac{EA_2 C_1^2}{l_2} & \frac{EA_2 C_2^2}{l_2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2EA C_1^2}{l} & -\frac{EA C_1^2}{l} \\ -\frac{EA C_1^2}{l} & \frac{EA C_2^2}{l} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2.5 \times 37500}{50 \times 12} \left(\frac{4}{5} \right)^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\rightarrow K = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

در این حالت هر دو تار بند در محدوده خطی هستند

اگر تار بند یک وارد محدوده غیر خطی شود

$$K_1 = \begin{bmatrix} (1+\alpha) \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 & -\frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 \\ \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 & \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 \end{bmatrix} = \frac{2.5 \times 37500}{50 \times 12} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \begin{bmatrix} 1.2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

اگر تار بند دو نیز وارد محدوده غیر خطی شود

$$K_2 = \begin{bmatrix} (1+\alpha) \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 & -\alpha \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 \\ -\alpha \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 & \alpha \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}$$

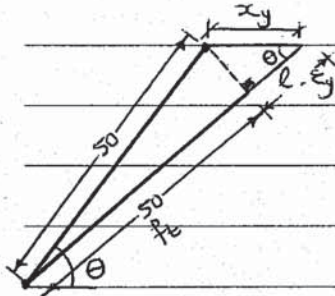
اگر هر دو تار بند وارد محدوده غیر خطی شوند

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 2\alpha \frac{EA}{l} C_{1\theta}^2 & -\frac{\alpha EA}{l} C_{1\theta}^2 \\ -\frac{\alpha EA}{l} C_{1\theta}^2 & \frac{\alpha EA}{l} C_{1\theta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$C = 0.01 K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

خواب

$$\epsilon_y = 0.002 \rightarrow x_y = \frac{l \cdot \epsilon_y}{C_{1\theta}} = \frac{50 \times 12 \times 0.002}{4/5} = 1.5 \text{ in}$$



$|x_1| > 1.5$ → تار بند یک وارد محدوده غیر خطی شود
 $|x_2 - x_1| > 1.5$ → تار بند دو وارد محدوده غیر خطی شود

برای شروع خوانند به فرکانس های طبیعی نیاز داریم

$$\omega_1^2 = \frac{((K_1 + K_2)m_2 + K_2 m_1) - \sqrt{((K_1 + K_2)m_2 + m_1 K_2)^2 - 4m_1 m_2 K_1 K_2}}{2m_1 m_2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{((K_1 + K_2)m_2 + K_2 m_1) + \sqrt{((K_1 + K_2)m_2 + m_1 K_2)^2 - 4m_1 m_2 K_1 K_2}}{2m_1 m_2}$$

AMAND

* این رابطه از حل $|K - m\omega^2| = 0$ بدست آمده است.

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$m_1 = m_2 = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$K_1 = K_2 = 100 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

* در آنالیز دینامیکی غیر خطی شرط اول به شمار نمی آید. اگر شرط وارد شود آنالیز به خطا می افتد.
شرط اول توسط در واقعیت شرط بار نقلی است.

* در آنالیز به هر برداری (A/g) اجازه نداریم که وارد محدوده غیر خطی شویم. این آنالیز به هر برداری برای بار دلی باید به سمت بالا محدود می شود.

* در آنالیز طرح 475 به آنالیز وارد شدن به محدوده غیر خطی دلی دهنده در آنالیز به هر برداری 10 تا 9
به آنالیز نباید وارد محدوده غیر خطی شود.

$$\omega_1 = 0.618 \sqrt{\frac{100}{1}} = 6.18 \text{ rad/s} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{6.18} = 1.02 \text{ Sec}$$

$$\omega_2 = 1.618 \sqrt{\frac{100}{1}} = 16.18 \text{ rad/s} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{16.18} = 0.39 \text{ Sec}$$

$$\text{شرط اول} \rightarrow (x_1)_0 = (x_2)_0 = 0 \quad (\dot{x}_1)_0 = 30 \text{ in/s} \quad (\dot{x}_2)_0 = 50 \text{ in/s}$$

$$m\ddot{x} + kx + cx = 0$$

شرط اول به هر برداری به سمت بالا

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{k}{m}x$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix} \times (-1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ sec}$$

$$q_{k+1} = F_N^{(n)} \cdot q_k$$

(شرط به سمت بالا)

حالت 1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0.97 & 0.015 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0.015 & 0.985 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 50 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2995 \\ 0.499 \\ 29.9 \\ 49.8 \\ -20 \\ -39.85 \end{bmatrix}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$x_1 = 0.2995$$

$$x_2 - x_1 = 0.1995 \text{ in}$$

$$t = 6 \Delta t = 0.06 \text{ sec}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}_6 = F_N = \begin{bmatrix} 1.4725 \\ 2.44551 \\ 28.5005 \\ 47.0445 \\ 59.907 \\ 115.844 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75451 \\ 2.91016 \\ 27.9015 \\ 45.886 \\ 69.804 \\ 133.549 \end{bmatrix}$$

حالت ۲

$$x_2 - x_1 < 1.5$$

نی‌امادند و در محدوده غرضی شده و
همین‌طور چند درجده سختی باقی است.

$$F_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -1.2 & 1 & 0.974 & 0.015 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0.015 & 0.985 \end{bmatrix}$$

باید F_N را عوض کنیم
سختی k_1 می‌باشد.

$$\ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k - \ddot{M} * \ddot{C} * \Delta x - \ddot{M} * \ddot{K}_1 * \Delta x$$

تغییر در این حالت اصلاح می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}_6 = \begin{bmatrix} -59.907 \\ -115.844 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27.9015 & 28.5005 \\ 45.886 & 47.0445 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.75451 & 1.4725 \\ 2.91016 & 2.44551 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47.243 \\ 133.549 \end{bmatrix}$$

$$t = 9 \Delta t = 0.09 \text{ sec}$$

حالت ۳

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -1.2 & 1 & 0.974 & 0.015 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0.015 & 0.985 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.30368 \\ 3.80034 \\ 27.0729 \\ 43.0482 \\ 47.106 \\ 165.641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.57314 \\ 4.22253 \\ 26.8198 \\ 41.3918 \\ 38.129 \\ 179.511 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$(\Delta 2-1)_q = x_2 - x_1 = 4.22253 - 2.57314 = 1.6494 \text{ in}$$

$$F_{N_{12}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.2 & 0.978 & 0.911 \\ 0 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0.011 & 0.989 \end{bmatrix}$$

بی ایند در هم دارد و در ۲
غیر حفظ شد باید FN
x و اصلاح تمام

$$\ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k - M^{-1} C \Delta \dot{x} - N^{-1} K_{12} \Delta x$$

اصلاح شتاب

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47.106 \\ -165.641 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26.8198 & -27.0729 \\ 41.3918 & -43.0482 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.57314 & -2.30368 \\ 4.22253 & -3.80034 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28.79 \\ -167.293 \end{bmatrix}$$

$$t = 22 \Delta t$$

حالت ۲۴

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}_{22} = F_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 5.48433 \\ 7.9641 \\ 20.7054 \\ 20.9052 \\ 78.664 \\ -169.528 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.68745 \\ 8.16468 \\ 19.9188 \\ 19.2100 \\ 82.9 \\ -168.564 \end{bmatrix}$$

$$(\Delta 2-1)_{21} = x_{2,21} - x_{1,21} = 7.9641 - 5.48433 = 2.47978$$

$$(\Delta 2-1)_{22} = x_{2,22} - x_{1,22} = 8.16468 - 5.68745 = 2.47723$$

در این حالت هم ایند شتاب ۲ به جوده حفظ بر می گردد. بی اصلاح شتاب اینجا می رسم.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -78.664 \\ -169.528 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.9188 & -20.7054 \\ 19.21 & -20.9052 \end{bmatrix}$$

در حالت شتاب مقدار
x و y می بینم که سیستم
در حال بار برداری

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.68745 & -5.48433 \\ 8.16468 & -7.9641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83.103 \\ -168.365 \end{bmatrix}$$

(5.1)

YEAR: MONTH: Day:

حالت (د) و

در این کام میزنند 2 و 1 به محدوده خاصی برگشته اند. بی درایی صالت با بدستاب، اصلاح خود را از F_N محدوده خاصی استفاده کنیم.


$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -161.806 \\ -104.706 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.874 + 0.2559 \\ -4.0778 + 3.0307 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.43771 & 7.44836 \\ 9.27412 & -9.30966 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -161.041 \\ -102.708 \end{bmatrix}$$

(1) $x_1 < 1.5$, $x_2 < 1.5$: هر دو در محدوده ضعیف هستند. از K و F_H استفاده می‌شود.

(۳) $1.5 > x_1 - x_2$: هر دو عدد x_1 و x_2 در مجموعه X قرار دارند. از K_{12} و $F_{N_{12}}$ استفاده می کنیم و نتایج اصلاح می کنیم.

میں کہیں، شباب، اصلاح میں نام

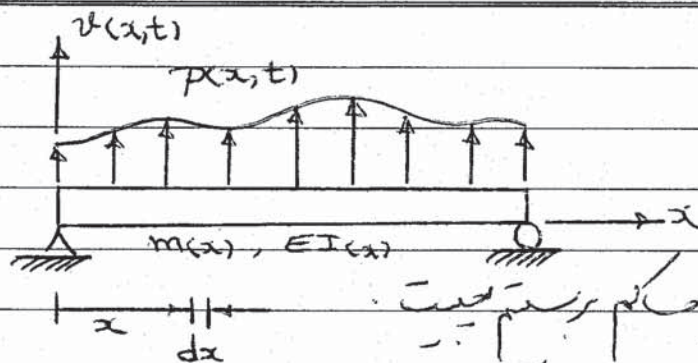
می کنیم و شتاب را اصلاح می کنیم

(5) $k(x_k) < k(x_{k+1})$ و T_k همواره اِصم و مناصبه ضعیف باشد. این از k استفاده کرد

شتاب را اصلاح می کنیم

این و در مدت یک سال و نیم در این شهر و در این

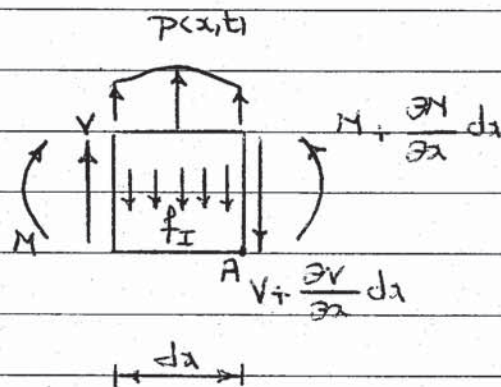
0. 75 11 11 11 11 11



سیستم دینامیکی

الف) حالت کلی (تیر جکشی)

اولین کار این است که سیستم معادله دینامیکی را بنویسیم و به دست آوریم.



f_I و نیروی داخلی ناشی از دینامیک (شرط)
* در این حالت از نیروی دورانی صرف نظر می کنیم
و تغییر شکل
m حجم واحد طول

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + P \cdot dx - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) - f_I dx = 0 \quad (1)$$

$$F_y = (m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = P - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3) \quad (\text{رابطه مشتق و بار گسسته})$$

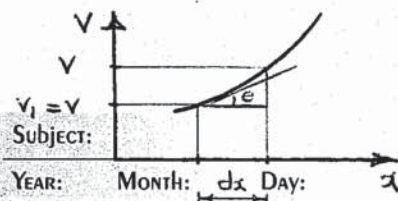
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M + V dx + P \cdot dx \left(\frac{dx}{2}\right) - f_I \left(\frac{dx}{2}\right) dx - (M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (4) \quad (\text{رابطه مشتق و بار گسسته})$$

$$(3), (4) \Rightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \quad (5)$$

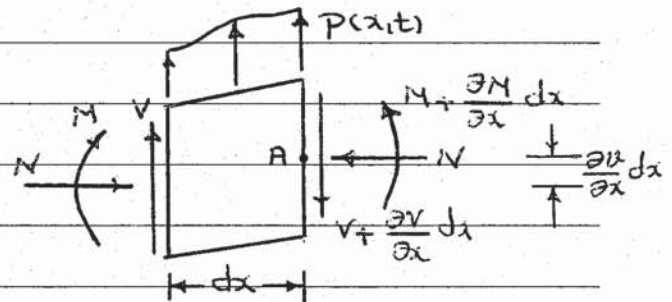
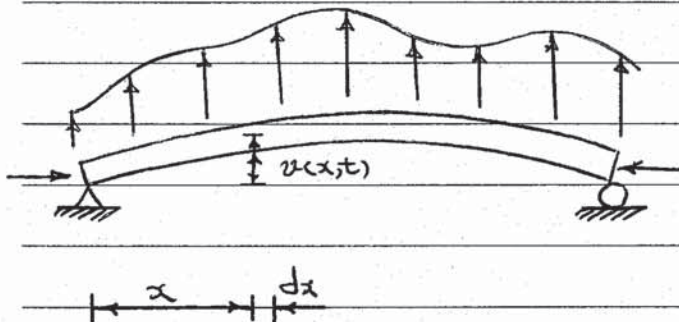
$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \quad v = v(x,t)$$



$$\begin{aligned} \text{تangent } t_{ge} &= \partial V / \partial x \\ V_2 - V_1 &= dx \cdot t_{ge} \\ \rightarrow V_2 &= V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \end{aligned}$$

ب) جنبش تر همراه با اثرات نیروی گوری :



$$\sum M_A = 0 \rightarrow M + V dx - (M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) - N \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0$$

$$\Rightarrow V = N \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0 \rightarrow V &= N \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} \\ \sum F_y = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} &= -p - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p$$

* از تغییر شکل های برشی (ترک عمیق) و انحراف دورانی صرف نظر شده است.

ج) جنبش تر شامل استجابات برشی :

$$f_D(x) = c(x) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} = P(x,t)$$

در اینجا اثر نیروی گوری را در نظر نمی گیریم.

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

۱) ارتعاش آزاد غیر استهلاکی و
 تعداد درجه های سیستم به شکل زیر است. برابر محاسبه شکل های مورد نیاز برای سیمت بصورت زیر عمل می کنیم:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u(x, t) = \varphi(x) \cdot y(t)$$

$\varphi(x)$ شکل مودی است

$y(t)$ و (مقدار حرکت در

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \varphi(x) \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = 0$$

این را بر $\varphi(x) \cdot y(t)$ تقسیم می کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \varphi / \partial x^4}{\varphi(x)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 y(t) / \partial t^2}{y(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^4 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \alpha^4 \varphi(x) = 0 & (1) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega^2 y(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

از قبل داریم:

$$\alpha^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

(2) حل می شود $\rightarrow y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = \frac{y(0)}{\omega} \sin \omega t + y(0) \cos \omega t$

(1) حل می شود $\rightarrow \varphi(x) = C e^{sx}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \alpha^4 \varphi(x) = 0 \\ \varphi(x) = C e^{sx} \end{cases} \rightarrow (s^4 - \alpha^4) C e^{sx} = 0 \quad (C e^{sx} \neq 0) \rightarrow s^4 - \alpha^4 = 0$$

$$\Rightarrow s = \pm \alpha, \pm i\alpha$$

$$\varphi(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{i\alpha x} + C_4 e^{-i\alpha x}$$

$$\begin{cases} \sinh ax = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) \\ \cosh ax = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) \end{cases}$$

Subject:

Year:

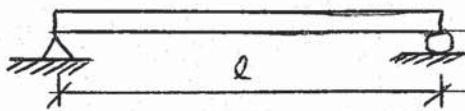
Month:

Day:

$$\begin{cases} e^{\pm iax} = \cosh ax \pm i \sinh ax \\ e^{\pm iax} = \cosh ax \pm i \sinh ax \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = A_1 \sin ax + A_2 \cosh ax + A_3 \sinh ax + A_4 \cosh ax$$

الف) شرایط دیر (در x=0)



تشریح

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ EI \phi''(0) = 0 \\ \phi(l) = 0 \\ EI \phi''(l) = 0 \end{cases}$$

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow A_4 + A_2 = 0$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow -A_2 + A_4 = 0 \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

$$\Rightarrow EI \phi''(0) = 0$$

$$\phi(l) = 0 \Rightarrow A_1 \sin al + A_3 \sinh al = 0$$

$$\phi''(l) = 0 \Rightarrow a^2 l (A_1 \sin al + A_3 \sinh al) = 0 \Rightarrow 2A_3 \sinh al = 0$$

$$\Rightarrow A_3 = 0$$

$$\phi(l) = A_1 \sin al = 0 \quad A_1 \neq 0 \Rightarrow \sin al = 0 \Rightarrow al = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

* اگر A_1 برابر صفر شود دیگر شکل خاصی باقی نمی ماند

$$\begin{cases} al = n\pi \\ a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI} \end{cases} \Rightarrow \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}} = \frac{(\frac{n\pi}{l})^4 EI}{\bar{m}} \Rightarrow \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

شرایط دیر طبیعی

$$\phi(x) = A_1 \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Subject:

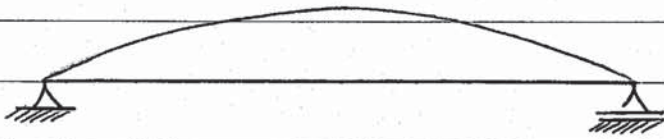
Year:

Month:

Day:

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

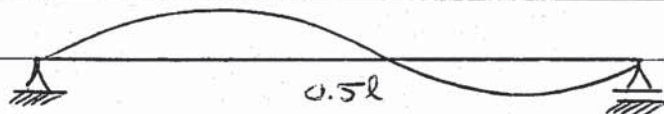
$$\omega_n = (\pi n)^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$



$$\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$$

اولین حالت

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$



$$\varphi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}$$

دومین حالت

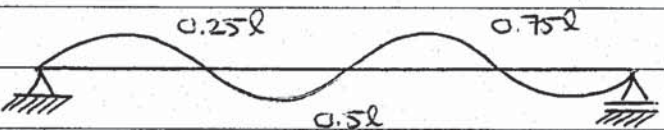
$$\omega_2 = 4\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$



$$\varphi_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{l}$$

سومین حالت

$$\omega_3 = 9\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$



$$\varphi_4(x) = \sin \frac{4\pi x}{l}$$

چهارمین حالت

$$\omega_4 = 16\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$

* تعداد مودهای مورد استفاده در کتب سازه لار یعنی 3 عددی باشد و چهار عددی که 5 عددی باشد.

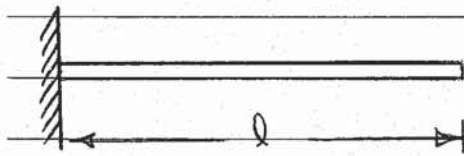
Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

ب) فرکانس و مد ترکیبی را در ۳



شرایط مرزی

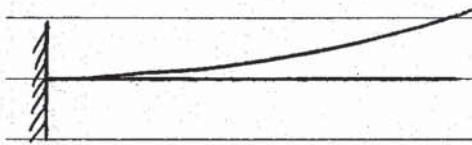
$$\begin{cases} \phi(0) = \phi'(0) = 0 \\ \phi''(l) = \phi'''(l) = 0 \end{cases}$$

$$\omega_n = \left(\frac{\pi(n-1/2)}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

$$\phi_n = b_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) + c_1 \cosh a_n x - c_1 \sin a_n x$$

$$a_n = \frac{\omega_n^2 \bar{m}}{EI}$$

$$b_n = \frac{c_1 \cosh a_n l - c_1 \sin a_n l}{\sinh a_n l - \sin a_n l}$$



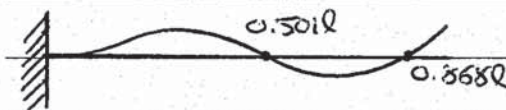
$$\omega_1 = (1.875)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

مورد اول



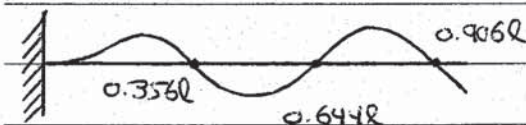
$$\omega_2 = (4.694)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

مورد دوم



$$\omega_3 = (7.855)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

مورد سوم



$$\omega_4 = (10.954)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

مورد چهارم

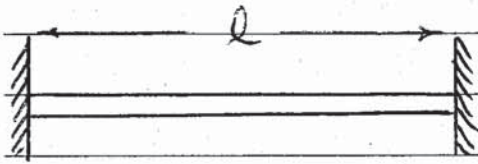
Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

ج، فرکانسی و صورت در یک سر داره

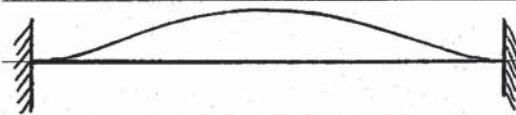


$$\omega_n = \left(\frac{(n+1/2)\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

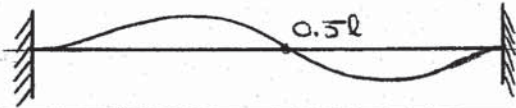
$$\varphi_n(x) = b_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) + C_1 \cosh a_n x - C_2 \sin a_n x$$

$$a_n = \frac{\omega_n^2 m}{EI}$$

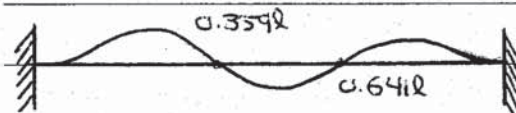
$$b_n = \frac{C_1 a_n l - C_2 \sinh a_n l}{\sinh a_n l - \sin a_n l}$$



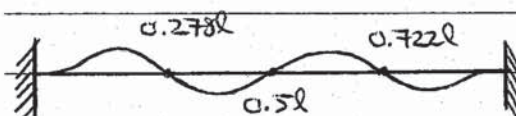
$$\omega_1 = 22.373 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad \text{نود اول}$$



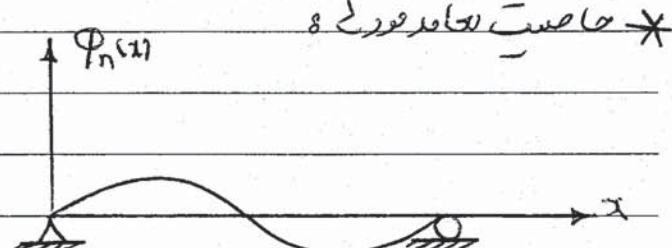
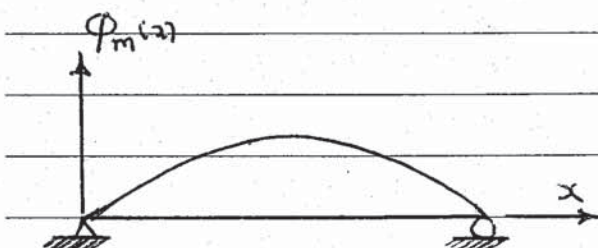
$$\omega_2 = 61.6728 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad \text{نود دوم}$$



$$\omega_3 = 120.90341 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad \text{نود سوم}$$



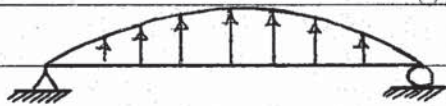
$$\omega_4 = 19.985 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad \text{نود چهارم}$$



* خاصیت نود در نود

تفسير فيزيكي لقانون مورد ه كار انجام شده توسط نیروی انبري مورد n (f_{In}) به جهت تغيير مكانی
مورد m (u_m) برابر صفر است. $\phi_m^T \cdot m \cdot \phi_n = 0$ $\leftarrow$ سيم خنجر در كنار سيم

$$f_{Im} = \bar{m}(x) \phi_m(x) \cdot \omega_m^2$$



$$f_{In} = \omega_n^2 \bar{m}(x) \phi_n(x)$$



قانون نيوتن ه كار انجام شده توسط نیروی انبري f_{In} روی جابه جایی مورد m برابر با كار انجام شده توسط نیروی انبري f_{Im} روی جابه جایی مورد n ϕ_n .

$$\int_0^l f_{In} \cdot \phi_m(x) dx = \int_0^l f_{Im} \cdot \phi_n(x) dx$$

طبق قانون نيوتن خواصم داشت ه

$$\int_0^l \omega_n^2 \cdot \phi_m(x) \bar{m}(x) \phi_n(x) dx = \int_0^l \omega_m^2 \phi_n(x) \bar{m}(x) \phi_m(x) dx$$

$$\Rightarrow (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l \phi_m(x) \phi_n(x) \bar{m}(x) dx = 0$$

$$\omega_n^2 - \omega_m^2 \neq 0 \Rightarrow \int_0^l \phi_m(x) \phi_n(x) \bar{m}(x) dx = 0$$

سيم های سويه

اين خاصيت در شكل زیر هم بيان می گردد ه

$$\int_0^l EI \phi_m''(x) \phi_n''(x) dx = 0$$

برابر محاسبه فرکانس دريم ه

$$\omega_j^2 = \frac{k}{m} = \frac{\int_0^l EI(x) (\phi_j'')^2 dx}{\int_0^l m(x) (\phi_j')^2 dx}$$

(۲) ارتباط اجباري ه

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1)$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot y_i(t) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right] y_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} m \phi_i(x) \ddot{y}_i(t) = P(x, t)$$

با استفاده از خاصیت تعاد و در نظر گرفتن در $\phi_n(x)$ و انتگرال گیری داریم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \left[\int_0^l \phi_n \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2}) dx \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{y}_i(t) \int_0^l m \phi_i \phi_n dx = \int_0^l P(x, t) \phi_n dx$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_n(t) \int_0^l m(x) \phi_n^2(x) dx + y_n(t) \int_0^l \phi_n(x) \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 \phi_n}{dx^2}) dx$$

$$= \int_0^l \phi_n(x) P(x, t) dx \quad (3)$$

$$M_n = \int_0^l \phi_n^2(x) \cdot m(x) dx \quad (4) \quad \text{حجم محکم یافته نظیر شکل مورد n}$$

می توان نشان داد که

$$\int_0^l \phi_n(x) \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 \phi_n}{dx^2}) dx = \omega_n^2 \int_0^l \phi_n^2(x) \cdot m(x) dx \quad (5)$$

$$(3), (4), (5) \Rightarrow M_n \ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 M_n y_n(t) = P_n(t) = \int_0^l \phi_n(x) P(x, t) dx$$

$$P_n(t) = \int_0^l \phi_n(x) \cdot P(x, t) dx \quad \text{نیروی محکم یافته نظیر شکل مورد n}$$

* برای تعیین پاسخ سیستم مورد نیاز در نظر بگیریم؟ برای تعیین پاسخ و تعداد مورد نیاز باید
را نباید فراموش کنیم. اگر چه به تعدادی ملکات باشد - با 3، 4 مورد حد اکثری رسم اما اگر ملکات
نیروی خاصی در اصل (آرشیو، شکر) باشد حتماً باید به 100 مورد رسم برسیم.
پس برای تعداد مورد (وقت) رسم و ملکات بررسی عالی هم است.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) y_n(t)$$

مثال و پاسخ ریاضیاتی سیستم گسترده با استفاده از روش روی حجم اندازی مورد نیاز برای سازه غیر صلب
حتت بار پل ای ای اعلاقی در مرکز سازه را ارزیابی کنید.

محل تکیه معادله دینر استیل و

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = P_0$$

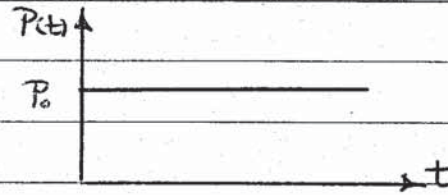
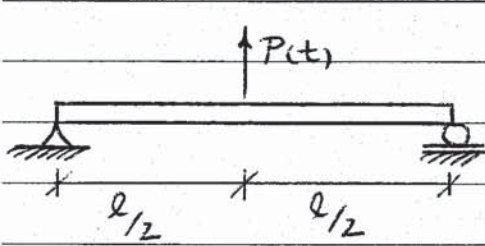
Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\rightarrow u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - C_1 \omega t)$$



$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$

یک سیستم n درجه آزادی را به n سیستم یک درجه آزادی تبدیل می کنیم

$$M_n = \int_0^l \phi_n^2(x) m(x) dx = \bar{m} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{\bar{m} l}{2}$$

جرم کل تیر = $\bar{m}$

$$P_n = P_0 \phi_n(x=l/2) = P_0 \sin \frac{n\pi l/2}{l} = P_0 \alpha_n$$

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & n=1,5,9,\dots \\ -1 & n=3,7,11,\dots \\ 0 & n=\text{زوج} \end{cases}$$

$$M_n \ddot{y}_n + \omega_n^2 M_n y_n = P_n$$

$$\rightarrow \frac{\bar{m} l}{2} \ddot{y}_n + (n\pi)^4 \frac{EI}{m l^4} \times \frac{\bar{m} l}{2} y_n = \alpha_n P_0$$

$$\rightarrow y_n(t) = \frac{2P_0 \alpha_n}{\bar{m} l \omega_n^2} (1 - C_1 \omega_n t)$$

y_n متحرک خود را نشان می دهد

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0 \alpha_n}{\bar{m} l \omega_n^2} (1 - C_1 \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

از رابطه بالا با هم جمع می کنیم و جواب می دهیم

$$u(x,t) = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 EI} \left(\frac{1 - C_1 \omega_1 t}{1} \times \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1 - C_1 \omega_3 t}{81} \times \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1 - C_1 \omega_5 t}{625} \times \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right)$$

$$u(l/2, t) = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 EI} \left(\frac{1 - C_1 \omega_1 t}{1} + \frac{1 - C_1 \omega_3 t}{81} + \frac{1 - C_1 \omega_5 t}{625} + \dots \right)$$

(میزان)

تغییر مکان محل اعمال بار

برای محاسبه پاسخ استاتیکی باید تمام $1 - C_1 \omega_n t$ را به صفت تبدیل دهیم (چون پاسخ دینر استیل $\frac{P_0}{k} (1 - C_1 \omega_n t)$ است، استاتیکی نشان می باشد)

$$u(l/2) = \frac{P_0 l^3}{48 EI} \times \frac{1}{1.0147} \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \dots \right)$$

در اینجا جدول 98 پاسخ سازدهای دهد

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

حال در مورد شکل حرکت دینامیکی و استاتیکی بحث می‌کنیم

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = EI \sum_1^{\infty} \frac{2P_0 \alpha_n}{m l \omega_n^2} (1 - C_1 \omega_n t) \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$M(x,t) = \frac{-2P_0 l}{\pi^2} \left(\frac{1 - C_1 \omega_1 t}{1} \times \frac{\sin \pi x}{l} - \frac{1 - C_1 \omega_3 t}{9} \frac{\sin 3\pi x}{l} + \frac{1 - C_1 \omega_5 t}{25} \frac{\sin 5\pi x}{l} + \dots \right)$$

$$M(l/2, t) = \frac{-2P_0 l}{\pi^2} \left(\frac{1 - C_1 \omega_1 t}{1} + \frac{1 - C_1 \omega_3 t}{9} - \frac{1 - C_1 \omega_5 t}{25} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\omega_1} M(l/2) = \frac{-P_0 l}{4} \times \frac{1}{1.232} (1 + 1/9 + 1/25 + 1/49 + \dots)$$

در اینجا باید در نظر گرفت ۱۱ عدد اول حدود ۹۵٪ مثلاً در اینجا را هم داشت

از لحاظ اداری و ادبی، این بابا باید بود حداقل تعداد عدد در نظر گرفته شده اهمیت خواهد داشت

مثال: به یک سازه پل در یک شکل زیر، در دو سر آن نیروی دینامیکی و استاتیکی $P_0 \sin 3\omega t$ به پل اعمال می‌شود. در تحلیل خود تنها ۳ عدد اول را منظور کنید

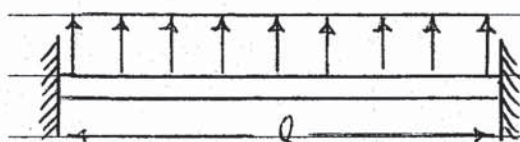
$$P(x,t) = P_0 \sin 3\omega t$$

$$EI = 30 \times 10^8 \text{ lb/in}^2 \quad \bar{m} = 0.1 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2/\text{in}$$

$$P_0 = 200 \text{ lb/in}$$

$$\bar{\omega} = 300 \text{ rad/s}$$

$$l = 240 \text{ in}$$



$$\left. \begin{matrix} \varphi_n \\ \omega_n \end{matrix} \right\} \rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \cdot \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = \frac{\int_0^l P(x,t) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l \bar{m} \varphi_n^2(x) dx} = \frac{200 \int_0^l \varphi_n(x) dx}{0.1 \int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \sin 3\omega t$$

$$I_n = \frac{\int_0^l \varphi_n(x) dx}{\int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \Rightarrow \text{حالت جواب پل} y_n(t) = \frac{2000 I_n}{\omega_n^2 - 300^2} \times \sin 3\omega t$$

حال به ازای مدای مختلف یا بایخ سیستم را طبق جدول زیر می‌بینیم

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \text{ یا } P_0 \cos \omega t \rightarrow \begin{cases} x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ x_p(t) = D \sin \omega t \text{ یا } D \cos \omega t \end{cases}$$

Subject:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Year:

Month:

Day:

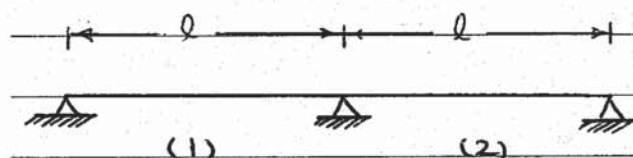
$$D = \frac{P_0/k}{1-\beta^2} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Mode	ω_n	I_n	$y_n = \frac{2000 I_n}{\omega_n^2 - 3\pi^2}$	$\Phi_n (x=l/2)$
1	67.28	0.838	-0.0914	1.588
2	185.45	0	0	0
3	363.56	0.364	0.0173	-1.41
4	600.98	0	0	0
5	897.76	0.2383	0.00065	1.414

$$u(l/2, t) = (1.588 \times (-0.0914) - 1.41 \times 0.0173 + 1.414 \times 0.00065) \sin 300t$$

$$= -0.0541 \sin 300t$$

تیر لای سه اسیر



الف) دورگه

برای محاسبه فرکانس، راجه جانبی باشد شرط مرزی که 8 تایی باشد اعمال گردد

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = 0 \\ \varphi_1'(l) = \varphi_2'(0) \end{array} \right\} \text{شرط مرزی}$$

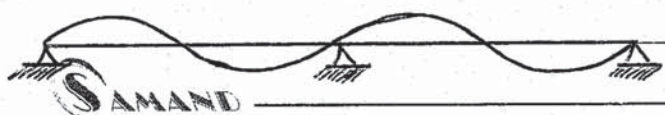
$$\begin{array}{l} \varphi_1(l) = 0 \\ \varphi_2(l) = 0 \\ \varphi_1''(l) = \varphi_2''(0) \end{array}$$



$$\omega_1^2 = \frac{EI(\pi)^4}{ml^4}$$



$$\omega_2^2 = \frac{EI(3\pi)^4}{ml^4}$$



$$\omega_3^2 = \frac{EI(2\pi)^4}{ml^4}$$

حمید کاظمی

Subject:

Year:

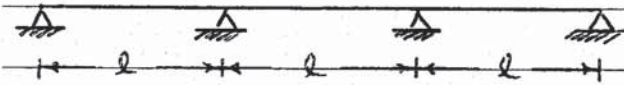
Month:

Day:



$$\omega_4^2 = \frac{EI(7.06)^4}{\bar{m}l^4}$$

ب) ۳ ذره



$$\omega_1^2 = \frac{EI(\pi)^4}{\bar{m}l^4}$$



$$\omega_2^2 = \frac{EI(3.57)^4}{\bar{m}l^4}$$



$$\omega_3^2 = \frac{EI(4.3)^4}{\bar{m}l^4}$$

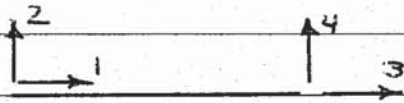
فصل هشتم

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:



$\bar{m}, E, A, l$

کامل دینامیکی ضرایب

الف) ضرایب (روابط)

۱) ماتریس سختی

$$\underline{P} = \underline{k} \cdot \underline{\delta} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

۲) ماتریس جرم

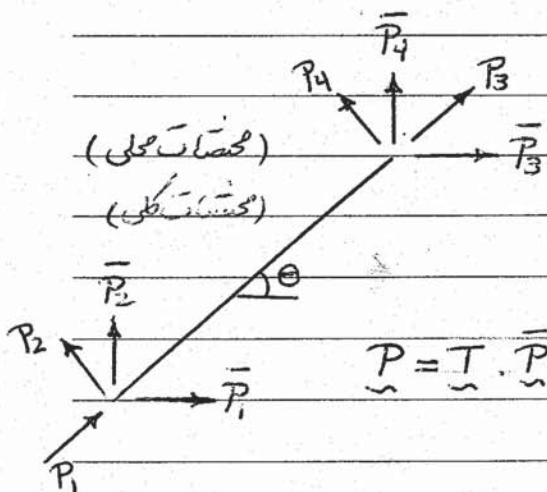
۱-۲) ماتریس جرم متمرکز

$$\underline{M} = \frac{\bar{m}l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۲) ماتریس جرم پخش

$$\underline{M} = \frac{\bar{m}l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

انتقال محاورات



$$\underline{P} = \underline{T} \cdot \underline{\bar{P}}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\underline{T}} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\underline{\underline{\delta}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\bar{\delta}}}$$

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\delta}} \Rightarrow \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\bar{P}}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\bar{\delta}}}$$

طرفین را در $\underline{\underline{T}}^T$ ضرب می کنیم. $\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{T}}^{-1}$ ماتریس معکوس ماتریس $\underline{\underline{T}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\bar{P}}} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\bar{\delta}}} \rightarrow \underline{\underline{I}} \underline{\underline{\bar{P}}} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\bar{\delta}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{P}}} = \underbrace{\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{K}}}$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{T}}$$

$\underline{\underline{K}}$ و ماتریس سختی عضو در مختصات کلی

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{T}}$$

$\underline{\underline{M}}$ و ماتریس جرم عضو در مختصات کلی

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{T}}$$

$\underline{\underline{C}}$ و ماتریس میرایی عضو در مختصات کلی

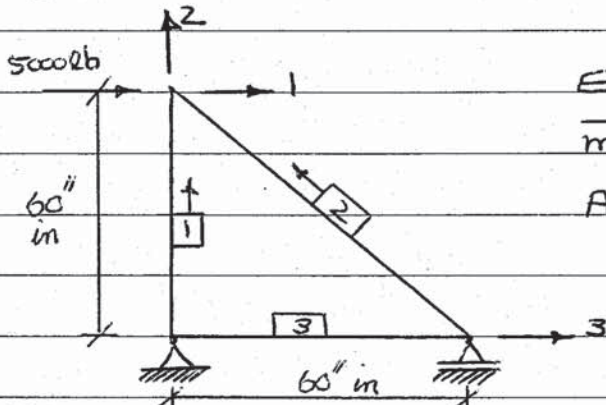
مثال: خنجر بای در تعدادی شکل زیر باشد عضو $\bar{m}$ داده شده مفروض است. با توجه به اطلاعات داده شده مطلوب است:

الف) ماتریس سختی، جرم و انتقال برای هر سه عضو

ب) تعیین فرکانس های طبیعی و اشکال مودی خنجر

ج) پاسخ دینامیکی خنجر تحت نیروی 5000 lb گرفته به صورت افقی در جهت راست برای $t = 1$

اعمال می شود بدین ترتیب آورده



$$E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

$$\bar{m} = 0.1 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2/\text{in}$$

$$A = 10 \text{ in}^2$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

$$\theta = 90^\circ$$

الف) عضو ۱

$$\underline{k}_1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_1 = \frac{m\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{k}_1 = \underline{T}_1^T \cdot \underline{k}_1 \cdot \underline{T}_1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_1 = \underline{T}_1^T \cdot \underline{M}_1 \cdot \underline{T}_1 = \frac{m\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\theta = 135^\circ$$

ب) عضو ۲

$$\underline{k}_2 = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_2 = \frac{\sqrt{2}m\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{k}_2 = \frac{EA}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_2 = \frac{m\ell}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\theta = 0$$

عضو ۳

$$\underline{k}_3 = \underline{k}_3 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 3$$

$$\underline{M}_3 = \underline{M}_3 = \frac{m l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = 10 \text{ in}^2, \quad l = 60'' , \quad \bar{m} = 0.1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{in} , \quad E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

$$\underline{k}_s = 10^6 \begin{bmatrix} 1.768 & -1.768 & -1.768 \\ -1.768 & 6.768 & 1.768 \\ -1.768 & 1.768 & 6.768 \end{bmatrix} \quad \underline{M}_s = \begin{bmatrix} 4.828 & 0 & 1.414 \\ 0 & 4.828 & 0 \\ 1.414 & 0 & 4.828 \end{bmatrix}$$

Symmetric

ب) فرکانس کے شکل مورے

$$\underline{M}_s \ddot{\underline{y}} + \underline{k}_s \underline{y} = 0$$

$$\text{Det} |\underline{k}_s - \omega^2 \underline{M}_s| = 0 \implies \begin{cases} \omega_1 = 415 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 1034 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 1526 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$(\underline{k}_s - \omega^2 \underline{M}_s) \underline{a} = 0$$

$$\implies \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.216 \\ 0.274 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5.988 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1.524 \end{bmatrix}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:

برای نرمالیزه کردن نسبت به ماتریس جرم بصورت زیر عمل می کنیم بطوری که $\underline{a}^T \underline{M}_s \underline{a} = 1$ می کنیم

$$\sqrt{\underline{a}_1^T \underline{M}_s \underline{a}_1} = 2.489 \quad \sqrt{\underline{a}_2^T \underline{M}_s \underline{a}_2} = 14.695 \quad \sqrt{\underline{a}_3^T \underline{M}_s \underline{a}_3} = 4.066$$

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.402 \\ 0.087 \\ 0.11 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.373 \\ -0.272 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_3 = \begin{bmatrix} 0.246 \\ 0.246 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

ج. پاسخ دینامیکی:

$$\underline{M}_s \ddot{\underline{y}} + \underline{K}_s \underline{y} = \underline{F}(t) \quad \underline{y} = \underline{\phi} \underline{z}$$

$$\Rightarrow \underline{M}_s \underline{\phi} \ddot{\underline{z}} + \underline{K}_s \underline{\phi} \underline{z} = \underline{F}(t)$$

$$\underline{\phi}_n^T \underline{M}_s \underline{\phi} \ddot{\underline{z}} + \underline{\phi}_n^T \underline{K}_s \underline{\phi} \underline{z} = \underline{\phi}_n^T \underline{F}(t) \quad \text{این طرفین را در } \underline{\phi}_n^T \text{ ضرب می کنیم داریم}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = \underline{\phi}_n^T \underline{F}_n = \sum \phi_{in} F_i$$

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + (415)^2 z_1 = 5000 \times 0.402 = 2010 \\ \ddot{z}_2 + (1034)^2 z_2 = 5000 \times 0.068 = 340 \\ \ddot{z}_3 + (1526)^2 z_3 = 5000 \times 0.246 = 1230 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2010}{415^2} (1 - C_{1415t}) \\ z_2 = \frac{340}{(1034)^2} (1 - C_{1034t}) \\ z_3 = \frac{1230}{(1526)^2} (1 - C_{1526t}) \end{cases}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\underline{y} = \underline{\phi} \cdot \underline{z} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.402 & 0.068 & 0.246 \\ 0.087 & 0.373 & -0.246 \\ 0.11 & -0.272 & -0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 10^{-3} (4.893 - 4.692 C_1 415t - 0.022 C_1 1034t - 0.13 C_1 1526t)$$

$$y_2 = 10^{-3} (1.004 - 1.015 C_1 415t - 0.119 C_1 1034t + 0.13 C_1 1526t)$$

$$y_3 = 10^{-3} (0.999 - 1.284 C_1 415t + 0.087 C_1 1034t + 0.195 C_1 1528t)$$

اگر سفت در صورت حذف عمل کند می توان آن را بصورت دو عدد بکثیر نمود در شش در فضا
خروج از هر فرقی آن نزدیک مقدار یعنی یک باشد و در این نامه آباری اگر فضا در فضا
کلیه (مقدار نوشته) نسبت به تغییر مکان وسط پلاست از یک مقداری کمتر باشد می توان
بکثیر دو عددی این نام دارد.

ب) ضرایب سه بعدی 8

$$\underline{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} = \frac{\bar{m} l^3}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

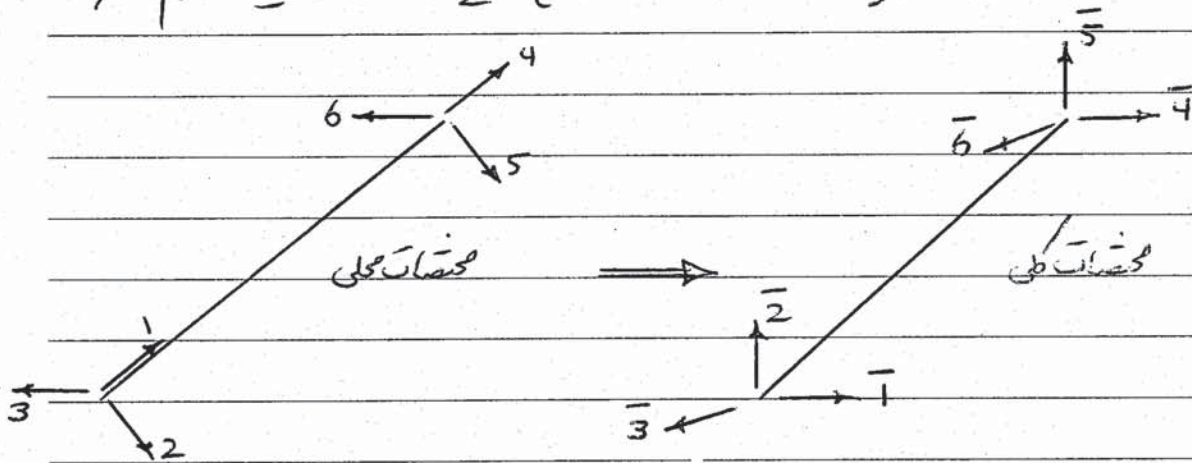
Subject:

Year:

Month:

Day:

$$\text{ماتریس جسم تکرکز} = \frac{\bar{m}l}{2} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$



$$T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T_1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T_1}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T_1}} = \begin{bmatrix} c_{1xx} & c_{1xy} & c_{1xz} \\ c_{1yx} & c_{1yy} & c_{1yz} \\ c_{1zx} & c_{1zy} & c_{1zz} \end{bmatrix}$$

c_{xy} : کسینوس زاویه محور محلی x با محور محلی y

$$\begin{cases} \underline{\underline{\bar{K}}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{\bar{M}}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{T}} \end{cases}$$

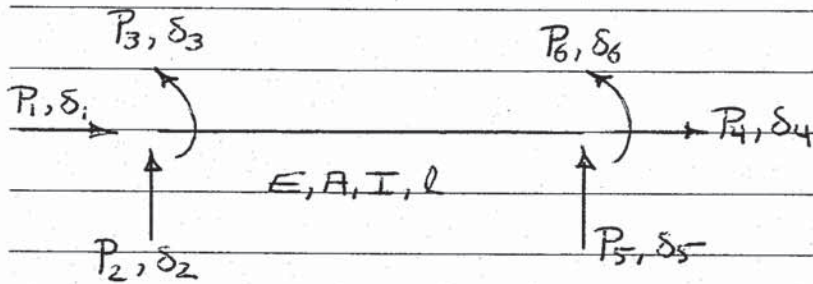
Subject:

Year:

Month:

Day:

کلیل دینا اصلی قات، نو لکھو



(۱) ماتریس سختی

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{A l^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{A l^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 6l & 2l^2 \\ \frac{A l^2}{I} & 0 & 0 & \frac{A l^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

(۲) ماتریس جرم
(۱-۲) جرم متمرکز

$$M = \frac{ml}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(۲-۲) جرم موزون

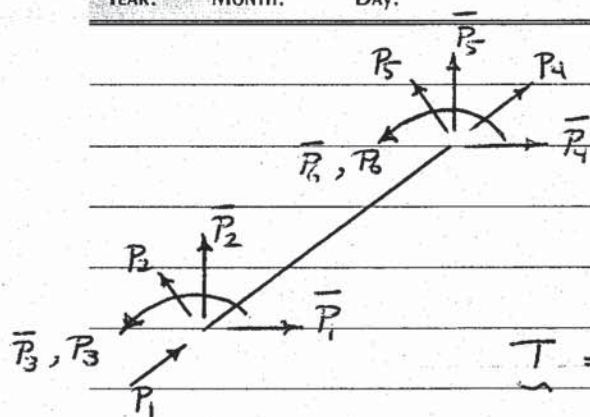
$$M = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & 22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Subject:

Year:

Month:

Day:



و انرژي انشغال محسبات

$$T = \begin{bmatrix} C1\theta & S1\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S1\theta & C1\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C1\theta & S1\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S1\theta & C1\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۳: قاب شکل مقابل با دو عضو پست و سخت در انتهای درجه آزادی می باشد. با استفاده از ماتریس پست و سختی و انرژي انشغال محسبات

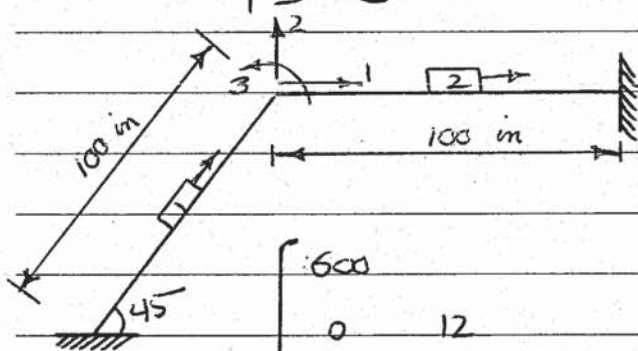
الف) تعیین فرکانس های طبیعی و شکل مود در پست و سختی
ب) در صورتیکه این قاب تحت اثر نیروی $100,000 \text{ lb}$ به طور ناایستایی (در راستای درجه آزادی) قرار گیرد، با صرف نظر کردن از میرایی، معادلات تعیین پاسخ سیستم

$$E = 10^7 \text{ lb/in}^2$$

$$A = 6 \text{ in}^2$$

$$I = 100 \text{ in}^4$$

$$\bar{m} = 4.2 \text{ lb.sec}^2/\text{in}$$



$$k_1 = k_2 = 10000$$

$$\begin{bmatrix} 600 & 0 & 12 & 0 & 600 & 4000 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2000 & 0 & -600 \\ 600 & 0 & 0 & 0 & 600 & 4000 \\ 4000 & -600 & 0 & -600 & 4000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$140$$

$$0 \quad 156$$

$$0 \quad 2200 \quad 4000$$

$$M_1 = M_2 =$$

$$70 \quad 0 \quad 0 \quad 140$$

$$0 \quad 54 \quad 1300 \quad 0 \quad 156$$

$$0 \quad -1300 \quad -3 \times 10^4 \quad 0 \quad -2200 \quad 40000$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\underline{T}_2 = \underline{I} \quad \underline{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

عضویت ۱

$$\underline{K}_1 = \underline{T}_1^T \cdot \underline{K}_1 \cdot \underline{T}_1 = 10^6$$

$$\begin{bmatrix} 0.306 & & & & & \\ & 0.294 & 0.306 & & & \\ & -0.424 & 0.42 & 40 & & \\ & -0.306 & -0.294 & 0.424 & 0.306 & \\ & 0.294 & -0.306 & -0.424 & 0.294 & 0.306 \\ & 0.424 & 0.424 & 20 & 0.424 & 0.424 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_1 = \underline{T}_1^T \cdot \underline{M}_1 \cdot \underline{T}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 148 & & & & & \\ & 8 & 148 & & & \\ & 1556 & 1556 & 40000 & & \\ & 62 & 8 & 919 & 148 & \\ & 8 & 62 & 919 & -8 & 148 \\ & 909 & -909 & -30000 & 1556 & -1556 & 40000 \end{bmatrix}$$

عضویت ۲

$$\underline{K}_2 = \underline{K}_2$$

$$\underline{M}_2 = \underline{M}_2$$

$$\underline{K} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.906 & & \\ & 0.294 & 0.318 \\ & 0.424 & 0.176 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 288 & & \\ & -8 & 304 \\ & 1566 & 644 & 80000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} |\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 25.26 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 31.24 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 64.9 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Subject:

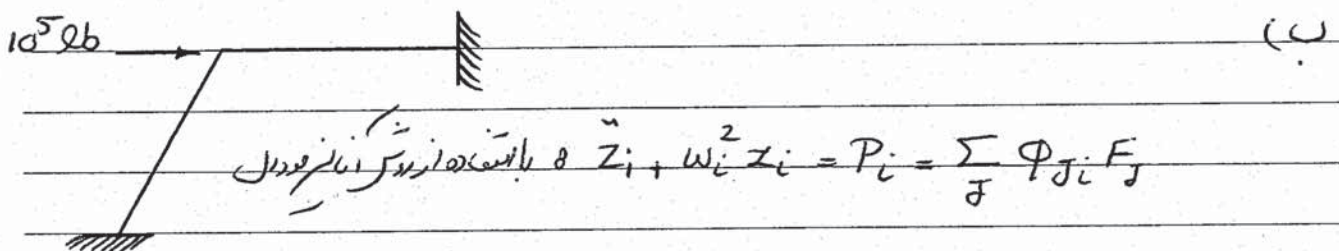
Year:

Month:

Day:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{\phi} = 0 \Rightarrow \underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.238 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sqrt{\underline{\phi}_1^T \underline{M}_1 \underline{\phi}_1} = 45.81$$

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.0218 \\ 0.0527 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 0.00498 \\ 0.00206 \\ 0.00341 \end{bmatrix}, \quad \underline{\phi}_3 = \begin{bmatrix} 0.0583 \\ 0.0241 \\ -0.0016 \end{bmatrix}$$



$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = P_i = \sum_j \phi_{ji} F_j$$

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + 638 z_1 = 2180 \\ \ddot{z}_2 + 978 z_2 = 498 \\ \ddot{z}_3 + 4212 z_3 = 5830 \end{cases} \rightarrow z_i = \frac{P_i}{\omega_i^2} (1 - C_1 \omega_i t)$$

$$\begin{cases} z_1 = 3.417 (1 - C_1 25.26 t) \\ z_2 = 0.51 (1 - C_1 31.24 t) \\ z_3 = 1.384 (1 - C_1 64.9 t) \end{cases}$$

$$\underline{y} = \underline{\phi} \cdot \underline{z}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0.1577 - 0.0745 C_1 25.26 t - 0.00259 C_1 31.24 t - 0.0807 C_1 64.9 t \\ y_2 = 0.1457 + 0.18 C_1 25.26 t - 0.00105 C_1 31.24 t - 0.0333 C_1 64.9 t \\ y_3 = 0.005 + 0.0474 C_1 25.26 t - 0.00174 C_1 31.24 t + 0.0022 C_1 64.9 t \end{cases}$$

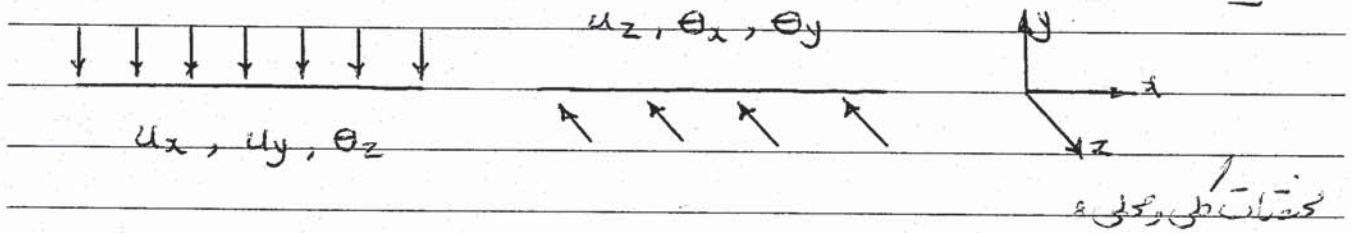
Subject:

Year:

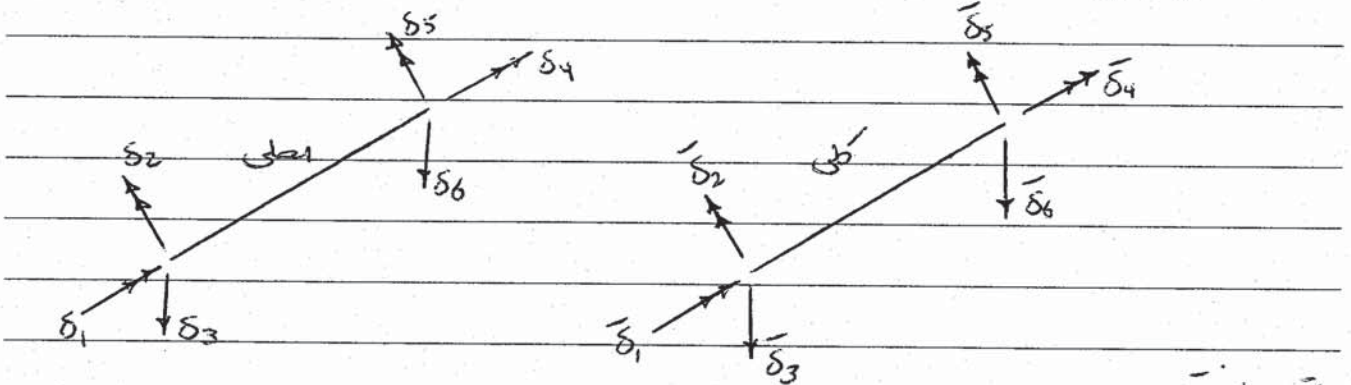
Month:

Day:

کتاب دینا سکی شکل کے



محکمات طر و محلی



قانون سختی

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{JGl^2}{EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4l^2 & +6l & 12 & 0 & 0 \\ 0 & +6l & 2l^2 & +6l & 0 & 0 \\ -\frac{JGl^2}{EI} & 0 & 0 & \frac{JGl^2}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 2l^2 & +6l & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & -6l & -12 & 0 & -6l & 12 \end{bmatrix}$$

قانون حجم عناصر

$$M = \frac{m l}{420} \begin{bmatrix} 140 J/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4l^2 & 22l & 156 & 0 & 0 \\ 0 & 22l & 3l^2 & 13l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3l^2 & 13l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13l & 54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نائب Paul

این قانون است

Subject:

Year:

Month:

Day:

علاوه بر حجم متر مربع

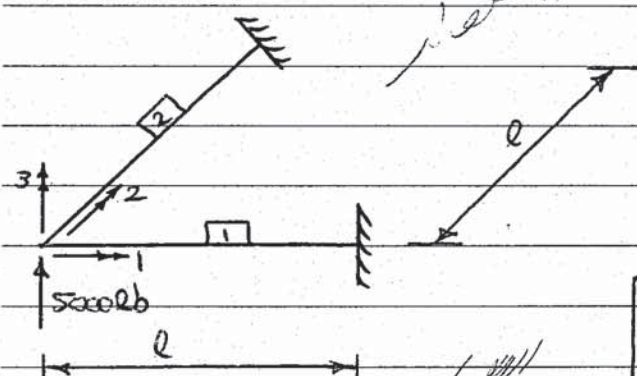
$$M = \frac{m \ell}{2} \begin{bmatrix} J/A & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & J/A & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الغالب محسبات

$$T = \begin{bmatrix} C1\theta & S1\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S1\theta & C1\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C1\theta & S1\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S1\theta & C1\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۳: یک تیر با دو عضو پیوسته و سه درجه آزادی نشان داده شده مفروض است.
الف) فرکانس های طبیعی و شکل مودی آن را تعیین کنید.
ب) در صورتیکه این تیر شکست تحت اثر نیروی 5000 lb در راستای درجه آزادی 3 قرار گیرد پاسخ سیستم درجه شکل خواهد شد.

$$\begin{aligned} A &= 10 \text{ in}^2 & \ell &= 60 \text{ in} \\ I &= 100 \text{ in}^4 & J &= 200 \text{ in}^4 \\ \bar{m} &= 10 \text{ lb.s}^2 & E &= 30 \times 10^6 \text{ Psi} \\ G &= 12 \times 10^6 \text{ Psi} \end{aligned}$$



$$k_1 = k_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & -40 & 0 & 0 \\ 200 & 5 & 0 & 100 & -5 & 0 \\ 0.167 & 0 & 5 & -0.167 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 200 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 72$$

40 → 2880
200 → 14400
5 → 360

SAMAND

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$(1) \text{ محور } \rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \underline{T_1} = \underline{I} \Rightarrow \underline{\bar{K}_1} = \underline{K_1}$$

$$(2) \text{ محور } \rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\underline{T_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{K}_2} = \underline{T_2}^T \cdot \underline{K_2} \cdot \underline{T_2} =$$

	1	2	3	
	14400			1
	0	720		2
	-360	0	12	3
	7200	0	-360	14400
	0	-720	0	0
	360	0	-12	-360
				1/12
	1	2	3	

x 13888

$$\underline{\bar{K}} = \begin{bmatrix} 210 & 0 & -5 \\ & 210 & 5 \\ & & 0.333 \end{bmatrix} \times 10^6$$

ماتریس سفتی

$$\underline{M_1} = \underline{M_2} =$$

	2500	0	0	-1250	0	0
		20570	1886	0	-15430	1114
			223	0	-1114	0
				2500	0	0
					20570	-1886
						223

4377 $\frac{I \cdot m}{m}$

$$\underline{T_1} = \underline{I} \Rightarrow \underline{\bar{M}_1} = \underline{M_1}$$

Subject:

YEAR:

MONTH:

Day:

$$\underline{M}_2 = \underline{T}_2^T \underline{M}_2 \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 20570 & 0 & -1886 & 15430 & 0 & 1114 \\ 0 & 2500 & 0 & 0 & -1250 & 0 \\ 0 & 0 & 93600 & 1114 & 0 & 0 \\ 15430 & 0 & 1114 & 20570 & 0 & 1886 \\ 0 & -1250 & 0 & 0 & 2500 & 0 \\ 1114 & 0 & 0 & 1886 & 0 & 223 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}' = \begin{bmatrix} 23070 & 0 & -1886 \\ 0 & 23070 & 1886 \\ 0 & 0 & 187200 \end{bmatrix}$$

حاصل شده از تبدیل دینامیکی می شود

$$\text{Det } |\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0 \rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= 0.713 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 45.45 \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= 45.45 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad [\underline{a}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 42.04 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\underline{a}_1^T \underline{M} \underline{a}_1} = 1.818 \times 10^4 \quad \sqrt{\underline{a}_2^T \underline{M} \underline{a}_2} = \sqrt{\underline{a}_3^T \underline{M} \underline{a}_3} = 0.0215 \times 10^4$$

$$\underline{\varphi} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.55 & 46.55 & 46.55 \\ -0.55 & 46.55 & 46.55 \\ 23.32 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = 5000 \text{ N} \quad F_1 = F_2 = 0 \quad (b)$$

$$\ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = P_n = \sum \varphi_{in} F_i$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + 0.509 z_1 &= 11.66 \rightarrow z_1 = \frac{11.66}{0.509} (1 - \cos 0.713t) \\ \ddot{z}_2 + 9110 z_2 &= 0 \rightarrow z_2 = 0 \\ \ddot{z}_3 + 9110 z_3 &= 0 \rightarrow z_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{y} = \underline{\varphi} \cdot \underline{z} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.55 & 46.55 & 46.55 \\ -0.55 & 46.55 & 46.55 \\ 23.23 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times (1 - \cos 0.713t)$$

YEAR:

MONTH:

Day:

$$M = \frac{mQ}{420}$$

10. عمان انٹرنیٹ

ماتریس حجم متغیر $\bar{N} = \frac{me}{2} [1 \ 1 \ 1 \ I_{\frac{1}{A}} \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ I_{\frac{1}{A}} \ 0 \ 0]$

N8 تعداد درجه آزادی ندارد

بخت در مورد بدست آوردن پاسخ نسبی

$$\underline{y} = \sum_1^N \underline{\varphi}_i(x) \cdot z_i(t)$$

$$\underline{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_s \ddot{\underline{y}} + \underline{K}_s \underline{y} = \underline{F}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{M}_s \sum_1^N \underline{\varphi}_i \ddot{z}_i(t) + \underline{K}_s \sum_1^N \underline{\varphi}_i z_i(t) = \underline{F}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi}_j^T \cdot \underline{M}_s \sum_1^N \underline{\varphi}_i \ddot{z}_i + \underline{\varphi}_j^T \underline{K}_s \sum_1^N \underline{\varphi}_i z_i = \underline{\varphi}_j^T \underline{F}(t) \quad 1 \leq j \leq N$$

$$\Rightarrow (\underline{\varphi}_j^T \underline{M}_s \underline{\varphi}_j) \ddot{z}_j + (\underline{\varphi}_j^T \underline{K}_s \underline{\varphi}_j) z_j = \underline{\varphi}_j^T \underline{F}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_j + \omega_n^2 z_j = \underline{\varphi}_j^T \underline{F}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_j + \omega_n^2 z_j = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]_j \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}_j = (\varphi F)_j$$

$$\Rightarrow z_j = \frac{(\varphi F)_j}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$$

$$\underline{y} = \underline{\varphi} \cdot \underline{z}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Subject:

YEAR: MONTH: DAY:

YEAR: MONTH: DAY:

YEAR: MONTH: DAY:

Subject: _____

Year: _____

Month: _____

Day: _____



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

تمرین درس :

دینامیک سازه‌ها

استاد :

جناب آقای دکتر خوشنودیان

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(کارشناس ارشد عمران گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی دکترا گرایش سازه North Carolina State University)

تابستان ۱۳۹۱

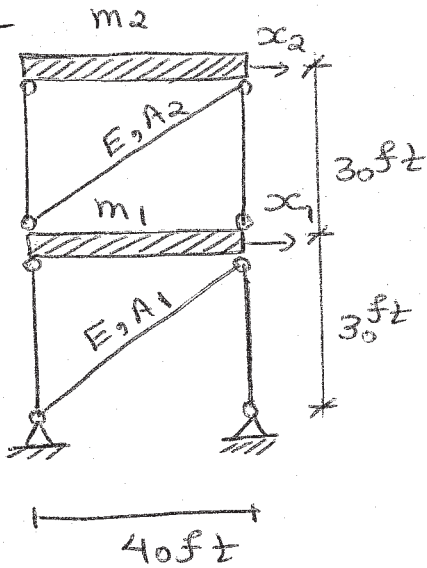
حمید کاظم

« آنالیز غیر خطی سیستم محدود در این درس »

دینامیک سازه I

درس: فرامرز خوشنویس

تمرین شماره ۲ بر نامه نویسی



۱- سیستم دودرجه آزادی مطابق شکل مفروضات ۱ در صورت زیر:

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ k.s}^2/\text{in} \quad A_1 = A_2 = 2,5 \text{ in}^2$$

$$E = 37500 \text{ ksi} \quad \alpha = 20\%$$

با فرض اینکه حد تغییر نسبی $E_y = 0,006$ برای کسینوس دینامیک

باشد و $\Delta t = 0,02 \text{ sec}$ و شرایط اولیه صفر فرض گردد با استفاده

از دینامیک شتاب ثابت متوسط و شتاب خطی، پاسخ سازه

شامل تغییر مکان و سرعت و شتاب دو طبقه تابع زمان تحت رکورد زلزله الشتر ارائه نماید

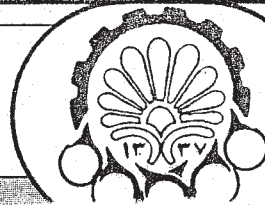
۲- در مسئله قبل به ازای گام‌ها زیر دقت پاسخ را بدست آورید

$$1- \Delta t = 0,1$$

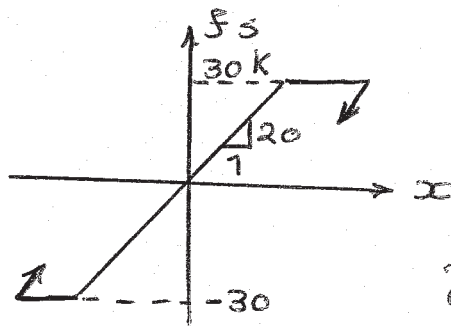
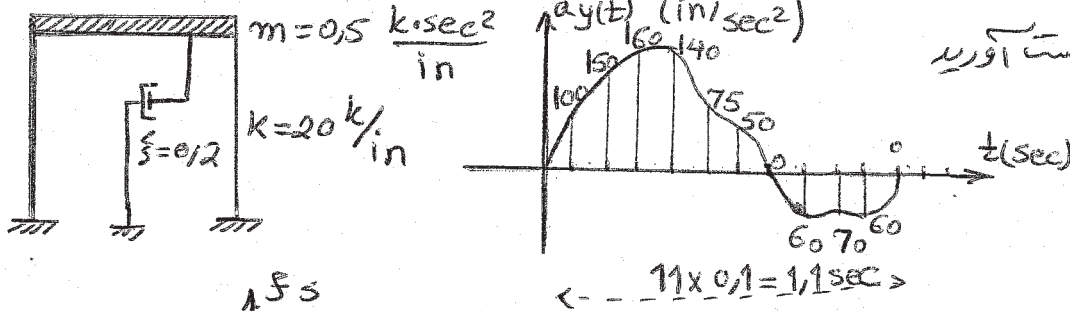
$$2- \Delta t = 0,04$$

حمید کاظمی

حمید کاظمه

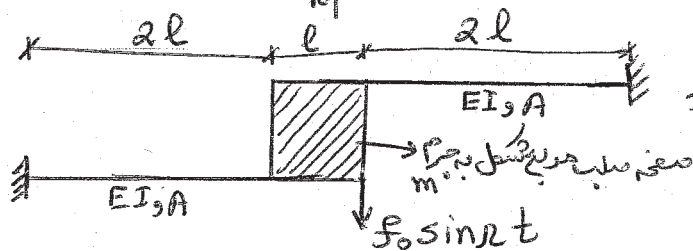
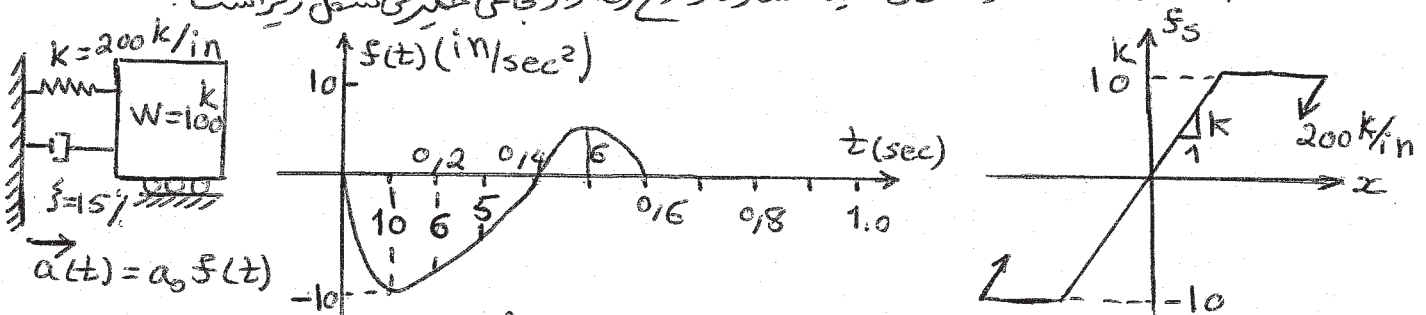


۱- سیستم یک درجه آزادی تحت اثر ستاب یکم گاهی قرار دارد حد اکثر جابجایی سنی ستون را با فرض رفتار ارتجاعی غیر خطی بدست آورید

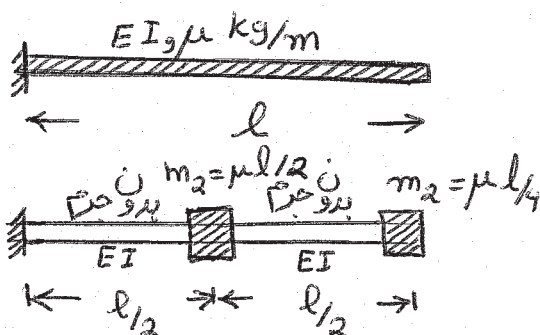


۲- سازه ای که بصورت سیستم جرم-فنر میرایی مدل شده است تحت اثر ستاب یکم گاهی $a(t) = a_0 \xi(t)$ قرار دارد که $\xi(t)$ در شکل نشان داده شده است حد اکثر مقدار a را برای این سازه

ارتجاعی نباید بدست آورید فرض کنید سازه دارای رفتار ارتجاعی غیر خطی شکل زیر است



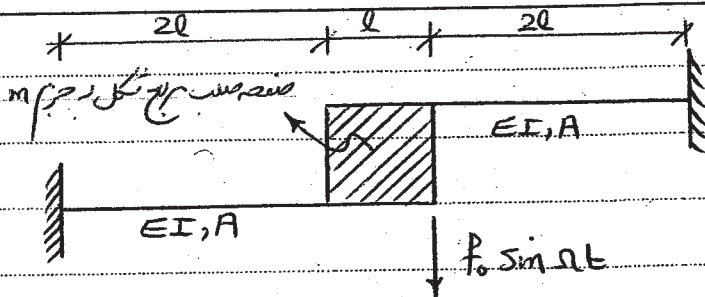
۳- معادله حرکت دستگاه نشان داده شده در تصویر مقابل را بدست آورید



۴- برای تخمین فرکانس ارتعاش مودها اول و دوم تیر طره ای نشان داده شده در تصویر مقابل از مدل دودرجه آزادی با مشخصات نشان داده شده در تصویر استفاده شده است فرکانس این گامها (مود اول و دوم) را محاسبه کنید

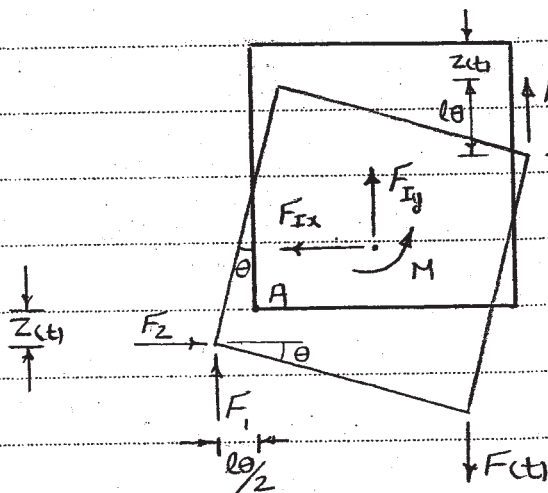
حمید کاظمی

تمرین سری چهارم



(۳) معادله حرکت دستگاه را بنویسید و در شکل مقابل یادداشت آورید.

$$\begin{cases} F_1 = \frac{12EI}{(2L)^3} Z(t) \\ F_3 = \frac{12EI}{(2L)^3} (Z(t) + l\theta) \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_2 = \frac{AE}{2l} (l/2 \theta) \\ F_4 = \frac{AE}{2l} (l/2 \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Iy} = m (\ddot{Z}(t) + l/2 \ddot{\theta}) \\ F_{Ix} = m \times 0 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{M} = I\ddot{\theta} = \frac{1}{12} m (l^2 + l^2) \ddot{\theta} = \frac{1}{6} m l^2 \ddot{\theta}$$

حال معادله تعادل را حول نقطه A می‌نویسیم.

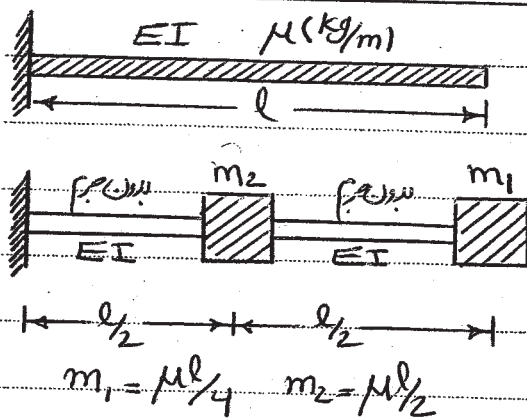
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow F_{Iy} \times l/2 + M + F_4 \times l + F_3 \times l = l \times F(t) \\ &\Rightarrow \frac{l}{2} m (\ddot{Z}(t) + l/2 \ddot{\theta}) + \frac{1}{6} m l^2 \ddot{\theta} + \frac{AE l}{4} \theta + \frac{12EI}{8l^2} (Z(t) + l\theta) = l f_0 \sin \omega t \\ &\Rightarrow \frac{ml}{2} \ddot{Z}(t) + \frac{ml^2}{4} \ddot{\theta} + \frac{ml^2}{6} \ddot{\theta} + \frac{AE l}{4} \theta + \frac{3EI}{2l^2} Z(t) + \frac{3EI}{2l} \theta = l f_0 \sin \omega t \\ &\Rightarrow \left[\frac{ml}{2} \ddot{Z}(t) + \frac{3EI}{2l^2} Z(t) \right] + \left[\frac{5ml^2}{12} \ddot{\theta} + \left(\frac{3EI}{2l} + \frac{AE l}{4} \right) \theta \right] = l f_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

ديناميك سازه

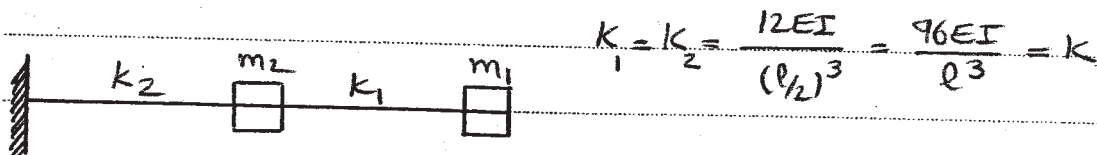
دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتور خوشنوديان

تمرين سري چهارم



۴) برای تخمین فرکانس ارتعاش موردی اول و دوم
ترتیب ارتعاش را داده شده در تصویر مقابل، از
مدل موردی آزادی با مشخصات داده شده در
تصویر استفاده شده است. فرکانس این گام را (در
اول و دوم) را محاسبه کنید.



$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu l / 4 & 0 \\ 0 & \mu l / 2 \end{bmatrix} = \mu l / 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} (\underline{K} - \omega^2 \underline{m}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k - \omega^2 \mu l / 4 & -k \\ -k & 2k - \omega^2 \mu l / 2 \end{vmatrix} = 0$$

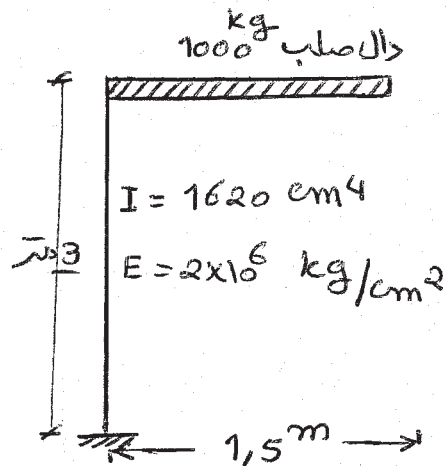
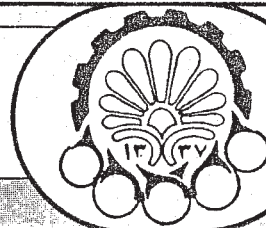
$$\Rightarrow (k - \omega^2 \mu l / 4) (2k - \omega^2 \mu l / 2) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2k^2 + k\omega^2 (-\mu l / 2 - \mu l / 2) + \omega^4 (\mu l)^2 / 8 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(\mu l)^2}{8} (\omega^2)^2 - \mu l k (\omega^2) + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\mu l k \pm \sqrt{(\mu l k)^2 - 1/2 (\mu l k)^2}}{2 \times \frac{1}{8} (\mu l)^2} = \frac{\mu l k (1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})}{1/4 (\mu l)^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{\mu l} (4 \pm 2\sqrt{2}) \Rightarrow \omega_1 = 1.082 \sqrt{\frac{k}{\mu l}}, \quad \omega_2 = 2.613 \sqrt{\frac{k}{\mu l}}$$



۱- ساین و ستون نگهدارنده آنرا در تصویر مقابل در نظر بگیرید مقدار نسبت استعلاک در هر یک از دو گام ارتعاشی این سازه را ۵٪ فرض کنید

الف- چنانچه این سازه تحت اثر حرکت زمین با ستاب $\ddot{x}_g = A \sin 2t$ (سانتیمتر بر مجذور ثانیه) قرار گیرد حد اکثر تغییر مکان افقی و قائم را در انتهای آزاد ساین بدست آورید

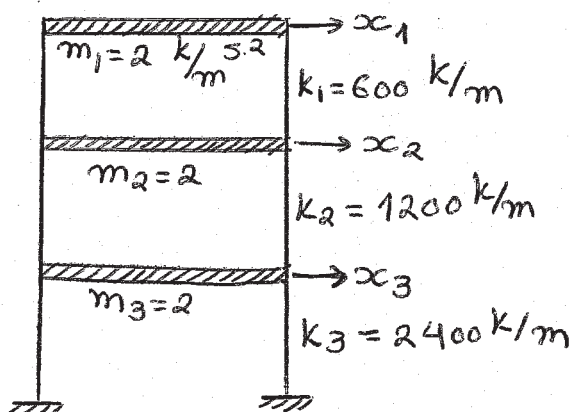
ب- چنانچه این سازه تحت اثر دوران پایه با ستاب $\dot{\theta}_g = B \sin 2t$ قرار گیرد حد اکثر تغییر مکان افقی و قائم را در انتهای آزاد ساین محاسبه کنید

ج- چنانچه این سازه تحت اثر بار افقی $F(t) = C \sin 2t$ در تراز ساین قرار گیرد حد اکثر لنگر ایجاد شده در ستون را تعیین کنید

۲- خواص جرم و سختی یک ساختمان سه طبقه بررسی همراه با شکل مورد نیاز ارتعاشی و فرکانس‌ها درجاً

بدون استعلاک در تصویر مقابل داده شده است سازه را با اعمال جابجایی $x_1 = 0.3 \text{ in}$ و $x_2 = -0.8 \text{ in}$

و $x_3 = 0.3 \text{ in}$ در سقف‌ها و رها ساختن ناگهانی آن در زمان $t = 0$ به ارتعاش آزاد در صاف آوریم شکل



جابجایی را در زمان $t = 2\pi/\omega_1$ تعیین کنید:

الف) فرض کنید استعلاک وجود ندارد

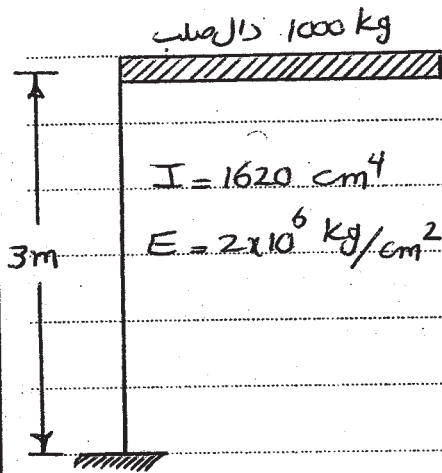
ب) فرض کنید در هر مورد ارتعاشی ۱۰٪ می‌باشد

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.548 & -1.522 & -6.26 \\ 0.198 & -0.872 & 12.10 \end{bmatrix}$$

$$\omega = [11.62, 27.5, 45.9] \text{ rad/sec}$$

حمید کاظمه

تمرین سری پنجم



۱) بیان ویتون نگه دارندگی آنرا در صورت مقابل در نظر بگیرید مقدار نسبت انتقال در حرکت از دو ب م ارتعاشی این سازه را ۵٪ فرض کنید
الف) ضایحه این سازه تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g = A \sin \omega t$ (مانند) قرار گیرد
ب) ضایحه این سازه تحت اثر درازخ مایه با شتاب $\ddot{\theta} = B \sin \omega t$ قرار گیرد
ج) ضایحه این سازه تحت اثر بار افقی $f(t) = C \sin \omega t$ در تراز بیان قرار گیرد
در هر یک از موارد فوق، حرکت را تعیین کنید

۲) ضایحه این سازه تحت اثر درازخ مایه با شتاب $\ddot{\theta} = B \sin \omega t$ قرار گیرد، حرکت را تعیین کنید
۳) ضایحه این سازه تحت اثر بار افقی $f(t) = C \sin \omega t$ در تراز بیان قرار گیرد، حرکت را تعیین کنید

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 \times 2 \times 10^6 \times 1620}{300^3} & \frac{6 \times 2 \times 10^6 \times 1620}{300^2} \\ \frac{6 \times 2 \times 10^6 \times 1620}{300^2} & \frac{4 \times 2 \times 10^6 \times 1620}{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1440 & 216000 \\ 216000 & 4.32 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$K - \omega^2 M = \begin{bmatrix} 1440 - 1000\omega^2 & 216000 \\ 216000 & 10^6(43.2 - 7.5\omega^2) \end{bmatrix}$$

$$|K - \omega^2 M| = 10^6(43.2 - 7.5\omega^2)(1440 - 1000\omega^2) - 216000^2 = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 0.548 \\ \omega_2 = 2.627 \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 = 0.548 \rightarrow \begin{bmatrix} 1139.7 & 216000 \\ 216000 & 40.95 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5.3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

حمید کاظم

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری پنجم

$$\omega = \omega_2 = 2.627 \rightarrow \begin{bmatrix} -5461.1 & 216000 \\ 216000 & -8.56 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.025 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \underline{m} \times \underline{a} \rightarrow \underline{F} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 A \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$M_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i = \phi_i^T \times \underline{F}(t)$$

$$M_i = \phi_i^T \cdot \underline{m} \cdot \phi_i \quad c_i = 2\xi_i \omega_i M_i \quad k_i = M_i \omega_i^2$$

(۱) موداول ۸

$$M_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = \phi_1^T \cdot \underline{F}(t)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5.3 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5.3 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = 1210.68$$

$$c_1 = 2 \times 0.05 \times 0.548 \times 1210.68 = 66.35$$

$$k_1 = M_1 \omega_1^2 = 1210.68 \times 0.548^2 = 363.57$$

$$\phi_1^T \cdot \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -5.3 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 A \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix} = 1000 A \sin 2t$$

$$\Rightarrow 1210.68 \ddot{y}_1 + 66.35 \dot{y}_1 + 363.57 y_1 = 1000 A \sin 2t$$

$$\text{واکنش رول میل} \quad y = \int_0^t \frac{p(\tau)}{m \omega_d} e^{-\xi \omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

$$\omega_d = \omega_1 \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_d = 0.548 \sqrt{1-0.05^2} = 0.547$$

$$\rightarrow y_1(t) = \int_0^t \frac{1000 A \sin 2\tau}{1210.68 \times 0.547} e^{-0.05 \times 0.548(t-\tau)} \sin(0.547(t-\tau)) d\tau =$$

تمرین سری لحیم

$$\begin{aligned} \rightarrow y_1(t) &= 1.51A \int_0^t (\sin 2\tau) e^{-0.0274(t-\tau)} \sin(0.547(t-\tau)) d\tau \\ &= 1.51A \left(-4.38 \times 10^{-3} C_{12}t - 0.148 \sin 2t + 4.38 \times 10^{-3} e^{-0.0274t} C_1(0.547t) \right. \\ &\quad \left. + 0.54 e^{-0.0274t} \sin(0.547t) \right) \end{aligned}$$

(۷) مورد دوم

$$M_2 \ddot{y}_2 + C_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 = \phi_2^T \cdot F(t)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 75 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.025 \end{bmatrix} = 5687.5$$

$$C_2 = 2 \times 0.05 \times 2.63 \times 5687.5 = 1416.91$$

$$k_2 = M_2 \omega_2^2 = 5687.5 \times 2.63^2 = 39339.87$$

$$\phi_2^T \cdot F(t) = 1000A \sin 2t$$

$$\Rightarrow 5687.5 \ddot{y}_2 + 1416.91 \dot{y}_2 + 39339.87 y_2 = 1000A \sin 2t$$

$$\omega_d = 2.63 \sqrt{1 - 0.05^2} = 2.63 \quad M_2 \omega_d = 14958.13 \quad \xi \omega_2 = 0.13$$

$$\rightarrow y_2(t) = \int_0^t \frac{1000A \sin 2\tau}{14958.13} e^{-0.13(t-\tau)} \sin(2.63(t-\tau)) d\tau$$

$$\begin{aligned} &= 6.69 \times 10^{-2} A \left(-0.154 C_{12}t + 0.869 \sin 2t + 0.154 e^{-0.13t} C_1(2.63t) \right. \\ &\quad \left. - 0.653 e^{-0.13t} \sin 2.63t \right) \end{aligned}$$

$$x(t) = \phi(t) \cdot y(t)$$

(۳) محاسبه $x(t)$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.0053 & 0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$x_1(t)$ تغییر مکان افقی در محل اتصال سازه

است که تبدیل به جابجایی درون دال سازه تغییر

مکان افقی در انتهای سازه را می باشد. $x_2(t)$ هم در انتهای سازه در محل اتصال دال به ستون می باشد.

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری

(۴) محاسبه ضرایب تغییر مکان برای امپل و قائم

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \rightarrow t_{1Max} \rightarrow \text{ضرایب تغییر مکان} = x_1(t_{1Max})$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0 \rightarrow t_{2Max} \rightarrow \text{ضرایب تغییر مکان} = 150 \times x_2(t_{2Max})$$

$$\underline{F} = \underline{m} \times \ddot{\underline{\theta}} \Rightarrow \underline{F} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B \sin 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \times 10^6 B \sin 2t \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

(۱) مورد اول

$$M_1 = 1210.68 \quad C_1 = 66.35 \quad K_1 = 363.57$$

$$\Phi_1^T \cdot \underline{F}(t) = [1 \quad -5.3 \times 10^{-3}] \cdot \underline{F}(t) = -39750 B \sin 2t$$

$$\Rightarrow 1210.68 \ddot{y}_1 + 66.35 \dot{y}_1 + 363.57 y_1 = -39750 B \sin 2t$$

$$y_1(t) = \int_0^t \frac{-39750 B \sin 2\tau}{1210.68 \times 0.547} e^{-0.0274(t-\tau)} \sin(0.547(t-\tau)) d\tau$$

$$y_1(t) = -60.02 B (-4.38 \times 10^{-3} C_1 2t - 0.148 \sin 2t + 4.38 \times 10^{-3} e^{-0.0274} C_1 (0.547t) + 0.54 e^{-0.0274} \sin(0.547t))$$

(۲) مورد دوم

$$M_2 = 5687.5 \quad C_2 = 1416.91 \quad K_2 = 39339.87$$

$$\Phi_2^T \cdot \underline{F}(t) = [1 \quad 0.025] \underline{F}(t) = 187500 B \sin 2t$$

$$\Rightarrow 5687.5 \ddot{y}_2 + 1416.91 \dot{y}_2 + 39339.87 y_2 = 187500 B \sin 2t$$

$$y_2(t) = \int_0^t \frac{187500 B \sin 2\tau}{5687.5 \times 2.627} e^{-0.13(t-\tau)} \sin(2.63(t-\tau)) d\tau$$

$$y_2(t) = 12.55 B (-0.154 C_1 2t + 0.869 \sin 2t + 0.154 e^{-0.13t} C_1 2.63t - 0.653 e^{-0.13t} \sin 2.63t)$$

تمرین سری

۳. محاسبه $x(t)$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.0053 & 0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

۴. محاسبه حد اکثر تغییر مکان در قائم افقی

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \rightarrow t_{1Max} \rightarrow \text{حد اکثر تغییر مکان افقی} = x_1(t_{1Max})$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0 \rightarrow t_{2Max} \rightarrow \text{حد اکثر تغییر مکان قائم} = 150 \times x_2(t_{2Max})$$

ج ۱

$$F(t) = \begin{bmatrix} C \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

۱. مورد اول

دقیقاً مانند حالت الفوب عمل می شود و $x(t)$ محاسبه می گردد

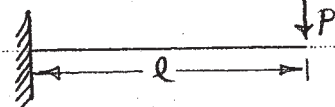
۲. مورد دوم

دقیقاً مانند حالت الفوب عمل می شود و $x(t)$ محاسبه می گردد

۳. محاسبه x_{Max}

مقدار x_{Max} را مانند حالت الفوب محاسبه می کنیم و داریم

$$x_{Max} = \frac{PL^3}{3EI}$$



$$x_{Max} = \frac{PL^3}{3EI} \rightarrow P = \frac{3EI x_{Max}}{L^3}$$

$$M_{Max} = \frac{3EI x_{Max}}{L^3} \times L = \frac{3 \times 2 \times 10^6 \times 1620}{(300)^2} x_{Max} = 108 \times 10^3 x_{Max}$$

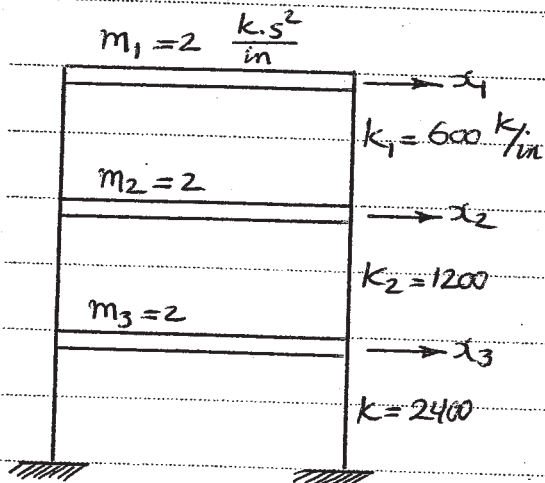
دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری پنجم

۱۲) خواص جرم و سختی یک ساختمان سه طبقه به همراه با شکل موردی ارتعاشی و فرکانسهای در صحت بدون استهلاک در تصویر مقابل داده شده است. سازه را با اعمال جابجاییهای $x_1 = 0.3 \text{ in}$ ، $x_2 = -0.8 \text{ in}$ و $x_3 = 0.3 \text{ in}$ در سقف، در جابجاییهای نامرئی آن در زمان $t = 0$ به ارتعاش آزاد درمی آوریم. شکل جابجایی را در زمان $t = \frac{2\pi}{\omega_1}$ با فرضیات زیر بدست آورید.



الف) فرض کنید استهلاک وجود ندارد.
ب) فرض کنید در هر مورد ارتعاش $\delta = 10\%$ باشد.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.548 & -1.522 & -6.26 \\ 0.148 & -0.872 & 12.10 \end{bmatrix}$$

$$\omega = [11.62 \quad 27.5 \quad 45.9] \text{ (rad/sec)}$$

* در حل این مسئله از بحث حل معادلات ارتعاش آزاد سیستم های نامرئی در کتاب دینامیک سازه های گسترده برای استفاده شده است. روابط این قسمت شرح زیر می باشد.

$1 \leq n \leq N \rightarrow (N \text{ تعداد کل مورد})$

$$q_n(0) = \frac{\Phi_n^T m u(0)}{M_n}$$

$$\dot{q}_n(0) = \frac{\Phi_n^T m \dot{u}(0)}{M_n}$$

$$q_n(t) = q_n(0) C_1 \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n q_n(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n \left[q_n(0) C_1 \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n \left[e^{-\xi_n \omega_n t} \left(q_n(0) C_1 \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0) + \xi_n \omega_n q_n(0)}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right]$$

(۴)

 $q_n(t)$

حمید کاظم

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری ^{نهم}

(الف)

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad \dot{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{مورد اول } q_1(t) = \frac{\phi_1^T \cdot m \cdot u(t)}{M_1} = \frac{[1 \ 0.548 \ 0.198] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix}}{[1 \ 0.548 \ 0.198] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.548 \\ 0.198 \end{bmatrix}} = \frac{-0.158}{2.679} = -0.059$$

$$\dot{q}_1(t) = 0$$

$$\rightarrow q_1(t) = -0.059 C_{11.62t}$$

$$\text{مورد دوم } q_2(t) = \frac{\phi_2^T \cdot m \cdot u(t)}{M_2} = \frac{[1 \ -1.522 \ -0.872] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix}}{[1 \ -1.522 \ -0.872] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.522 \\ -0.872 \end{bmatrix}} = \frac{2.512}{8.154} = 0.308$$

$$\dot{q}_2(t) = 0$$

$$\rightarrow q_2(t) = 0.308 C_{127.5t}$$

$$\text{مورد سوم } q_3(t) = \frac{\phi_3^T \cdot m \cdot u(t)}{M_3} = \frac{[1 \ -6.26 \ 12.1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix}}{[1 \ -6.26 \ 12.1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.26 \\ 12.1 \end{bmatrix}} = \frac{17.876}{373.2} = 0.048$$

$$\dot{q}_3(t) = 0$$

$$\rightarrow q_3(t) = 0.048 C_{145.9t}$$

$$\Rightarrow u(t) = -0.059 C_{11.62t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.548 \\ 0.198 \end{bmatrix} + 0.308 C_{127.5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.522 \\ -0.872 \end{bmatrix} + 0.048 C_{145.9t} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.26 \\ 12.1 \end{bmatrix}$$

(۷)

حمید کاظم

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۳۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتر خوشنوديان

تمرين سري ^{انجمن}

$$t = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{11.62} = 0.541$$

$$\rightarrow U(0.541) = \begin{bmatrix} -0.219 \\ -6.2 \times 10^{-3} \\ 0.722 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

(ب)

مسئله ۸ $q_1(0) = -0.059$ $\dot{q}_1(0) = 0$

$$\omega_{d1} = \omega_{n1} \sqrt{1 - \xi^2} = 11.62 \sqrt{1 - 0.1^2} = 11.56$$

$$q_1(t) = e^{-1.162t} (-0.059 C_{11.56t} - 0.0059 \sin 11.56t)$$

مسئله ۹ $q_2(0) = 0.308$ $\dot{q}_2(0) = 0$

$$\omega_{d2} = \omega_{n2} \sqrt{1 - \xi^2} = 27.5 \sqrt{1 - 0.1^2} = 27.36$$

$$q_2(t) = e^{-2.75t} (0.308 C_{127.36t} + 0.031 \sin 27.36t)$$

مسئله ۱۰ $q_3(0) = 0.048$ $\dot{q}_3(0) = 0$

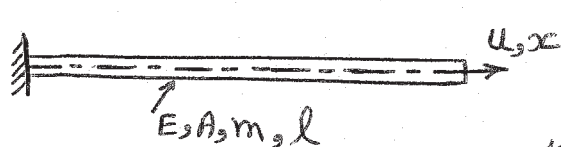
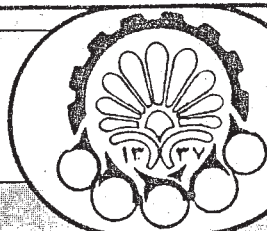
$$\omega_{d3} = \omega_{n3} \sqrt{1 - \xi^2} = 45.9 \sqrt{1 - 0.1^2} = 45.67$$

$$q_3(t) = e^{-4.59t} (0.048 C_{145.67t} + 0.0048 \sin 45.67t)$$

$$\rightarrow \underline{U(t)} = \underline{\phi_1} q_1(t) + \underline{\phi_2} q_2(t) + \underline{\phi_3} q_3(t)$$

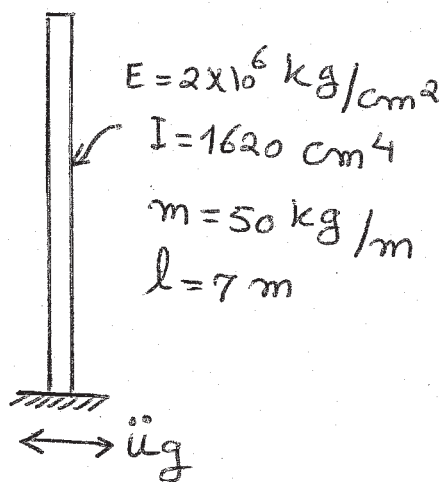
$$q_1(0.541) = -0.0314 \quad q_2(0.541) = -0.0374 \quad q_3(0.541) = 0.0035$$

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= 1 \times (-0.0314) + 1 \times (-0.0374) + 1 \times 0.0035 = -0.0653 \\ u_2 &= 0.548 \times (-0.0314) - 1.522 \times (-0.0374) - 6.26 \times 0.0035 = 0.0178 \\ u_3 &= 0.198 \times (-0.0314) - 0.872 \times (-0.0374) + 12.10 \times 0.0035 = 0.0687 \end{aligned} \right.$$



۱- برای ارتعاشات محور، فرکانس‌ها چسبی و شکل گام‌ها
همچنین یک سگ‌پیردار نشان داده شده در تصویر مقابل را بدست آورید

۲- تیر طره‌ای نشان داده شده در تصویر مقابل تحت اثر



زلزله‌ای با طیف واکنش زلزله ال-سترو قرار گرفته است

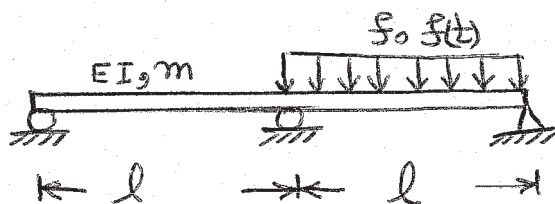
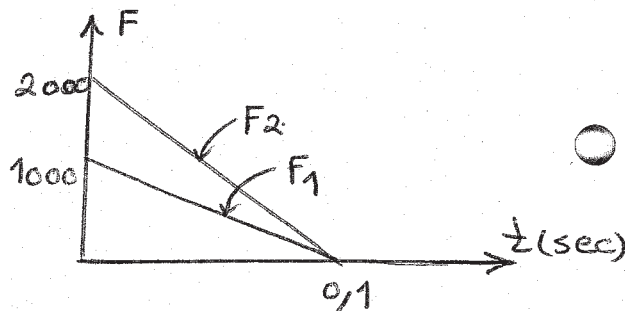
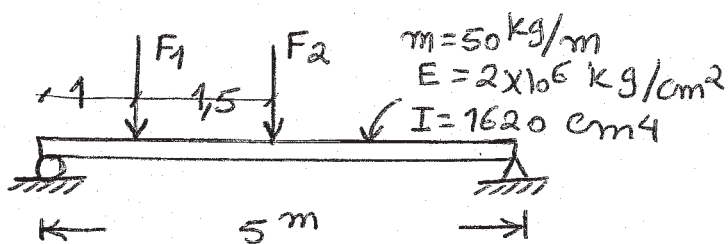
حد اکثر لنگر خمشی و نیروی برشی ایجاد شده را در محل پایه

محاسبه نماید مقدار نسبت استهلاک را در هر گام

ارتعاشی ۲٪ فرض کنید

۳- تیر نشان داده شده در تصویر مقابل تحت اثر بارهای نشان داده شده قرار دارد حد اکثر عکس

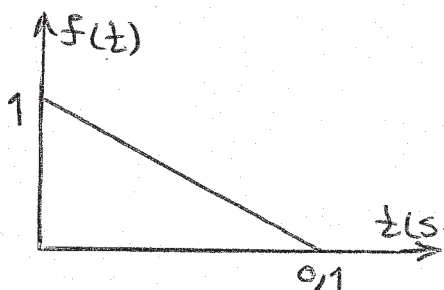
العمل تکیه‌گاه سمت چپ را بدست آورید از وجود استهلاک صرف نظر کنید. (۵ نفره)



۴- برای تیر نشان داده شده در تصویر مقابل

حد اکثر لنگر خمشی را در تکیه‌گاه میانی به صورت تقریبی

تعیین کنید

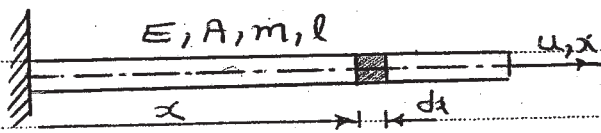


مشخصات تیر:

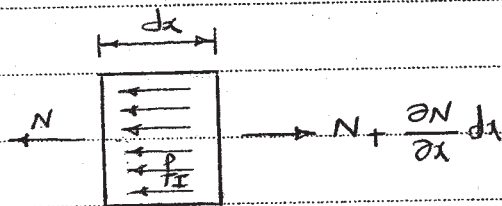
$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 500 \text{ cm}^4$
 $m = 100 \text{ kg/m}$
 $l = 5 \text{ m}$

حمید کاظمه

(۱) برای ارتعاشات مجری، فرکانس طبیعی،



شکل کاملاً مشابهی در کتاب دینامیک سازه شده
در صورتی که در این صورت، رابطه زیر از کتاب Clough & Penzien استفاده شده است



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N + f_I dx - (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) = 0$$

$$\Rightarrow f_I dx - \frac{\partial N}{\partial x} dx = 0 \quad (1)$$

$$f_I = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$N = \sigma A = E \epsilon A = \frac{\partial u}{\partial x} EA$$

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (3)$$

$$u(x, t) = \phi(x) \cdot y(t) \quad (4)$$

با قرار دادن رابطه (۴) در رابطه (۳) بدین صورت می‌آید:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow m \phi(x) \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} y(t) = 0$$

هر دو طرف را بر $\phi(x)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}}{y(t)} = \frac{EA \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}}{\phi(x)} = -C$$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad \omega^2 = C/m$$

$$\phi''(x) + b^2 \phi(x) = 0 \quad b^2 = C/AE = \frac{\omega^2 m}{AE}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = B_1 \sin bx + B_2 \cos bx$$

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاي دكتور خوشنوديان

تمرين سري ششم

$$1) x=0 \rightarrow \phi(0)=0 \Rightarrow B_1 \sin 0 + B_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

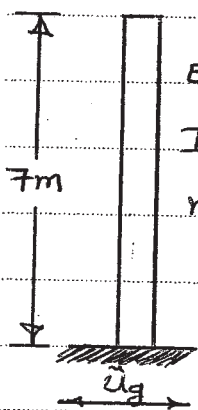
$$2) x=l \rightarrow N(l)=0 \rightarrow AE \phi'(l)=0$$

$$\phi'(x) = B_1 b \csc bx \rightarrow N(l) = AE B_1 b \csc bl = 0$$

$$B_1 \neq 0 \rightarrow \csc bl = 0 \rightarrow bl = \frac{2n-1}{2} \pi \rightarrow b = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$$

$$\Rightarrow \phi_n(x) = B_1 \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l}\right)$$

$$\omega_n^2 = \sqrt{\frac{b_n^2 EA}{m}} = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{ml^2}}$$



$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 1620 \text{ cm}^4$$

$$m = 50 \text{ kg/cm}$$

(۲) ترخه‌اي نان داده شده در تصوير مقابل تحت اثر زلزله از باطيف واكنش ال-سنترو قرار گرفته است. مدار كنتر حش و نیروی برشی ایجاد شده را در كل پايه محاسبه نمايد. (مقدار نسبت انحراف را در حركت از رانش ۲٪ فرض كنيد)

$$\begin{cases} \phi_n = b_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) + (C \cosh a_n x - C \sin a_n x) \\ \omega_n = \left(\frac{\pi(n-1/2)}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{\omega_n^2 \bar{m}}{EI}$$

$$b_n = \frac{C \cosh a_n l - C \sinh a_n l}{\sinh a_n l - \sin a_n l}$$

$$M_n \ddot{y}_n(t) + M_n \omega_n^2 y_n(t) = P_n(t) \Rightarrow \ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

$$M_n = \int_0^l \phi_n^2(x) \cdot m(x) dx = m \int_0^l \phi_n^2(x) dx$$

$$P_n(t) = \int_0^l \phi_n(x) \cdot p(x,t) dx = \int_0^l \phi_n(x) (-\bar{m}(x) \ddot{u}_g) dx = -m \ddot{u}_g(t) \int_0^l \phi_n(x) dx$$

(۲)

حميد كاظم

$$\ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = \frac{-m \ddot{u}_g(t) \int_0^l \phi_n(x) dx}{m \int_0^l \phi_n^2(x) dx}$$

$$\ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = - \frac{\int_0^l \phi_n(x) dx}{\int_0^l \phi_n^2(x) dx} \ddot{u}_g(t)$$

$$I_n = \frac{\int_0^l \phi_n(x) dx}{\int_0^l \phi_n^2(x) dx} \rightarrow \ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = I_n \ddot{u}_g(t)$$

$$\Rightarrow y_n(t) = \frac{I_n \ddot{u}_g(t)}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t))$$

برای کاهش حجم محاسبات از ۵ عدد اول استفاده می‌کنیم. در ابتدا بعضی پارامترها را ساده می‌کنیم.

$$\omega_n = \left(\frac{\pi(n-1/2)}{700} \right)^2 \sqrt{\frac{2 \times 10^6 \times 1620}{50}} = 0.16214 (n-1/2)^2$$

$$a_n = \frac{\omega_n^2 \cdot m}{EI} = \frac{50 \omega_n^2}{EI} = 1.54321 \times 10^{-8} \omega_n^2$$

$$b_n = \frac{C_1(700 a_n) - \frac{1}{2} (e^{700 a_n} + e^{-700 a_n})}{\sin(700 a_n) - \frac{1}{2} (e^{700 a_n} - e^{-700 a_n})}$$

$$\phi_n(x) = b_n \left(\frac{1}{2} (e^{a_n x} - e^{-a_n x}) - \sin a_n x \right) + \left(\frac{1}{2} (e^{a_n x} + e^{-a_n x}) - C_1 a_n x \right)$$

n	ω_n	a_n	b_n	$\int_0^l \phi_n(x) dx$	$\int_0^l \phi_n^2(x) dx$	I_n	I_n/ω_n^2
1	0.0406	2.544×10^{-11}	-2.83	8.1017×10^{-14}	1.242×10^{-26}	9.52×10^{12}	5.78×10^5
2	0.3654	2.06×10^{-9}	-6472.79	4.0089×10^{-10}	4.403×10^{-20}	4.105×10^9	6.82×10^{10}
3	1.015	1.59×10^{-8}	-91189.96	3.5638×10^{-8}	4.8×10^{-17}	7.425×10^8	7.207×10^8
4	1.9894	6.108×10^{-8}	97366.77	8.6781×10^{-7}	2.152×10^{-15}	4.033×10^8	1.019×10^8
5	3.2886	1.669×10^{-7}	26665.08	5.675×10^{-6}	9.142×10^{-14}	6.208×10^7	5.74×10^6

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتر خوشنوديان

تمرين سري ششم

$$\text{Max } \ddot{u}_g(t) (\text{Et-center}) = -3.1276 \text{ m/s}^2 = -312.76 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{at } t = 2.02 \text{ s}$$

n	1	2	3	4	5
$y_n(t)_{\text{Max}}$	3.686×10^{18}	4.158×10^{13}	3.197×10^{11}	1.32×10^{10}	1.063×10^7

$$u(x,t) = \sum_1^N \phi_n(x) \cdot y_n(t)$$

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = EI \sum_1^N y_n(t) \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow M(0,t) = EI \sum_1^N y_n(t) \frac{\partial^2 \phi_n(0)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} = a_n^2 \cdot c_1(a_n x) + b_n \left[a_n^2 \sin a_n x + \frac{a_n^2}{2} (e^{a_n x} - e^{-a_n x}) \right]$$

$$+ \frac{a_n^2}{2} (e^{a_n x} + e^{-a_n x})$$

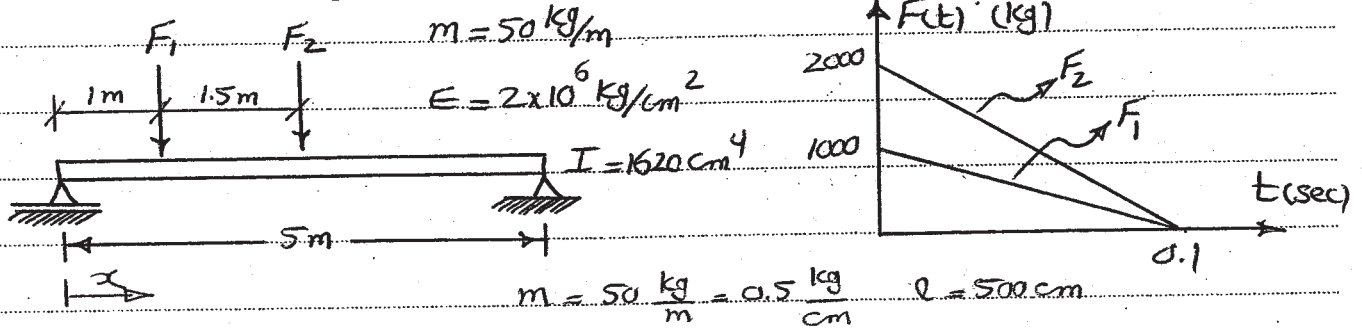
$$\frac{\partial^2 \phi_n(0)}{\partial x^2} = 2a_n^2$$

n	$\frac{\partial^2 \phi_n(0)}{\partial x^2}$	$y_n(t)_{\text{Max}}$	$M_n(0,t)$ (kg.m)
1	1.294×10^{-21}	3.686×10^{18}	154555.52
2	8.491×10^{-18}	4.158×10^{13}	11438.89
3	5.055×10^{-16}	3.197×10^{11}	5236.39
4	7.461×10^{-15}	1.32×10^{10}	3190.71
5	5.571×10^{-14}	1.063×10^7	19.19
$M(0,t)$ (kg.m)	174440.69		

ششم

تمرین سری

(۳) تیر نشان داده شده در تصویر مقابل تحت اثر بارهای نشان داده شده قرار دارد. صدای شکست
الحمل بکلیه سمت چپ را بدست آورید. از وجود استخلاف صرف نظر کنید.



$$\begin{cases} F_1 = -10^4 (t - 0.1) \\ F_2 = -2 \times 10^4 (t - 0.1) \end{cases} \rightarrow F_2 = 2F_1$$

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$

$$M_n = \int_0^l \varphi_n^2(x) m u(x) dx = \bar{m} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{\bar{m} l}{2} = \frac{50 \times 5}{2} = 125 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} P_n(t) &= F_1 \varphi_n(1) + F_2 \varphi_n(2.5) = \left(\sin \frac{n\pi}{5} \right) F_1 + \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right) F_2 \\ &= -10^4 (t - 0.1) \left[\sin \frac{n\pi}{5} + 2 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

$$M_n \ddot{y}_n + M_n \omega_n^2 y_n = P_n(t) \Rightarrow \ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

معادله بالا را از طریق انتگرال در صصل حل می کنیم

$$y_n(t) = \int_0^t \frac{P_n(\tau)}{M_n \omega_n} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

$$\omega_n = \pi^2 \sqrt{\frac{2 \times 10^6 \times 1620}{50 \times 10^{-2} \times 500^4}} \times n^2 = 3.18 n^2$$

$$\Rightarrow y_n(t) = \underbrace{\frac{-10^4 \left[\sin \left(\frac{n\pi}{5} \right) + 2 \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right]}{125 \times 3.18 n^2}}_A \int_0^t (\tau - 0.1) \sin(3.18 n^2 (t - \tau)) d\tau =$$

(۵)

حمید کاظم

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاي دكتور خوشنوديان

تمرین سری ششم

$$\rightarrow y_n(t) = \frac{A}{n^2} \left[0.314(t-0.1) + 0.0314 C_1(0.314 n^2 t) - \frac{0.099}{n^2} \sin(0.314 n^2 t) \right]$$

$$u(x,t) = \sum_1^N y_n(t) \cdot \phi_n(x)$$

$$V(x,t) = EI \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = EI \sum_1^N y_n(t) \cdot \frac{\partial^3 \phi_n(x)}{\partial x^3}$$

$$\rightarrow V(x,t) = EI \sum_1^N \left[\frac{A}{n^2} \left[0.314(t-0.1) + 0.0314 C_1(0.314 n^2 t) - \frac{0.099}{n^2} \sin(0.314 n^2 t) \right] \times \left(-\left(\frac{n\pi}{5}\right)^3 C_1\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \right) \right]$$

$$\rightarrow V(0,t) = -8.151 \times 10^9 \sum_1^N \left[\frac{(\sin(\frac{n\pi}{5}) + 2\sin(\frac{n\pi}{2}))}{n^4} \left[0.0314(10t-1 + C_1(0.314 n^2 t)) - \frac{0.099}{n^2} \sin(0.314 n^2 t) \right] \left(-\frac{n\pi}{5} \right)^3 \right]$$

برای سه جداول دستی آوریم.

$$V(0,t) = -8.151 \times 10^9 \left[2.59(0.0314(10t-1 + C_1(0.314t)) - 0.099 \sin(0.314t)) \right]$$

$$\times (-0.248) + [0.059(0.0314(10t-1 + C_1(1.256t)) - 0.025 \sin(1.256t))]$$

$$\times (-1.98) + [-0.013(0.0314(10t-1 + C_1(2.826t)) - 0.011 \sin(2.826t))]$$

$$\times (-6.7)]$$

$$\rightarrow V(0,t) = +8.151 \times 10^9 \left[(0.02(10t-1 + C_1(0.314t)) - 0.025 \sin(0.314t)) \right. \\ \left. + (3.67 \times 10^{-3}(10t-1 + C_1(1.256t)) - 4.95 \times 10^{-2} \sin(1.256t)) \right. \\ \left. + (2.735 \times 10^{-3}(10t-1 + C_1(2.826t)) - 7.37 \times 10^{-2} \sin(2.826t)) \right]$$

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

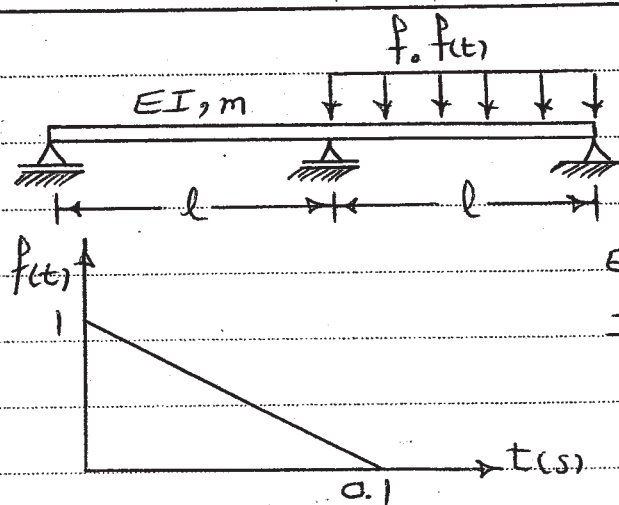
استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری ششم

$$\frac{dV(0,t)}{dt} > 0 \rightarrow$$

در $t = 0.1$ حداکثر پانچ برابر برش داریم

$$V_{Max}(0, 0.1) = 45.69 \times 10^2 \text{ kg}$$



(۴) برابر ترین داده شده در شکل مقابل
حداکثر پانچ، را در نگه گاه میانی بطور تقریبی
لحظ می نماید

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 500 \text{ cm}^4$$

$$m = 100 \text{ kg/m}$$

$$l = 5m$$

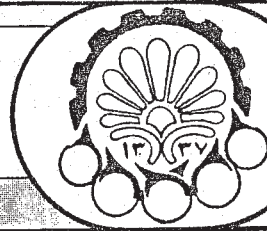
ديناميك سازه

دانشجو : حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد : جناب آقاى دكتر خوشنوديان

تمرين سرى

حميد كاظم



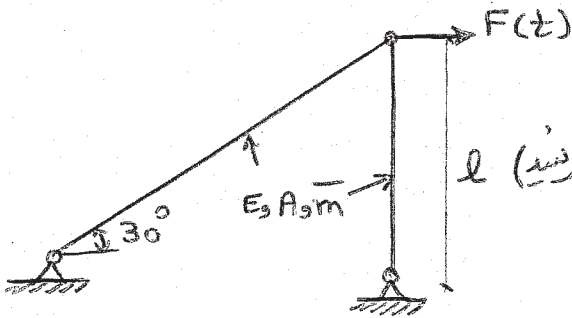
۱- برای خربای مسطح نشان داده شده مطلوب است:

الف) فرکانسهای طبیعی و مدتها ارتعاشی خربا

ب) پاسخ خربا تحت یک نیروی 10 kips مطابق شکل (از میرایی صرف نظر کنید)

ج) با فرض 10% استهلاک نیز پاسخ خربا را تعیین کنید

$$l = 72 \text{ in} \quad E = 30000 \text{ k/in}^2 \quad A = 10 \text{ in}^2 \quad \bar{m} = 0.1 \text{ ksec}^2/\text{in}$$



۲- برای قاب دوجبه نشان داده شده مطلوب است:

الف) فرکانسهای طبیعی و مدتها ارتعاشی آن

ب) پاسخ قاب تحت نیروی ناگهانی $F(t) = 10 \text{ kip}$ مطابق شکل (از استهلاک صرف نظر کنید)

ج) پاسخ پایداری قاب را تحت تأثیر نیروی هارمونیکی $F(t) = 10 \sin 30t$ بدست آورید (از استهلاک

سیتم صرف نظر کنید)

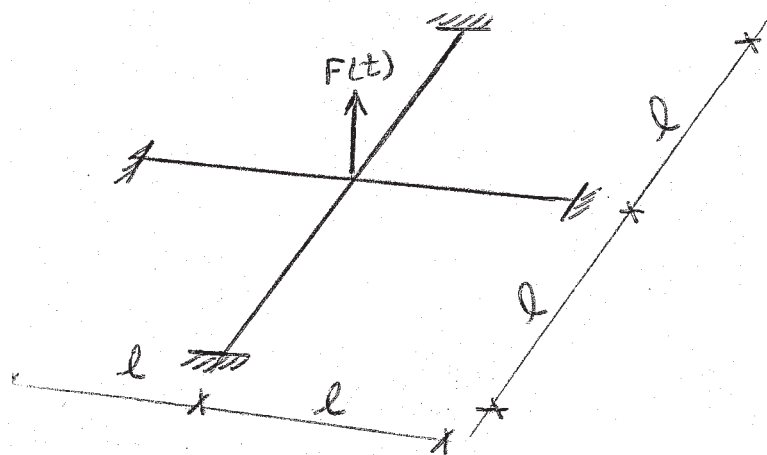
د) پاسخ پایداری قاب را برای میرای $\bar{c} = 0.2 [K]$ بدست آورید

۳- برای شیک نشان داده شده مطلوب است:

الف) فرکانسهای طبیعی و مدتها ارتعاشی آن

ب) پاسخ شیک را تحت نیروی شکل مقابل بدست

آورید



$$l = 100 \text{ in}$$

$$E = 30000 \text{ ksi}$$

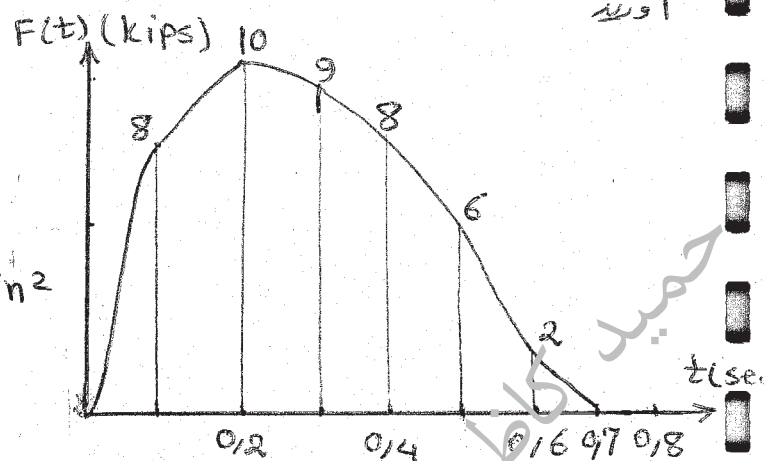
$$G = 12000 \text{ ksi}$$

$$I = 1000 \text{ in}^4$$

$$\bar{m} = 0.01 \text{ ksec}^2/\text{in}^2$$

$$J = 2000 \text{ in}^4$$

$$A = 20 \text{ in}^2$$



حمید کاظمه

تمرین سری صفحه

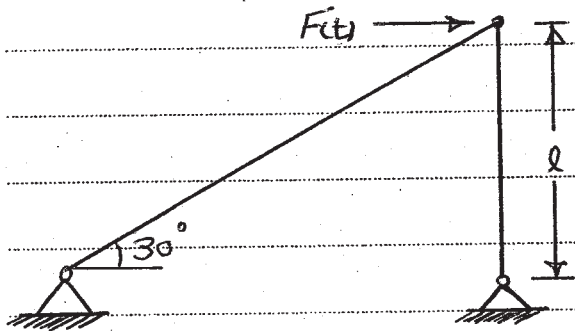
۱) برای ضرایب معین آن داده شده مطلوب است:

الف) فرکانس طبیعی و مدولای ارتعاشی ضرایب

ب) پاسخ ضرایب تحت نیروی مدولای ۱۰ مپا

شکل (از فرای مرفق نظر بگیرید)

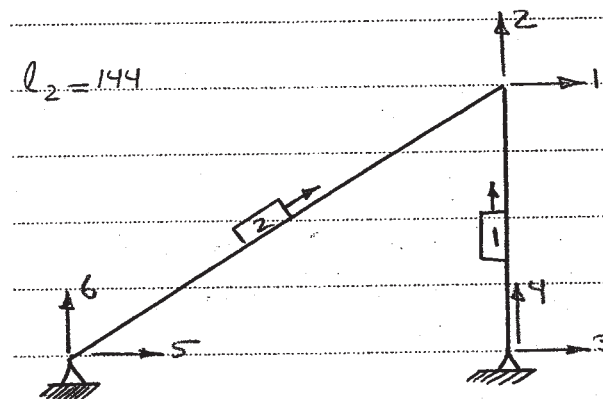
ج) با فرض ۱۰٪ استخلاف نیز پاسخ ضرایب ارتعاشی کنید



$$l = 72 \text{ in} \quad E = 30,000 \text{ k/in}^2 \quad A = 10 \text{ in}^2$$

$$\bar{m} = 0.1 \frac{\text{k} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$$

$$l_2 = 144$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{EA}{l_1} = \frac{30,000 \times 10}{72} = 4166.67 \\ \frac{EA}{l_2} = \frac{30,000 \times 10}{144} = 2083.33 \\ \frac{ml_1}{6} = \frac{0.1 \times 72}{6} = 1.2 \\ \frac{ml_2}{6} = \frac{0.1 \times 144}{6} = 2.4 \end{array} \right.$$

الف)

$$\bar{k}_1 = 4166.67$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_1 = 1.2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

برای عضو به صورت متهم دوران را انجام داریم

عضو ۲

$$\bar{k}_2 = 2083.33$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_2 = 2.4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.866 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$$

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتر خوشنوديان

تمرين سري

$$\underline{K}_2 = 2083.33 \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 0.75 & 0.433 & -0.75 & -0.433 \\ 0.433 & 0.25 & -0.433 & -0.25 \\ -0.75 & -0.433 & 0.75 & 0.433 \\ -0.433 & -0.25 & 0.433 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_2 = 2.4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

تعيين فرکانس

$$\underline{K}_s = \begin{bmatrix} 1562.5 & 902.08 \\ 902.08 & 4687.5 \end{bmatrix} \quad \underline{M}_s = \begin{bmatrix} 9.6 & 0 \\ 0 & 9.6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} | \underline{K}_s - \omega^2 \underline{M}_s | = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 11.73 \\ \omega_2 = 22.66 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1562.5 - 9.6\omega^2 & 902.08 \\ 902.08 & 4687.5 - 9.6\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_1 = 11.73 \rightarrow \begin{bmatrix} 241.61 & 902.08 \\ 902.08 & 3366.61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.268 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 = 22.66 \rightarrow \begin{bmatrix} -3366.87 & 902.08 \\ 902.08 & -241.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.732 \end{bmatrix}$$

نرمال کردن شکل موردی بر حسب جرم موری

$$\sqrt{\Phi_1^T M_s \Phi_1} = 3.21 \quad \sqrt{\Phi_2^T M_s \Phi_2} = 11.97$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.312 \\ -0.083 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0.084 \\ 0.312 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{\underline{Z}}_j + \omega_j^2 \underline{Z}_j = \Phi_j^T \underline{F}(t) \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1 + 11.73^2 Z_1 = 0.312 \times 10 \\ \ddot{Z}_2 + 22.66^2 Z_2 = 0.084 \times 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z_1 = \frac{0.312 \times 10}{11.73^2} (1 - C_1 11.73t) \\ Z_2 = \frac{0.084 \times 10}{22.66^2} (1 - C_1 22.66t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Z_1(t) = 2.27 \times 10^{-2} (1 - C_1 11.73t) \\ Z_2(t) = 1.64 \times 10^{-3} (1 - C_1 22.66t) \end{cases}$$

$$\underline{y} = \Phi \cdot \underline{Z}(t) \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.312 & 0.084 \\ -0.083 & 0.312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = 7.082 \times 10^{-3} (1 - C_1 11.73t) + 1.378 \times 10^{-4} (1 - C_1 22.66t) \\ y_2(t) = -1.884 \times 10^{-4} (1 - C_1 11.73t) + 5.117 \times 10^{-4} (1 - C_1 22.66t) \end{cases}$$

(ج)

$$\ddot{\underline{Z}}_j + 2\xi\omega_j \dot{\underline{Z}}_j + \omega_j^2 \underline{Z}_j = \Phi_j^T \underline{F}(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1 + 2.35 \dot{Z}_1 + 137.6 Z_1 = 3.12 & \text{معادله (۱)} \\ \ddot{Z}_2 + 4.53 \dot{Z}_2 + 513.5 Z_2 = 0.84 & \text{معادله (۲)} \end{cases}$$

برای حل معادله های (۱) و (۲) از اشتغال دولامل استفاده می کنیم. ($m=1, \omega_j, p(\tau) = \Phi_j^T F(t)$)

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری

$$\omega_d = 11.73 \sqrt{1 - 0.1^2} = 11.67$$

$$\omega_d = 22.66 \sqrt{1 - 0.1^2} = 22.55$$

$$Z_1(t) = \int_0^t \frac{3.12}{11.67} e^{-0.1 \times 11.73(t-\tau)} \sin 11.67(t-\tau) d\tau = \int_0^t 0.267 e^{-1.173(t-\tau)} \sin 11.67(t-\tau) d\tau$$

$$Z_2(t) = \int_0^t \frac{0.84}{22.55} e^{-0.1 \times 22.66(t-\tau)} \sin 22.55(t-\tau) d\tau = \int_0^t 0.037 e^{-2.266(t-\tau)} \sin 22.55(t-\tau) d\tau$$

$$Z_1(t) = e^{-0.617t} (-0.135 \sin(6.17t) - 0.024 C_1(6.17t)) + 0.024$$

$$Z_2(t) = e^{-2.475t} (-0.051 \sin(24.63t) - 0.0088 C_1(24.63)) + 0.0088$$

$$\underline{y} = \underline{\phi} \times \underline{Z}(t) \rightarrow \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.312 & 0.084 \\ -0.083 & 0.312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y_1(t) = 0.312 Z_1(t) + 0.084 Z_2(t)$$

$$y_2(t) = -0.083 Z_1(t) + 0.312 Z_2(t)$$

تمرین سری هفتم

(۲) برای قاب زوایدی ثان داده شده مطلوب ه

الف) فرکانس های طبیعی و ورهای ارتعاشی آن

ب) پاسخ قاب تحت نیروهای ناگهانی $F(t) = 10 \text{ kip}$

مطابق شکل (از آنجا که مرفق نظر شود)

ج) پاسخ پایداری قاب تحت تأثیر نیروی هارمونیک

$F(t) = 10 \sin 30t$ بدین آورد (از آنجا که)

سیستم مرفق نماید $E = 500 \text{ k/in}^2$ $I = 20 \text{ in}^4$ فرض ه

د) پاسخ پایداری قاب رآبری تحت (ج) با فرض مناسب بودن آنجا که با

معنی سیستم به مقدار $[C] = 0.2 [K]$ بدین آورد

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{EI}{l_1^3} = \frac{10^4}{100^3} = 10^{-2} \\ \frac{EI}{l_2^3} = \frac{10^4}{141.42^3} = 3.54 \times 10^{-3} \\ \frac{\bar{m} l_1}{420} = \frac{386 \times 10^{-5} \times 100}{420} = 9.19 \times 10^{-4} \\ \frac{\bar{m} l_2}{420} = \frac{386 \times 10^{-5} \times 141.42}{420} = 1.3 \times 10^{-3} \end{array} \right.$$

الف)

عضو ۸

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -6 & -0.12 & 0 & -6 \\ 0 & 75 & 0 & 0 & -75 & 0 \\ -6 & 0 & 400 & -6 & 0 & 200 \\ -0.12 & 0 & -6 & 0.12 & 0 & 6 \\ 0 & -75 & 0 & 0 & 75 & 0 \\ -6 & 0 & 200 & 6 & 0 & 400 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

4 5 6 1 2 3

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاي دكتور خوشنوديان

تمرين سري

$$\bar{M}_1 = 9.19 \times 10^{-4}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1438 & 0 & -2.0218 & 0.0496 & 0 & 1.1947 \\ 0 & 0.1287 & 0 & 0 & 0.0643 & 0 \\ -2.0218 & 0 & 36.76 & -1.1947 & 0 & -27.57 \\ 0.0496 & 0 & -1.1947 & 0.1433 & 0 & 2.0218 \\ 0 & 0.0643 & 0 & 0 & 0.1286 & 0 \\ 1.1947 & 0 & -27.57 & 2.0218 & 0 & 36.76 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

4 5 6 1 2 3

عضو ۶.۲

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 75.059 & -74.939 & -6 & 75.059 & 74.939 & -6 \\ -74.939 & 75.059 & -6 & 74.939 & -75.059 & -6 \\ -6 & -6 & 799.992 & -6 & -6 & 899.992 \\ 75.059 & 74.939 & -6 & 75.059 & -74.939 & 6 \\ 74.939 & -75.059 & -6 & -74.939 & 75.059 & 6 \\ -6 & -6 & 899.992 & 6 & 6 & 799.985 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} 0.136 & 7.35 \times 10^{-3} & -2.022 & 0.057 & -7.35 \times 10^{-3} & 1.195 \\ 7.35 \times 10^{-3} & 0.136 & -2.022 & -7.35 \times 10^{-3} & 0.057 & 1.195 \\ -2.022 & -2.022 & 73.519 & -1.195 & -1.195 & -55.139 \\ 0.057 & -7.35 \times 10^{-3} & -1.195 & 0.136 & 7.35 \times 10^{-3} & 2.022 \\ -7.35 \times 10^{-3} & 0.057 & -1.195 & 7.35 \times 10^{-3} & 0.136 & 2.022 \\ +1.195 & 1.195 & -55.139 & 2.022 & 2.022 & 73.519 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

7 8 9 1 2 3

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری

لحس فرکانس و مودل ۸

$$\underline{K}_S = \begin{bmatrix} 75.18 & -74.94 & 12 \\ -74.94 & 150.06 & 6 \\ 12 & 6 & 1199.99 \end{bmatrix} \quad \underline{M}_S = \begin{bmatrix} 0.279 & 0.007 & 4.044 \\ 0.007 & 0.265 & 2.022 \\ 4.044 & 2.022 & 110.279 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} / K_S - \omega^2 M_S / = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 3.24 \\ \omega_2 = 17.44 \\ \omega_3 = 27.59 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 75.18 - 0.279\omega^2 & -74.94 - 0.007\omega^2 & 12 - 4.044\omega^2 \\ -74.94 - 0.007\omega^2 & 150.06 - 0.265\omega^2 & 6 - 2.022\omega^2 \\ 12 - 4.044\omega^2 & 6 - 2.022\omega^2 & 1199.99 - 110.279\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.602 \\ 0.892 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.669 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.012 \\ -0.018 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\underline{\phi}_1^T \cdot \underline{M}_S \cdot \underline{\phi}_1} = 9.87$$

$$\sqrt{\underline{\phi}_2^T \cdot \underline{M}_S \cdot \underline{\phi}_2} = 0.378$$

$$\sqrt{\underline{\phi}_3^T \cdot \underline{M}_S \cdot \underline{\phi}_3} = 0.707$$

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.101 \\ 0.061 \\ 0.09 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 2.646 \\ 1.77 \\ -0.132 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi}_3 = \begin{bmatrix} 1.414 \\ -1.431 \\ -0.025 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{Z}_J(t) + \omega_J^2 Z_J(t) = \underline{\phi}_J^T \times \underline{F}(t) \quad \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\underline{\phi}_J^T \times \underline{F}(t) = Cte \rightarrow Z_J = \frac{\underline{\phi}_J^T \times \underline{F}(t)}{\omega_J^2} (1 - C_1(\omega_J t))$$

(۷)

حمید کاظم

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتور خوشنوديان

تمرين سري

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1 + 10.5 Z_1 = 1.01 \\ \ddot{Z}_2 + 304.15 Z_2 = 26.46 \\ \ddot{Z}_3 + 761.21 Z_3 = 14.14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z_1 = 9.62 \times 10^{-2} (1 - C_1(3.24t)) \\ Z_2 = 8.7 \times 10^{-2} (1 - C_1(17.44t)) \\ Z_3 = 1.86 \times 10^{-2} (1 - C_1(27.59t)) \end{cases}$$

$$\underline{y} = \underline{\Phi} \cdot \underline{Z}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.101 & 2.646 & 1.414 \\ 0.061 & 1.77 & -1.431 \\ 0.09 & -0.132 & -0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = 0.101 Z_1(t) + 2.646 Z_2(t) + 1.414 Z_3(t) \\ y_2(t) = 0.061 Z_1(t) + 1.77 Z_2(t) - 1.431 Z_3(t) \\ y_3(t) = 0.09 Z_1(t) - 0.132 Z_2(t) - 0.025 Z_3(t) \end{cases}$$

$$\ddot{\underline{Z}}_J(t) + \omega_n^2 \underline{Z}_J(t) = \underline{\Phi}_J^T \times \underline{F}(t) \quad \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} 10 \sin 30t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1 + 10.5 Z_1 = 1.01 \sin 30t \\ \ddot{Z}_2 + 304.15 Z_2 = 26.46 \sin 30t \\ \ddot{Z}_3 + 761.21 Z_3 = 14.14 \sin 30t \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{30}{3.24} = 9.26 \rightarrow D_1 = \frac{1.01}{10.5} = -1.14 \times 10^{-3} \rightarrow Z_1 = -1.14 \times 10^{-3} \sin 30t$$

$$\beta_2 = \frac{30}{17.44} = 1.72 \rightarrow D_2 = \frac{26.46}{304.15} = -4.44 \times 10^{-2} \rightarrow Z_2 = -4.44 \times 10^{-2} \sin 30t$$

$$\beta_3 = \frac{30}{27.59} = 1.09 \rightarrow D_3 = \frac{14.14}{761.21} = -9.88 \times 10^{-2} \rightarrow Z_3 = -9.88 \times 10^{-2} \sin 30t$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.101 & 2.646 & 1.414 \\ 0.061 & 1.77 & -1.431 \\ 0.09 & -0.132 & -0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \quad (ا)$$

حميد كاظم

$$C_n = 0.2 k_n = 0.2 M_n \omega_n^2 \quad (2)$$

$$\rightarrow \ddot{Z}_g + 0.2 \omega_n^2 \dot{Z}_g + \omega_n^2 Z_g = \phi_g^T F(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1 + 2.1 \dot{Z}_1 + 10.5 Z_1 = 1.01 \sin 30t \\ \ddot{Z}_2 + 60.83 \dot{Z}_2 + 304.15 Z_2 = 26.46 \sin 30t \\ \ddot{Z}_3 + 152.24 \dot{Z}_3 + 761.21 Z_3 = 14.14 \sin 30t \end{cases}$$

$$\xi = 0.2$$

از استخراج درج اول بار اصل استفاده می کنیم

$$\omega_{d1} = 3.24 \sqrt{1 - 0.2^2} = 3.17$$

$$\omega_{d2} = 17.44 \sqrt{1 - 0.2^2} = 17.09$$

$$\omega_{d3} = 27.59 \sqrt{1 - 0.2^2} = 27.03$$

$$Z_1(t) = \int_0^t \frac{\sin 30\tau}{3.14} e^{-0.65(t-\tau)} \sin(3.17(t-\tau)) d\tau$$

$$= -0.023 C_1 30t + 5.32 \times 10^{-3} \sin 30t + e^{-0.65t} (0.023 C_1(3.17t) + 0.24 \sin(3.17t))$$

$$Z_2(t) = \int_0^t \frac{\sin 30\tau}{0.65} e^{-3.5(t-\tau)} \sin(17.09(t-\tau)) d\tau$$

$$= -0.011 C_1 30t + 0.035 \sin 30t + e^{-3.5t} (0.011 C_1(17.09t) + 0.063 \sin(17.09t))$$

$$Z_3(t) = \int_0^t \frac{\sin 30\tau}{1.41} e^{-5.5(t-\tau)} \sin(27.03(t-\tau)) d\tau$$

$$= -1.5 \times 10^{-3} C_1 30t + 7.89 \times 10^{-3} \sin 30t + e^{-5.5t} (1.5 \times 10^{-3} C_1(27.03t) + 8.79 \times 10^{-3} \sin(27.03t))$$

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتر خوشنوديان

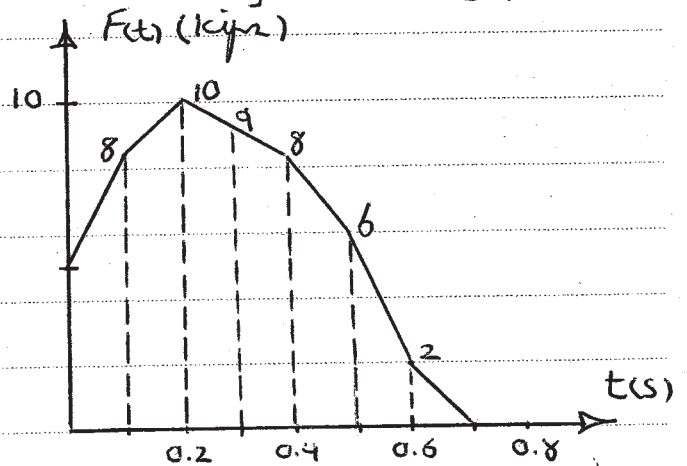
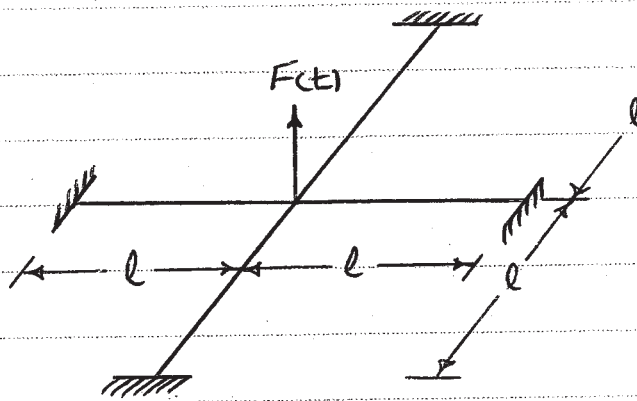
تمرين سري صفحه

$$\underline{y} = \underline{\phi} \underline{z}(t)$$

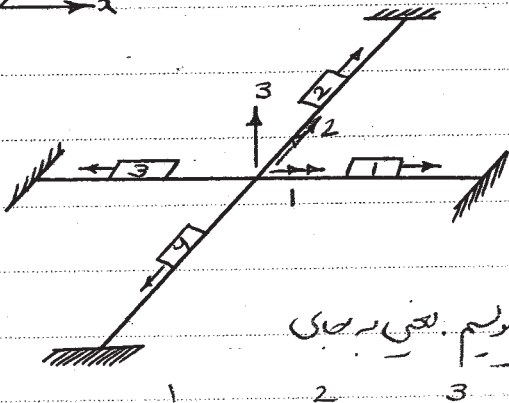
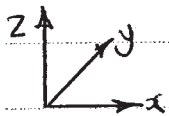
$$\rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.101 & 2.646 & 1.414 \\ 0.061 & 1.77 & -1.431 \\ 0.09 & -0.132 & -0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = 0.101 z_1(t) + 2.646 z_2(t) + 1.414 z_3(t) \\ y_2(t) = 0.061 z_1(t) + 1.77 z_2(t) - 1.431 z_3(t) \\ y_3(t) = 0.09 z_1(t) - 0.132 z_2(t) - 0.025 z_3(t) \end{cases}$$

(۳) برای شبکه نشان داده شده مطلوب است:
الف) فرکانس های طبیعی و مدای ارتعاشی
ب) پاسخ شبکه تحت نیروی شکل زیر



$l = 100 \text{ in}$ $\bar{m} = 0.01 \text{ ks}^2/\text{in}$
 $E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$ $J = 2000 \text{ in}^4$
 $G = 12000 \text{ ksi}$ $A = 20 \text{ in}^2$ $I = 1000 \text{ in}^4$



$\theta_1 = 0$ $\frac{EI}{l^3} = 30$
 $\theta_2 = 90$
 $\theta_3 = 180$ $\frac{\bar{m}l}{420} = 2.38 \times 10^{-3}$
 $\theta_4 = 270$

* در نوشتن ماتریس های جرم و سختی فقط درجات آزادی آزاد را می نویسیم. یعنی به جای ماتریس 6×6 ، ماتریس 3×3 را نشان می دهیم.

$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 24 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 \times 10^6 & 18000 \\ 0 & 18000 & 360 \end{bmatrix}$
 $\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \times 10^6 & 0 & -18000 \\ 0 & 24 \times 10^4 & 0 \\ -18000 & 0 & 360 \end{bmatrix}$

$\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} 33.32 & 0 & 0 \\ 0 & 45.2 & 5.24 \\ 0 & 5.24 & 0.37 \end{bmatrix}$
 $\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} 45.2 & 0 & -5.24 \\ 0 & 33.32 & 0 \\ -5.24 & 0 & 0.37 \end{bmatrix}$

* برای نوشتن ماتریس های دوران ماتریس لحاظ شده اند.

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری صفحہ

$$\underline{\underline{K}}_3 = \begin{bmatrix} 24 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 \times 10^6 & -18000 \\ 0 & -18000 & 360 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}_3 = \begin{bmatrix} 33.32 & 0 & 0 \\ 0 & 95.2 & -5.24 \\ 0 & -5.24 & 0.37 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_4 = \begin{bmatrix} 1.2 \times 10^6 & 0 & +18000 \\ 0 & 24 \times 10^4 & 0 \\ +18000 & 0 & 360 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}_4 = \begin{bmatrix} 95.2 & 0 & 5.24 \\ 0 & 33.32 & 0 \\ 5.24 & 0 & 0.37 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_5 = \begin{bmatrix} 288 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 288 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1440 \end{bmatrix}$$

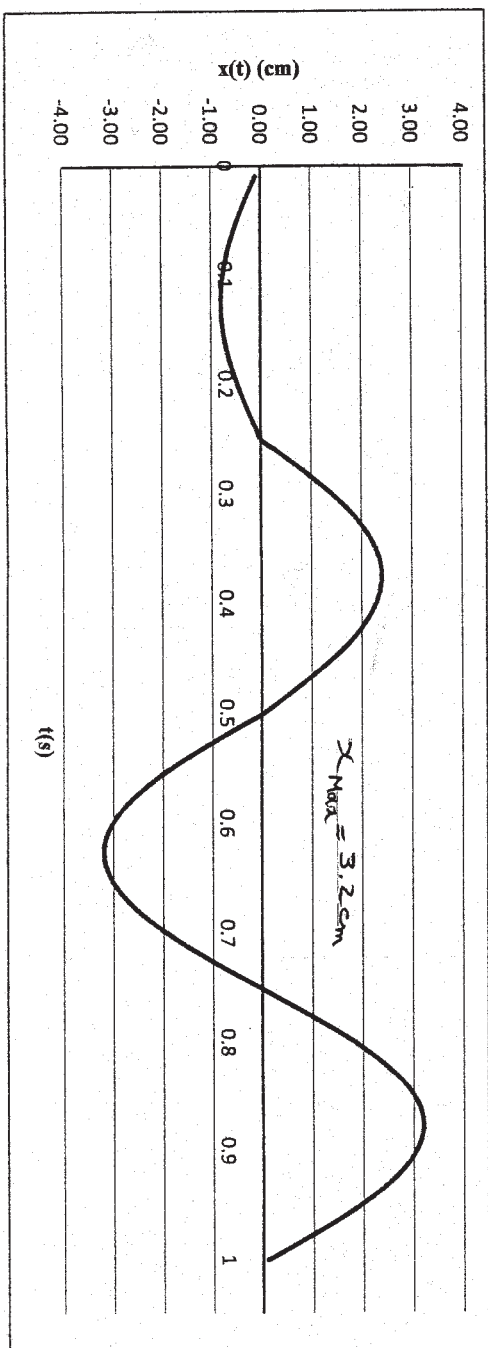
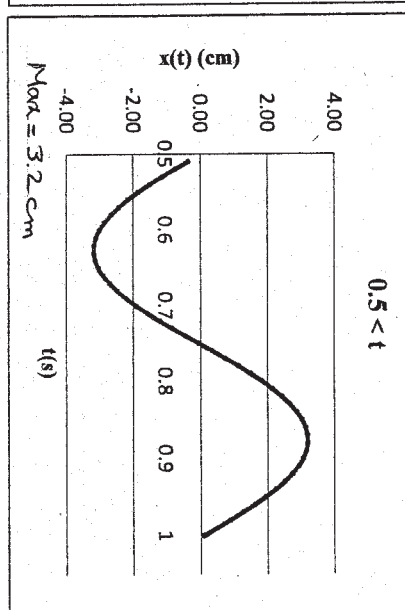
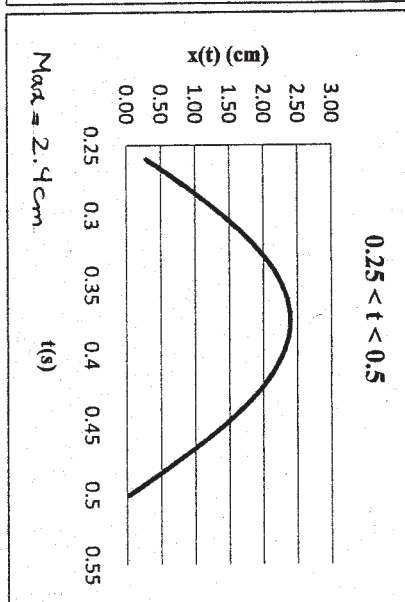
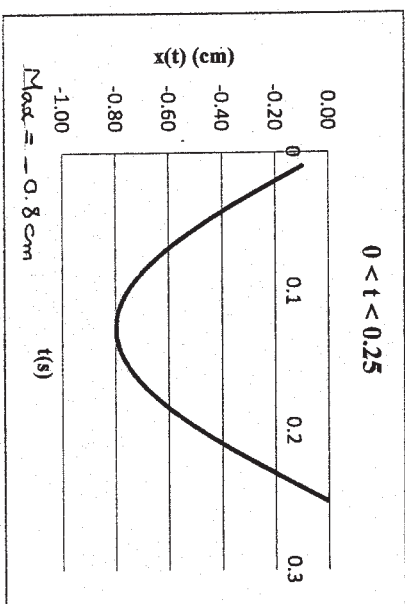
$$\underline{\underline{M}}_5 = \begin{bmatrix} 257.04 & 0 & 0 \\ 0 & 257.04 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det} | \underline{\underline{K}}_5 - \omega^2 \underline{\underline{M}}_5 | = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 31.19 \\ \omega_2 = 105.85 \\ \omega_3 = 105.85 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 288 \times 10^4 - 257.04 \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 288 \times 10^4 - 257.04 \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1440 - 1.48 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\omega_1 = 31.19 \rightarrow \begin{bmatrix} 2.63 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 2.63 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

به حالت استیاه بدن ماکزیم $\underline{\underline{M}}$ ارائه شده در خوزه قادر به حل ادامه می‌دهی باشم.



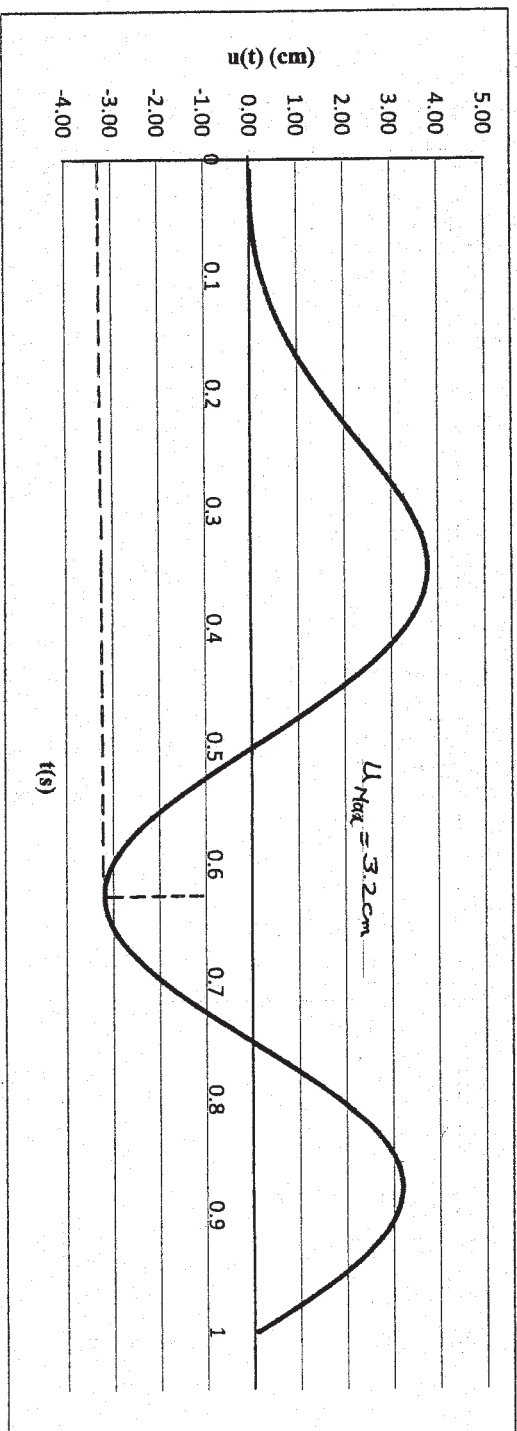
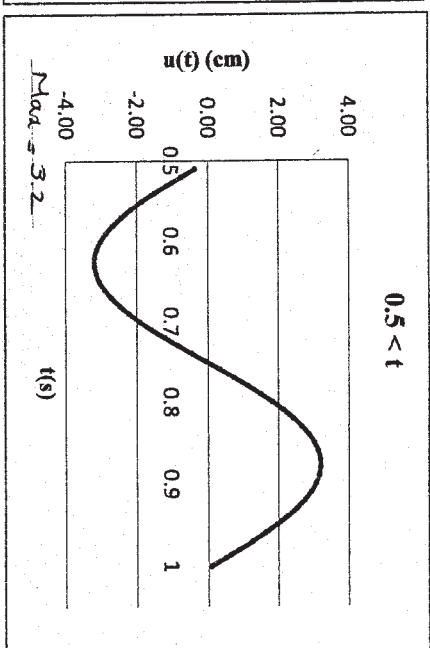
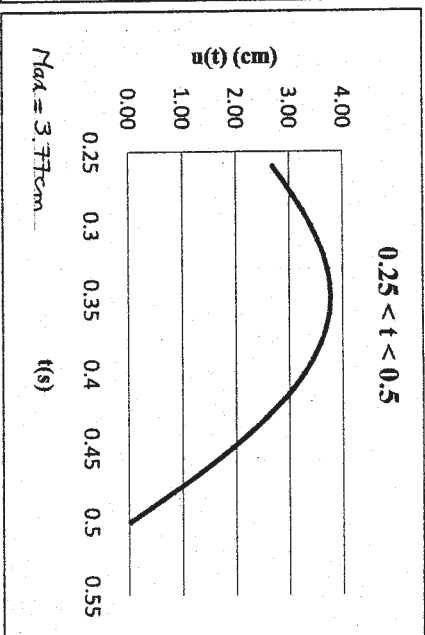
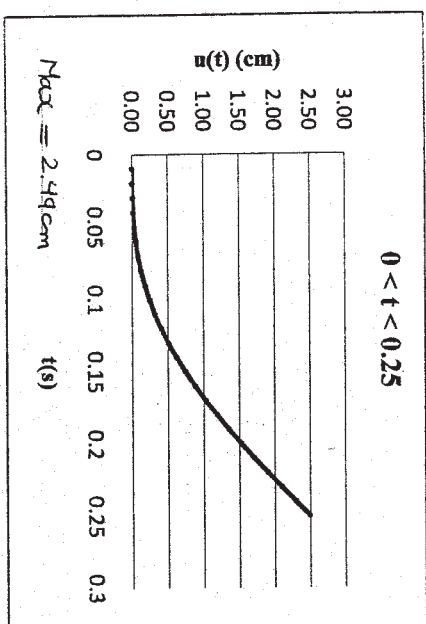
۸۸۱۲۴۰۷۹) حمید کاظم

دینامیک سازه

جناب آقای دکتر خوشنودیان

« حل بررسی سمت ب »

t(s)	x(t) (cm)	t(s)	x(t) (cm)	t(s)	x(t) (cm)	t(s)	x(t) (cm)
0.01	-0.09974	0.26	0.29201	0.51	-0.37013	0.76	0.34129
0.02	-0.19791	0.27	0.58670	0.52	-0.76348	0.77	0.73527
0.03	-0.29298	0.28	0.87219	0.53	-1.14487	0.78	1.11772
0.04	-0.38346	0.29	1.14401	0.54	-1.50830	0.79	1.48265
0.05	-0.46793	0.3	1.39788	0.55	-1.84808	0.8	1.82434
0.06	-0.54506	0.31	1.62984	0.56	-2.15889	0.81	2.13741
0.07	-0.61364	0.32	1.83625	0.57	-2.43584	0.82	2.41698
0.08	-0.67260	0.33	2.01386	0.58	-2.67460	0.83	2.65864
0.09	-0.72101	0.34	2.15990	0.59	-2.87143	0.84	2.85862
0.1	-0.75812	0.35	2.27207	0.6	-3.02323	0.85	3.01378
0.11	-0.78334	0.36	2.34861	0.61	-3.12763	0.86	3.12169
0.12	-0.79628	0.37	2.38833	0.62	-3.18299	0.87	3.18064
0.13	-0.79674	0.38	2.39060	0.63	-3.18844	0.88	3.18973
0.14	-0.78470	0.39	2.35539	0.64	-3.14390	0.89	3.14880
0.15	-0.76036	0.4	2.28325	0.65	-3.05006	0.9	3.05850
0.16	-0.72409	0.41	2.17530	0.66	-2.90840	0.91	2.92025
0.17	-0.67648	0.42	2.03325	0.67	-2.72114	0.92	2.73620
0.18	-0.61825	0.43	1.85932	0.68	-2.49121	0.93	2.50926
0.19	-0.55033	0.44	1.65623	0.69	-2.22222	0.94	2.24297
0.2	-0.47379	0.45	1.42718	0.7	-1.91839	0.95	1.94151
0.21	-0.38981	0.46	1.17575	0.71	-1.58447	0.96	1.60961
0.22	-0.29972	0.47	0.90588	0.72	-1.22572	0.97	1.25247
0.23	-0.20493	0.48	0.62181	0.73	-0.84774	0.98	0.87569
0.24	-0.10693	0.49	0.32799	0.74	-0.45647	0.99	0.48518
0.25	-0.00726	0.5	0.02903	0.75	-0.05805	1	0.08707



((حل ترسیم سمت الف))

t(s)	u(t) (cm)	t(s)	u(t) (cm)	t(s)	u(t) (cm)	t(s)	u(t) (cm)
0.01	0.00026	0.26	2.69201	0.51	-0.37013	0.76	0.34129
0.02	0.00209	0.27	2.88670	0.52	-0.76348	0.77	0.73527
0.03	0.00702	0.28	3.07219	0.53	-1.14487	0.78	1.11772
0.04	0.01654	0.29	3.24401	0.54	-1.50830	0.79	1.48265
0.05	0.03207	0.3	3.39788	0.55	-1.84808	0.8	1.82434
0.06	0.05494	0.31	3.52984	0.56	-2.15889	0.81	2.13741
0.07	0.08636	0.32	3.63625	0.57	-2.43584	0.82	2.41698
0.08	0.12740	0.33	3.71386	0.58	-2.67460	0.83	2.65864
0.09	0.17899	0.34	3.75990	0.59	-2.87143	0.84	2.85862
0.1	0.24188	0.35	3.77207	0.6	-3.02323	0.85	3.01378
0.11	0.31666	0.36	3.74861	0.61	-3.12763	0.86	3.12169
0.12	0.40372	0.37	3.68833	0.62	-3.18299	0.87	3.18064
0.13	0.50326	0.38	3.59060	0.63	-3.18844	0.88	3.18973
0.14	0.61530	0.39	3.45539	0.64	-3.14390	0.89	3.14880
0.15	0.73964	0.4	3.28325	0.65	-3.05006	0.9	3.05850
0.16	0.87591	0.41	3.07530	0.66	-2.90840	0.91	2.92025
0.17	1.02352	0.42	2.83325	0.67	-2.72114	0.92	2.73620
0.18	1.18175	0.43	2.55932	0.68	-2.49121	0.93	2.50926
0.19	1.34967	0.44	2.25623	0.69	-2.22222	0.94	2.24297
0.2	1.52621	0.45	1.92718	0.7	-1.91839	0.95	1.94151
0.21	1.71019	0.46	1.57575	0.71	-1.58447	0.96	1.60961
0.22	1.90028	0.47	1.20588	0.72	-1.22572	0.97	1.25247
0.23	2.09507	0.48	0.82181	0.73	-0.84774	0.98	0.87569
0.24	2.29307	0.49	0.42799	0.74	-0.45647	0.99	0.48518
0.25	2.49274	0.5	0.02903	0.75	-0.05805	1	0.08707

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری ^{سوم}

$$u(t) = u_g(t) + x(t) \Rightarrow x(t) = u(t) - u_g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \dot{u}(t) - \frac{d}{dt} u_g(t)$$

$$u_g(t) = \begin{cases} 10t & 0 \leq t \leq 0.25 \\ 5 - 10t & 0.25 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & t \geq 0.5 \end{cases}$$

1) $0 \leq t \leq 0.25$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = 2.5 \times 4 (1 - C_{12.53}t) - 10 = 0 \rightarrow t = 0.125$$

$$\Rightarrow x(0.125) = 2.5 \times 4 \left(0.125 - \frac{\sin(12.53 \times 0.125)}{12.53} \right) - 10 \times 0.125 = -0.8 \text{ cm}$$

2) $0.25 \leq t \leq 0.5$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = 2.5 \times 4 (-1 + 2C_{12.53}(t - 0.25) - C_{12.53}t) + 10 = 0$$

$$\rightarrow t = 0.125, 0.877 \quad \times$$

3) $t \geq 0.5$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = 2.5 \times 4 (2C_{12.53}(t - 0.25) - C_{12.53}t - C_{12.53}(t - 0.5)) = 0$$

$$\rightarrow t = 0.626, 0.877$$

$$x(0.626) = -3.2$$

$$\Rightarrow x_{Max} = 3.2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow V_{Max} = k \times x_{Max} = 720 \times 3.2 = 2304 \text{ kg}$$

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۳۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتر خوشنوديان

تمرين سري (سوم)

۱) $0 \leq t \leq \frac{t_d}{2} = 0.25$

$$\dot{u}(t) = \frac{P_0}{K} \times \frac{2}{t_d} (1 - c_1 \omega t) = 0$$

$$\rightarrow 2.5 \times 4 (1 - c_1 (12.53t)) = 0 \Rightarrow t = 0.5 \quad \times$$

۲) $\frac{t_d}{2} = 0.25 \leq t \leq t_d = 0.5$

$$\dot{u}(t) = \frac{P_0}{K} \times \frac{2}{t_d} [-1 + 2c_1 \omega (t - 0.25) - c_1 \omega t] = 0$$

$$\rightarrow (-1 + 2c_1 12.53(t - 0.25) - c_1 12.53t) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0.348 \text{ s} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow u(0.348) = 2.5 \times 4 \left[0.5 - 0.348 + \frac{1}{12.53} (2 \sin(12.53(0.348 - 0.25)) - \sin(12.53 \times 0.348)) \right] = 3.77 \text{ cm}$$

۳) $t \geq t_d = 0.5$

$$\dot{u}(t) = \frac{P_0}{K} \times \frac{2}{t_d} [2c_1 \omega (t - \frac{t_d}{2}) - c_1 \omega t - c_1 \omega (t - t_d)] = 0$$

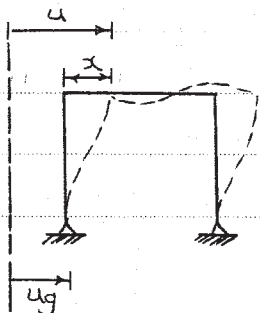
$$\Rightarrow \dot{u}(t) = 2.5 \times 4 [2c_1 (12.53(t - 0.25)) - c_1 12.53t - c_1 12.53(t - 0.5)] = 0$$

$$\Rightarrow t = 0.626 \quad t = 0.877 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow u(0.626) = \frac{2.5 \times 2}{12.53 \times 0.5} \left[2 \sin(12.53(0.626 - 0.25)) - \sin(12.53 \times 0.626) - \sin(12.53(0.626 - 0.5)) \right] = -3.2$$

$$\Rightarrow u(0.877) = 3.2$$

بنابراين در $t = 0.348 \text{ s}$ قاب به مقدار $u(t) = 3.77 \text{ cm}$ صداى تغيير مكان خود را خواص داشت.



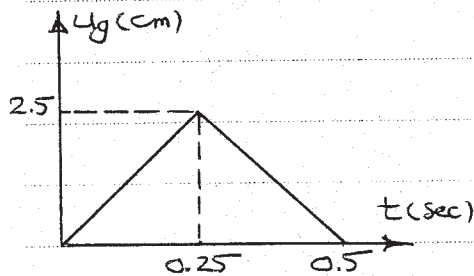
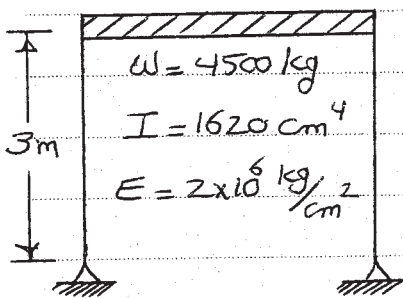
(ب)
زمانى كه x به مقدار صداى خود برسد برش در ستون ۲ به صداى مى رسد.
 $u = u_g + x$

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری ...



در این سؤال، قاعده بقا در مقابل در اثر حرکت افقی تکیه گاه های آن در ارتعاش درآمده است. تغییرات حرکت تکیه گاه بازین نیز در تصویر داده شده است.

الف) لحظه ای که در آن دال قاعده ها تغییر مکان (نسبت به وضعیت اولیه) را پیدا می کند و نیز مقدار این تغییر مکان (مقدار انحراف) را بدست آورید.

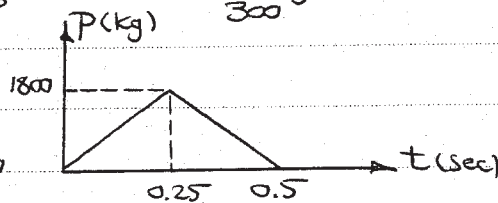
ب) لحظه ای که در آن مقدار نیروی برشی در ستون های قاعده ها تغییر می رسد و نیز مقدار این نیروی برشی را تعیین کنید.

$$u_g(t) = \begin{cases} 10t & 0 \leq t \leq 0.25 \\ 5 - 10t & 0.25 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & t \geq 0.5 \end{cases}$$

الف) $k = 2 \times \frac{3EI}{l^3} = 2 \times \frac{3 \times 2 \times 10^6 \times 1620}{300^3} = 720 \text{ kg/cm}$

$$P = k \cdot u_g$$

$$P = 720 \times 2.5 = 1800$$



$$u(t) = \frac{P_0}{k} \begin{cases} \frac{2}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) & 0 \leq t \leq t_d/2 \\ \frac{2}{t_d} \left[t_d - t + \frac{1}{\omega} (2 \sin \omega (t - t_d/2) - \sin \omega t) \right] & t_d/2 \leq t \leq t_d \\ \frac{2}{\omega \cdot t_d} [2 \sin \omega (t - t_d/2) - \sin \omega t - \sin \omega (t - t_d)] & t \geq t_d \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}}{4500 \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}} = 12.53 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$t_d = 0.5 \text{ s}$$

$$u_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{1800 \text{ kg}}{720 \text{ kg/cm}} = 2.5 \text{ cm}$$

۹

حمید کاظم

ديناميك سازه

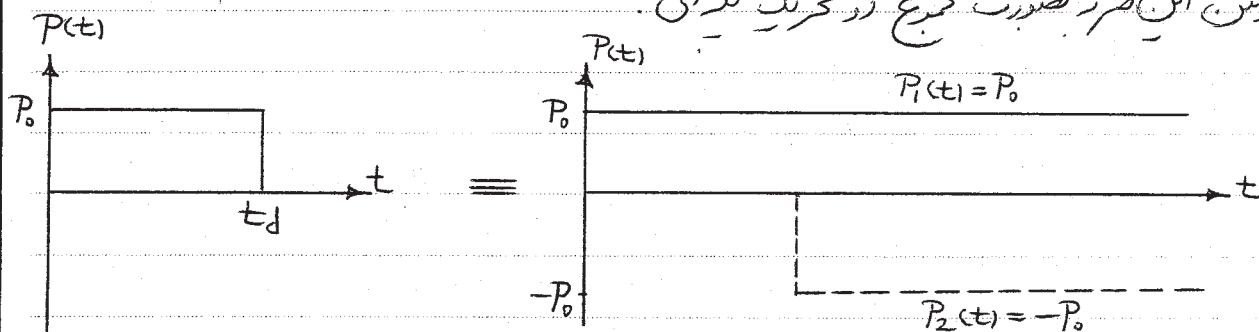
دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتور خوشنوديان

تمرين سري ...

$$\Rightarrow D = \begin{cases} \frac{\sin(\omega t) - \omega t}{2\omega \cdot t_d} + (1 - C_1(\omega t_1)) & t \leq t_d \\ \frac{\sin(\omega t_1) - \sin(\omega(t-t_d))}{2\omega \cdot t_d} + (1/2 - C_1(\omega t_1)) & t > t_d \end{cases}$$

تمرين ۴: مطلوبست تعيين پاسخ زامبر اين ضربه مستطلي با دامنه P_0 و زمان تداوم t_d با در نظر گرفتن اين ضربه بصورت مجموع دو تحريك پديدي.



حل برابر بار $P_1(t)$:

$$x_1(t) = \int_0^t \frac{P_0}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{P_0}{m\omega} \left[-\frac{1}{\omega} C_1 \omega(t-\tau) \right]_0^t$$

$$= \frac{-P_0}{k} (C_1(0) - C_1(\omega t)) = \frac{-P_0}{k} (1 - C_1(\omega t)) = \frac{P_0}{k} (C_1(\omega t) - 1)$$

حل برابر بار $P_2(t)$:

$$x_2(t) = \int_{t_d}^t \frac{-P_0}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{-P_0}{m\omega} \left[-\frac{1}{\omega} C_1 \omega(t-\tau) \right]_{t_d}^t$$

$$= \frac{P_0}{k} (C_1(0) - C_1(\omega(t-t_d))) = \frac{P_0}{k} (1 - C_1(\omega(t-t_d)))$$

$$\rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{P_0}{k} [C_1(\omega t) - C_1(\omega(t-t_d))]$$

(۵)

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

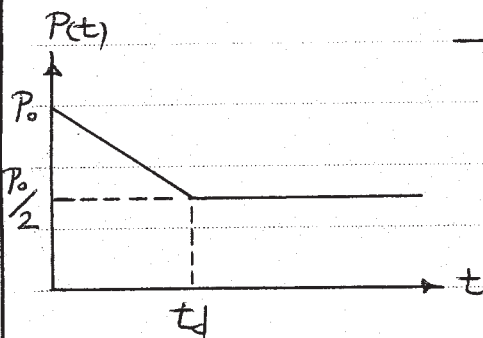
تمرین سری لیس

$$\text{جابجایی} = \frac{P_0}{k} \left[\left[\frac{2(1-C_1(\omega t_d))}{(\omega t_d)^2} - C_1(\omega t_d) - 1 \right]^2 + \left[\sin(\omega t_d) \left(\frac{2}{(\omega t_d)^2} + 1 \right) - \frac{2}{\omega t_d} \right]^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \frac{x_{dyn}}{x_{st}}$$

حال به محاسبه ضریب بزرگنمایی دینامیکی می پردازیم. طبق تعریف:

$$\Rightarrow D = \begin{cases} 2 \left(\frac{1-C_1 \omega t}{(\omega t_d)^2} \right) - C_1(\omega t) - \left(\frac{t}{t_d} \right)^2 & t \leq t_d \\ \sqrt{\left[2 \left(\frac{1-C_1 \omega t_d}{(\omega t_d)^2} \right) - C_1(\omega t_d) - 1 \right]^2 + \left[\sin(\omega t_d) \left(\frac{2}{(\omega t_d)^2} + 1 \right) - \frac{2}{\omega t_d} \right]^2} & t > t_d \end{cases}$$



تمرین ۳: مطلوب است تعیین ضریب بزرگنمایی دینامیکی
بر حسب t و ω ، t_d برابر بارندازی ثابت داده شده.

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \left(\frac{-t}{2t_d} + 1 \right) & t \leq t_d \\ \frac{P_0}{2} & t > t_d \end{cases}$$

الف) $t \leq t_d$

$$x(t) = \int_0^t \frac{P_0 \left(\frac{-\tau}{2t_d} + 1 \right)}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{P_0}{m\omega^2} \left(\frac{-t}{2t_d} + \frac{\sin \omega t}{2\omega t_d} + (1-C_1 \omega t) \right) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t - \omega t}{2\omega t_d} + (1-C_1 \omega t) \right)$$

ب) $t > t_d$

$$x(t) = \int_0^{t_d} \frac{P_0 \left(\frac{-\tau}{2t_d} + 1 \right)}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) d\tau + \int_{t_d}^t \frac{P_0/2}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{P_0}{k} \left(\frac{\sin(\omega t) - \sin(\omega(t-t_d))}{2\omega t_d} + \left(\frac{1}{2} - C_1(\omega t) \right) \right)$$

(۲)

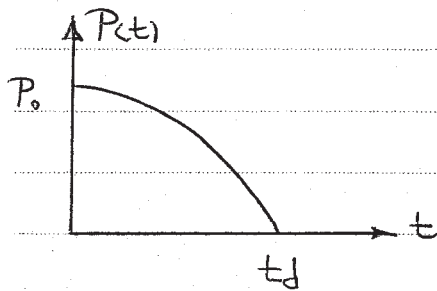
حمید کاظم

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتر خوشنوديان

تمرين سري... است



تدريس ۲: مطلوبست تعيين ضريب بزرگنمايي ديناميكي در صورت اعمال بار $P(t) = P_0 (1 - \frac{t^2}{t_d^2})$ بر ريب دستگاه مبد در صحت آزادي (تد زمان اعمال بارى باشد)

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = \begin{cases} P_0 (1 - \frac{t^2}{t_d^2}) & t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

الف) $t \leq t_d$: با استفاده از اشتراک در کمبل بر محاسبه پاسخ تغيير مکانى مى پردازيم.

$$x_1(t) = \int_0^t \frac{P_0 (1 - \frac{\tau^2}{t_d^2})}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

$$= \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t (1 - \frac{\tau^2}{t_d^2}) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

$$= \frac{P_0}{m\omega} \left[-\frac{t^2}{\omega \cdot t_d^2} - \frac{2C_1(\omega t)}{\omega^3 \cdot t_d^2} + \frac{2}{\omega^3 \cdot t_d^2} - \frac{C_1(\omega t)}{\omega} \right] \quad m\omega^2 = k$$

$$x_1(t) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{2(1 - C_1(\omega t))}{(\omega \cdot t_d)^2} - C_1(\omega t) - \left(\frac{t}{t_d}\right)^2 \right]$$

ب) $t > t_d$: در اين حالت سيستم ارتعاشى آزاد است.

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{2\omega \sin(\omega t)}{(\omega \cdot t_d)^2} + \omega \sin(\omega t) - \frac{2t}{t_d^2} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{2(1 - C_1(\omega t_d))}{(\omega \cdot t_d)^2} - C_1(\omega t_d) - 1 \right] = x_2(0) \\ \dot{x}_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{2\omega \sin(\omega t_d)}{(\omega \cdot t_d)^2} + \omega \sin(\omega t_d) - \frac{2}{t_d} \right] = \dot{x}_2(0) \end{cases}$$

$$\ddot{x}_2(t') + \omega^2 x_2(t') = 0 \Rightarrow x_2(t') = \sqrt{x_2(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_2(0)}{\omega}\right)^2} C_1(\omega t' - \theta)$$

$$t' = t - t_d$$

دینامیک سازه

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری سیم

$$t_d = \frac{\pi}{2\bar{\omega}} \Rightarrow \bar{\omega} t_d = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \Rightarrow \bar{\omega} = \beta \omega \Rightarrow \frac{\pi}{2t_d} = \beta \omega \Rightarrow \frac{\pi}{2\beta} = \omega t_d \quad (6)$$

$$\xrightarrow{(6), (5), (4)} x_1(t_d) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \left(C_1 \frac{\pi}{2} - C_1 \frac{\pi}{2\beta} \right) = \frac{-P_0}{k(1-\beta^2)} C_1 \frac{\pi}{2\beta} \quad (7)$$

$$\dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(t_d) \Rightarrow \dot{x}_1(t_d) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} (\omega \sin \omega t_d - \bar{\omega} \sin \bar{\omega} t_d) \quad (8)$$

$$\xrightarrow{(5), (6), (8)} \dot{x}_1(t_d) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \left(\omega \sin \frac{\pi}{2\beta} - \bar{\omega} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \left(\omega \sin \frac{\pi}{2\beta} - \bar{\omega} \right)$$

$$\Rightarrow x_2(t') = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \left[\left(\sin \frac{\pi}{2\beta} - \beta \right) \sin \omega t' - C_1 \frac{\pi}{2\beta} \cdot C_1 \omega t' \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \left(C_1 \left(\frac{\pi}{2t_d} \right) t - C_1 \omega t \right) & t < t_d \\ \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \left[\left(\sin \frac{\pi}{2\beta} - \beta \right) \sin \omega(t-t_d) - C_1 \frac{\pi}{2\beta} \cdot C_1 \omega(t-t_d) \right] & t > t_d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \frac{\pi}{2t_d} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases} \rightarrow \omega = \bar{\omega} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2t_d} \Rightarrow \frac{t_d}{T} = \frac{1}{4} \quad (\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1) \quad (ب)$$

پس پاسخ حدیث در هر دو دم آن‌ها یکی است.

$$x_{Max} = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_1(t_d)}{\omega} \right)^2 + x(t_d)^2} = \left[\left(\frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \frac{1}{\omega} (\omega \sin \frac{\pi}{2\beta} - \bar{\omega}) \right)^2 + \left(\frac{-P_0}{k(1-\beta^2)} C_1 \frac{\pi}{2\beta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

= 0

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتر خوشنوديان

تمرين سري ...

تدوين اول يك ضرب ربع موج كنيزي بصورت $P(t) = P_0 C_1 \bar{\omega} t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2\bar{\omega}}$) مي باشد.

الف) با شروع از صاف بودن عباراتي براي پاسخ در مقابل اين بار ضرب ربع اي بسازيد.

ب) ماكزيمم نسبت پاسخ $R_{Max} = \frac{V_{Max}}{P_0/k}$ را در شرط $\bar{\omega} = \omega$ نقش نماييد.

الف) $t_d = \frac{\pi}{2\bar{\omega}} \rightarrow \bar{\omega} = \frac{\pi}{2t_d}$, $\pi = 2\bar{\omega}t_d$ (مرحله ۱) $0 < t < t_d$

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = P_0 C_1 \frac{\pi}{2t_d} t$$

$$x_1(t) = A \sin \omega t + B C_1 \omega t + \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} C_1 \bar{\omega} t \quad (1)$$

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B + \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \Rightarrow B = \frac{-P_0}{k(1-\beta^2)} \quad (2) \\ \dot{x}_1(t) = A\omega C_1 \omega t - B\omega \sin \omega t - \frac{P_0 \bar{\omega}}{k(1-\beta^2)} \sin \omega t \\ \dot{x}_1(0) = 0 \Rightarrow 0 = A\omega - 0 - 0 \Rightarrow A = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} x_1(t) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} (C_1 \bar{\omega} t - C_1 \omega t)$$

مرحله ۲) $t > t_d$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0$$

$$\rightarrow x_2(t') = \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega} \sin \omega t' + x_2(0) C_1 \omega t' \quad / \quad t' = t - t_d$$

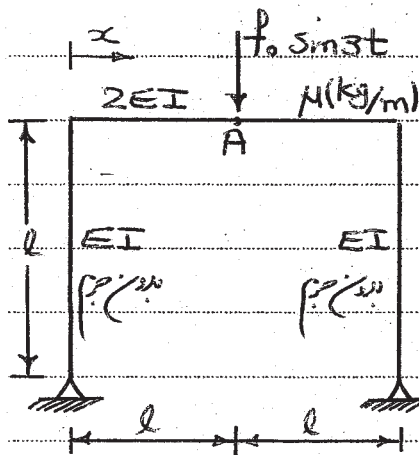
$$x_2(0) = x_1(t_d) \Rightarrow x_1(t_d) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} (C_1 \bar{\omega} t_d - C_1 \omega t_d) \quad (4)$$

①

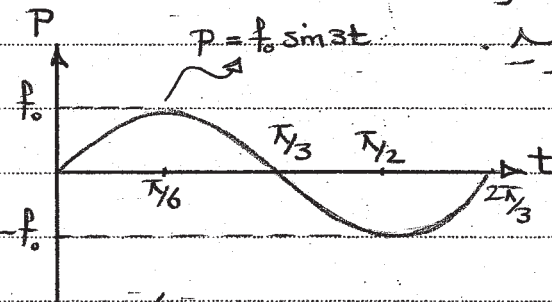
①

حميد كاظم

تمرین سری ۲۰



تمرین ۸.۱ برای سازه نشان داده شده رابطه
تغییر مکان نقطه A را با زمان بدست آورید
برای شکل تغییر شکل یافته اعضا از شکل
سینوسی استفاده کنید
 $P = f_0 \sin 3t$



سیستم یک درجه آزادی تحت اثر ارتعاش اجباری مرسوم شده می باشد بنابراین:

$$M^* \ddot{x}(t) + K^* x(t) = P^*(t)$$

با توجه به صورت مسئله تابع $\psi(x)$ به صورت زیر می باشد:

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{2l}$$

$$M^* = \int_0^{2l} m(x) \psi^2(x) dx = \int_0^{2l} \mu \left(\sin \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx = \mu L$$

$$K^* = \int_0^{2l} 2EI (\psi''(x))^2 dx = \int_0^{2l} 2EI \left(\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 (-\sin \frac{\pi x}{2l}) \right)^2 dx$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 EI \int_0^{2l} (\sin \frac{\pi x}{2l})^2 dx = 2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 EIL = \frac{\pi^4}{2^3} \times \frac{EI}{L^3} = \frac{12.18 EI}{L^3}$$

$$P^*(t) = \sum P_i \psi_i = f_0 \sin 3t \times \sin \frac{\pi l}{2l} = f_0 \sin 3t$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{12.18 EI}{\mu L^4}} = \frac{3.49}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاى دكتور خوشنوديان

تمرين سري ۲۰۰۰

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_0 \sin \omega t$$

$$\Rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \sin \omega t$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow (\mu L) \ddot{x}(t) + \left(\frac{12.18 EI}{L^3} \right) x(t) = f_0 \sin 3t$$

$$\omega = \frac{3.49}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \Rightarrow \beta = \frac{3L^2}{3.49} \sqrt{\frac{\mu}{EI}} = 0.86L^2 \sqrt{\frac{\mu}{EI}}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{f_0}{k(1-\beta^2)} \sin 3t$$

اعمال شرط مرزي

$$1) x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B + 0 \Rightarrow B = 0$$

$$2) \dot{x}(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t + \frac{f_0}{k(1-\beta^2)} \times 3 \cos 3t$$

$$\Rightarrow 0 = A - 0 + \frac{3f_0}{k(1-\beta^2)} \Rightarrow A = \frac{-3f_0}{k(1-\beta^2)}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-3f_0}{k(1-\beta^2)} \sin \omega t + \frac{f_0}{k(1-\beta^2)} \sin 3t$$

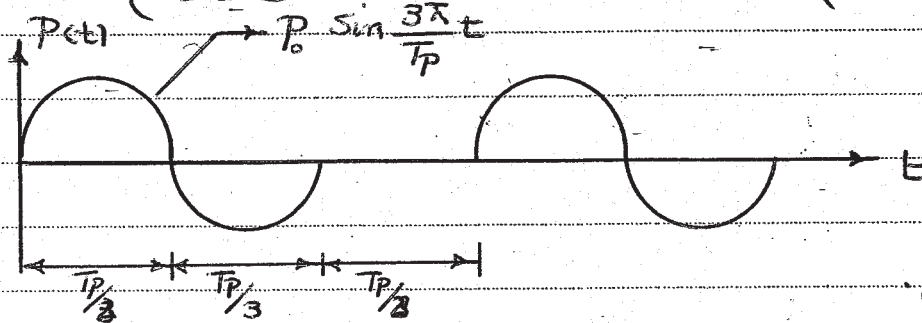
$$= \frac{f_0}{k(1-\beta^2)} (-3 \sin \omega t + \sin 3t)$$

$$= \frac{f_0}{\left(\frac{12.18 EI}{L^3} \right) (1 - 0.74 L^4 \left(\frac{\mu}{EI} \right))} (-3 \sin \left(\frac{3.49}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} t \right) + \sin 3t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0 L^3}{12.18 (EI - 0.74 \mu L^4)} \left[-3 \sin \left(\frac{3.49}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} t \right) + \sin 3t \right]$$

تمرین سری درم

تمرین ۲: با استفاده از شاخ داده شده در شکل، صورت زیر را فوراً بیان کنید.



تابع نه فرادست و نه زوج

$$F(t) = \begin{cases} P_0 \sin \frac{3\pi}{T_p} t & 0 \leq t \leq \frac{2T_p}{3} \\ 0 & \frac{2T_p}{3} \leq t \leq T_p \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{\frac{2T_p}{3}} P_0 \sin \frac{3\pi}{T_p} t \, dt = \frac{P_0}{T_p} \times \frac{-1}{\frac{3\pi}{T_p}} \left[C_1 \frac{3\pi}{T_p} t \right]_0^{\frac{2T_p}{3}}$$

$$= \frac{-P_0}{T_p} \times \frac{T_p}{3\pi} (C_1 (\frac{3\pi}{T_p} \times \frac{2T_p}{3}) - C_1 0) = \frac{-P_0}{3\pi} (-1 - 1) = \frac{2P_0}{3\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{\frac{2T_p}{3}} (P_0 \sin \frac{3\pi}{T_p} t) C_1 \frac{2n\pi}{T_p} t \, dt$$

$$= \frac{2P_0}{T_p} \int_0^{\frac{2T_p}{3}} \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{(2n+3)\pi}{T_p} t \right) + \sin \left(\frac{(3-2n)\pi}{T_p} t \right) \right] dt$$

$$= \frac{P_0}{T_p} \int_0^{\frac{2T_p}{3}} \left(\frac{\sin \frac{(2n+3)\pi}{T_p} t}{T_p} - \frac{\sin \frac{(2n-3)\pi}{T_p} t}{T_p} \right) dt$$

$$= \frac{P_0}{T_p} \left[\frac{-T_p}{(2n+3)\pi} C_1 \left(\frac{2n+3}{T_p} \right) \pi t + \frac{T_p}{(2n-3)\pi} C_1 \left(\frac{2n-3}{T_p} \right) \pi t \right]_0^{\frac{2T_p}{3}}$$

$$= P_0 \left[\frac{-1}{(2n+3)\pi} (C_1 (\frac{2(2n+3)\pi}{3}) - 1) + \frac{1}{(2n-3)\pi} (C_1 (\frac{2(2n-3)\pi}{3}) - 1) \right]$$

(۳)

حمید کاظم

ديناميك سازه

استاد: جناب آقاي دكتور خوشنوديان

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری..... (۲)

$$= \frac{P_0}{\pi} \left[\frac{-1}{(2n+3)} \left(C_1 \left(\frac{4n\pi}{3} + 2\pi \right) - 1 \right) + \frac{1}{(2n-3)} \left(C_1 \left(\frac{4n\pi}{3} - 2\pi \right) - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{P_0}{\pi} \left(\frac{-1}{2n+3} \left(C_1 \left(\frac{4n\pi}{3} \right) - 1 \right) + \frac{1}{2n-3} \left(C_1 \left(\frac{4n\pi}{3} \right) - 1 \right) \right)$$

$$= \frac{P_0}{\pi} \left[\left(C_1 \left(\frac{4n\pi}{3} \right) - 1 \right) \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] = \frac{P_0}{\pi} \left[\left(C_1 \left(\frac{4n\pi}{3} \right) - 1 \right) \left(\frac{6}{4n^2-9} \right) \right]$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{\frac{2T_p}{3}} P_0 \left(\sin \frac{3\pi}{T_p} t \right) \left(\sin \frac{2n\pi}{T_p} t \right) dt$$

$$= \frac{2P_0}{T_p} \int_0^{\frac{2T_p}{3}} \frac{1}{2} \left[C_1 \left(\frac{3+2n}{T_p} \pi t \right) - C_1 \left(\frac{3-2n}{T_p} \pi t \right) \right] dt$$

$$= \frac{-P_0}{T_p} \int_0^{\frac{2T_p}{3}} \left[C_1 \left(\frac{2n+3}{T_p} \pi t \right) - C_1 \left(\frac{2n-3}{T_p} \pi t \right) \right] dt$$

$$= \frac{-P_0}{T_p} \left[\frac{T_p}{(2n+3)\pi} \sin \left(\frac{2n+3}{T_p} \pi t \right) - \frac{T_p}{(2n-3)\pi} \sin \left(\frac{2n-3}{T_p} \pi t \right) \right]_0^{\frac{2T_p}{3}}$$

$$= \frac{-P_0}{\pi} \left[\frac{-1}{(2n+3)} \left(\sin \left(\frac{4n\pi}{3} + 2\pi \right) - 0 \right) + \frac{1}{(2n-3)} \left(\sin \left(\frac{4n\pi}{3} - 2\pi \right) - 0 \right) \right]$$

$$= \frac{-P_0}{\pi} \left[\frac{1}{(2n+3)} \sin \left(\frac{4n\pi}{3} \right) + \frac{1}{(2n-3)} \sin \left(\frac{4n\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{-P_0}{\pi} \left[\frac{4n}{4n^2-9} \sin \left(\frac{4n\pi}{3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{P_0}{\pi} \left[\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{4n^2-9} \right) \left(C_1 \left(\frac{4n\pi}{3} \right) - 1 \right) C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_p} \right) t \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n^2-9} \right) \sin \left(\frac{4n\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{2n\pi}{T_p} \right) t \right]$$

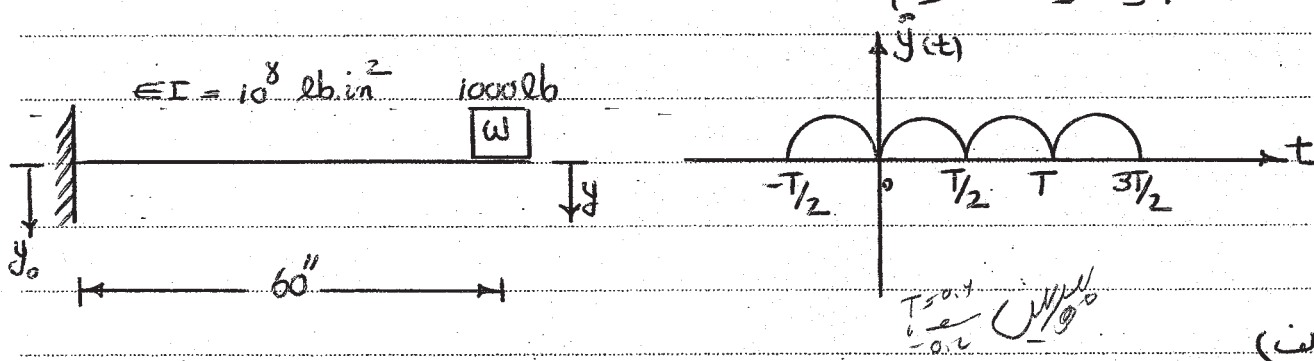
تمرین سری (در)

تمرین ۳ و به سبب هر ای نشان داده شده حجم هم تری را در انتهای آن در آن محل می گذارند. بکشد
این تیر دارای شتاب دوره ای نیم سینوسی با زمان شتاب $a_0 = 0.45$ و دامنه $\ddot{y}_0 = 180 \frac{in}{s^2}$
است. مطلوب است:

الف) دینامیک فرورد شتاب بکشد

ب) پاسخ پایداری سیستم با اصطکاک β محاسبه اول سری

* از حجم تیر و برای در سیستم صرف نظر کنید



الف) $\ddot{y}(t) = a_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$ $a_0 = 180$ $T = 0.4$ $\rightarrow \ddot{y}(t) = 180 \sin 5\pi t$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{y}(t) dt = \frac{1}{0.4} \times 2 \int_0^{0.2} 180 \sin 5\pi t dt = \frac{180}{0.2} \int_0^{0.2} \sin 5\pi t dt$$

$$= \frac{180}{0.2} \times \left(\frac{-1}{5\pi} \right) C_1 5\pi t \Big|_0^{0.2} = \frac{-180}{\pi} (C_1 \pi - C_1 0) = \frac{360}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \ddot{y}(t) C_1 \frac{2n\pi}{T} t dt = \frac{2}{0.4} \times 2 \int_0^{0.2} 180 \sin(5\pi t) C_1 \left(\frac{2n\pi}{0.4} \right) t dt$$

$$= 1800 \int_0^{0.2} \sin(5\pi t) C_1 (5n\pi t) dt$$

$$= 1800 \int_0^{0.2} \frac{1}{2} (\sin(5n\pi + 5\pi)t + \sin(5\pi - 5n\pi)t) dt$$

ديناميك سازه

استاد: جناب آقای دکتر خوشنوديان

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری.....

$$= 1800 \int_0^{0.2} \frac{1}{2} (-\sin(5n\pi)t - \sin(-5n\pi)t) dt$$

$$= 1800 \int_0^{0.2} \sin(5n\pi)t dt = 1800 \times \frac{-1}{5n\pi} C_1(5n\pi t) \Big|_0^{0.2}$$

$$= \frac{-360}{n\pi} (C_1(n\pi) - C_1(0)) = \frac{-360}{n\pi} (C_1(n\pi) - 1)$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ -\frac{2 \times 360}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt = \frac{2}{0.4} \times 2 \int_0^{0.2} 180 \sin(5\pi t) \sin \frac{2n\pi}{0.4} t dt$$

$$= 1800 \int_0^{0.2} \sin(5\pi t) \sin(5n\pi t) dt$$

$$= 1800 \int_0^{0.2} -\frac{1}{2} [C_1(5n\pi + 5\pi)t - C_1(5\pi - 5n\pi)t] dt$$

$$= 1800 \int_0^{0.2} -\frac{1}{2} (-C_1(5n\pi)t - (-C_1(-5n\pi)t)) dt$$

$$= 1800 \int_0^{0.2} -\frac{1}{2} (-C_1(5n\pi)t + C_1(5n\pi)t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y}(t) = \frac{360}{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} C_1 \frac{2n\pi}{0.4} t \right] \quad \text{فرد } n$$

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 10^8}{60^3} = 1388.9 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

(ب)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} = \sqrt{\frac{1388.9 \times 386.06}{1000}} = 23.2 \text{ rad/s}$$

(۶)

حميد كاظم

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری (۲)

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \Rightarrow \beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{5\pi}{23.2} = 0.68 \Rightarrow \beta_n = 0.68n$$

$$\Rightarrow P(t) = m \ddot{y}_{(t)} = \frac{1000}{386.06} \times \frac{360}{\pi} \left[1 + \sum_{n=1,3,5} \frac{2}{n} C_1 \sin \pi t \right]$$

$$a_0(P(t)) = 296.82$$

$$a_n(P(t)) = 296.82 \left[\frac{2}{1} C_1 \sin \pi t + \frac{2}{3} C_1 \sin 3\pi t + \frac{2}{5} C_1 \sin 5\pi t \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{k} \left[\bar{a}_0 + \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{(1-\beta_n^2)} (a_n C_1 \frac{2n\pi}{T} t) \right]$$

$$= \frac{296.82}{1388.9} \left[1 + \frac{1}{1-0.68} (2 C_1 \sin \pi t) + \frac{1}{1-0.68 \times 3} \left(\frac{2}{3} C_1 \sin 3\pi t \right) + \frac{1}{1-0.68 \times 5} \left(\frac{2}{5} C_1 \sin 5\pi t \right) \right]$$

$$x(t) = 0.214 \left[1 + 6.25 C_1 \sin \pi t - 1.85 C_1 \sin 3\pi t - 0.167 C_1 \sin 5\pi t \right]$$

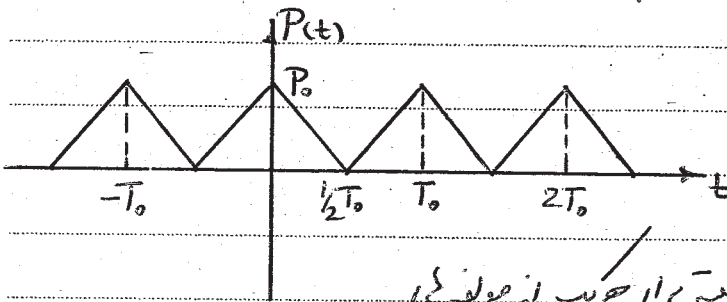
ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاي دكتور خوشنوديان

تمرين سري دوم

تمرين ۴: يك سيستم يك درجه آزادي با زمان تناوب طبعي T_n در تحت ميرايي عكس
نيروي تناوبي $P(t)$ داده شده در شكل باردار. P_0 و زمان تناوب T_0 خصوصيات
مطلوبه.



الف) رايج نيرو با استفاده از رايج فوريه

ب) پاسخ حالت ماندگار براي سيستم

بدون ميرايي

پ) براي $T_0/T_n = 2$ ، نمودار پاسخ سيستم برابر حركت از صفر در
سري فوريه

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{2P_0}{T_0}t + P_0 & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{2P_0}{T_0}t - P_0 & \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

الف) رايج زوج است بابرابي $b_n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt = \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(-\frac{2P_0}{T_0}t + P_0 \right) dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \left(\frac{2P_0}{T_0}t - P_0 \right) dt \right] \\ &= \frac{P_0}{T_0} \left[\left(-\frac{t^2}{T_0} + t \right) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} + \left(\frac{t^2}{T_0} - t \right) \Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \right] \\ &= \frac{P_0}{T_0} \left[\left(-\frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{2} \right) + \left((T_0 - T_0) - \left(\frac{T_0}{4} - \frac{T_0}{2} \right) \right) \right] = \frac{P_0}{T_0} \left(2 \times \frac{T_0}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} P_0 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \frac{2n\pi}{T_p} t dt =$$

دینامیک سازه

دانشجو: حمید کاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقای دکتر خوشنودیان

تمرین سری (رو)

$$= \frac{2P_0}{T_0} \left[\int_0^{T_0/2} \left(\frac{-2t}{T_0} + 1 \right) C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t dt + \int_{T_0/2}^{T_0} \left(\frac{2t}{T_0} - 1 \right) C_1 \frac{2n\pi}{T_0} dt \right]$$

$$I = \int \frac{2t}{T_0} C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t dt = \frac{2}{T_0} \int t C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t dt$$

$$\text{خبرج: } \begin{cases} dv = C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_0} \right) t \Rightarrow v = \frac{T_0}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \\ u = t \Rightarrow du = dt \end{cases}$$

$$I = \int u dv = uv - \int v du = \left(\frac{T_0 t}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \right) - \int \frac{T_0}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) dt \Bigg|_0^{T_0/2}$$

$$= \frac{2}{T_0} \left(\frac{T_0 t}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \right) + \left(\frac{T_0}{2n\pi} \right)^2 C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \Bigg|_0^{T_0/2}$$

$$1) \int_0^{T_0/2} \frac{-2t}{T_0} C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) dt = \frac{-2}{T_0} \times \frac{T_0}{2n\pi} \left[t \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \right]_0^{T_0/2} + \frac{T_0}{2n\pi} C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \Bigg|_0^{T_0/2}$$

$$= \frac{-1}{n\pi} \left[\left(\frac{T_0}{2} \sin(n\pi) \right) + \frac{T_0}{2n\pi} C_1(n\pi) \right]$$

$$2) \int_0^{T_0/2} C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t dt = \frac{T_0}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \Bigg|_0^{T_0/2} = \frac{T_0}{2n\pi} \sin(n\pi)$$

$$3) \int_{T_0/2}^{T_0} \frac{2t}{T_0} C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) dt = \frac{2}{T_0} \times \frac{T_0}{2n\pi} \left[t \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \right]_{T_0/2}^{T_0} + \frac{T_0}{2n\pi} C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \Bigg|_{T_0/2}^{T_0}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[\left(T_0 \sin(2n\pi) - \frac{T_0}{2} \sin(n\pi) \right) + \frac{T_0}{2n\pi} (C_1(2n\pi) - C_1(n\pi)) \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[-\frac{T_0}{2} \sin(n\pi) + \frac{T_0}{2n\pi} (1 - C_1(n\pi)) \right]$$

$$4) \int_{T_0/2}^{T_0} C_1 \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) dt = \frac{-T_0}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi}{T_0} t \right) \Bigg|_{T_0/2}^{T_0} = \frac{+T_0}{2n\pi} \sin(n\pi)$$

(۹)

حمید کاظم

ديناميك سازه

دانشجو: حميد كاظم (۸۸۱۲۴۰۷۹)

استاد: جناب آقاي دكتور خوشنوديان

تمرین سری

$$\Rightarrow a_n = \frac{2P_0}{T_0} \left[\frac{-1}{n\pi} \left(\frac{T_0}{2} \sin(n\pi) + \frac{T_0}{2n\pi} \cos(n\pi) \right) + \frac{T_0}{n\pi} \sin(n\pi) \right. \\ \left. + \frac{1}{n\pi} \left(\frac{-T_0}{2} \sin(n\pi) + \frac{T_0}{2n\pi} \cos(n\pi) - \frac{T_0}{2n\pi} \cos(n\pi) \right) \right] \\ = \frac{2P_0}{T_0} \left[\frac{T_0}{2n\pi} \right] = \frac{P_0}{n\pi}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{1}{2} P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_0}{n\pi} C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t$$

$$x(t) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2} \left(\frac{P_0}{n\pi} (1-\beta_n^2) C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t \right) \right] \quad (ب) \\ = \frac{P_0}{k} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)} \left(\frac{1}{n\pi} C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t \right) \right]$$

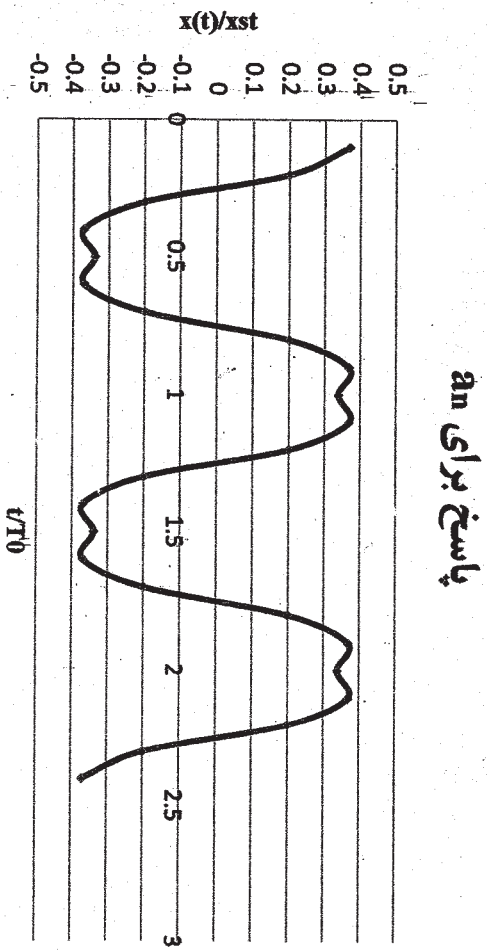
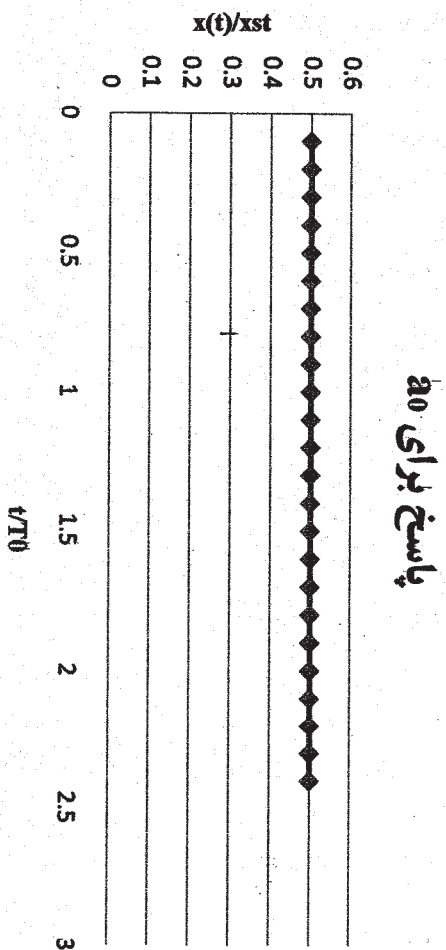
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{T_n}{T_0} = \frac{1}{2} \rightarrow \beta_n = \frac{n}{2} \quad (ج)$$

$$a_0 \rightarrow x(t) = \frac{a_0}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_0}{k} \right) \Rightarrow \frac{x(t)}{x_{st}} = \frac{1}{2}$$

$$a_n \rightarrow x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1-\frac{n^2}{4}} \right) \left(\frac{1}{n\pi} C_1 \frac{2n\pi}{T_0} t \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{x_{st}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\pi} C_1 \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) - \frac{4}{5} \times \frac{1}{3\pi} C_1 \left(\frac{6\pi}{T_0} t \right) - \dots \\ = 0.424 C_1 \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) - 0.085 C_1 \left(\frac{6\pi}{T_0} t \right) - \dots$$

t/T_0	a_n	a_0
	$x(t)/x_{st}$	$x(t)/x_{st}$
0.1	0.36929	0.5
0.2	0.19979	0.5
0.3	-0.19979	0.5
0.4	-0.36929	0.5
0.5	-0.339	0.5
0.6	-0.36929	0.5
0.7	-0.19979	0.5
0.8	0.19979	0.5
0.9	0.36929	0.5
1	0.339	0.5
1.1	0.36929	0.5
1.2	0.19979	0.5
1.3	-0.19979	0.5
1.4	-0.36929	0.5
1.5	-0.339	0.5
1.6	-0.36929	0.5
1.7	-0.19979	0.5
1.8	0.19979	0.5
1.9	0.36929	0.5
2	0.339	0.5
2.1	0.36929	0.5
2.2	0.19979	0.5
2.3	-0.19979	0.5
2.4	-0.36929	0.5



حمید کاظمی

دینامیک سازه

حمید کاظم

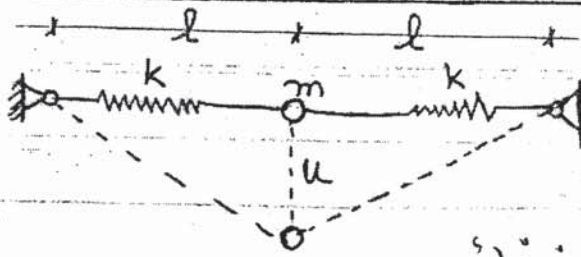
۸۸۱۲۴۰۷۹

حمید کاظم

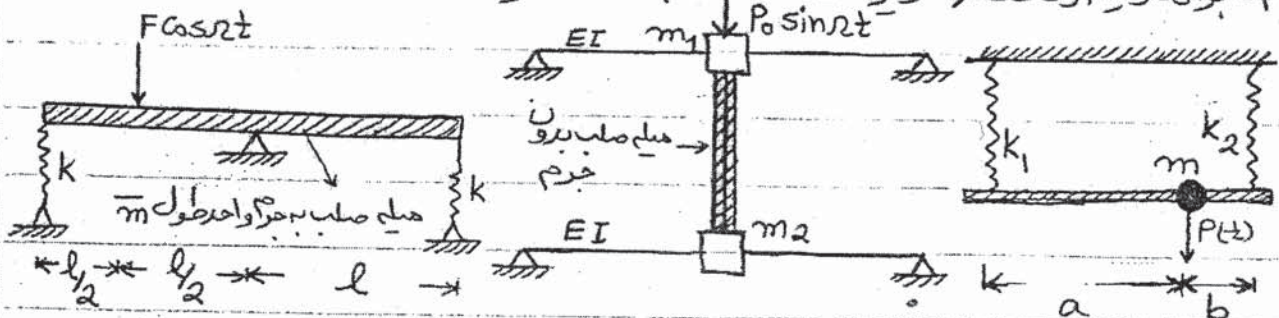
حميد کاظمه

حل تمرین ها

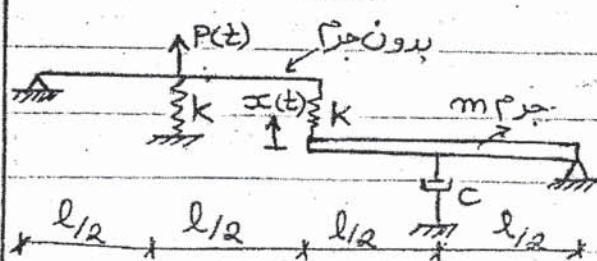
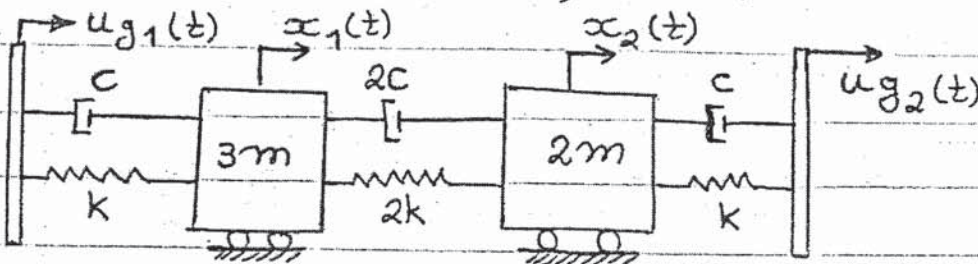
حميد کاظمه



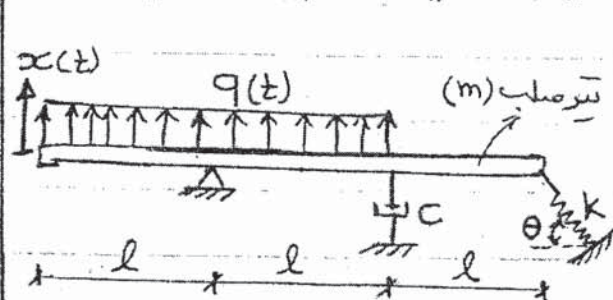
- ۱- برای پیدا کردن داده شده در تصویر مقابل معادله ارتعاش آزاد را ابتداء در حالت کلی بدست آورید و سپس از طریق آن معادله ارتعاشات آزاد را برای دامنه کوتاه نوسانات ($1 \ll u/l$) تعیین نمایید.
- ۲- برای حرکت از دستگاه زیر معادله حرکت را بدست آورید.



- ۳- اتاق آسانسور در حال پائین آمدن با سرعت ثابت 1 m/sec می باشد در لحظه $t=0$ طول کابل نگهدارنده آسانسور ۲۵ متر است. ناگهان چرخ محرک آسانسور قفل می شود تنش اضافی ایجاد شده در کابل را در اثر این توقف محاسبه کنید وزن اتاق آسانسور 1000 kg ، سطح مقطع کابل 2 cm^2 و مدول یانگ کابل $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ است.
- ۴- برای سیستم نشان داده شده روابط حرکت را تعیین نمایید $u_1(t)$ و $u_2(t)$ تغییر مکان باشد گاهی می باشد.



- ۵- مشخصات کلی m^* ، k^* و C^* و بار زلزله $P(t)$ دستگاه نشان داده شده در شکل را بدست آورید.



- ۶- مشخصات کلی m^* ، k^* و C^* و بار زلزله $P(t)$ دستگاه نشان داده شده در شکل مقابل را بدست آورید.

$$G_0 = \frac{1}{1 + \frac{e^2}{4I^2}}$$

$$\frac{P}{K} = L(1 - G_0)$$

$$\frac{5A}{L} \text{ cm} \quad KG \cdot m$$

$$K_V = K \left(1 - \frac{L}{\sqrt{12} L^2} \right)$$

$$K_V^T = 2KL \left(1 - \frac{L}{\sqrt{12} L^2} \right) \Rightarrow m \ddot{y} + 2KL \left(1 - \frac{L}{\sqrt{12} L^2} \right) y = 0$$

$$\frac{f_c}{k} = \frac{f_{2c}}{k}$$

$$\frac{f_{2c}}{k} - \frac{f_c}{k} = \frac{f_k}{k} - \frac{f_k}{k} = 3m(\ddot{x}_1 - u_1)$$

$$2C\ddot{x}_1 - C\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_1 = 3m\ddot{x}_1$$

حمید کاظمی

$$\rightarrow x = 70.71 \sin \sqrt{2} t + 2000 \cos \sqrt{2} t$$

بنابرین بیشترین نیروی کشش در تیر عبارتست از:

$$\text{د.ب. کشش} = \frac{F}{A} = \frac{\frac{AE}{L} (x - 2000)}{A} = \frac{2 \times 10^6}{2 \times 10^3} (x - 2000)$$

$$\rightarrow \boxed{\text{د.ب. کشش} = 10^3 (0.07 \sin \sqrt{2} t + 2 \cos \sqrt{2} t - 2)}$$

برای یافتن مقدار کشش با فرض اینکه زمان تیر به اندازه کافی طولانی باشد داریم:

$$\frac{d\delta}{dt} = 0 \rightarrow 0.07 \cos \sqrt{2} t = 2 \sin \sqrt{2} t$$

$$\rightarrow \tan(\sqrt{2} t) = \frac{0.07}{2} = 0.035$$

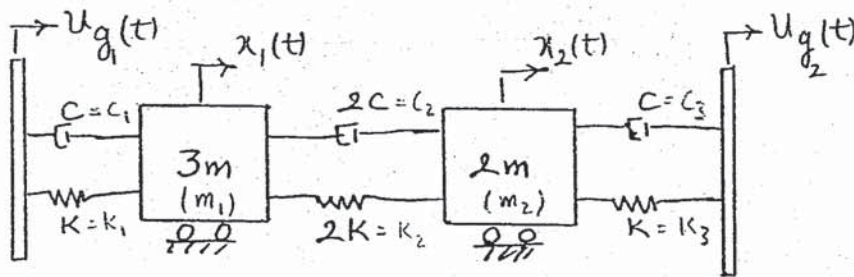
$$\rightarrow t = 0.025 \text{ sec}$$

$$\rightarrow \delta_{\max} = \delta \Big|_{t=0.025} = 10^6 (0.07 \sin(\sqrt{2} \times 0.025)$$

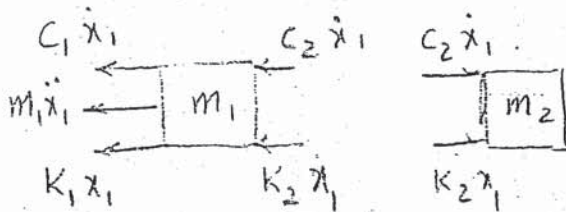
$$+ 2 \cos(\sqrt{2} \times 0.025)) \approx 3700 \text{ kg/cm}^2$$

حمید کاظمی

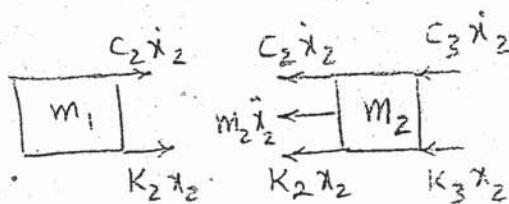
۴- برای سیستم نشان داده شده روابط حرکت را تعیین کنید. $u_{g1}(t)$ و $u_{g2}(t)$ تغییر مکان دیسکها می باشد.



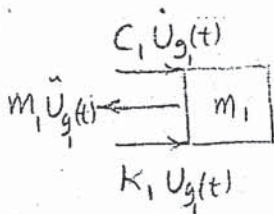
✓ حل: جهت سادگی، این حرکت به ۳ حرکت شکسته می گردد که عبارتند از:



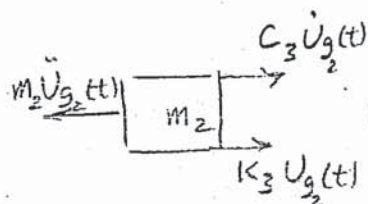
۱- حرکت m_1 و برکت m_2 ها و m_2 :



۲- حرکت m_2 و برکت m_1 ها و m_1 :



۳- حرکت m_1 و برکت اجرام:



۴- حرکت m_2 و برکت اجرام:

حال این ۳ حرکت را جمع و تعادل اجرام m_1 و m_2 را می نویسیم:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = c_1 \dot{u}_{g1}(t) + k_1 u_{g1}(t) - m_1 \ddot{u}_{g1}(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 = c_3 \dot{u}_{g2}(t) + k_3 u_{g2}(t) - m_2 \ddot{u}_{g2}(t)$$

✓

حمید کاظمی

در مورد روابط بین رابحه و تیل را به صورت ماتریسی بنویسیم:

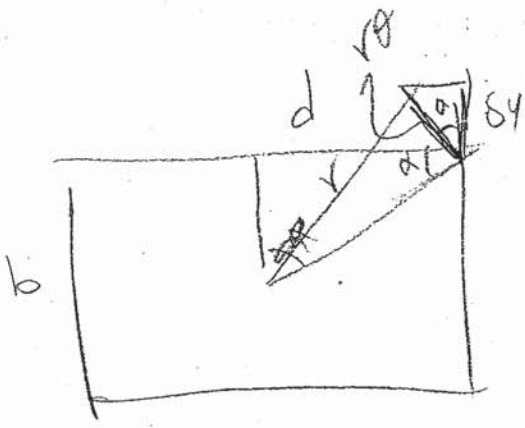
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \dot{u}_{g1}(t) + K_1 u_{g1}(t) - m_1 \ddot{u}_{g1}(t) \\ C_3 \dot{u}_{g2}(t) + K_3 u_{g2}(t) - m_2 \ddot{u}_{g2}(t) \end{Bmatrix}$$

$$x \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \dot{u}_{g1}(t) + K_1 u_{g1}(t) - m_1 \ddot{u}_{g1}(t) \\ C_3 \dot{u}_{g2}(t) + K_3 u_{g2}(t) - m_2 \ddot{u}_{g2}(t) \end{Bmatrix}$$

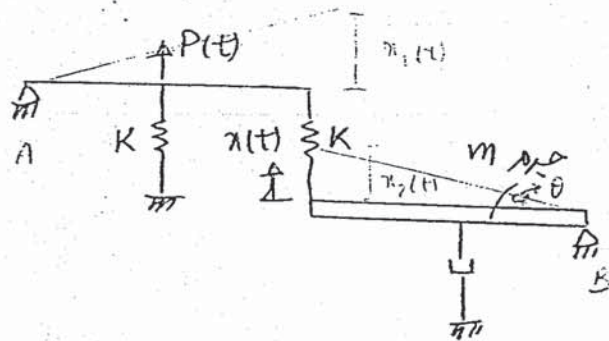
حال معادله را به صورت ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 3c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 3K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C \dot{u}_{g1}(t) + K u_{g1}(t) - 3m \ddot{u}_{g1}(t) \\ C \dot{u}_{g2}(t) + K u_{g2}(t) - 2m \ddot{u}_{g2}(t) \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 3K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C \dot{u}_{g1}(t) + K u_{g1}(t) - 3m \ddot{u}_{g1}(t) \\ C \dot{u}_{g2}(t) + K u_{g2}(t) - 2m \ddot{u}_{g2}(t) \end{Bmatrix}$$

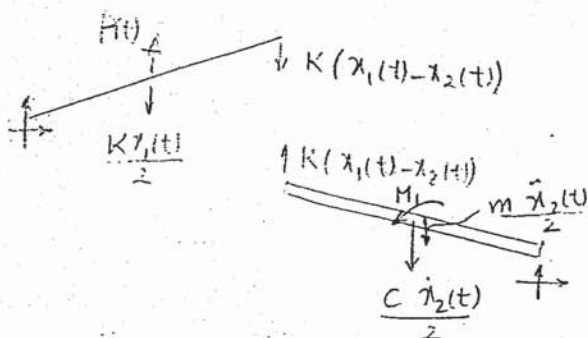
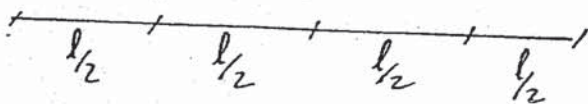


حمید کاظمی



د- مشخصات کلی m^* , K^* , C^* و یا $P^*(t)$

رنگه‌ها نشان داده شده در شکل را به یک آدریس



✓ حل: چپکی در $x_1(t)$, $x_2(t)$ و θ را می‌آوریم

بنا بر کمره‌های A و B در دو نماز به یک

نیست آدریس. از یکی از آن‌ها معادلات $x_1(t)$ را به

حسب $x_2(t)$ به یک آورده و در دومی

جایگزینی می‌نمایم.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P(t) \cdot \frac{l}{2} = \frac{K x_1(t)}{2} \cdot \frac{l}{2} + K(x_1(t) - x_2(t)) \cdot l \quad I$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow K(x_1(t) - x_2(t)) \cdot l = C \frac{\dot{x}_2(t)}{2} + \frac{m \ddot{x}_2(t)}{2} + \frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} \quad II$$

$$x_2(t) = l \theta \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_2(t)}{l}$$

$$P(t) = K \frac{x_1(t)}{2} + 2K x_1(t) - 2K x_2(t) = \frac{5}{2} K(x_1(t)) - 2K x_2(t) : \text{از معادله I}$$

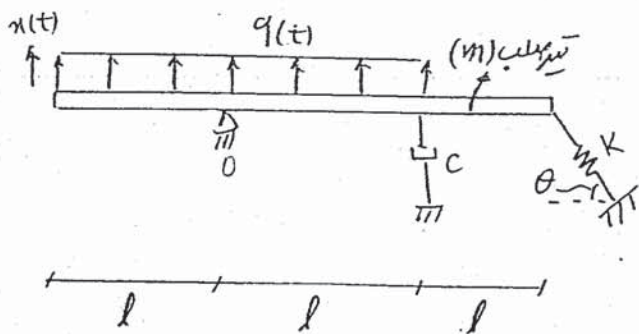
$$\rightarrow x_1(t) = \frac{2K x_2(t) + P(t)}{\frac{5}{2} K} = \frac{4}{5} x_2(t) + \frac{2}{5} \frac{P(t)}{K}$$

جایگزینی در معادله II:

$$K \left(-\frac{1}{5} x_2(t) + \frac{2}{5} \frac{P(t)}{K} \right) l = \frac{C \dot{x}_2(t)}{2} + \frac{m \ddot{x}_2(t)}{2} + \frac{1}{12} m l \ddot{x}_2(t)$$

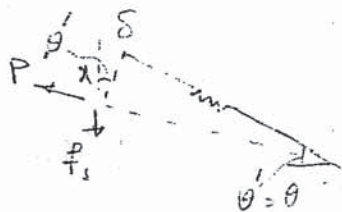
$$+ \left(\frac{m}{4} + \frac{1}{12} m \right) \ddot{x}_2(t) + \left(\frac{C}{4} \right) \dot{x}_2(t) + \left(\frac{K}{5} \right) x_2(t) = \frac{2}{5} P(t) l$$

حمید کاظمی



4- مشخصات کلی m^* ، c^* ، K^* ، $P^*(t)$ (باید بیاید)
 (رنگهات آن را از آن شده در شکل معادل را بدست آورید)

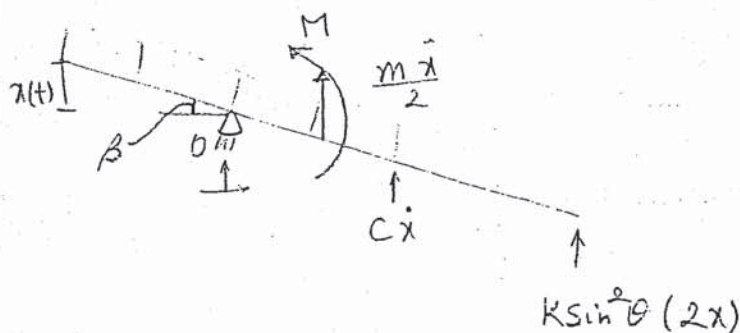
✓ حل: ابتدا افزینگی بایر با فزینگی برابر می شود:



$$P = K \delta, \quad P = \frac{f_s}{\sin \theta'}, \quad \delta = x \sin \theta'$$

$$\rightarrow \frac{f_s}{\sin \theta'} = K x \sin \theta' \rightarrow f_s = (K \sin^2 \theta) x$$

$$\rightarrow K' = K \sin^2 \theta$$



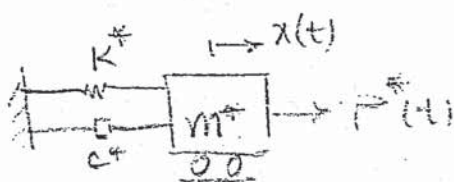
را اثر اعمال جابجایی $x(t)$ داریم:

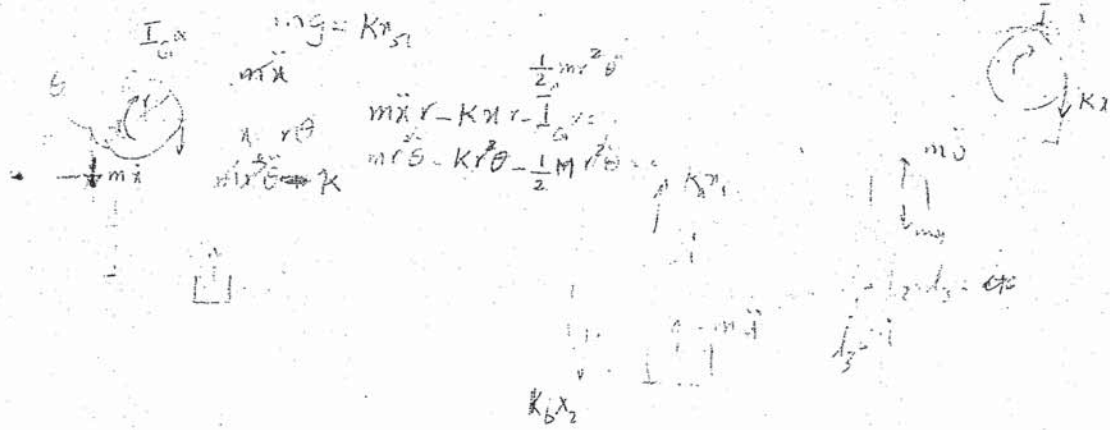
$$\sum M_0 = 0 \rightarrow \frac{m \ddot{x}}{2} \times \frac{l}{2} + c \dot{x} l + K \sin^2 \theta (2x) (2l)$$

$$+ \frac{1}{12} m (3l)^2 \ddot{\beta}$$

$$\text{اگرچه: } \beta l = x(t) \rightarrow \ddot{\beta} = \frac{\ddot{x}(t)}{l}$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\frac{m}{4} + \frac{3}{4} m l \right)}_{m^*} \ddot{x} + \underbrace{(c)}_{c^*} \dot{x} + \underbrace{(4K \sin^2 \theta)}_{K^*} x = \underbrace{0}_{P^*(t)}$$





$m \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta}$
 $m \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta}$

حميد کاظمه

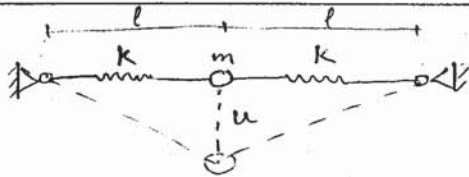
به نام خدا

دینامیک ساده

تمرین شماره اول

علیرضا زجاجی ۸۷۱۲۴۰۶۴

تاریخ تحویل ۱۵، ۷، ۸۷



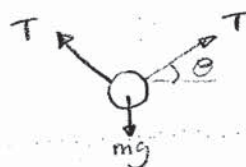
۱- برای جرم نشان داده شده در تصویر مقابل معادله ارتعاش آزاد را استخراج و حالت کلی بدست آورید سپس از طریق آن معادله ارتعاشات آزاد را برای دامنه کوتاه نوسانات $(u \ll l)$ تعیین نمایید

الف) حالت کلی:

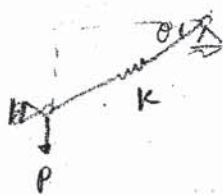
با توجه به شکل بالا می توان گفت تغییر مکان جرم m (و در نرم تغییر مکان استاتیکی و تغییر مکان دینامیکی) ترکیبی می شود.

$$u = u_{st} + u_{dyn}$$

نسبتی ساده در جهت قائم در حالت اولیه صفر است چون سازه در این حالت نابالایی می باشد بنابراین پس از ترک کردن جرم m ، سازه به صورت خطی نشان داده شده تغییر شکل می دهد. در این حالت تغییر مکان استاتیکی u_{st} حاصل می شود. با نوشتن معادلات تعادل برای جسم آزاد شکل زیر داریم:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2T \sin \theta = mg$$



با فرض داشتن مقدار θ نسبتی با قدر کوچک به صورت شکل مقابل در جهت قائم برابری با:

$$k_v = k \sin^2 \theta$$

بنابراین معادله حرکت جسم m پس از اهل داده به صورت زیر نوشته می شود:

$$m \ddot{u} + k \sin^2 \theta u = 0$$

از طرفی تغییر مکان قائم (u) در جهت θ به صورت $u = l \tan \theta$ نوشته می شود بنابراین معادله فرکانس به صورت صفتی عدد نوشته می شود.

$$m\ddot{u} + k \sin^2 \theta u = 0, \quad u = l \theta$$

$$\Rightarrow m[l\ddot{\theta}(1+\tan^2 \theta) + \dot{\theta}(2\tan \theta(1+\tan^2 \theta))] + k \sin^2 \theta (l\theta) = 0$$

$$\Rightarrow m l' (1+\tan^2 \theta) [\ddot{\theta} + 2\dot{\theta} \tan \theta] + k l' \sin^2 \theta \theta = 0$$

با حذف l از رابطه فوق معادله حالت جسم m به صورت زیر بدست می آید

$$\Rightarrow m \ddot{\theta} + \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} \dot{\theta} + k \frac{\sin 2\theta}{2(1+\tan^2 \theta)} = 0$$

$$\Rightarrow m \ddot{\theta} + (\sin 2\theta) \dot{\theta} + k \frac{\sin 2\theta}{2(1+\tan^2 \theta)} = 0$$

زیرا $\frac{u}{l} \ll 1$ پس

$$m \ddot{\theta} + 2\theta \dot{\theta} + k \frac{2\theta}{2(1+\theta^2)} = 0$$

به نام خدا

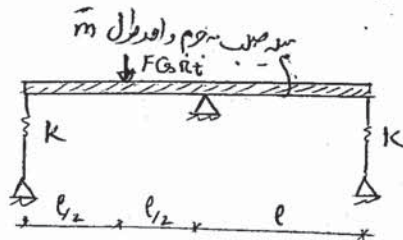
دینامیک سازه ها

تمرین شماره اول

تاریخ تحویل ۸۷، ۷، ۱۵

علیرضا زجاجی ۸۷۱۳۴۰۶۴

۲- برای حرکت از دستگاه زیر معادله حرکت را بدست آورید.



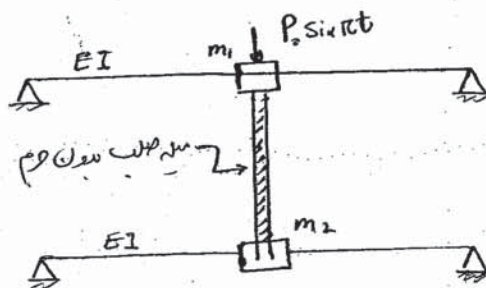
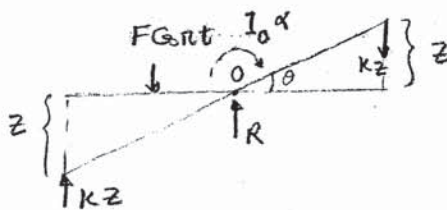
با توجه به تغییر شکل یافته تیر داریم:

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow kZ \times \frac{l}{2} + kZ \times \frac{l}{2} + I_0 \ddot{\theta} - FG \sin pt \times \frac{l}{2} = 0$$

از طرفی $I_0 = \frac{1}{2} m l^2$ و $\theta = \frac{Z}{l}$ پس:

$$\Rightarrow kZ + \frac{1}{12} (m \times 2l) (2l) \times \left(\frac{\ddot{Z}}{l} \right) = \frac{FG \sin pt}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} m l^2 \ddot{Z} + kZ = \frac{F}{2} G \sin pt$$

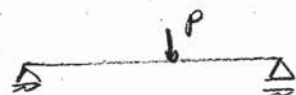


به نظر که از شکل مشخص است مشخصات تیر در این است

و بار در وسط تیر اعمال می شود. از طرفی برابر

یک تیر در وسط به صورت شکل زیر تغییر مکان

وسط تیر را بر بار متمرکز P در همان نقطه برابر است با:



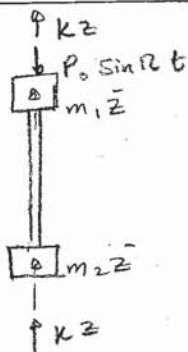
$$\Delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

بنابراین سختی قائم خمین تیر برابر $k = \frac{48EI}{l^3}$ می باشد. لذا اگر همین معادله حرکت دستگاه درون تیر را بدست

یاستقی k مدول می کنیم. لذا اینجا که مدول و استیج است لذا این دو تیر را هم صورت موازی عمل می کنند بنابراین

سختی کل برای همین دستگاه برابر $\frac{96EI}{l^3}$ بدست می آید.

حمید کاظمی

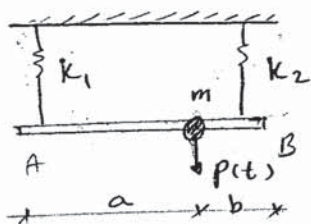


نابرابر معادله ارتعاش آزاد - حرکت زیر پدیده می آید

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -kz + P_0 \sin Rt + kz = m_1 \ddot{z} + m_2 \ddot{z}$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{z} + 2kz = P_0 \sin Rt$$

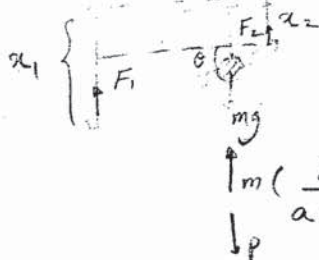
$$m \ddot{x} + kx = p(t)$$



$$x_1 = \frac{mg b}{(a+b)k_1}, \quad x_2 = \frac{mg a}{(a+b)k_2}$$

$$x = \min(x_1, x_2)$$

ارزمن کنیم $x_2 < x_1$ باشد تغییر شکل باید بر صورت شکل مدل است



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow k_1 x_1 + k_2 x_2 + m \left(\frac{b}{a+b} (x_1 - x_2) + x_2 \right) = p \quad (1)$$

کنترل (در صورت) $\alpha = b$ باشد شمی معادل برابر $k_e = k_1 + k_2$ می شود و معادله حرکت

زیر پدیده می آید

$$m \ddot{x} + (k_1 + k_2) x = p$$

در رابطه (1) نیز اگر $x_1 = x_2$ و $\alpha = b$ قرار داد، شود فراموشی عمل کردن در این رابطه

معادله می شود

حمید کاظمی

به نام خدا

دینیک مازدها

تقرین شماره اول

علیرضا زجاجی ۸۷۱۲۴۰۶۴

تاریخ تحویل ۸۷، ۷، ۱۵

۳. آتاق آسانوکی در حال پایین آمدن با سرعت ثابت $1 \frac{m}{sec}$ می باشد در لحظه ای که طول کابل Δ می باشد آسانور ۲ متر است. با دادن جریخ موز آب نور قلی می شود و تنش ایستایی ایجاد شود در کابل را در اثر این توقف میانه کشد. وزن آتاق آسانور 1000 kg ، سطح مقطع کابل 2 cm^2 و مدول یانگ کابل $2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ است.

در لحظه ای که قلی از قلی شدن جریخ آب نور انرژی جنبشی آتاق آسانور برابر است با:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \text{ kg} \times (1 \frac{m}{sec})^2 = 500 \text{ kg} \frac{m^2}{sec^2}$$

پس از این آتاق آسانور تمامی این انرژی جنبشی (با فرض عدم زخم انرژی) به صورت انرژی پتانسیل در کابل باقی می ماند. K تسلی می شود. بنابراین:

$$\frac{1}{2} \frac{EA}{l} \Delta^2 = K = 500 \text{ kg} \frac{m^2}{sec^2} \quad (I)$$

از طرفی می دانیم نیروی داخل کابل برابر $F = K \Delta$ می باشد لذا:

$$U = \frac{1}{2} K \Delta^2 = \frac{1}{2} F \Delta$$

پس:

$$F \Delta = \frac{F^2}{K} \quad (II)$$

بنابراین اگر رابطه (II) را رابطه (I) قرار دهیم داریم:

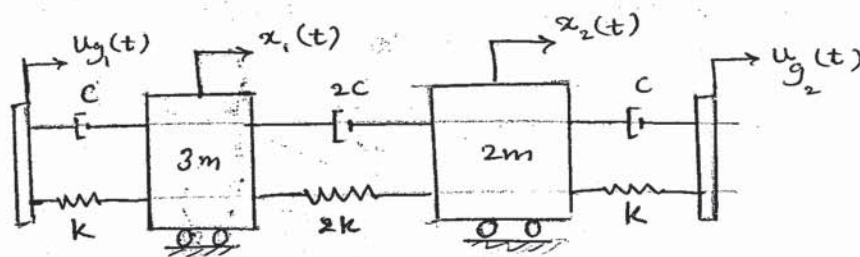
$$\frac{F^2}{K} = m v^2 \Rightarrow F = v \sqrt{m K} = 1 \sqrt{1000 \times 2000} = 1000 \sqrt{2}$$

و تنش در کابل برابر است با:

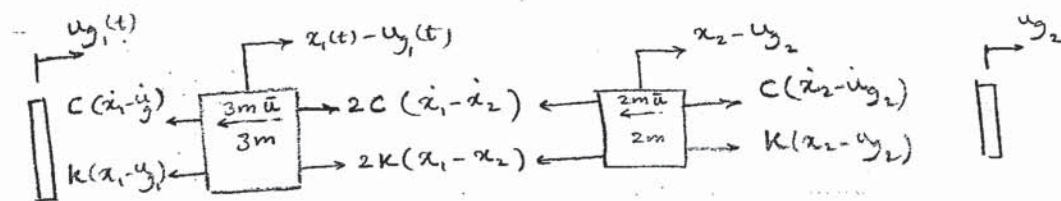
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1000 \sqrt{2}}{2} = 500 \sqrt{2}$$

حمید کاظمی

۴- برای سیستم نشان داده شده روابط حرکت را تعیین نمایید. $u_1(t)$ و $u_2(t)$ تغییر مکان بنده ها می باشد.



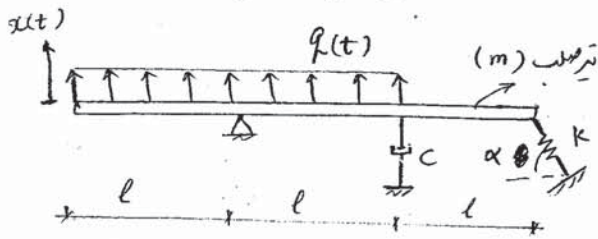
برای رسم ازاد حرکت لزاجام را جدا نموده و معادلات حرکت را برحسب حرکت نسبی رسم



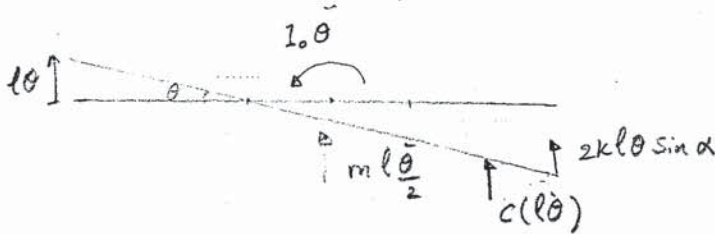
$$\begin{cases} -c(\dot{x}_1 - \dot{u}_1) - K(x_1 - u_1) + 2c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2K(x_1 - x_2) = 3m(\ddot{x}_1 - \ddot{u}_1) \\ c(\dot{x}_2 - \dot{u}_2) + K(x_2 - u_2) - 2c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - 2K(x_2 - x_1) = 2m(\ddot{x}_2 - \ddot{u}_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K(x_1 + u_1 - 2x_2) + c(\dot{x}_1 + \dot{u}_1 - 2\dot{x}_2) = 3m(\ddot{x}_1 - \ddot{u}_1) \\ K(-x_2 - u_2 + 2x_1) + c(-\dot{x}_2 - \dot{u}_2 + 2\dot{x}_1) = 2m(\ddot{x}_2 - \ddot{u}_2) \end{cases}$$

۴- مشخصات کلی m^* و k^* و c^* و $p^*(t)$ در سازه تیرین را بدست آورید.



از تغییر شکل یافته تیر صورت شکل زیر باشد بازنش معادلات تعادل و تیر حول نقطه ۰ بدیم



$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow 1. \theta + m l \frac{\theta}{2} \times \frac{l}{2} + c l \dot{\theta} + (2 k l \sin \alpha) \times 2 l = 0$$

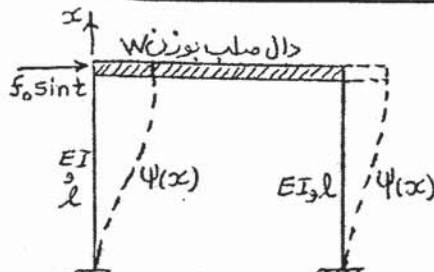
$$\Rightarrow \left[\frac{1}{12} m (3l)^2 + m \frac{l^2}{4} \right] \ddot{\theta} + c l^2 \dot{\theta} + (4 k l^2 \sin \alpha) \theta = 0$$

$$\Rightarrow m^* = \frac{9 m l^2}{12} + \frac{m l^2}{4} = m l^2$$

$$c^* = c l^2$$

$$k^* = 4 k l^2 \sin \alpha$$

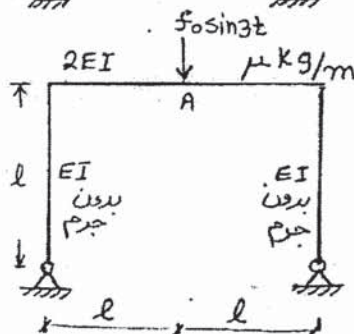
حمید کاظمی



۱- قاب نشان داده شده در تصویر را دستگیر کنید

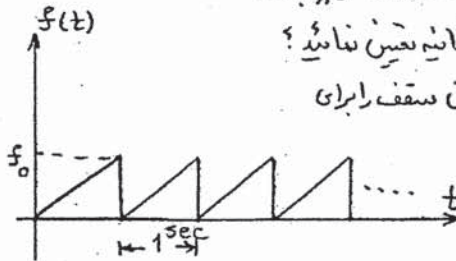
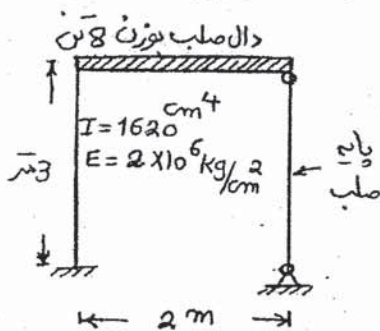
الف - معادله ارتعاش سقف را با فرض $\psi = 1 - \cos \frac{\pi x}{l}$ بدست آورید و با معادله کلاسیک این مسئله مقایسه کنید (از این نبردی منحصر در محاسبات مربوطه نظر ننمایید)

ب - بار بحرانی W_{cr} را برای سازه تعیین کنید و آن را با رابطه اولر مقایسه نمایید



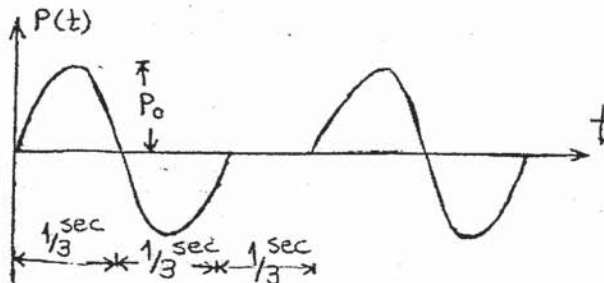
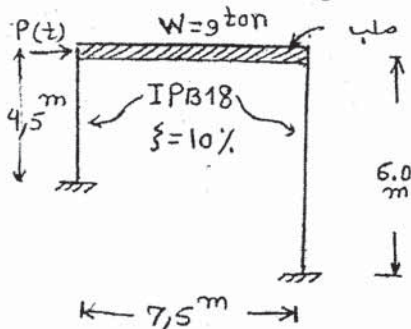
۲- سازه نشان داده شده در تصویر مقابل را دستگیر کنید و مشخصات اعضا و ابعاد در تصویر نشان داده شده است رابطه تغییر مکان نقطه A را با زمان بدست آورید، برای شکل تغییر یافته اعضا و ابعاد مثال سینوسی استفاده ننمایید

۳- سازه نشان داده شده تحت اثر بار متغیر نشان داده شده در تصویر زیر به تراز سقف به سازه وارد می شود

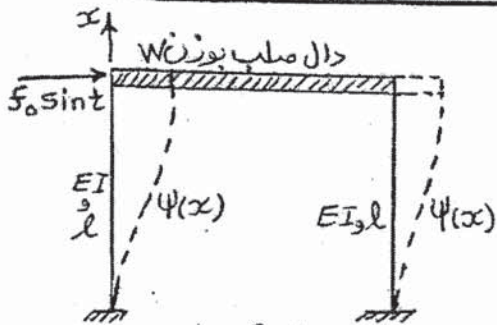


قرار دارد، الف) چنانچه نسبت استهلاک ۵٪ باشد تغییر مکان سقف را پس از ۳۰ ثانیه تعیین نمایید؟
ب) چگونه می توان حد اکثر تغییر مکان سقف را برای ارتعاشات یکپارچه (داینامیک) تعیین نمود؟

۴- قابی با مشخصات زیر تحت اثر نیروی ثابتی $P(t) = P_0 \sin 3\pi t$ مطابق شکل قرار دارد ضراب سازه فوراً را به روش عددی تعیین کنید و مقدار ابرش پایه را در نقطه $t = 5 \text{ sec}$ بر حسب P_0 تعیین کنید از وزن ستونها و تیر می شود



حمید کاظمی

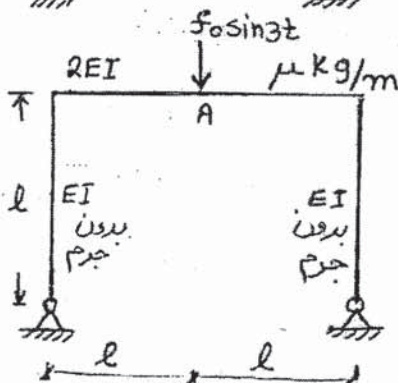


۱- قاب نشان داده شده در تصویر را در نظر بگیرید

الف- معادله ارتعاش سقف را با فرض $\psi = 1 - \cos \frac{\pi x}{l}$ بدست آورید و با معادله کلاسیک این مسئله مقایسه کنید (از این منبردی محور در محاسبات صرف نظر نکنید)

ب- بار بحرانی W_{cr} را برای سازه تعیین کنید و آن را با رابطه اولر مقایسه نمایید

۲- سازه نشان داده شده در تصویر مقابل را در نظر بگیرید. مشخصات اعضا و ابعاد در تصویر نشان داده شده است. رابطه تغییر مکان نقطه A را با زمان بدست آورید، برای شکل تغییر یافته اعضا از اشکال سینوسی استفاده نمایید



۳- سازه نشان داده شده تحت اثر بار متناوب نشان داده شده در تصویر زیر به تراز سقف به سازه وارد می شود

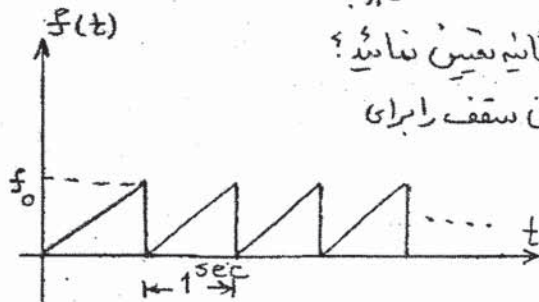
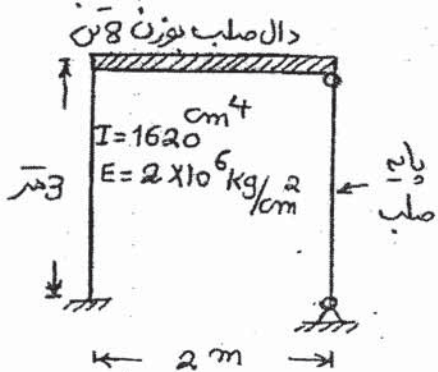
قرار دارد. الف) چنانچه نسبت استهلاک 5٪ باشد

تغییر مکان سقف را پس از 30 ثانیه تعیین نمایید؟

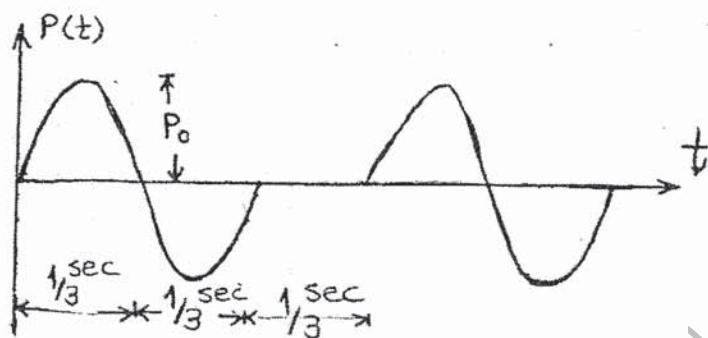
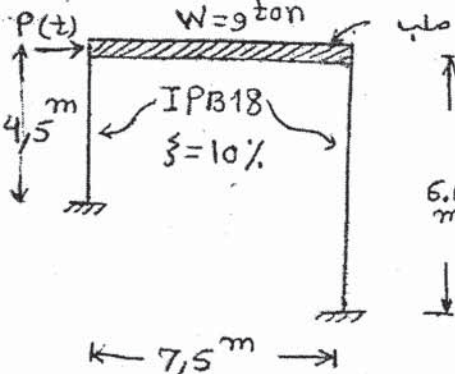
ب) چگونه می توان حداکثر تغییر مکان سقف را برای

ارتعاشات یکپارچه (داینامی) تعیین

نمود؟



۴- قابی با مشخصات زیر تحت اثر نیروی متناوبی $P(t) = P_0 \sin 3\pi t$ مطابق شکل قرار دارد. ضراب سیم فوریه را به روش عددی تعیین کنید و مقدار بیش پایه را در لحظه $t = 5 \text{ sec}$ بر حسب P_0 تعیین کنید از وزن ستون ها و تیر می شود



- شکل ۴-۳۱ تصاویر ثبت شده از آزمایش میدانی سیستم سنسور
- شکل ۴-۳۲ محل آزمایش ۱
- شکل ۴-۳۳ قرائت های سنسور در محل آزمایش ۱
- شکل ۴-۳۴ محل آزمایش ۲
- شکل ۴-۳۵ قرائت های سنسور در محل آزمایش ۲
- شکل ۴-۳۶ محل آزمایش ۳
- شکل ۴-۳۷ قرائت های سنسور در محل آزمایش ۳
- شکل ۴-۳۸ محل آزمایش ۴
- شکل ۴-۳۹ قرائت های سنسور در محل آزمایش ۴
- شکل ۴-۴۰ محل آزمایش ۵
- شکل ۴-۴۱ اندازه گیری های کنار خط در محل آزمایش ۵
- شکل ۴-۴۲ قرائت های سنسور در محل آزمایش ۵
- شکل ۴-۴۳ اندازه گیری های کنار خط در محل آزمایش ۶
- شکل ۴-۴۴ قرائت های سنسور در محل آزمایش ۶
- شکل ۴-۴۵ محل آزمایش ۷
- شکل ۴-۴۶ اندازه گیری های کنار خط در موقعیت آزمایش ۷
- شکل ۴-۴۷ قرائت های سنسور در محل آزمایش ۷
- شکل ۴-۴۸ خروجی های اندازه گیری کنار خط ، سنسور و شبیه سازی مدل وینکلر در سمت غرب مایل ۳۱
- شکل ۴-۴۹ خروجی های اندازه گیری کنار خط ، سنسور و شبیه سازی مدل وینکلر در سمت شرق مایل ۳۱
- شکل ۴-۵۰ خروجی های اندازه گیری کنار خط ، سنسور و شبیه سازی مدل تکیه گاه های مجزا در سمت شرق مایل ۳۱
- شکل (۴-۵۱) تغییر شکل ریل و مدول خط برای خط بالاستی با تراورس چوبی واقع بر سطح زمین تحت بار چرخ ۶/۸۰۴ ton در بسترهایی با سختی پایین، بالا و متوسط
- شکل (۴-۵۲) تغییر شکل ریل و مدول خط برای خط بالاستی با تراورس بتنی واقع بر سطح زمین تحت بار چرخ ۶/۸۰۴ ton در بسترهایی با سختی پایین، بالا و متوسط
- شکل ۴-۵۳ مقطع عرضی خط در سایت یک
- شکل ۴-۵۴ مقطع عرضی خط در سایت سه

بسم تعالی

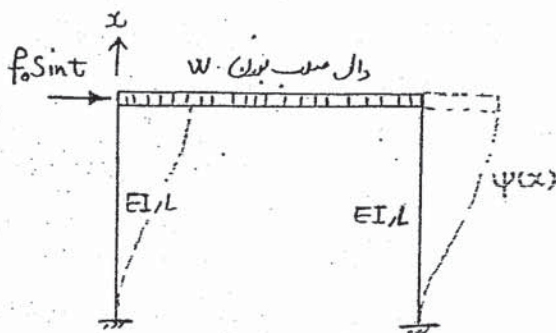
حل تمرین دینامیک سازه ها

تمرین دوم تمرین ها

سید کاوود مرادی ۸۵۱۲۴۱۲۲

تاریخ: ۱۷، ۱۸، ۱۵

۱) قاب نشان داده شده در تصویر را در نظر بگیرید.



الف) معادله ارتعاش سقف را با فرض $\psi = 1 - \cos \frac{\pi x}{L}$

مدیست آورید و با معادله کلاسیک این سازه مقایسه کنید.

(از انرژی درونی محوری در محاسبات صرف نظر نماید.)

ب) بار بحرانی w_{cr} را برای سازه تعیین کنید با رابطه اولر مقایسه نماید.

الف) $u(x,t) = (1 - \cos \frac{\pi x}{L}) z(t)$

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 \Rightarrow m^* = \frac{w}{g} \times 1 \Rightarrow m^* = \frac{w}{g}$$

$$K^* = \int_0^L EI(x) [\psi'(x)]^2 dx + \sum K_i \psi_i^2 + \int_0^L K(x) (\psi(x))^2 dx \Rightarrow$$

$$K^* = 2EI \int_0^L \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{L} \right]^2 dx \Rightarrow K^* = 2EI \int_0^L \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx \Rightarrow$$

$$K^* = \frac{2\pi^4 EI}{L^4} \int_0^L \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx \Rightarrow K^* = \frac{2\pi^4 EI}{L^4} \times \frac{L}{2} \Rightarrow K^* = \frac{97.41 EI}{L^3}$$

کاظمه حمید

$$P^* = \int_0^l P(x,t) \psi(x) dx + \sum P_i \psi_i \Rightarrow P^* = f_0 \Delta t \times 1 \Rightarrow \underline{P^* = f_0 \Delta t}$$

معادله حرکت: $\frac{w}{g} \ddot{x} + \frac{97.41 EI}{L^3} x = f_0 \sin t$

معادله صل: $\frac{w}{g} \ddot{x} + \frac{24 EI}{L^3} x = f_0 \sin t$

(ب) تعیین بار بحرانی:

$$K^* - K_G = 0 \Rightarrow \frac{97.41 EI}{L^3} = N_{cr} \int_0^l (\psi'(x))^2 dx \Rightarrow$$

$$\frac{97.41 EI}{L^3} = N_{cr} \int_0^l \left(\frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx = N_{cr} \times \frac{\pi^2}{L^2} \times \frac{L}{2} = N_{cr} \times \frac{\pi^2}{2L}$$

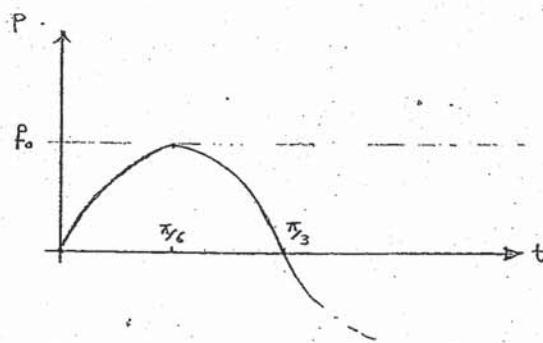
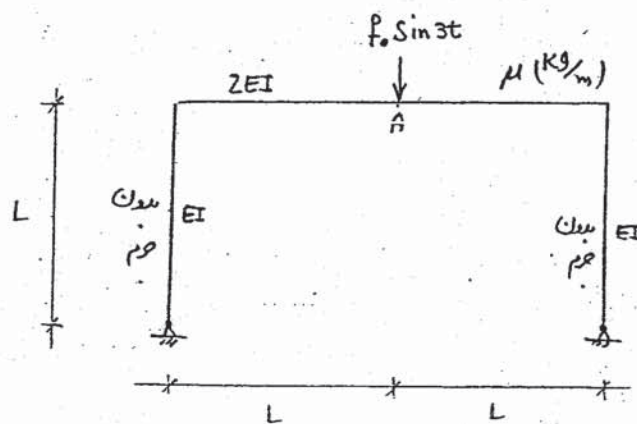
$$\Rightarrow \underline{N_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}}$$

$N_{cr} =$ متن رابطه را در

حمید کاظمی

(۲) سازه استاندارد شده در تصویر مقابل را در نظر بگیرید. مشخصات (اعضا و ابعاد در تصویر استاندارد شده

است. رابطه تغییر مکان نقطه A را با باران بدست آورید، برای شکل تغییر یافته اعضا از اشکال مرسوم استفاده



$$T_P = \frac{2\pi}{3} \text{ sec}$$

سرعت در لحظه اعمال نیرو $\dot{u} = \dot{u}(0)$ $\uparrow$ $\uparrow$ تغییر مکان در لحظه اعمال نیرو $u = u(0)$ $\uparrow$ $\uparrow$ شرط اولیه : $m\ddot{u} + Ku = P_0 \sin \omega t$: برای بدین میزان است

$$u_p(t) = \frac{P_0}{K} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \omega t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\rightarrow A = \frac{P_0}{K(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{P_0}{K} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \omega t$$

حمید کاظمی

$$\Rightarrow u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{F_0}{K} \times \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin \omega_n t + \frac{F_0}{K} \times \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \Delta \omega t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} \quad \omega = 3 \quad (\Delta 3t)$$

$$K^* = \int_0^{2L} EI (\psi'(x))^2 dx + \sum K_i \psi_i^2 + \int_0^L K(x) (\psi(x))^2 dx$$

$$\Rightarrow K^* = \int_0^{2L} EI (\psi'(x))^2 dx$$

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}$$

$\psi(x)$ رابطه صورت سازه سازه در نظر میگیریم

$$\Rightarrow \psi'(x) = \frac{\pi}{2L} \cos \frac{\pi x}{2L} \Rightarrow \psi''(x) = -\frac{\pi^2}{4L^2} \Delta \frac{\pi x}{2L}$$

$$\Rightarrow K^* = 2EI \times \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\right)^2 \times \int_0^{2L} \left(\sin \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx \Rightarrow K^* = 2EI \times \frac{\pi^4}{16L^4} \times L \Rightarrow K^* = \frac{12.17 EI}{L^3}$$

$$m^* = \int_0^{2L} m(x) [\psi(x)]^2 dx \Rightarrow m^* = \int_0^{2L} \mu \left(\sin \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx \Rightarrow m^* = \mu \times L \Rightarrow m^* = \mu L$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{12.17 EI}{\mu L^4}} \Rightarrow \omega_n = \frac{3.49}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad \text{شرایط صورت سازه}$$

حال متغیر معادله $u(t)$ می باشد را بازنویس کنیم:

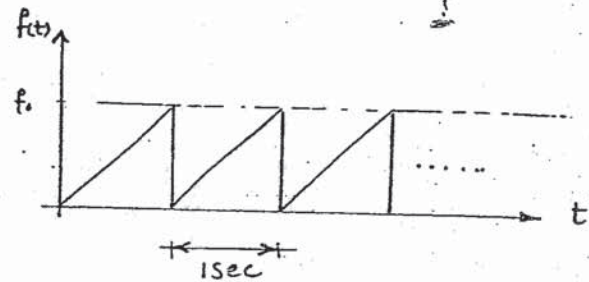
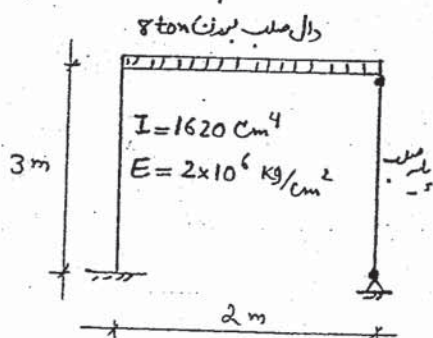
$$u(t) = \left[-\frac{F_0}{\frac{12.17 EI}{L^3}} \times \frac{\frac{3}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{3}{\omega_n}\right)^2} \right] \Delta \omega_n t + \frac{F_0 L^3}{12.17 EI} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{\omega_n}\right)^2} \Delta 3t$$

حمید کاظمی

۳) سازه استاندارد شده تحت اثر بار متناوب استاندارد شده در تصویر زیر که به مرکز سقف به سازه دارد

میشود، دراز دارد. الف) چنانچه نسبت استحکام ۵٪ باشد، تغییر مکان سقف را پس از ۳۰۵ تعیین

نمایند. ب) چگونه میتوان حد اکثر تغییر مکان سقف را برای ارتفاعات سازه (دارم) تعیین نمود؟



$$p(t) = f_0 t \quad \text{منطبق با بار یک درجه ای دوره تناوب}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) \cdot dt \Rightarrow a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 f_0 t \cdot dt \Rightarrow a_0 = f_0 \times \left(\frac{t^2}{2}\right)' \Rightarrow a_0 = \frac{f_0}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T_P} t\right) dt \Rightarrow a_n = 2 \int_0^1 f_0 t \cos(2n\pi t) dt \Rightarrow$$

$$a_n = 2f_0 \left(\frac{\sin(2n\pi)}{2n\pi} - \frac{1}{4n^2\pi^2} + \frac{\cos(2n\pi)}{4n^2\pi^2} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T_P} t\right) dt \Rightarrow b_n = 2 \int_0^1 f_0 t \sin(2n\pi t) dt \Rightarrow$$

$$b_n = 2f_0 \left(\frac{\sin(2n\pi)}{4\pi^2 n^2} - \frac{\cos(2n\pi)}{2n\pi} \right)$$

$$K = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{یک استون دارم} \rightarrow K = \frac{12 \times 2 \times 10^6 \times 1620}{300^3} = 1440 \text{ kg/cm}$$

حمید کاظمی

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{1440 \times 100}{1631}} = 9.40 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\xi = 0.05 \text{ ضریب میرایی}$$

$$\beta_n = \frac{n\omega_0}{\omega_n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$$

$$\beta_n = \frac{n \times 2\pi}{9.40} \Rightarrow \beta_n = 0.67 n$$

حالت پایداری

$$x(t) = \frac{1}{K} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left\{ (a_n \times 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)) \sin \frac{2\pi n t}{T_P} + [a_n(1-\beta_n^2) - b_n \times 2\xi\beta_n] \cos \frac{2\pi n t}{T_P} \right\} \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{1440} \left[\frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-0.45n^2)^2 + (0.067n)^2} \left\{ (a_n \times 0.067n + b_n(1-0.45n^2)) \sin 2\pi n t + [a_n(1-0.45n^2) - 0.067n b_n] \cos 2\pi n t \right\} \right]$$

$$t = 30 \text{ sec} \rightarrow$$

$$x(30) = \frac{1}{1440} \left[\frac{f_0}{2} + \left[736.4 \times \left\{ (-0.00 \times 0.067 + (-0.32 f_0) \times (0.55)) \times 0 + [0 + 0.022 f_0] \times 1 \right\} \right] \right] \Rightarrow$$

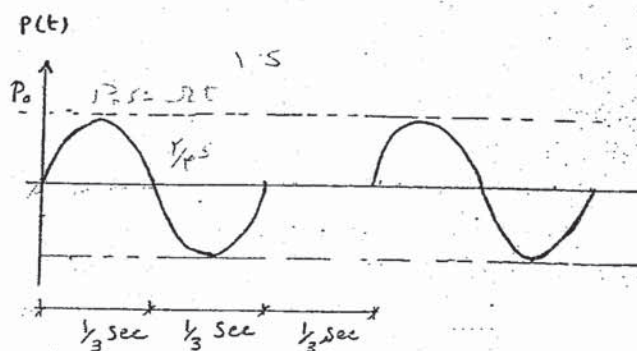
$$x(30) = \frac{1}{1440} \left[\frac{f_0}{2} + \left[736.4 \times \left\{ 0.022 f_0 \right\} \right] \right] \Rightarrow x(30) = \frac{f_0}{2880} + \frac{f_0}{88.88} \Rightarrow$$

$$\underline{x(30) \approx 0.012 f_0}$$

حمید کاظمی

١٢٠

337



بارہ T_p راتہ ۱۰ قسمت قسمت

$$\omega = \frac{2\pi}{T_p} \Rightarrow \omega = 2\pi, \quad T_p = 1 \text{ sec} \Rightarrow$$

$$+ \frac{10 \Delta F_1}{4 \pi^2 \lambda^2} \left[(\cos 2\pi x t_i - \cos 2\pi x t_{i-1}) + 2\pi \lambda (t_i \sin(2\pi x t_i) - t_{i-1} \sin(2\pi x t_{i-1})) \right]$$

(اداسہ (رضعہ)

احمد کاظمہ

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \sum_{i=1}^N \left(\frac{F(t_{i-1}) + F(t_i)}{2} \right) \Delta t_i \Rightarrow$$

$$a_0 = 0.05 \times \sum_{i=1}^N (F(t_{i-1}) + F(t_i))$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \sum_{i=1}^N \frac{1}{n\pi} \left[(F(t_{i-1}) - t_{i-1} \left(\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} \right) \times (\cos n\pi t_i - \cos n\pi t_{i-1})) \right] +$$

$$\frac{\Delta F_i}{n^2 \pi^2 \Delta t_i} \left[(\sin n\pi t_i - \sin n\pi t_{i-1}) + n\pi (t_i \cos(n\pi t_i) - t_{i-1} \cos(n\pi t_{i-1})) \right]$$

$$\Rightarrow b_n = 2 \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2n\pi} \left[(F(t_{i-1}) - t_{i-1} (10 \Delta F_i) \times (\cos 2n\pi t_i - \cos 2n\pi t_{i-1})) \right]$$

$$+ \frac{10 \Delta F_i}{2n\pi} \left[(\sin 2n\pi t_i - \sin 2n\pi t_{i-1}) + 2n\pi (t_i \cos 2n\pi t_i - t_{i-1} \cos(2n\pi t_{i-1})) \right]$$

مربوط به سری فورييه a_n , b_n و a_0 برپایه عددی نوشته شد. حال برای مرحله بعدی ساده صورت

بر عمل میکنیم:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) dt = 0 \quad \text{تابع فرد است} \rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) \sin \left(\frac{2n\pi t}{T_p} \right) dt \Rightarrow b_n = 2 \int_0^{\frac{2}{3}} (\sin 3\pi t) (\sin(2\pi n t)) dt \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{\sin \left(\frac{4\pi n}{3} \right)}{2(2\pi n - 3\pi)} - \frac{\sin \left(\frac{4\pi n}{3} \right)}{2(2\pi n + 3\pi)}$$

$$K = \frac{12 \times 2.1 \times 10^6 \times 3830}{450^3} + \frac{12 \times 2.1 \times 10^6 \times 3830}{600^3} \Rightarrow K = 1506 \text{ Kg/cm}$$

$$\beta_n = \frac{n\omega_0}{\omega_n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega_n = 12.82 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

حمید کاظمی

T (sec)	P(T)	Sinwt	coswt	A						B						14x4	15-16	u(T) Gx17 (m)	f _j () Kx18
				2x4	مرب	5+A	6x or 7	A	2x3	مرب	10+B	11x or 12	B	9x3	14x4				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.05	15.00	1.00	0.00	-0.03	3.42	-	-0.11	-	15.00	3.42	-	51.30	-	-	-	-	-	-	-
0.10	35.00	0.00	-1.00	-35.00	0.73	-70.11	-51.18	-35.11	-0.15	0.73	50.99	37.22	51.15	0.15	-51.15	51.30	0.00	0.00	27.09
0.15	65.00	-1.00	0.01	0.43	3.42	-	1.47	-	-65.00	3.42	-	-222.30	-	-	-	-	-	-	-
0.20	60.00	0.01	1.00	60.00	0.73	70.28	51.31	10.29	0.53	0.73	-184.01	-134.33	-184.54	0.09	-184.54	184.63	0.00	0.00	97.48
0.25	50.00	1.00	-0.01	-0.55	3.42	-	-1.88	-	50.00	3.42	-	170.99	-	-	-	-	-	-	-
0.30	0.00	-0.01	-1.00	0.00	0.73	49.42	36.08	49.42	0.00	0.73	36.66	26.76	36.66	-0.65	-36.66	36.00	0.00	0.00	19.01

حیدر کاظمہ

T ثانية	P(τ)	sin ωτ	cos ωτ	A						B						u(τ) 9x17	f _s () = Kx18
				2x4	مربع	5+A	6x5/7	A	2x3	مربع	10+B	11x9/12	B	9x3	14x4	15-16	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0	1														
0.05	15	1.00	-2.20x10 ⁻³														
0.10	35	-4.41x10 ⁻³	-1														
0.15	65	-1	6.61x10 ⁻³														
0.20	60	8.81x10 ⁻³	1														
0.25	50	1	-0.01														
0.30	0	-0.01	-1														

حمید کاظمی

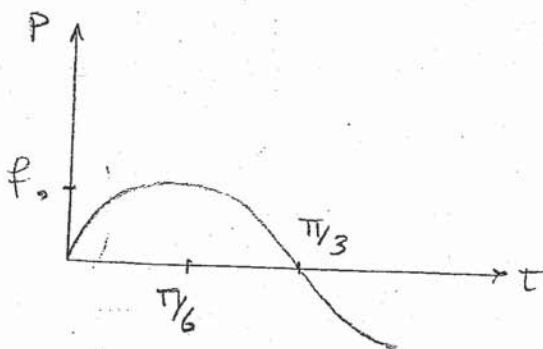
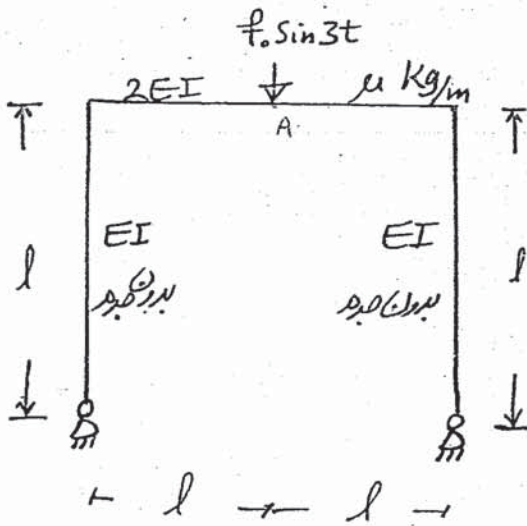
۸۷۱۲۴۱۱۲ عمیرہ یاسین

۲۔ سازه نشان داده شده در تصویر مقابل را در نظر بگیرید. مشخصات

الغنا و ابعاد در تصویر نشان داده شده است. رابطه تغییرات

نقطه A را با زمان ثبت کنید. برای شکل تغییر یافته الغنا

از اشکال سندی استفاده نکنید.



$$T_p = \frac{2\pi}{3} \text{ Sec}$$

✓ اصل: نیرب همدت مقابل است:

معادله حرکت بصورت مقابل است:

$$m\ddot{u} + k u = f_0 \sin \omega t$$

$$\Rightarrow U(t) = U_c(t) + U_p(t)$$

جواب خصوصی جواب عمومی

$$U_p(t) = a \sin \omega t$$

برای یافتن جواب خصوصی اگر فرض کرد:

$$-m a \omega^2 \sin \omega t + K a \sin \omega t = f_0 \sin \omega t$$

با جایگذاری از معادله حرکت:

$$\rightarrow a(-m\omega^2 + K) = f_0 \rightarrow a = \frac{f_0}{K(1 - \frac{m\omega^2}{K})} = \frac{f_0}{K} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

۱.۶ داریم $\omega = 3$ پس:

$$U_p(t) = \frac{f_0}{K} \frac{1}{1 - (\frac{3}{\omega_n})^2} \sin(3t)$$

حمید کاظمی

برای یافتن جواب مجرّبی :

$$m^* \ddot{U} + K^* U = 0$$

معادله مشخصه زیر است :

$$m^* t^2 + K^* = 0 \rightarrow t^2 = -\frac{K^*}{m^*} = -\omega_n^2$$

پس جواب عمومی به فرم زیر است :

$$u_p(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

$$u_t(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) + \frac{f_0}{K^*} \frac{1}{1 - (\frac{3}{\omega_n})^2} \sin(3t) \quad \text{پس :}$$

و با اعمال شرایط مرزی زیر جوابات A, B می گیرند :

$$\begin{cases} U = U(0) = U_{\cdot} = 0 \\ \dot{U}(0) = \dot{U}_{\cdot} = 0 \end{cases}$$

K^*, m^* می گیرند ω_n برابر است :

$$K^* = \int_0^{2l} EI (\psi''(x))^2 dx, \quad m^* = \int_0^{2l} m(x) [\psi(x)]^2 dx$$

$$\rightarrow K^* = 2EI \int_0^{2l} \left(\frac{d^2}{dx^2} \left(\sin \frac{\pi x}{2l} \right) \right)^2 dx = 2EI \left(\frac{\pi^2}{4l^2} \right)^2 \int_0^{2l} \left(\sin \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi^4}{16l^4} 2EI (0.5l)^2 = 2 \times \frac{\pi^4}{16} \frac{EI}{l^3}$$

$$m^* = \int_0^{2l} \mu \left(\sin \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx = \mu l$$

حمید کاظمی

$$\rightarrow W_n = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = \left(\frac{\pi^4}{8} \frac{EI}{l^3} \times \frac{1}{\mu} \right)^{0.5} = \frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (3.49)$$

$$W_n B + \frac{P_0}{K^*} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{W_n}\right)^2} (3) = 0$$

$$A = 0$$

$$\begin{aligned} U &= 0 \\ \dot{U} &= 0 \end{aligned}$$

$$U_t(t) = \frac{-\frac{3P_0}{K^*}}{\left(1 - \left(\frac{3}{W_n}\right)^2\right) W_n} \sin(W_n t) + \frac{P_0}{K^*} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{W_n}\right)^2} \sin(3t)$$

$$\rightarrow U_t(t) = \frac{P_0}{K^*} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{W_n}\right)^2} \left[\frac{-3 \sin(W_n t)}{W_n} + \sin 3t \right]$$

: K^*, W_n کی قیمتیں

$$U_t(t) = \frac{P_0}{\frac{\pi^4 EI}{8 l^3}} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{9.0 \times 8 \mu l^4}{\pi^4 EI} \right)} \right) \left[\frac{-3 \sin \left(\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} t \right)}{\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} t} + \sin 3t \right]$$

حمید کاظمی

$$P^* = \int_0^l P(x,t) \psi(x) dx + \sum P_i \psi_i = 0 + f_0 \sin t(1) = f_0 \sin t$$

$$m \ddot{z} + k^* z + c \dot{z} = P^*(t)$$

بنابر این:

$$\left[\frac{W}{g} \ddot{z} + \frac{6.09 EI}{l^3} z = f_0 \sin t \right]$$

از این توضیح است که در صورتی که در این مسئله در یک طرف از $\psi = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi x}{l})$ استفاده شده بود،

$$K^* = \frac{24.34 EI}{l^3}$$

می‌توان گفت که تفاوت فاحش میان خطای این دو روش

(ب) می‌تواند با یکدیگر W_{cr} :

$$K^* - K_G^* = 0, \quad K_G^* = N_{cr} \int_0^l (\psi'(x))^2 dx, \quad K^* = \frac{6.09 EI}{l^3}$$

$$\rightarrow 6.09 \frac{EI}{l^3} = N_{cr} \int_0^l \left[\frac{d}{dx} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \right]^2 dx$$

$$\rightarrow 6.09 \frac{EI}{l^3} = N_{cr} \frac{\pi^2}{4l^2} \int_0^l \left(\sin \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx$$

0.5l

$$\rightarrow N_{cr} = \frac{\frac{6.09 EI}{l^3}}{\frac{\pi^2}{4l^2} \times 0.5l} = \frac{\pi^2 EI}{2l^2}$$

$$\therefore N_{cr(\text{theory})} = \frac{2 \pi^2 EI}{l^2}$$

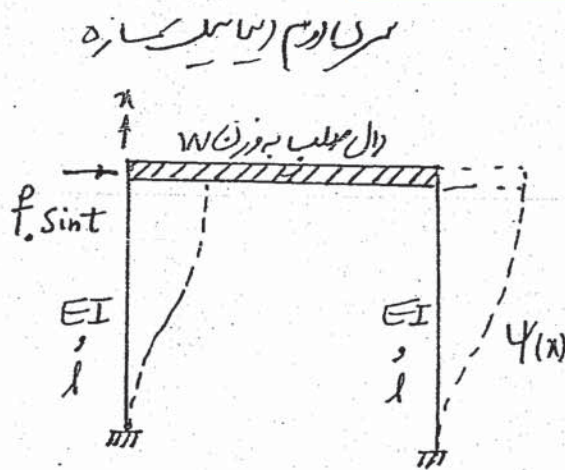
مشاهده می‌شود که در شکل خطای زیاد در $\psi(x)$ تفاوت فاحش میان خطای است.

محمد

۸۶۱۲۴۱۱۲

سیرهای پایداری

۱- قاب نشان داده شده را تصویر را از نظر گریه



الف) معادله ارتعاش سقف را با فرض $\psi = 1 - \cos \frac{\pi x}{l}$ بزرگ آورید و با معادله کنکرت این مسئله معادله کنید (اثر نیروی محوری نادیده بگیرید)

ب) با بزرگ کردن w را برای ساده تقسیم کنید و آنرا با رابطه اول معادله کنید

حالت اول: در این مسئله $\psi = 1 - \cos \frac{\pi x}{l}$ (داده شده است) و همانطور که می دانیم تابع شکلی با فرکانس $\lambda = 1$ برابر $\psi(1) = 1$ گردد و این $\psi(1) = 1 - \cos \pi = 2$ است. با این حال طبق فرضیات مسئله با هم

تابع شکلی یک فرکانس $\frac{1}{2}$ در تابع $\cos$ ضرب می کنیم:

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$$

$$u(x, t) = (1 - \cos \frac{\pi x}{2l}) Z(t)$$

$$m^* = \int_0^l m(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 = 0 + \frac{W}{g} (1 - \cos \frac{\pi l}{2l})^2 = \frac{W}{g}$$

$$K^* = \int_0^l EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + \sum K_i \psi_i^2 = 2EI \int_0^l (\psi''(x))^2 dx$$

$$\psi'(x) = \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad \psi''(x) = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l}$$

اضرب می کنیم:

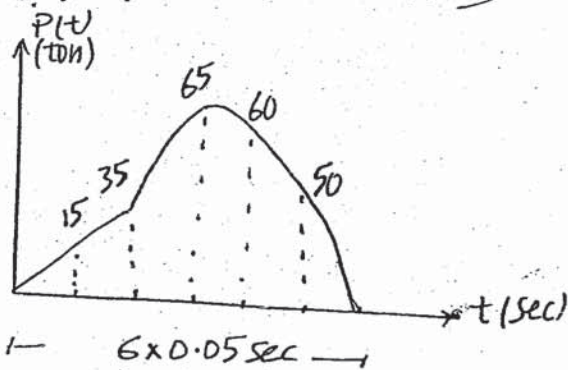
$$K^* = 2EI \int_0^l \left[\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} \right]^2 dx = \frac{\pi^4}{16} \frac{EI}{l^3} \approx 6.1 \frac{EI}{l^3}$$

بنابراین:

حمید کاظمی

T (s)	P (ton)	$\sin \omega T$	$\cos \omega T$	2×4	$\frac{1}{2}$	$5+A$	5×0.7	A	2×3	$\frac{1}{2}$	$5+B$	10×0.12	B	3×9	4×14	15×16 (ton)	6×17 (m)	$P_3 = K \times 18$ (ton)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	0	0	1	0	0.73	0	0	0	0	0.73	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	15	1	-0.01	-0.15	3.42		-0.51		15	3.42		51.3						
0.10	35	-0.02	-1	-35	0.73	-70.51	-51.47	-35.51	-0.70	0.73	50.0	36.5	50.7	0.70	-50.7	51.4	6.77 $\times 10^{-3}$	27.1
0.15	65	-1	0.03	1.95	3.42		6.67		-65	3.42		-222.3						
0.20	60	0.04	1	60	0.73	75.2	54.9	+15.2	2.4	0.73	-181.0	-132.13	-183.4	0.61	-183.4	184.01	0.024	97.01
0.25	50	1	-0.05	-2.5	3.42		-8.55		50	3.42		171						
0.30	0	-0.06	-1	0	0.13			46.35	0	0.73			38.87	2.78	-38.87	41.65	5.49 $\times 10^{-3}$	21.95

۳- فن آبی را به صورت دستگاهی که درجه آزادی باشد / $\xi = 10\%$, $m = 4 \frac{t \cdot s^2}{m}$, $k = 40 \frac{t}{cm}$ (نظری سیستم). در برخی موارد، تحت اثر بارگذاری مطابق شکل قرار می گیرد. با استفاده از قانون کمترین مجرب دستگاه را در دست بارگذاری قرار دهید.



$$k = 40 \frac{t}{cm} = 4000 \frac{t}{m}$$

: ✓

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{4}} = 31.62 \text{ rad/s}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \approx \omega_n$$

مطابق قاعده سینوسی :

$$x(t) = \frac{\Delta T}{m \omega} \left[\sum_{j=1}^A \gamma_j(t) \sin \omega t - \sum_{j=1}^B \gamma_j(t) \cos \omega t \right]$$

$$A = \sum_3^A \gamma(t) = \left[\sum_3^A \gamma(t - 2\Delta T) + P(t - 2\Delta T) \cos \omega_d(t - 2\Delta T) \right] \exp(-\xi \omega \times 2\Delta T) \\ + 4P(t - \Delta T) \cos \omega_d(t - \Delta T) \exp(-\xi \omega \Delta T) + P(t) \cos \omega_d t$$

$$e^{-\xi \omega (2\Delta T)} = e^{-2(0.1) \times 31.62 \times 0.05} = 0.73$$

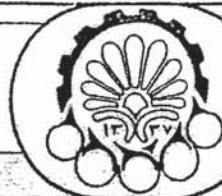
$$4e^{-\xi \omega \Delta T} = e^{-(0.1) \times 31.62 \times 0.05} = 3.43$$

$$G = \frac{\Delta T}{3 m \omega} = \frac{0.05}{3 \times 4 \times 31.62} = 1.318 \times 10^{-4} \frac{m}{ton}$$

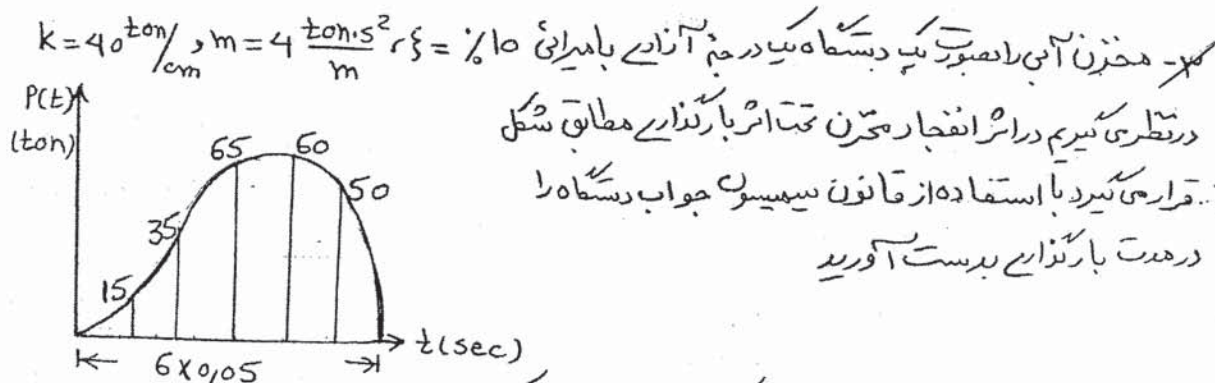
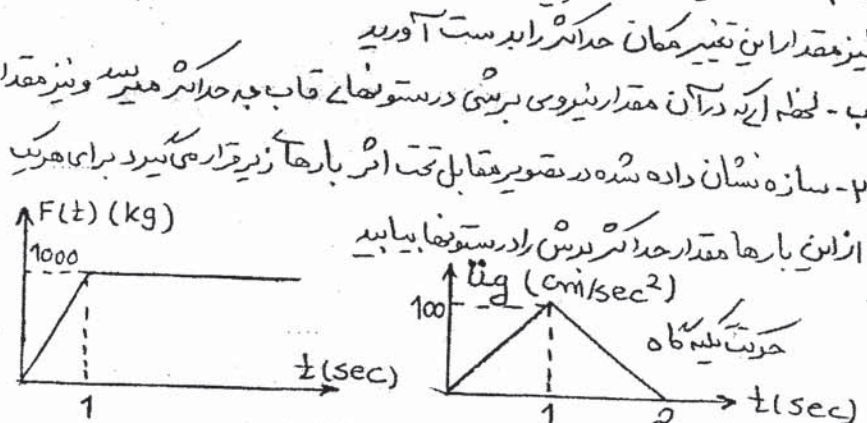
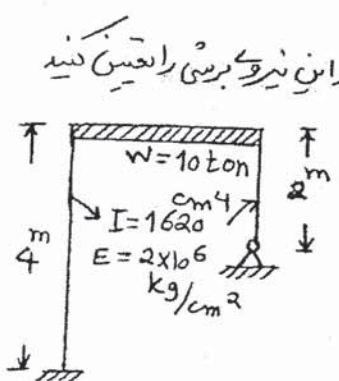
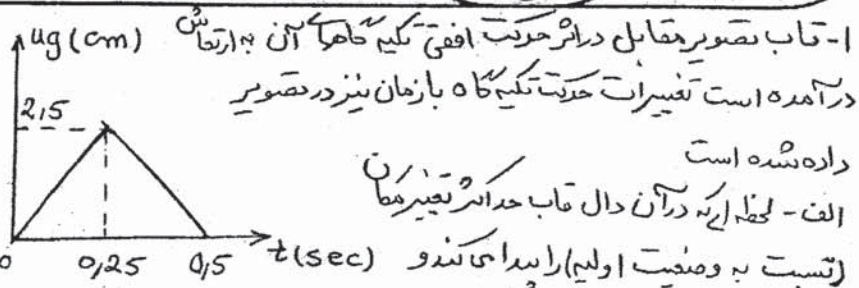
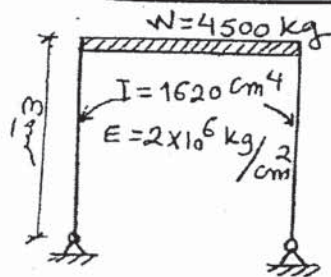
حمید کاظمی

مدرس:
فراهرز خوشنودیان

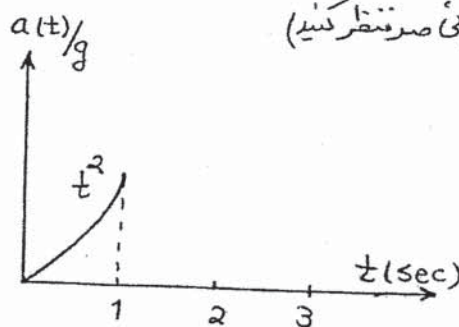
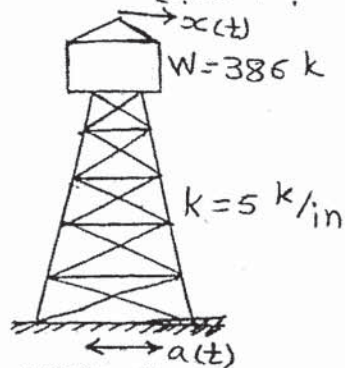
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)



دینامیک سازه‌ها
تمرین سراسری



۴- به برج نشان داده شده یک ستاب تکیه گاهی $a(t)$ اثر میکند جابجانی سبی بالای برج را در $t = 1 \text{ sec}$ بدست آورید (اثر میرایی صرف نظر کنید)



حمید کاظمی

بسمه تعالی

۳-

سید کاویر ولد ۱۸۱۲۴۱۲۶

حل تمرین دینامیک سازه ها

تاریخ: ۸، ۹، ۱۵

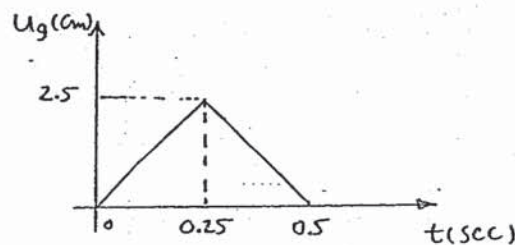
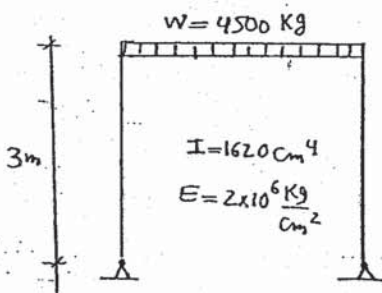
برای سوم

۱) قاب تصویر مقابل در اثر حرکت افقی طبقه هاهاای آن به ارتعاش درآمده است. تعریضات حرکت طبقه هاها،

برایان نیز در تصویر داده شده است. الف) لحظه ای که در آن دال قاب حداکثر تغییر مکان (نسبت به وضع

اولیه) را پیدا میکند و نیز مقدار این تغییر مکان حداکثر را بدست آورید. ب) لحظه ای که در آن مقدار نیروی

برخی در ستونهاى قاب به حداکثر میرسد و نیز مقدار این نیروی برخی را تعیین کنید:

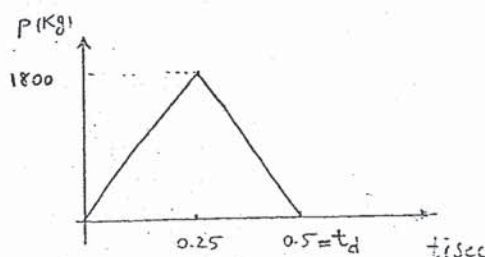


$$m\ddot{U} + c\dot{U} + KU = \frac{W}{g}\ddot{U}_g + KU_g$$

الف) ابتدا بخشی جانبی قاب را بدست می آوریم. $K = 2 \times \frac{3EI}{L^3} = 6 \times \frac{2 \times 10^6 \frac{Kg}{Cm^2} \times 1620 Cm^4}{300^3 Cm^3}$ سختی جانبی

$$\Rightarrow K = 720 \frac{Kg}{Cm}$$

باجوب کردن مقدار بخشی در محور عمودی عمودار سطح، ران - عمودار



نیز، ران بدست می آید:

حمید کاظمه

$$x(t) = \frac{1}{1506} \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (0.2\beta_n)^2} \left\{ ((1-\beta_n^2) \times b_n) \sin 2\pi n t + [-0.2\beta_n b_n] \cos 2\pi n t \right\} \right]$$

$$x(5) =$$

$$K \times x(5) =$$

تعداد بزرگ با هر لحظه $t=5^{sec}$

حمید کاظمی

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \ddot{z}(t) + \frac{ml}{4} \ddot{\theta} + \frac{ml}{6} \ddot{\theta} + \frac{12EI}{l^3} z(t) + \frac{12EI}{l^2} \theta + \frac{EA}{2} \theta = f_0 \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right) \ddot{z}(t) + \left(\frac{5}{12} ml\right) \ddot{\theta} + \left(\frac{12EI}{l^3}\right) z(t) + \left(\frac{12EI}{l^2} + \frac{EA}{2}\right) \theta = f_0 \sin \omega t$$

E3-2

معادله حرکت سیستم

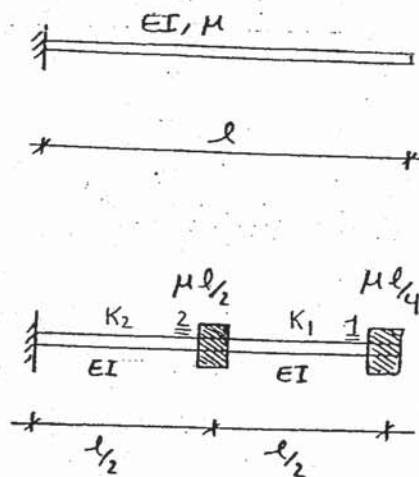
بر حسب θ و $z(t)$

محمد کاظم

۴) برای تخمین فرکانس ارتعاش مودهای اول و دوم تیرچه ای استاندارد شده در تصویر مقابل

از مدل دو درجه آزادی با کمیت استاندارد شده در تصویر استفاده شده است. فرکانس این مدلها

(مود اول و دوم) را می بینید:



$$K_1 = \frac{12EI}{(\frac{l}{2})^3} = \frac{96EI}{l^3} = K$$

$$K_2 = \frac{12EI}{(\frac{l}{2})^3} = \frac{96EI}{l^3} = K$$

$$K = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\mu l}{2} \end{bmatrix}$$

ارتعاش آزاد برای مدل موجود

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t) \rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0, \quad x = a \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 m a + K a) \cos(\omega t - \alpha) = 0 \Rightarrow (-\omega^2 m + K) a = 0$$

$$\text{برای اینکه این معادله برقرار باشد} : \det(-\omega^2 m + K) = 0$$

۴-۱

$$K - \omega^2 m = \begin{bmatrix} K - \frac{\mu l}{4} \omega^2 & -K \\ -K & 2K - \frac{\mu l}{2} \omega^2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(K - \omega^2 m) = 0 \Rightarrow (K - \frac{\mu l}{4} \omega^2)(2K - \frac{\mu l}{2} \omega^2) - K^2 = 0$$

حمید کاظمی

۳

$$t > 0.5 \text{ sec} : R_3 = 0.32 \left\{ 2 \times \sin(12.53 \times (t - 0.25)) - \sin(12.53 t) - \sin(12.53(t - 0.5)) \right\}$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow 12.53 \cos(12.53(t - 0.25)) - 12.53 \cos(12.53 t) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(12.53(t - 0.25)) - \cos(12.53 t) = 0 \Rightarrow$$

$$t = 0.88 \text{ sec} \rightarrow R_3 = 1.28$$

$$t = 0.62 \text{ sec} \rightarrow R_3 = -1.28$$

R_{max} در سه باره زمانی بدست آمد. R_{max} بین سه باره زمانی R_{max} کل است. که در این ساله

این ضرب در باره دوم زمانی و در زمان $t = 0.35 \text{ sec}$ بدست آمده است. بنابراین میوان نوشت:

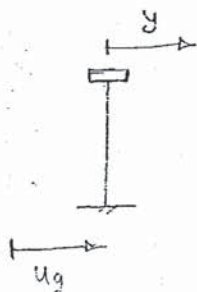
نقطه ای که در آن تاب حداکثر جابجایی راست به وضعیت اولیه میزنید زمان $t = 0.35 \text{ sec}$ است.

مقدار تغییر مکان حداکثر بصورت زیر محاسبه میگردد:

$$\text{تغییر مکان حداکثر} = R \times \frac{P_c}{K} = 1.51 \times \frac{1800 \text{ Kg}}{720 \text{ Kg/cm}} \Rightarrow \text{تغییر مکان حداکثر} = 3.78 \text{ cm}$$

ب) نکته ای در آن مقدار میری بوی در سونهای تاب به حداکثر میرسد با زمانی که مقدار تغییر مکان مثبت به

وضعیت اولیه به بیشترین مقدار خود میرسد، معادلات است. (با توجه به روابط زیر)



$$u = u_g + y \rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + Ky = -m\ddot{u}_g$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ky = c\dot{u}_g + Ku_g$$

در نقطه ای که y از بیشترین مقدار برش در زمان $t = 0.35 \text{ sec}$ میگذرد

۴

حال می‌توانیم از روابط مربوط به بارهای سازه ای استفاده کنیم:

$$t \leq t_d/2 : R_1 = \frac{2}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

برای مراتب بار دینامیک داریم:

$$t_d/2 \leq t \leq t_d : R_2 = \frac{2}{t_d} \left\{ t_d - t + \frac{1}{\omega} \left(2 \sin \omega \left(t - \frac{t_d}{2} \right) - \sin \omega t \right) \right\}$$

$$t_d \leq t : R_3 = \frac{2}{\omega t_d} \left\{ 2 \sin \omega \left(t - \frac{t_d}{2} \right) - \sin \omega t - \sin \omega (t - t_d) \right\}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{72000 \text{ Kg/m}}{\frac{4500 \text{ Kg.s}^2}{9.81}}} \Rightarrow \omega = 12.53 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$t \leq 0.25 \text{ s} : R_1 = 4 \left(t - \frac{\sin 12.53 t}{12.53} \right)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \rightarrow -4 \left(\cos \left(\frac{12.53 t}{100} \right) - 1 \right) = 0 \Rightarrow \cos \frac{12.53 t}{100} = 1$$

$$\frac{12.53 t}{100} = 0 \rightarrow t = 0 \text{ sec} \Rightarrow R_1 = 4(0 - 0) = 0$$

$$\frac{12.53 t}{100} = 2\pi \rightarrow t = 0.5 \text{ sec} \quad \times$$

$$0.25 < t < 0.5 : R_2 = 4 \left\{ 0.5 - t + \frac{1}{12.53} \times \left(2 \sin 12.53(t - 0.25) - \sin 12.53 t \right) \right\}$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \rightarrow 4 \times \left(2 \cos \left(\frac{12.53(t - \frac{1}{4})}{100} \right) - \cos \left(\frac{12.53 t}{100} \right) - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0.35 \text{ Sec} \Rightarrow R_2 = 1.51$$

حمید کاظمی

حل

نقطه ای که در آن مقدار نیروی برقی در سربهای قاب حداکثر می‌شود، نقطه ای است که y ماکزیمم

می‌شود. با توجه به می‌سبب مسافت قبل در زمانهای $t = 0.62 \text{ sec}$ و $t = 0.88 \text{ sec}$

لا ماکزیمم مقدار خود را می‌یابد که این مقدار مادی 3.2 cm است.

مقدار نیروی برقی در دوسون روی هم تصویب می‌شود.

$$\text{مقدار نیروی برقی} = K \times y = 720 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}} \times 3.2 \text{ cm} = \underline{2304 \text{ Kg}}$$

حمید کاظمی

$$u = u_g + y \quad \text{در} \rightarrow y = u - u_g \Rightarrow y = R_x \frac{P_e}{K} - u_g$$

حال مانند قسمت الف، سه باره را سرد بررسی قرار می‌دهیم:

$$t \leq 0.25 \text{ sec} \rightarrow R_1 = 4 \left(t - \frac{\sin 12.53 t}{12.53} \right)$$

$$y = \frac{1800}{720} \times \left(4 \times \left(t - \frac{\sin 12.53 t}{12.53} \right) \right) - \overset{10t}{u_g}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \left(10 \left(t - \frac{\sin 12.53 t}{12.53} \right) - 10t \right)' = 0 \Rightarrow 10 \cos(12.53 t) = 0 \Rightarrow$$

$$12.53 t = 2\pi \Rightarrow t = 0.5 \text{ sec} > 0.25^{\text{sec}} \times$$

$$0.25 \leq t \leq 0.5 \rightarrow R_2 = 4 \left\{ 0.5 - t + \frac{1}{12.53} \times (2 \sin 12.53(t - 0.25) - \sin 12.53 t) \right\}$$

$$y = 10 \left(0.5 - t + \frac{1}{12.53} \times (2 \sin 12.53(t - 0.25) - \sin 12.53 t) \right) - (5 - 10t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 20 \cos(12.53(t - 0.25)) - 10 \cos(12.53 t) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cos(12.53(t - 0.25)) - \cos(12.53 t) = 0 \Rightarrow \underline{t = 0.38 \text{ sec}}$$

$$\Rightarrow \underline{y_{\max} = 2.39 \text{ cm}}$$

$$t \geq 0.5 \text{ sec} \rightarrow y = 2.5 \times 0.32 \left\{ 2 \sin(12.53 \times (t - 0.25)) - \sin(12.53 t) - \sin(12.53(t - 0.5)) \right\}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} t &= 0.88 \text{ sec} \\ t &= 0.62 \text{ sec} \end{aligned} \rightarrow \underline{y_{\max} = 3.2 \text{ cm}}$$

حمید کاظمی

$$\Rightarrow R_2 = 1.06$$

$$\rightarrow \text{وزن در سربا} = R_2 \times P_0 = 1.06 \times 1000 = 1060 \text{ Kg}$$

مقدار وزن در سربا

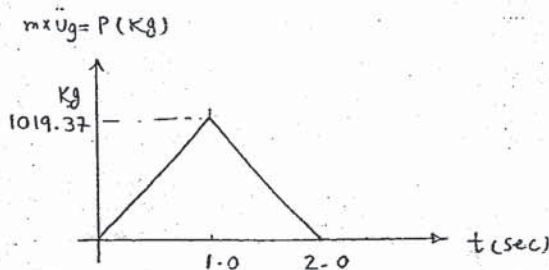
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = \underbrace{-m\ddot{U}_g}_{P_{eff}}$$

باتوجه به رابطه :

بارگذاری ② :

اگر نمودار دارد m ضرب کنیم پس برای بارگذاری حاصل مقدار فریب بار دینامیکی را میابیم

انگاه مقدار y_{max} یعنی جابجایی خود سازه بدست می آید :



$$t \leq 1.0 \text{ sec} : R_1 = 1 \times \left(t - \frac{\sin 13.36 t}{13.36} \right)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \rightarrow \cos \frac{334t}{25} = 1 \Rightarrow t = \frac{2\pi}{13.36} \Rightarrow t = 0.47 \text{ sec}$$

$$\Rightarrow R_1 = 0.47$$

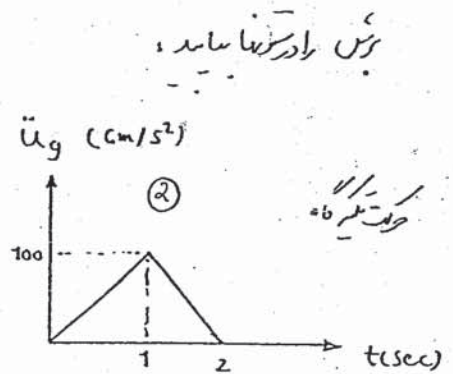
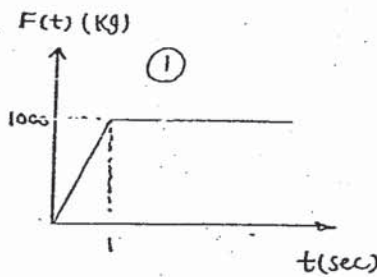
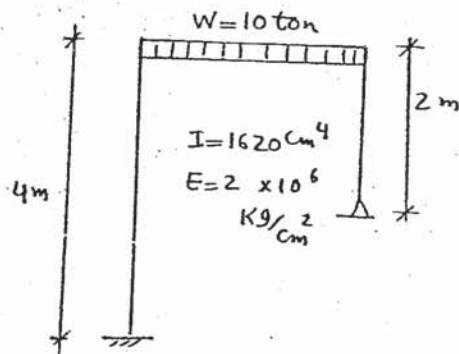
$$1 < t \leq 2 : R_2 = 2 - t + \frac{1}{13.36} (2 \times \sin(13.36 \times (t-1))) - \sin 13.36 \times t$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \rightarrow 2 \cos(13.36(t-1)) - \cos(13.36t) - 1 = 0 \Rightarrow t = 1.44 \text{ sec} \rightarrow R_2 = 0.47$$

$$t \geq 2 : R_3 = \frac{2}{13.36 \times 2} \left\{ 2 \sin(13.36(t-1)) - \sin(13.36t) - \sin(13.36(t-2)) \right\}$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \rightarrow 26.72 \cos(13.36(t-1)) - 13.36 \cos(13.36(t-2)) - 13.36 \cos(13.36t) = 0 \Rightarrow$$

۱۲) سازه استاندارد شده در تصویر مقابل تحت اثر بارهای زیر دراز میگردد. برای حرکت از این بارها، مقدار حرکت را



$$K = K_1 + K_2 = \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{3EI}{L_2^3} = \frac{2.0 \times 10^6 \times 1620}{1} \left(\frac{12}{400^3} + \frac{3}{200^3} \right)$$

$$\Rightarrow K = 1822.50 \frac{Kg}{cm}$$

بارگذاری ① :

$$t \leq t_d: R_1 = \frac{1}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$t \geq t_d: R_2 = 1 + \frac{1}{\omega t_d} \left(\sin \omega(t - t_d) - \sin \omega t \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1822.5}{\frac{10000}{981}}} \Rightarrow \omega = 13.36 \frac{rad}{sec}$$

$$t \leq 1 \text{ sec}: R_1 = \left(t - \frac{\sin 13.36 t}{13.36} \right) \rightarrow \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{13.36}{13.36} \cos 13.36 t = 0$$

$$\cos 13.36 t = 1 \Rightarrow 13.36 t = 2\pi \Rightarrow t = 0.47 \text{ sec} \rightarrow R_1 = 0.47$$

$$t \geq 1 \text{ sec}: R_2 = 1 + \frac{1}{13.36} \left(\sin(13.36(t - 1)) - \sin(13.36 t) \right)$$

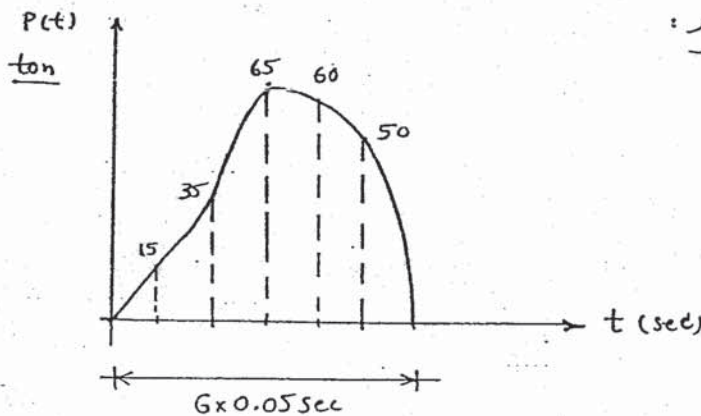
$$\frac{dR_2}{dt} = 0 \rightarrow 13.36 \cos(13.36(t - 1)) - 13.36 \cos(13.36 t) = 0 \Rightarrow t = 1.21 \text{ sec}$$

حمید کاظمی

۱۳) تون کبی رانصرت یک دستگاه پلایچم ارادی ایمرانی $\xi = 10\%$ ، $m = 4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$ ، $K = 40 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$

در نظر می گیریم . در اثر اینجور تون تحت اثر بارگذاری مطابق شکل در می گیریم . با استفاده از قانون همگون

جواب دستگاه را در مدت بارگذاری بدست می آید :



$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{40 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}}{4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4000 \frac{\text{ton}}{\text{m}}}{4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{1000}$$

$$\Rightarrow \omega = 31.62 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0.20 \text{ Sec} \rightarrow$$

$$\Delta t \leq \frac{T}{10} = 0.02 : \Delta t \text{ این}$$

با توجه به اینکه معادله بارگذاری را داریم با احتیاط از $\Delta t = 0.05 \text{ sec}$ استفاده می کنیم که تعداد بارگذاری در آن معلوم

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow \omega_d = 31.46 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

سایر

$$\xi = 10\% \Rightarrow e^{-2\xi\omega_d\Delta t} = e^{-2 \times 0.1 \times 31.46 \times 0.05} = 0.73$$

مرب

$$4 \times e^{-\xi\omega_d\Delta t} = 4 \times e^{-0.1 \times 31.46 \times 0.05} = 3.42$$

مرب

$$G = \frac{\Delta T}{m\omega_d \times J} = \frac{0.05}{10 \times 4 \times 31.46 \times 3} = 1.32 \times 10^{-7}$$

حمید کاظمی

$$t = 2.06 \text{ sec} \rightarrow R_3 = 0.048$$

در هیچ کدام از بازه ها ضرب فرسایش از ۱ شد یعنی بارگذاری فرسایشی نیست و

تأثیر فرسایش ندارد. بنابراین مقدار بیش max در سربزه معادل بار استاتیکی شد بارگذاری

$$\text{بار بیش از وزن سربزه} = 1019.37 \text{ Kg}$$

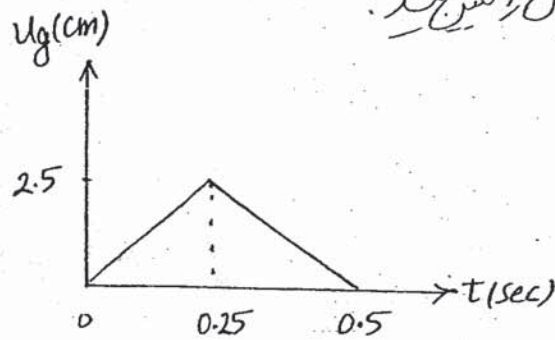
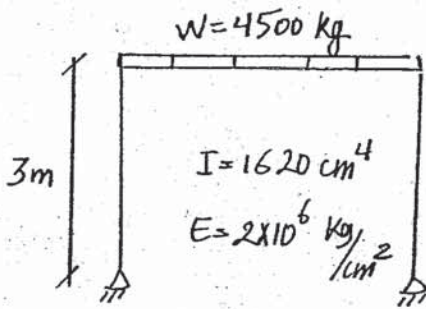
است.

حمید کاظمی

۳. مسئله
۱- قاب نشان داده شده (تصورات) در اثر حرکت افقی یک گاهه که آن به راست (راست) به سمت چپ حرکت می کند (0.6)

با زمان نیز (تصور) داده شده است. (الف) لحظه ای که در آن دال قاب حداکثر تغییر مکان (نسبت به وضع اولیه) را پیدا می کند و نیز

مقدار آن تغییر مکان حداکثر را بدست آورید. (ب) لحظه ای که در آن مقدار نیرو را برشی در کون های قاب به حداکثر می رسد و نیز مقدار این نیرو را برشی را تعیین کنید.

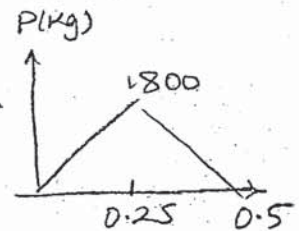


(الف) جهت برکت آوردن تغییر مکان حداکثر، باید از تغییر مکان مطلق گفت کرد:

$$m\ddot{x} + Kx + C\dot{x} = -m\ddot{x}_g \quad \rightarrow \quad m\ddot{U} + KU + C\dot{U} = Kx_g + C\dot{x}_g$$

$$U = x + x_g \rightarrow \ddot{x} = \ddot{U} - \ddot{x}_g$$

$$K = 2 \times \frac{3EI}{l^3} = 6 \times \frac{2 \times 10^6 \times 1620}{300^3} = 720 \text{ kg/cm}$$



با فرض ایستایی:

$$t \leq \frac{t_d}{2} : R_1 = \frac{2}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$\frac{t_d}{2} < t < t_d : R_2 = \frac{2}{t_d} \left(t_d - t + \frac{1}{\omega} (2 \sin \omega (t - \frac{t_d}{2}) - \sin \omega t) \right)$$

$$t_d \gg t : R_3 = \frac{2}{\omega t_d} (2 \sin \omega (t - \frac{t_d}{2}) - \sin \omega t - \sin \omega (t - t_d))$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{720 \times 100}{\frac{4.5 \times 10^3}{9.81}}} \frac{\text{kg/cm}}{\text{kg.s}^2} = 12.53 \text{ rad/s}$$

$$\frac{dR_1}{dt} = 0 \rightarrow 1 - \cos(12.53t) = 0 \rightarrow 12.53t = 2n\pi \quad \left\{ \begin{array}{l} n=1 \rightarrow t = \frac{8.128}{12.53} \approx 0.65 \end{array} \right.$$

→ شتاب در لحظه $t=0$ → $R_1 = 0$

$$\frac{dR_2}{dt} = 0 \rightarrow -1 + 2\cos(12.53(t-0.25)) - \cos(12.53t) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = 1.35 \text{ sec} & \times \\ t = 0.35 & \checkmark \\ t = 0.65 & \times \end{cases} \rightarrow R_2 = 1.2$$

$$\frac{dR_3}{dt} = 0 \rightarrow 2\cos(12.53(t-0.25)) - \cos(12.53t) - \cos(12.53(t-0.5)) = 0$$

$$\rightarrow t = 0.62$$

$$t = 0.88 \rightarrow R_3 = 1.28$$

$$D = R_{\max} = 1.28 \rightarrow \frac{e}{\text{تقریب}} = 1.28 \frac{1800}{720} = 3.2 \text{ cm}$$

(ب) بهر نیروی کشش

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = -m\ddot{x}_g$$

$$U = x + x_g \rightarrow x = U - x_g = R \times \frac{P_0}{K} - u_g$$

$$t \leq \frac{t_d}{2} \rightarrow x = \frac{1800}{720} \left(4x(t - \frac{\sin 12.53t}{12.53}) \right) - 10t$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \cos(12.53t) = 0 \rightarrow 12.53t = 2n\pi \quad \left\{ \begin{array}{l} n=0 \rightarrow t=0 \rightarrow x=0 \\ t < 0.25 \quad \{ n=1 \rightarrow t > 0.25 \times \end{array} \right.$$

$$\frac{t_d}{2} < t < t_d \rightarrow x = 10 \left(0.5 - t + \frac{1}{12.53} (2.5 - 12.53(t-0.25) - \sin(12.53t)) \right) - (5-10t)$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow 2\cos(12.53(t-0.25)) = \cos(12.53t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow t = 0.375 \text{ sec} \\ 0.25 < t < 0.5 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow x_{\max} = 2.39 \text{ cm}$$

حمید کاظمی

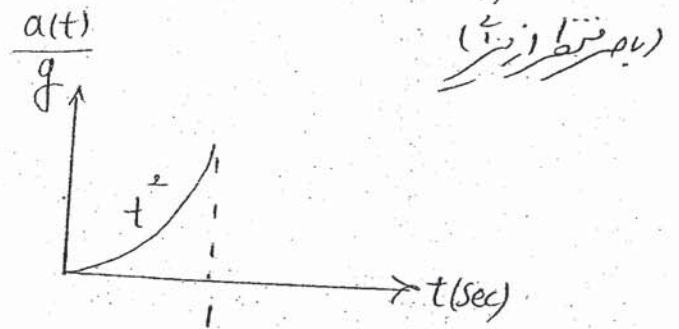
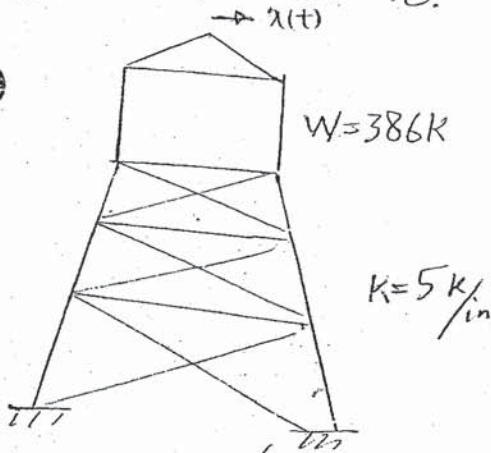
صوبن $\sigma = 0$ جلا کر حساب کیا گیا $t > t_d \rightarrow$

$$\rightarrow q_{max} = 1.28 \times 2.5 = 3.2 \text{ cm}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{برس کا کم ترین وزن} \\ 720 \end{array} \right. \times 3.2 = 2244 \text{ kg}$$

درجہ

۱- بیرجستان (۱۰۰ متری) سازه یکپارچه
۲- اثری که در جایی سستی باشد، $t = 1.0 \text{ sec}$ است
۳- $a(t)$



۴- از آنجا که تابع سازه یکپارچه نیست، نیروی وارد بر سازه معدوم است، از روش انرژی درجایی استفاده می کنیم

$$m = \frac{386 \text{ K}}{386 \frac{\text{in}}{\text{s}^2}} = 1 \frac{\text{K} \cdot \text{s}^2}{\text{in}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{5 \text{ K/in}}{1}} = 2.24 \text{ rad/s}$$

$$F(t) = m \ddot{x}_g = 1 \frac{\text{K} \cdot \text{s}^2}{\text{in}} \times t^2 \times 386 \frac{\text{in}}{\text{s}^2} = 386 t^2 \text{ (Kips)}$$

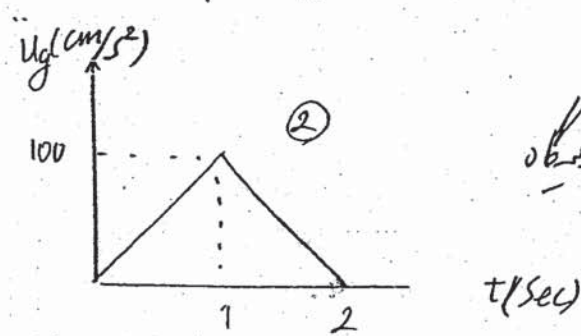
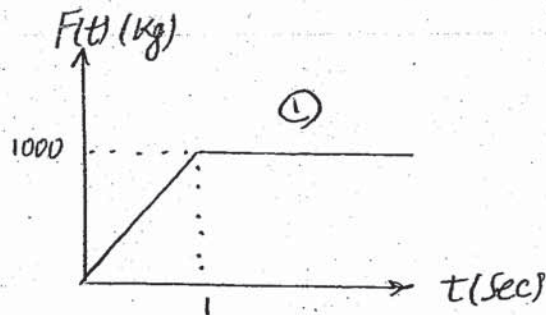
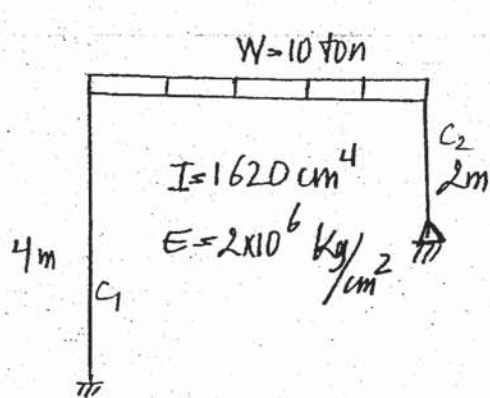
$$x(t) = \int_0^t \frac{F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau}{m \omega}$$

روش بردن میرایی:

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{1 \times 2.24} \int_0^1 386 \tau^2 \sin(2.24(1-\tau)) d\tau = \frac{61.02}{2.24} = 27.24 \text{ in}$$

Unit $\rightarrow \left(\frac{\text{K} \cdot \text{s}^2}{\text{in}} \times \frac{\text{in}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{in} \right)$

۲- سازه‌های پل و سقف‌های تخت از نوعی بار زلزله‌ای (برای سازه‌های پل و سقف‌های تخت) معادله‌های زیر را در نظر بگیرید.



$$K = \frac{K_{C1}}{\frac{12EI}{l^3}} + \frac{K_{C2}}{\frac{12EI}{l^3}} = \frac{2 \times 10^6}{1620} \left(\frac{1}{400^3} + \frac{1}{4 \times 200^3} \right) = 1822.5 \text{ kg/cm}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1822 \text{ kg/cm}}{10^4 \text{ kg} \times \frac{1}{981} \frac{\text{s}^2}{\text{cm}}}} = 13.37 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.47 \text{ sec}$$

$$\frac{t_d}{T} = \frac{1}{0.47} = 2.13, \quad \gamma_{st} = \frac{P_0}{K} = \frac{10^3}{1822.5} = 0.55 \text{ cm}$$

در صورتیکه به گراف‌های موجود مراجعه کنیم: $D \approx 1.05$, $t \approx 1.2 \text{ sec}$ (صفحه 145 کتاب زلزله‌نگاری)

اما اگر فرض کنیم آن گراف‌های موجود باشند، یا به عبارتی مد نظر باشد: (با توجه به ضرایب زلزله‌نگاری)

$$t \leq t_d: R_1 = \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = 0 \rightarrow 1 - \cos \omega t = 0 \rightarrow \omega t = \frac{4\pi}{2} = 0.94 \text{ sec} \rightarrow R_1 = 0.94$$

$$t \geq t_d = 1 \text{ sec} \rightarrow R_2 = 1 + \frac{1}{\omega t_d} \left| \sin \omega(t-t_d) - \sin \omega t \right|$$

$$\bullet \frac{dR_2}{dt} = 0 \rightarrow \cos \omega(t-t_d) = \cos \omega t \rightarrow 13.37(t-1) + 2n\pi = 13.37t$$

حواصا برادر

در صحنه به نوری که t در دوره نوسان قرار می‌گیرد.

$$\rightarrow 13.37(t-1) + 2n\pi = -13.37t \rightarrow 26.74t = 13.37 + 2n\pi$$

$$t = \frac{13.37 + 6\pi}{26.74} = 1.205 \text{ sec}$$

اگر $n = -3$

$$\rightarrow R_2 = 1.058$$

اگر نوسان کنیم به ازای $n = -4$ ، $R_2 = 0.94$ است می‌آید
که متوجه می‌شویم که در این حالت استاتیکی نخواهد بود و
معلوم می‌شود که ما در محرم در همین زمان 1.205 ثانیه

رفع خواهد کرد

D (ضربه زنی)

$$\lambda_{\max} = R_{\max} \times \lambda_{st}$$

$$\rightarrow F_s = \underbrace{K \times D \times \lambda_{st}}_{P_0} = 1000 \text{ kg} \times 1.058 = 1058 \text{ kg}$$

حالت (۲): در این حالت نوسان در جایی $\ddot{u}$ با بدنه جرم سازه ضرب می‌گردد تا نیروی دراز بر سازه برآید.

$$\bullet m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = -m\ddot{u}_g, \quad t_d = 2.0 \text{ sec}$$

$$t \leq \frac{t_d}{2} \rightarrow R_1 = 1 - \frac{\sin(13.37t)}{13.37} \xrightarrow{\frac{dR_1}{dt}} \cos(13.37t) = 1 \rightarrow 13.37t + 2n\pi = 0$$

$$t = \frac{1 - 2n\pi}{13.37} = \frac{13.56}{13.37} \rightarrow R_1 = 0.95$$

نزدیکترین استریم به نقطه 1: $t = 1$ حواصا برادر

$$\bullet t < 2 = t_d \rightarrow R_2 = 2 - t + \frac{1}{13.37} (2 \times \sin(13.37(t-1)) - \sin(13.37t))$$

$$\frac{dR_2}{dt} = -1 + 2 \cos(13.37(t-1)) - \cos(13.37t) = 0 \rightarrow t = 1.45, 1.1, 1.57, 1.91$$

(از باره اول)

$$\bullet t = 1.1 \rightarrow R_2 = 0.98, \quad t = 1.45 \rightarrow R_2 = 0.47, \dots$$

که با جایگزینی مقادیر فوق در R_2 داریم:

حمید کاظمی

$$R_2(\max) = 0.98$$

کشت و کوفت

$$t \gg t_d = 2 : R_3 = \frac{2}{13.37 \times 2} (2 \sin(13.37(t-1)) - \sin(13.37t) - \sin(13.37(t-2)))$$

$$\frac{dR_3}{dt} \rightarrow 2 \cos(13.37(t-1)) - \cos(13.37t) - \cos(13.37(t-2)) = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow t=4.49 &\rightarrow R_3=0.117 \\ t=3.08 &\rightarrow R_3=0.117 \\ t=2.14 &\rightarrow R_3=0.117 \\ t=2.37 &\rightarrow R_3=-0.117 \\ &\dots \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow R_3(\max) = 0.117 \right.$$

→ R $R_{\max}$ در $t=1.1 \text{ sec}$ و مقدار 0.98 الیاتی

$$\chi_{st} = \frac{P_0}{K} = \frac{100 \text{ cm/s}^2 \times 10^4 \text{ kg} \times \frac{1}{981} \frac{\text{s}^2}{\text{cm}}}{1822.5 \text{ kg/cm}} = 0.56 \text{ cm} \rightarrow (f_s)_{\text{static}} = K \chi_{st} = 1019.37 \text{ kg}$$

$$(f_s)_{\text{Dynamic}} = \overbrace{D = R_{\max}}^{0.98} \times 1019.37 = 998.98 \text{ kg}$$

حمید کاظم

حمید کاظمی

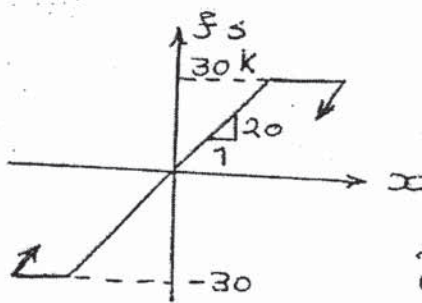
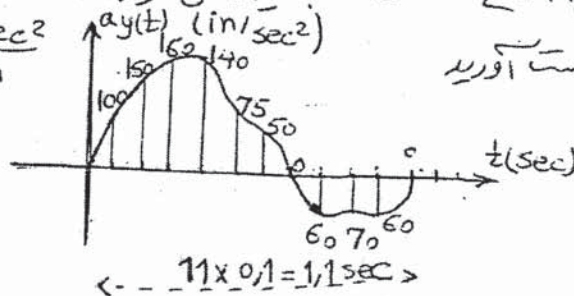
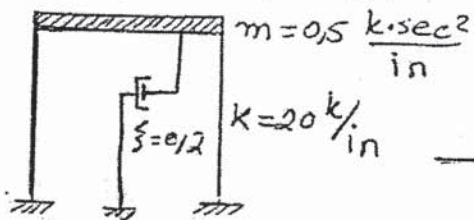
مدرس:
فراهرز خوشنودیان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)



مدرسین سترجه‌ها
دینامیک سازه‌ها

۱- سیستم یک درجه آزادی تحت اثر ستاب یکیم گاهی قرار دارد حرکت خاجانی نبی سوز را با فرض رفتار ارتجاعی غیر خطی بدست آورید

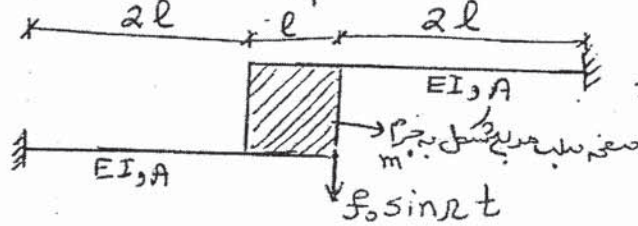
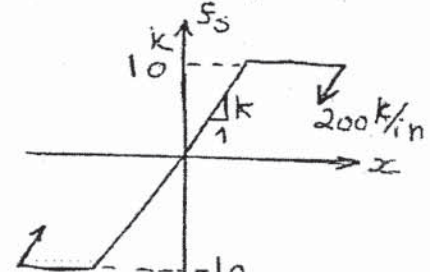
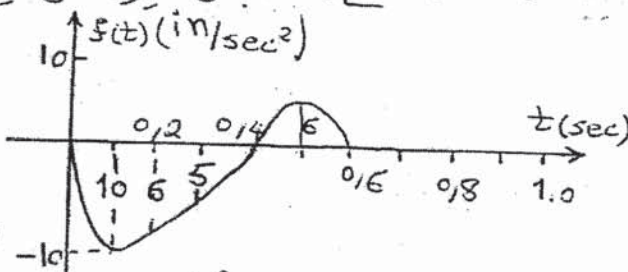
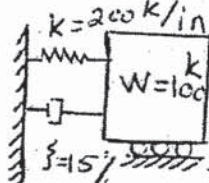


۲- سازه ای که بصورت سیستم جرم-فنر میرایی مدل شده است

تحت اثر ستاب یکیم گاهی $a(t) = a_0 f(t)$ قرار دارد که در

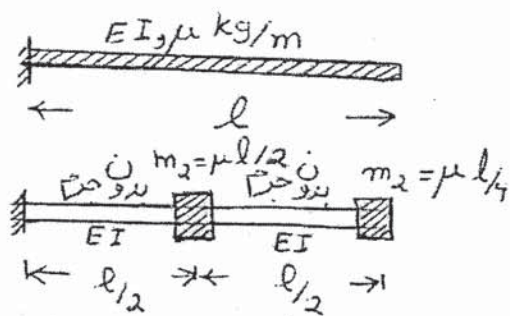
شکل نشان داده شده است حرکت مقدار a را برای این سازه

ارتجاعی نباید بدست آورید فرض کنید سازه دارای رفتار ارتجاعی غیر خطی شکل زیر است.



۳- معادله حرکت دستگاه نشان داده شده در تصویر

مقابل را بدست آورید



۴- برای تعیین فرکانس ارتعاش مودها اول در دوم تیر

طرحه نشان داده شده در تصویر مقابل از مدل در درجه آزادی

با استفاده نشان داده شده در تصویر استفاده شده است فرکانس

این دو مود (مود اول و دوم) را محاسبه کنید

محمد کاظمه

می شود. بنابراین، تعیین کلرید ممکن است مستلزم ارزیابی توانائی یک سیستم سیمانی برای تحمل چنین واکنشهایی باشد یا مستلزم بررسی سیستم های سیمانی در جاهائیکه چنین واکنشی، در حال حاضر، اتفاق افتاده است باشد. در هر حال، ذکر این نکته ضروری است که مقدار کلرید محلول در آب تعیین شده در یک مرحله بخصوص از عمر یک سیستم سیمانی ممکن است، اساساً با مقدار تعیین شده در یک زمان دیگر متفاوت باشد. برای مثال، محیط بهره برداری ممکن است منتج به مقدار کلرید محلول در آب بیشتر، به خاطر تغییر در قابلیت حل شدن، شود یا منتج به مقدار کلرید محلول در آب کمتر، به خاطر پدیده شستگی ناشی از نشت یا تراوش شود.

۳-۱-۱- شرایط آزمایش ممکن است، به طور قابل ملاحظه ای، بر روی تعیین کلرید محلول در آب تأثیر گذارد، بنابراین در موقع مقایسه نتایج این آزمایش با نتایج روشهای دیگر آزمایش کلرید دقت کافی را مبذول دارید.

۳-۲- سولفیدها بعنوان مزاحم (مانع) تعیین کلرید به حساب می آیند. سنگدانه های سرباره آهنگدازی و سیمانهای سرباره دار حاوی مقدار قابل توجهی سولفور سولفید می باشند. که می تواند باعث چنین مزاحمتها و ممانعتهایی شود و اشتباهات بزرگی در نتایج آزمایش ایجاد نماید. برای رفع چنین مزاحمتهایی می توان از پر اکسید هیدروژن به همان ترتیبی که در آزمایش C 114 تشریح شده است استفاده نمود.

۳-۳- افرادی که از این روش استفاده می کنند باید مطلع باشند برخی سنگدانه ها حاوی کلرید می باشند، که بعلت محصور بودن در سنگدانه و غیر قابل دسترسی بودن (غیر فعال بودن)، باعث خوردگی، نمی شوند. چنین کلریدی نیز، علاوه بر کلرید فعال، در این روش ردیابی و تعیین می شود. (نه بطور جداگانه بلکه بعنوان جزئی از کلرید کل تعیین شده)

سری جابجایی

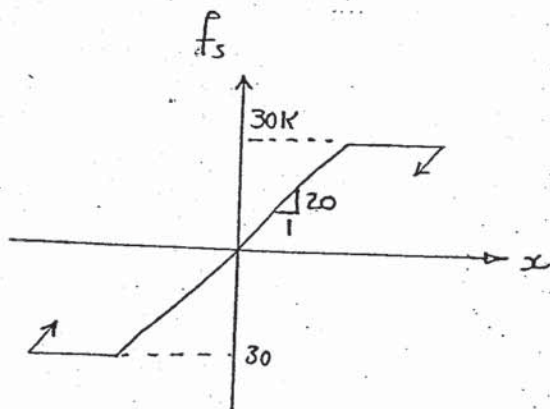
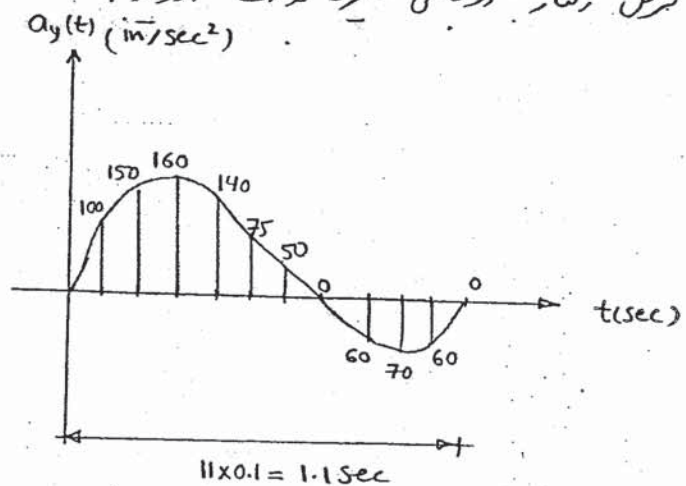
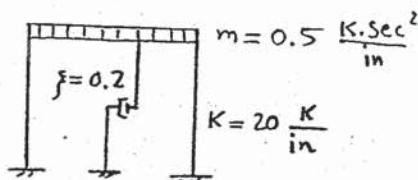
حل تیرین دینامیک سازه ها

تایخ: ۸۵, ۹, ۲۲

سید کاظم مرادلو ۸۵۱۲۴۱۲۶

۱) سیستم یکجبهه دارای سختی از ستاب غیره قابل قرار دارد. حداکثر جابجایی نسبی سازه را با

فرض رفتار ارتعاشی غیر خطی مدست آورده:



* از روش حل هم به نام با ستاب ثابت استفاده

$$C = 2m\zeta\omega = 2 \times 0.5 \times 0.2 \times \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\Rightarrow C = 2 \times 0.5 \times 0.2 \times \sqrt{\frac{20}{0.5}} \Rightarrow C = 1.26$$

$$x_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = 0$$

$$\ddot{x}_0 = \frac{P - C\dot{x}_0 - Kx_0}{m} = 0$$

$$\Delta t = 0.1 \text{ Sec}$$

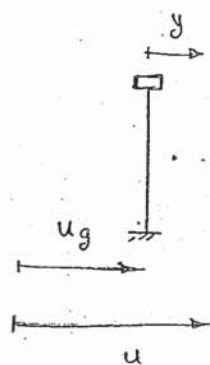
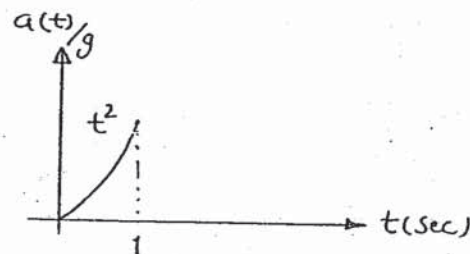
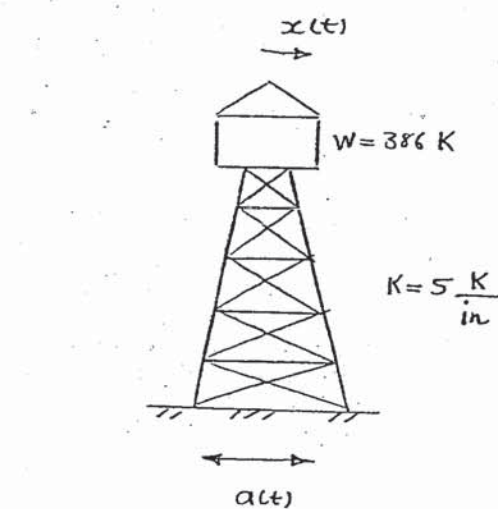
$$K_i^* = K_i + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{(\Delta t)^2} \Rightarrow K_i^* = K_i + \frac{2}{0.1} \times 1.26 + 4 \times \frac{0.5}{(0.1)^2}$$

$$\Rightarrow K_i^* = K_i + 225.2$$

سید کاظم

۴) به برج ساده شده یک ستاب یکم برآید $a(t)$ از زمین. جابجایی نسبی بالای برج

راد $t = 1 \text{ sec}$ بدست آید: (از آزمای مرتطرا کنند)



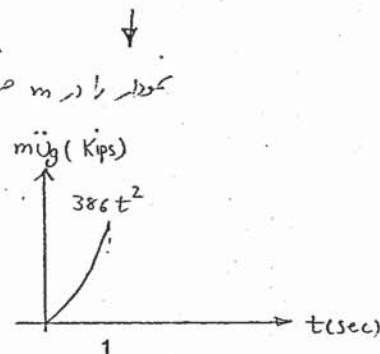
معادله حرکت ستاب یکم برآید

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = -m\ddot{u}_g$$

$$m = \frac{386 \times 10^3 \text{ lb}}{386 \frac{\text{in}}{\text{s}^2}} = 1000 \text{ lb s}^2/\text{in} = 1 \frac{\text{Kips s}^2}{\text{in}}$$

مقدار را در m ضرب می‌کنیم

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{5 \frac{\text{K}}{\text{in}}}{1 \frac{\text{K s}^2}{\text{in}}}} = 2.24 \frac{\text{rad}}{\text{Sec}}$$



انزال دما:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega_d} \times P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \times \sin\omega_d(t-\tau) d\tau$$

$$x(1) = \int_0^1 \frac{1}{1 \times 2.24} \times 386 \tau^2 \times 1 \times \sin(2.24(1-\tau)) d\tau \Rightarrow$$

$$x(1) = 172.32 \times \left[\frac{15625}{87808} \times \cos\left(\frac{56}{25}\right) + \frac{23575}{87808} \right] \Rightarrow x(1) = 27.24 \text{ inch}$$

جابجایی نسبی بالای برج

حمید

کاظمه

$$\max_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}^*$$

بایک طرحہ بہ رسدین بہ
راجہ مطلوبہ میاری بہ امامہ دادن تمیل جدول سنت

حمید کاظمہ

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \left(\frac{4m}{\Delta t} + 2c \right) \dot{x}_i + 2m \ddot{x}_i \Rightarrow \Delta P_i^* = \Delta P_i + \left(\frac{4 \times 0.26}{0.1} + 2 \times 2.16 \right) \dot{x}_i + 0.52 \ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow \Delta P_i^* = \Delta P_i + 14.72 \dot{x}_i + 0.52 \ddot{x}_i$$

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t} \times \Delta x_i - 2 \dot{x}_i \Rightarrow \Delta \dot{x}_i = 20 \Delta x_i - 2 \dot{x}_i$$

حال از روش ستاب ثابت استفاده میکنیم. (حدول در منحنی بعد)

در حدول مقدار x_{max} از نظر جری بدست آمده است که این مقدار باید از مقدار

x نظر شروع حالت پلاستیک کوچکتر باشد.

$$x = \frac{10 \text{ K}}{200 \frac{\text{K}}{\text{in}}} = 0.05 \text{ in}$$

x نظر آغاز شرایط پلاستیک.

مقدار x_{max} جایابی بدست آمده از حدول.

این شرایط باید حاکم باشد تا سازه ارتعاشی باقی بماند.

$$x_{max} = |-15.35 \times 10^{-3} a_0| < 0.05 \text{ inch}$$

(مقدار جری)

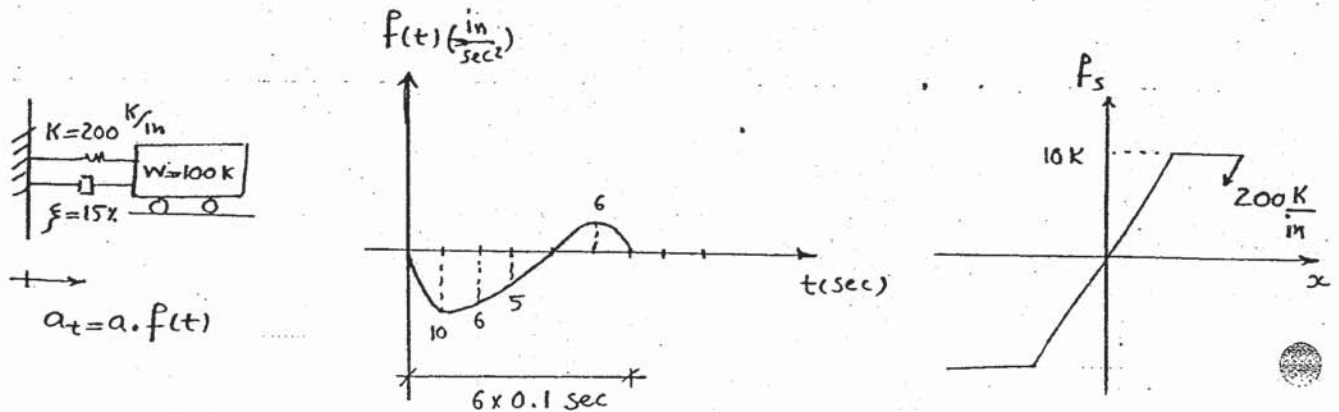
$$\Rightarrow a_0 \leq 3.26$$

* بنابراین a_0 باید کوچکتر از 3.26 باشد تا سازه ارتعاشی باقی بماند.

۲) سازه ای که بصورت سیستم جرم، تیر برای مدل شده است. تحت اثر شتاب قائم می باشد.

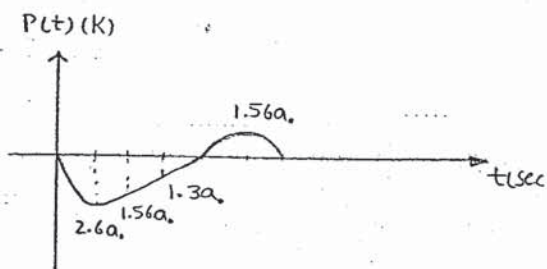
$a(t) = a_0 \cdot f(t)$ قرار دارد که $f(t)$ در شکل استاندارد شده است. حداکثر مقدار a_0 را برای این سازه

سازه ارتجاعی باقی بماند بدست آورید. فرض کنید که سازه دارای رفتار ارتجاعی مخمیری شکل دریا است.



ابتدا نمودار نیرو بران را با فرض که جرم نمودار شتاب قائم بدست می آوریم:

$$m = \frac{W}{g} \Rightarrow m = \frac{100 \text{ K}}{9.81 \times \frac{39.37}{1} \frac{\text{in}}{\text{ft}}} \Rightarrow m = 0.26 \frac{\text{K} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$$



* از روش حل گام به گام بایست است
استفاده میکنیم.

$$C = 2m\zeta\omega \Rightarrow C = 2 \times 0.26 \times 0.15 \times \sqrt{\frac{200}{0.26}} \Rightarrow C = 2.16$$

$$\ddot{x}_0 = \frac{P - C\dot{x}_0 - Kx_0}{m} = 0 \quad \Delta t = 0.1 \text{ sec}$$

$$K_i^* = K_i + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{(\Delta t)^2} \Rightarrow K_i^* = K_i + \frac{2 \times 2.16}{0.1} + \frac{4 \times 0.26}{(0.1)^2} \Rightarrow$$

$$K_i^* = K_i + 147.2$$

حمید کاظمی

حصیل حل سوال ۱ مکتب نامہ عام با حساب ایت

t_i (sec)	P (K)	α (in)	α (in/s)	f_s	f_d	f_I	α	ΔP	$2z$	$1 \times \alpha$	ΔP^*	K	K*	$\Delta \alpha$	$20 \Delta \alpha$	2α	$\Delta \alpha$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0	0	0	0	0	0	50	0	0	50	20	245.2	0.204	4.078	0.000	4.078
0.1	50	0.204	4.078	4.078	5.159	40.763	81.525	25	91.843	81.525	188.369	20	245.2	0.809	16.180	8.157	8.024
0.2	75	1.013	12.102	20.258	15.309	39.433	78.865	5	272.534	78.865	356.399	20	245.2	1.454	29.070	24.204	4.866
0.3	80	2.466	16.968	30.000	21.465	28.535	57.070	-10	382.124	57.070	429.195	0	225.2	1.906	38.117	33.936	4.180
0.4	70	4.372	21.149	30.000	26.753	13.247	26.494	-32.5	476.265	26.494	470.259	0	225.2	2.088	41.764	42.297	-0.533
0.5	37.5	6.460	20.615	30.000	26.078	-18.578	-37.156	-12.5	464.254	-37.156	414.597	0	225.2	1.841	36.820	41.230	-4.410
0.6	25	8.301	16.205	30.000	20.500	-25.500	-50.999	-25	364.941	-50.999	288.942	0	225.2	1.283	25.661	32.410	-6.749
0.7	0	9.585	9.456	30.000	11.961	-41.961	-83.923	-30	212.943	-83.923	99.020	0	225.2	0.440	8.794	18.911	-10.117
0.8	-30	10.024	-0.662	30.000	-0.837	-59.163	-118.326	-5	-14.903	-118.326	-138.229	0	225.2	-0.614	-12.276	-1.324	-10.953
0.9	-35	9.410	-11.614	17.724	-14.692	-38.032	-76.064	5	-261.555	-76.064	-332.618	0	225.2	-1.477	-29.540	-23.229	-6.311
1	-30	7.933	-17.925	0.460	-22.676	-7.784	-15.569	30	-403.682	-15.569	-389.251	0	225.2	-1.728	-34.569	-35.851	1.282
1.1	0	6.205	-16.644	-4.569	-21.054	25.624	51.248	0	-374.820	51.248	-323.572	0	225.2	-1.437	-28.736	-33.288	4.551
1.2	0	4.768	-12.093	1.264	-15.297	14.033	28.067	0	-272.324	28.067	-244.257	0	225.2	-1.085	-21.692	-24.185	2.493
1.3	0	3.684	-9.600	8.308	-12.144	3.836	7.673	0	-216.190	7.673	-208.518	0	225.2	-0.926	-18.518	-19.200	0.681
1.4	0	2.758	-8.919	11.482	-11.282	-0.200	-0.399	0	-200.845	-0.399	-201.244	0	225.2	-0.894	-17.872	-17.837	-0.035
1.5	0	1.864	-8.954	12.128	-11.327	-0.801	-1.601	0	-201.643	-1.601	-203.245	0	225.2	-0.903	-18.050	-17.908	-0.142
1.6	0	0.961	-9.096	11.950	-11.507	-0.443	-0.886	0	-204.846	-0.886	-205.733	0	225.2	-0.914	-18.271	-18.192	-0.079
1.7	0	0.048	-9.175	11.729	-11.606	-0.123	-0.245	0	-206.619	-0.245	-206.864	0	225.2	-0.919	-18.372	-18.350	-0.022
1.8	0	-0.371	-9.197	11.628	-11.634	0.005	0.011	0	-207.109	0.011	-207.099	0	225.2	-0.920	-18.392	-18.393	0.001

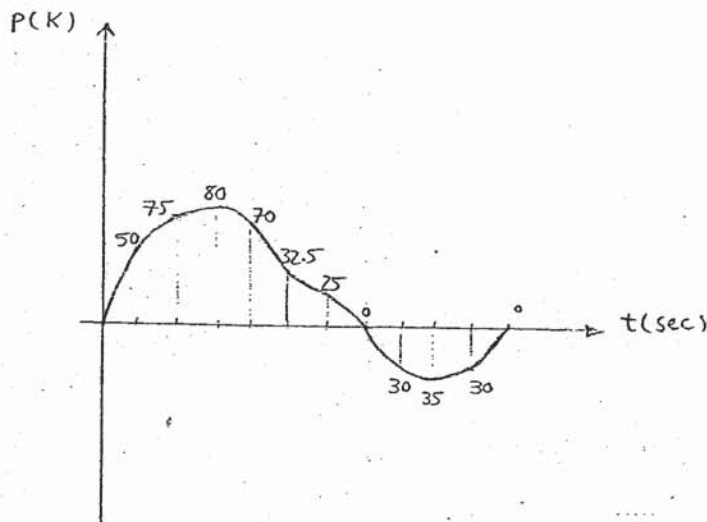
حصیل کاظمہ

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \left(\frac{4m}{\Delta t} + 2c \right) \dot{x}_i + 2m \ddot{x}_i \Rightarrow \Delta P_i^* = \Delta P_i + \left(\frac{4 \times 0.5}{0.1} + 2 \times 1.26 \right) \dot{x}_i + 2 \times 0.5 \ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow \Delta P_i^* = \Delta P_i + 22.52 \dot{x}_i + \ddot{x}_i$$

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t} \times \Delta x_i - 2 \dot{x}_i \Rightarrow \Delta \dot{x}_i = 20 \Delta x_i - 2 \dot{x}_i$$

با ضرب کردن محور y نمودار ستاب بان در حجم سازه نمودار نیروی ناخ درست می آید.



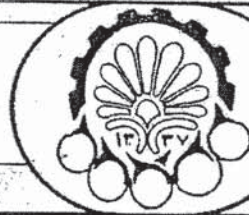
حال می توانیم جدول مربوط به روش گام به گام با ستاب ثابت را تهیه کنیم (منتهی جدول موجود است)

با توجه به جدول مقدار جاکان max سازه 10.02 inch می باشد.

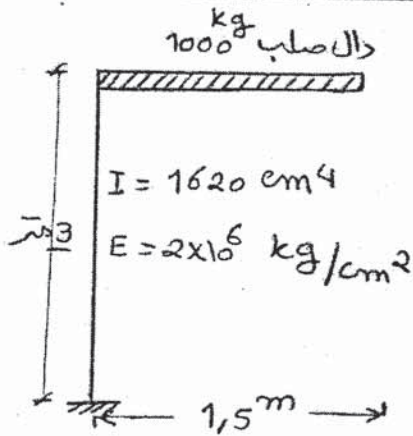
حمید کاظمی

مدرس:
فراهرز خوشنویزان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)



تدریس سرفه پنجم
دینامیک سازه‌ها



۱- ساین و ستون نگهدارنده آنرا در تصویر مقابل در نظر بگیرید مقدار نسبت

استحکات در هر یک از دو کام ارتعاشی این سازه را 5٪ فرض کنید

الف- چنانچه این سازه تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g = A \sin 2t$ قرار گیرد، حرکت تغییر مکان افقی و قائم را در انتهای آزاد ساین بدست آورید

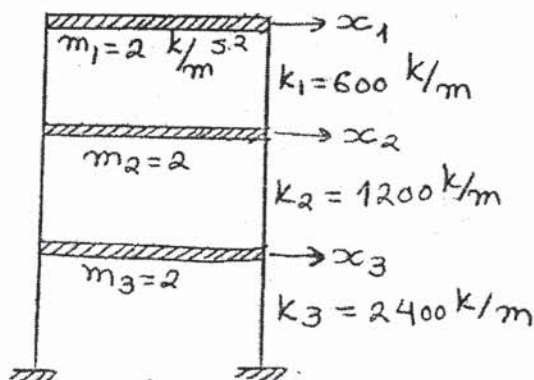
ب- چنانچه این سازه تحت اثر دوران پایه با شتاب $\ddot{\theta}_g = B \sin 2t$ قرار گیرد، حرکت تغییر مکان افقی و قائم را در انتهای آزاد ساین محاسبه کنید

ج- چنانچه این سازه تحت اثر بار افقی $F(t) = C \sin 2t$ در تراز ساین قرار گیرد، حرکت تغییر مکان افقی و قائم را در انتهای آزاد ساین بدست آورید

۲- خواص جرم و سختی یک ساختمان سه طبقه بررسی همراه با شکل مورد ارتعاشی و فرکانس‌ها درجا

بدون استحکات در تصویر مقابل داده شده است سازه را با اعمال جابجایی $x_1 = 0.3 \text{ in}$ و $x_2 = -0.8 \text{ in}$

و $x_3 = 0.3 \text{ in}$ در سقف‌ها و درها ساختن ناگهان آن در زمان $t = 0$ به ارتعاش آزاد در صاف آوریم شکل



جابجایی را در زمان $t = 2\pi/\omega_1$ تعیین کنید:

الف) فرض کنید استحکات وجود ندارد

ب) فرض کنید در هر مورد ارتعاشی 10٪ است

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.548 & -1.522 & -6.26 \\ 0.198 & -0.872 & 12.10 \end{bmatrix}$$

$$\omega = [11.62, 27.5, 45.9] \text{ rad/sec}$$

۵- معرف ها:

معرف های لازم برای تعیین کلرید در آزمایش مرجع برای کلرید ، از مجموعه آزمایشهای C 114.

۶- نمونه گیری:

۶-۱- نمونه را با توجه به هدف آزمایش (منظور از بررسی) انتخاب نمائید. (تبصره ۱).

تبصره ۱: به علت حداکثر اندازه اسمی کوچک سنگدانه در یک ملات ، قطعات ۱۰ گرمی که از ملات ساخته می شوند در مقابل نمونه های بتنی هم اندازه خود نماینده و گویای حجم بسیار وسیعتری از ملات می باشند. دستور C 823 ممکن است بعنوان راهنمای نمونه گیری مورد استفاده قرار گیرد.

۶-۱-۱- مغزه های بتنی را مطابق با آزمایش C 42 تهیه کنید مگر اینکه طور دیگری مشخص شده باشد.

(تبصره ۲)

تبصره ۲: مغزه های بتنی تهیه شده مطابق با روش آزمایش C 42 ممکن است به طور طولی به منظور تهیه یک بخش ۱/۲ اینچی (۱۲ میلیمتری) که عموماً نماینده مغزه میباشد ، بریده شود یا بطور عرضی ، به ضخامت ۱۲ میلی متری که نماینده مغزه بتنی در عمقهای مختلف می باشند بریده شوند. تجربه نشان داده است که آب مورد استفاده برای خنک کردن در هنگام مغزه بری ، مقدار قابل توجهی از کلرید را حل نخواهد کرد.

۶-۱-۲- بتن پودر شده حاصل از یک حفر ضربه ای دورانی ، اکثر برای تعیین غلظت کلرید در عمقهای مختلف عرشه های پل و کف سازها مفید خواهد بود. چنین نمونه هایی ممکن است ، مخصوصاً در حالتیکه حداکثر اندازه اسمی سنگدانه ۲۵ میلی متر یا بیشتر است ، گویا و نماینده نباشند. بنابراین در این حالت چندین نمونه باید با هم ترکیب شوند یا داده ها با احتیاط به کاربرده شوند. مراحل نمونه گیری با این روش در زیر شرح داده می شود.

۶-۱-۲-۱- با استفاده از یک مته ضربه ای دوار به طور عمود بر سطح بتن یا بموازات محورهای یک نمونه مغزه برداری شده ، تا یک عمق مشخص یا عمقی که برای تهیه یک نمونه نماینده حداقل ۲۰ گرمی از مواد پودر شده کفایت کند. حفاری را ادامه دهید. برای جلوگیری از آلودگی نمونه از تماس نمونه با

نویس

حل ترین دینامیک سازه ها

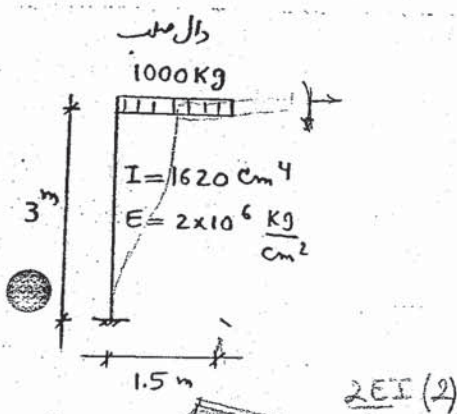
تاریخ: ۸۵، ۹، ۲۹

۸۵۱۲۴۱۲۶

سید مجاهد میرزایی

۱. سیاهان دستون نگه دارنده اکرا در تصویر مقابل در نظر بگیرید. مقدار نسبت انحراف در حرکت از

دگام (رانش) این سازه را ۵٪ فرض کنید.



الف) چنانچه این سازه تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g = A \sin 2t$

(cm/s^2) قرار گیرد، حداکثر تغییر مکانهای افقی و قائم را در انتهای آزاد

سیاهان بدست آورید.

ب) چنانچه این سازه تحت اثر دوران پایه با شتاب $\ddot{\theta}_g = B \sin 2t$ قرار گیرد، حداکثر تغییر مکانهای

افقی و قائم را در انتهای آزاد سیاهان محاسبه کنید.

ج) چنانچه این سازه تحت اثر بار افقی $f(t) = c \sin 2t$ در آزاد سیاهان قرار گیرد، حداکثر تغییر مکان

سده دستون را تعیین کنید.

F1-1

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{K} = \begin{bmatrix} 1440 & 216000 \\ 216000 & 4.32 \times 10^7 \end{bmatrix} \frac{\text{Kg}}{\text{cm}}$$

$$\tilde{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{m} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m L^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{m} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\text{Kg}) \\ (\text{Kg.cm}^2) \end{matrix}$$

سید مجاهد

$$\Rightarrow 2K^2 - K \times \frac{\mu l}{2} \omega^2 - 2K \frac{\mu l}{2} \omega^2 + \frac{\mu^2 l^2}{4} \omega^4 - K^2 = 0$$

$$\Rightarrow K^2 - 3K \frac{\mu l}{2} \omega^2 + \frac{\mu^2 l^2}{4} \omega^4 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{3K \frac{\mu l}{2} \pm \sqrt{(1.5K\mu l)^2 - 4K^2 \frac{\mu^2 l^2}{4}}}{2 \times \frac{\mu^2 l^2}{4}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1.5K\mu l \pm \sqrt{2.25K^2\mu^2 l^2 - K^2\mu^2 l^2}}{\frac{\mu^2 l^2}{2}}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{0.76 K \mu l}{\mu^2 l^2} = \frac{0.76 K}{\mu l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{72.96 \times EI}{\mu l^4} \\ \omega^2 = \frac{5.24 K \mu l}{\mu^2 l^2} = \frac{5.24 K}{\mu l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{503.04 EI}{\mu l^4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{8.54 EI}{\mu l^4}$$

$$\omega_2 = 22.43 \times \frac{EI}{\mu l^4}$$

E4-2

حمید کاظمی

$$\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}}\omega^2 = \begin{bmatrix} 1440 - 1000 \times \omega^2 & 2.16 \times 10^5 \\ 2.16 \times 10^5 & 4.32 \times 10^7 - 7.5 \times 10^6 \omega^2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}}\omega^2) = 0$$

(F1-2)

$$\Rightarrow (1440 - 1000\omega^2)(4.32 \times 10^7 - 7.5 \times 10^6 \omega^2) - 4.666 \times 10^{10} = 0 \Rightarrow$$

$$6220.8 \times 10^7 - 10800 \times 10^6 \omega^2 - 4320 \times 10^7 \omega^2 + 7500 \times 10^6 \omega^4 - 4.666 \times 10^{10} = 0$$

$$\Rightarrow 7500 \times 10^6 \omega^4 - 5400 \times 10^7 \omega^2 + 1554.8 \times 10^7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.55 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\ \omega_2 = 2.63 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{cases}$$

مورد اول: $(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}}\omega_1^2) \underline{\underline{\phi}} = \left(\begin{bmatrix} 1440 & 216000 \\ 216000 & 4.32 \times 10^7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 302.5 & 0 \\ 0 & 2.27 \times 10^6 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1137.5 & 216000 \\ 216000 & 40930000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\phi}}_{11} = 1.00 \quad \underline{\underline{\phi}}_{21} = -0.0053$$

مورد دوم: $(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}}\omega_2^2) \underline{\underline{\phi}} = \left(\begin{bmatrix} 1440 & 216000 \\ 216000 & 4.32 \times 10^7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6916.9 & 0 \\ 0 & 51.88 \times 10^6 \end{bmatrix} \right) \underline{\underline{\phi}} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -5476.9 & 216000 \\ 216000 & -4680000 \end{bmatrix} \times \underline{\underline{\phi}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\phi}}_{12} = 1 \quad \underline{\underline{\phi}}_{22} = 0.025$$

(ب)

ایستادن: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{m}} \times \underline{\underline{a}} \Rightarrow \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 A \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}$

معادله: $\underline{\underline{M}}_i \ddot{y}_i + \underline{\underline{C}}_i \dot{y}_i + \underline{\underline{K}}_i y_i = \underline{\underline{\phi}}_i^T \times \underline{\underline{F}}(t)$

$$\underline{\underline{C}}_i = 2 \zeta_i \omega_i \underline{\underline{M}}_i$$

$$\underline{\underline{K}}_i = \underline{\underline{M}}_i \omega_i^2$$

$$\underline{\underline{M}}_i = \underline{\underline{\phi}}_i^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{\phi}}_i$$

معادله: $M_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + K_1 y_1 = \phi_1^T F(t)$

$$\phi_1^T F(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.0053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 A \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix} = 1000 A \sin 2t$$

$$M_1 = \phi_1^T m \phi_1 \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.0053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -0.0053 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 = 1210.68$$

$$c_1 = 2 \xi_1 \times \omega_1 \times M_1 \Rightarrow c_1 = 2 \times \frac{5}{100} \times 0.55 \times 1210.68 \Rightarrow c_1 = 66.59$$

$$K_1 = M_1 \omega_1^2 \Rightarrow K_1 = 1210.68 \times (0.55)^2 \Rightarrow K_1 = 366.23$$

$$\rightarrow 1210.68 \ddot{y}_1 + 66.59 \dot{y}_1 + 366.23 y_1 = 1000 A \sin 2t$$

برای حل کردن معادله و یافتن جواب از اصل دوحال استفاده میکنیم

$$\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \times \omega = 0.55$$

$$\rightarrow y_1(t) = \int_0^t \frac{1}{m \omega_d} (P(\tau)) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \times \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \int_0^t \frac{1}{665.87} \times (1000 A \sin 2\tau) e^{-0.0275(t-\tau)} \times \sin(0.55(t-\tau)) d\tau$$

$$\Rightarrow y_1(t) = 1.50A \left(\frac{8000 \Delta 2t}{4411} + \frac{200e^{\frac{-11t}{400}} \cos(\frac{51t}{20})}{4411} - \frac{4000e^{\frac{-11t}{400}} \Delta \frac{51t}{20}}{4411} - \frac{200e^{\frac{-11t}{400}} \cos \frac{29t}{20}}{4411} - \frac{4000e^{\frac{-11t}{400}} \Delta \frac{29t}{20}}{4411} \right)$$

F1-3

(مهم بود)

همی عدد را برای مورد دوم اجرا میکنیم

حمید کاظمی

$$M_2 \ddot{y}_2 + C_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 = \phi_2^T F(t)$$

F1-4

$$\phi_2^T F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 A \Delta 2t \\ 0 \end{bmatrix} = 1000 A \Delta 2t$$

$$M_2 = \phi_2^T m \phi_2 \Rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.025 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0.025 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2 = 5687.5$$

$$C_2 = 2\zeta_2 \omega_2 \times M_2 \Rightarrow C_2 = 2 \times 0.05 \times 2.63 \times 5687.5 \Rightarrow C_2 = 1416.91$$

$$K_2 = M_2 \omega_2^2 \Rightarrow K_2 = 5687.5 \times 2.63^2 \Rightarrow K_2 = 39339.87$$

$$\hookrightarrow 5687.5 \ddot{y}_2 + 1416.91 \dot{y}_2 + 39339.87 y_2 = 1000 A \Delta 2t$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \omega_d = 2.63$$

استقرار در طول:

$$y_2(t) = \int_0^t \frac{1}{14958.13} \times (1000 A \Delta 2t) \times e^{-0.132(t-\tau)} \times \sin(2.63(t-\tau)) d\tau$$

$$\Rightarrow y_2(t) = 0.067 A \left(\frac{657500 \Delta(2t)}{1733581} + \frac{16500 e^{\frac{-33t}{250}} \times \cos(4.63t)}{1733581} - \frac{328750 e^{\frac{-33t}{250}} \sin(4.63t)}{1733581} \right. \\ \left. - \frac{16500 e^{\frac{-33t}{250}} \cos(0.63t)}{1733581} + \frac{328750 e^{\frac{-33t}{250}} \Delta(0.63t)}{1733581} \right)$$

حال باید بررسی کنیم آیا سیستم:

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi} \cdot \underline{y} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.0053 & 0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

این تغییر مکان واقعی در محل اتصال

میان این است که تبدیل مطلب بودن

دال سازه تغییر مکان واقعی در آنجا که آزاد

است. x_2 دوران در محل اتصال دال به ستون است.

x_1 و x_2 در رابطه با این صفحه نسبت می‌دهند. با نسبت گیری از x_1 و x_2 نسبت $\frac{x_1}{x_2}$ به دست می‌آید.

در ساری صورت‌ها دادن نسبت، ران $\max$ شدن x_1 و x_2 در هیچ ان $(x_1, x_2)_{\max}$ نسبت می‌دهند.

حد اکثر تغییر مکان تاخم ساری حد اکثر دوران (x_2) سر بر طرف دال 150 cm خواهد بود.

ب) $\vec{F} = m \times \ddot{\vec{Q}} \Rightarrow \vec{F} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B \sin 2t \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \times 10^6 B \sin 2t \end{bmatrix}$

معادله: $M_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + K_1 y_1 = \phi_1^T F(t)$

(F1-5)

$\phi_1^T \times F(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.0053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \times 10^6 B \sin 2t \end{bmatrix} = -39750 B \sin 2t$

$\Rightarrow 1210.68 \ddot{y}_1 + 66.59 \dot{y}_1 + 366.23 y_1 = -39750 B \sin 2t$

انتگرال دهان: $y_1 = \int_0^t \frac{1}{665.87} \times (-39750 B \sin 2t) e^{-0.0275(t-\tau)} \times \sin(0.55(t-\tau)) d\tau$

$\Rightarrow y_1 = -59.70 B$ (انتگرال می‌گیرد در صورت الف)

معادله: $M_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 = \phi_2^T F(t)$

$\phi_2^T \times F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \times 10^6 B \sin 2t \end{bmatrix} = 187500 B \sin 2t$

$\Rightarrow 5687.5 \ddot{y}_2 + 1416.91 \dot{y}_2 + 39339.87 y_2 = 187500 B \sin 2t$

انتگرال دهان: $y_2 = \int_0^t \frac{1}{14958.13} \times (187500 B \sin 2t) e^{-0.132(t-\tau)} \times \sin(2.63(t-\tau)) d\tau \Rightarrow$

حمید کاظمی

$\Rightarrow y_2 = 12.53 B$ (مقدار استرال می باشد در مورد دوم درجهت الف)

$\underline{x}(t) = \underline{\Phi} \cdot \underline{y}$

(F1-b)

حال ما پس x را می یابیم:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.0053 & 0.025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

همانند قسمت الف برای این x_1 و x_2 اگر کنیم، از x_1 و x_2 نسبت به t مشتق گرفته و

مادری صفر قرار می دهیم. با این وسیله t مربوط به x_1 و x_2 اگر کنیم نسبت می آید x_1 و x_2 را می بینیم

تعیین می شوند. x_1 مقدار جابجایی کرنر سیلندر است. و x_2 در آن محل اتصال به سرنگ.

برای این مقدار جابجایی را می بینیم تا $(x_2)_{max}$ را در طول سیلندر می بینیم.

ما پس می یابیم: $\underline{F} = \begin{bmatrix} C \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}$

(ج)

روش حل همانند قسمت قبل است: $M_1 \ddot{y}_1 + C_1 \dot{y}_1 + K_1 y_1 = \underline{\Phi}_1^T \underline{F}(t)$: معادله

$$\underline{\Phi}_1^T \times \underline{F}(t) = C \sin 2t \rightarrow 1210.68 \ddot{y}_1 + 66.59 \dot{y}_1 + 366.23 y_1 = C \sin 2t$$

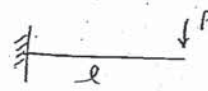
استرال دو حال: $y_1 = \int_0^t \frac{1}{665.87} \times (C \sin 2t) e^{-0.0275(t-\tau)} \times \sin(0.55(t-\tau)) d\tau \Rightarrow y_1 = \frac{C}{665.87}$ (مقدار استرال) کرد درجهت های قبل رو به سمت آید است.

معادله: $\underline{\Phi}_2^T \times \underline{F}(t) = C \sin 2t \rightarrow 5687.5 \ddot{y}_2 + 1416.91 \dot{y}_2 + 39339.87 y_2 = C \sin 2t$

استرال دو حال: $y_2 = \int_0^t \frac{1}{14958.13} (C \sin 2t) e^{-0.132(t-\tau)} \times \sin(2.63(t-\tau)) d\tau \Rightarrow y_2 = \frac{C}{14958.13}$ (مقدار استرال) کرد درجهت های قبل رو به سمت آید است.

(ادامه در صفحه بعد)

معادله x_{max} را به روش گشتی در قسمت های این وب می یابیم.

$$\frac{Pl^3}{3EI} = \text{جابجایی انتهای تیر صاف}$$


$$x_{max} = \frac{P \times l^3}{3EI} \rightarrow P = \frac{3EI x_{max}}{l^3}$$

(ارتفاع سرن)

$$M_{max} = \frac{3EI x_{max}}{l^3} \times 3 \text{ (m)}$$

نزد مرکز سرن

(F1-7)

حمید کاظمی

۱۲. خواص حرم دینتی یک ساختمان سه طبقه برنی همراه با شکل موردی ارتعاشی در فواصل خای در

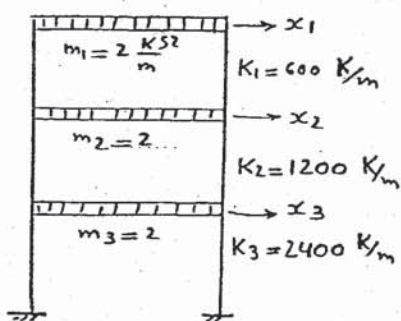
حالت بدون ارتعاش در تصویر مقابل داده شده است. سازه را با اعمال جابجایی $x_1 = 0.3 \text{ in}$ و

$x_2 = -0.8 \text{ in}$ ، $x_3 = 0.3 \text{ in}$ در سقف ها در ساختمان ناگهانی آن در زمان $t = 0$ به ارتعاش ابرار

(F2-1)

در س ایندهم شکل جابجایی را در زمان $t = \frac{2\pi}{\omega_1}$ تعیین کنید.

الف) فرض کنید ارتعاش در هر طبقه



ب) فرض کنید در هر مورد ارتعاشی 10% عمر است.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.548 & -1.522 & -6.26 \\ 0.198 & -0.872 & 12.10 \end{bmatrix}$$

$$\omega = [11.62 \quad 27.5 \quad 45.9] \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

مستویها در محل این زمین مطابق کتاب جبرای سازه

$$u(0) = \begin{Bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{u}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(الف)

$$q_n = \frac{\Phi_n^T m u}{\Phi_n^T m \Phi_n}$$

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$q_1^{(0)} = \frac{[1.0 \quad 0.548 \quad 0.198] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{Bmatrix}}{[1.0 \quad 0.548 \quad 0.198] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.548 \\ 0.198 \end{Bmatrix}}$$

$$\Rightarrow q_1^{(0)} = \frac{-0.158}{2.68} \Rightarrow q_1^{(0)} = -0.059$$

$$q_1^{(0)} = 0 \rightarrow q_1(t) = -0.059 \cos 11.62 t$$

$$q_2^{(0)} = \frac{[1 \quad -1.522 \quad -0.872] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{Bmatrix}}{[1 \quad -1.522 \quad -0.872] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.522 \\ -0.872 \end{Bmatrix}}$$

$$\Rightarrow q_2^{(0)} = \frac{2.512}{8.154} \Rightarrow q_2^{(0)} = 0.308$$

$$q_2^{(0)} = 0 \rightarrow q_2(t) = 0.308 \cos 27.5 t$$

$$\dot{q}_3(0) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -6.26 & 12.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -6.26 & 12.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6.26 \\ 12.10 \end{bmatrix}} \Rightarrow \dot{q}_3(0) = \frac{17.876}{373.20} \Rightarrow \dot{q}_3(0) = 0.048$$

$$\dot{q}_3(0) = 0 \Rightarrow \underline{q_3(t) = 0.048 \cos 45.9t}$$

$$u(t) = \sum \phi_n q_n(t)$$

$$\underline{u(t)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.548 \\ 0.198 \end{bmatrix} \times (-0.059 \cos 11.62t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1.522 \\ -0.872 \end{bmatrix} (0.308 \cos 27.5t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -6.26 \\ 12.10 \end{bmatrix} (0.048 \cos 45.9t)$$

$$\underline{u(t)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

F2-2

$$\rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow t = 0.54 \text{ sec} \rightarrow$$

$$u_1(0.54) = -0.059 - 0.201 + 0.045 = -0.215 \Rightarrow \underline{u_1 = -0.215 \text{ in}}$$

$$u_2(0.54) = -0.032 + 0.306 - 0.283 \Rightarrow \underline{u_2 = -0.009 \text{ in}}$$

$$u_3(0.54) = -0.012 + 0.176 + 0.546 \Rightarrow \underline{u_3 = 0.710 \text{ in}}$$

(-) $q_n(0)$ در جهت مثبت است.

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \Rightarrow$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nd} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nd}} \times \sin \omega_{nd} t \right]$$

I

(متر بعد)

حمید کاظمی

$$\eta = 1 : I_{\text{م}} = e^{-0.1 \times 11.62 \times 0.54} \left[(-0.059) \times \cos(11.56 \times 0.54) + \frac{0 + 0.1 \times 11.62 \times (-0.059)}{11.56} \right]$$

$$\times \sin(11.56 \times 0.54) = -0.031$$

$$\eta = 2 : I_{\text{م}} = e^{-0.1 \times 27.5 \times 0.54} \times \left[(0.308) \times \cos(27.36 \times 0.54) + \frac{0 + 0.1 \times 27.5 \times (0.308)}{27.36} \right]$$

$$\times \sin(27.36 \times 0.54) = -0.036$$

$$\eta = 3 : I_{\text{م}} = e^{-0.1 \times 45.9 \times 0.54} \left[(0.048) \times \cos(45.67 \times 0.54) + \frac{0 + 0.1 \times 45.9 \times (0.048)}{45.67} \right]$$

$$\times \sin(45.67 \times 0.54) = 0.003$$

$$\tilde{u}(t) = \phi_1 \times (-0.031) + \phi_2 \times (-0.036) + \phi_3 \times (0.003)$$

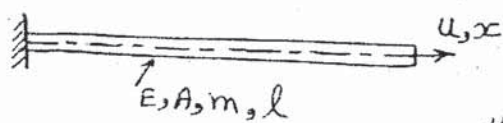
$$\rightarrow \underline{u_1 = -0.064 \text{ in}}$$

$$\underline{u_2 = 0.019 \text{ in}}$$

$$\underline{u_3 = -0.001 \text{ in}}$$

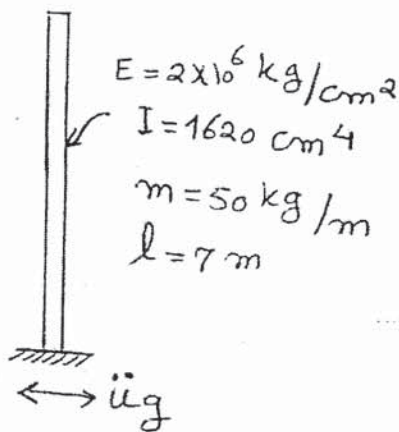
F2-3

حميد کاظمه



۱- برای ارتعاشات محوری، فرکانس‌ها چینی و شکل کاملاً
همه یک سیر دارند آن داده شده در تصویر مقابل را ببینید

۲- تیر طره‌ای نشان داده شده در تصویر مقابل تحت اثر



زلزله با طیف واکنش زلزله ال-سترو قرار گرفته است

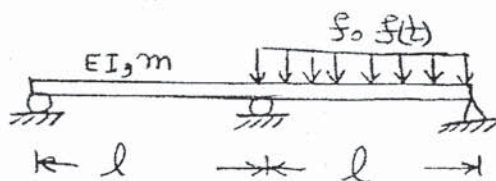
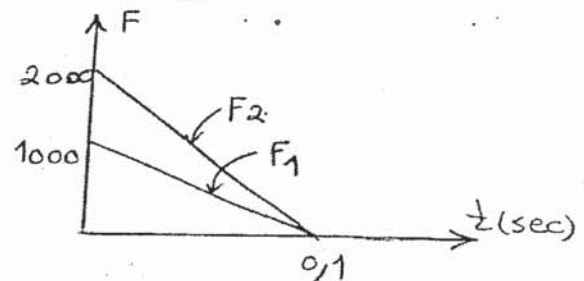
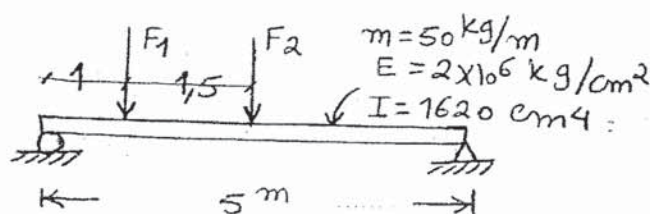
حد اکثر لنگر خمشی و نیروی برشی ایجاد شده را در محل پایه

محاسبه نماید مقدار نسبت استخلاف را در هر کام

ارتعاشی ۲٪ فرض کنید

۳- تیر نشان داده شده در تصویر مقابل تحت اثر بارهای نشان داده شده قرار دارد حد اکثر

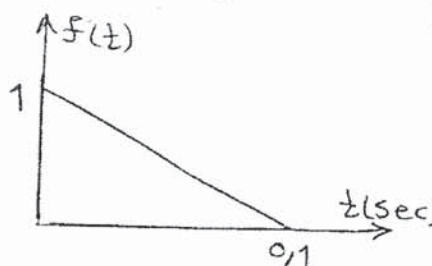
العمل تیرگاه سمت چپ را بدست آورید از وجود استخلاف منوط قرار ندهید



۴- برای تیر نشان داده شده در تصویر مقابل

حد اکثر لنگر خمشی را در تیرگاه میانی بطور تقریبی

تعیین کنید

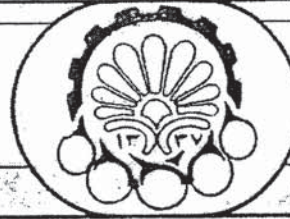


مشخصات تیر:
 $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 500 \text{ cm}^4$
 $m = 100 \text{ kg/m}$
 $l = 5 \text{ m}$

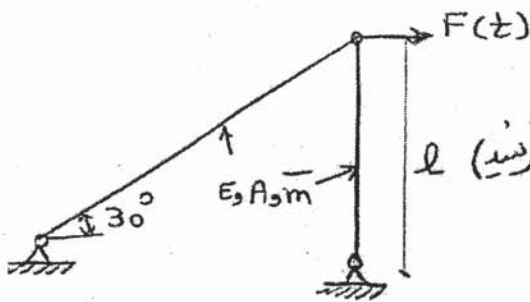
حمید کاظمی

مدرس:
فراهرز خوشنودیان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)



تمرین سازه‌های
دینامیک سازه‌ها



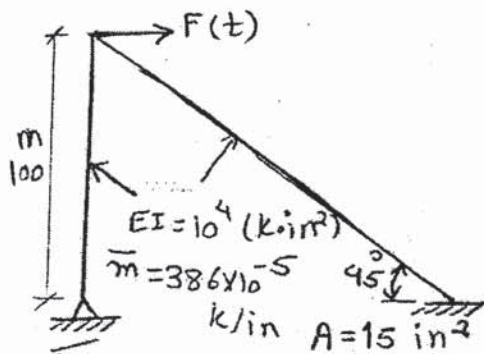
۱- برای خرابی سطح نشان داده شده مطلوب است:

(الف) فرکانسهای طبیعی و مدتها ارتعاشی خرابی

(ب) پاسخ خرابی تحت یک نیروی ۱۰ kips مطابق شکل (از میرایی صرف نظر کنید)

(ج) با فرض ۱۰٪ استهلاک نیز پاسخ خرابی را تعیین کنید

$$l = 72 \text{ in} \quad E = 30000 \text{ k/in}^2 \quad A = 10 \text{ in}^2 \quad \bar{m} = 0.1 \frac{\text{ksec}^2}{\text{in}^2}$$



۲- برای قاب دوجوهری نشان داده شده مطلوب است:

(الف) فرکانسهای طبیعی و مدتها ارتعاشی آن

(ب) پاسخ قاب تحت نیروی ناگهانی $F(t) = 10 \text{ kip}$ مطابق شکل (از استهلاک صرف نظر کنید)

(ج) پاسخ پایداری قاب را تحت تأثیر نیروی هارمونیک $F(t) = 10 \sin 30t$ بدست آورید (از استهلاک

سیستم صرف نظر کنید)

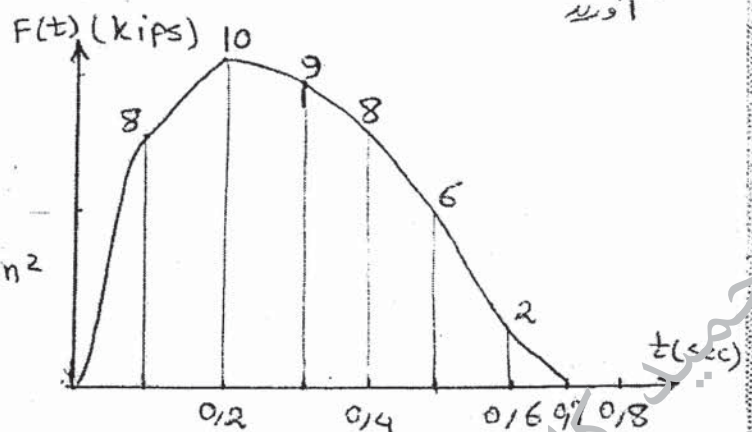
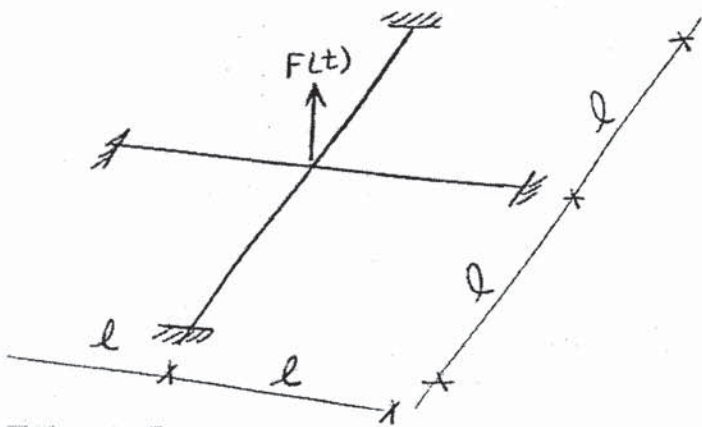
(د) پاسخ پایداری قاب را برای صحت ج با فرض مناسب بودن استهلاک با ضریب سیستم $[C] = 0.2$ بد آورید

۳- برای شبکه نشان داده شده مطلوب است:

(الف) فرکانسهای طبیعی و مدتها ارتعاشی آن

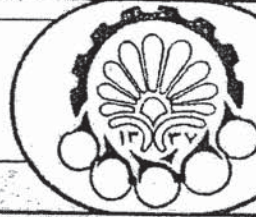
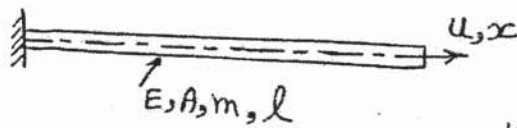
(ب) پاسخ شبکه را تحت نیروی شکل مقابل بدست

آورید

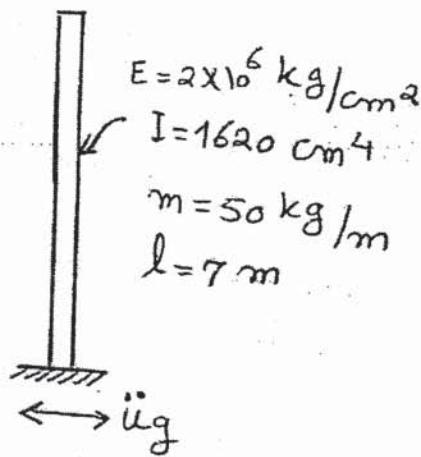


$$l = 100 \text{ in} \quad \bar{m} = 0.01 \frac{\text{ksec}^2}{\text{in}^2} \\ E = 30000 \text{ ksi} \quad J = 2000 \text{ in}^4 \\ G = 12000 \text{ ksi} \quad A = 20 \text{ in}^2 \\ I = 1000 \text{ in}^4$$

بسمه تعالی

مدرس:
فرامرز خوشنودیاندانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)تمرین سری ششم
دینامیک سازه‌ها۱- برای ارتعاشات محوری، فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های کاما
میل یک سرگیردارشان داده شده در تصویر مقابل را به دست آورید

۲- تیر طره‌ای نشان داده شده در تصویر مقابل تحت اثر

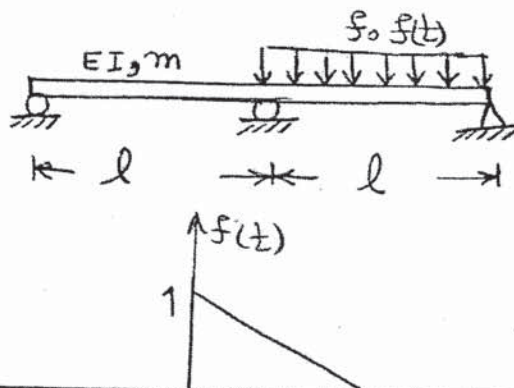
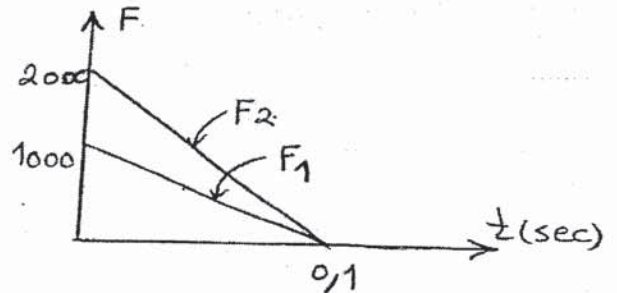
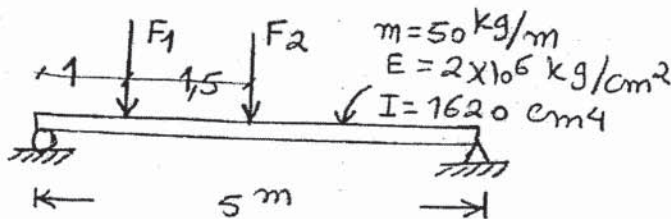


زلزله‌ای با طیف واکنش زلزله ال-سترو قرار گرفته است

عداثر لنگر خمشی و نیروی برشی ایجاد شده را در محل پایه

مماس به نمائید مقدار نسبت استخلاف را در هر کدام

ارتعاشی ۲٪ فرض کنید

۳- تیر نشان داده شده در تصویر مقابل تحت اثر بارهای نشان داده شده قرار دارد عداثر
العمل تکیه‌گاه سمت چپ را به دست آورید از وجود استخلاف منقظر کنید

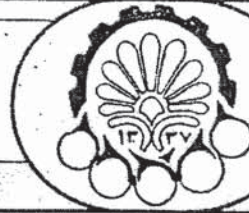
۴- برای تیر نشان داده شده در تصویر مقابل

عداثر لنگر خمشی را در تکیه‌گاه میانی به صورت تقریبی
تعیین کنیدمشخصات تیر: $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 500 \text{ cm}^4$

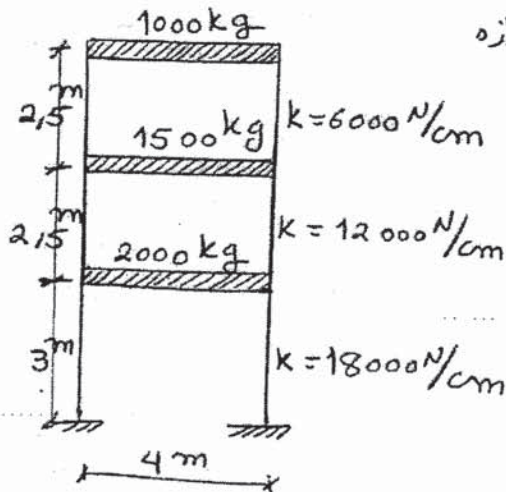
حمید کاظمی

مدرس:
فراهر خوشنودیان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)



تقریر سرگیا
دینامیک سازه‌ها



۱- سازه نشان داده شده در تصویر مقابل را در نظر بگیرید و فرض کنید سازه

بدون استعلاک است

الف- بلیک روشن است و دولا گامها ارتعاشی و فرکانس طبیعی

این گامها را بدست آورید

ب- بلیک روشن هولز نیز گامها ارتعاشی و فرکانس طبیعی این

گامها را بدست آورید

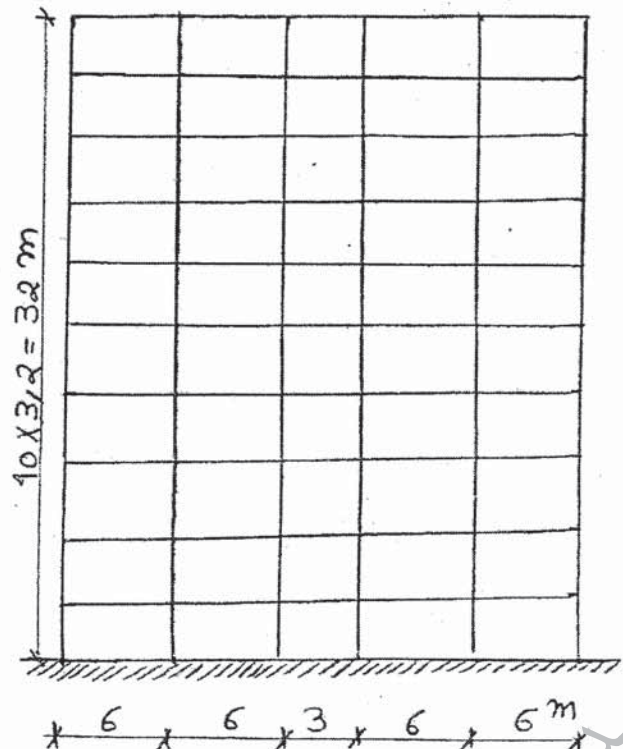
۲- قاب ۱۰ طبقه با مشخصات تغییر در ستونها و تیرها و فاصله نامساوی ستونها مطابق شکل در نظر گرفته

میسود، وزن هر طبقه برابر 850 kN و تیرها دهانه میانی (۳ متری) دارای معان اینرسی $I_g = 25843 \text{ cm}^4$

و بقیه تیرها (۶ متری) دارای معان اینرسی $I_g = 83845 \text{ cm}^4$ می باشد ($E = 200 \text{ kN/mm}^2$) مطلوبست

محاسبه زمان تناوب اصل سازه با استفاده از روش ها رایج، فرمولهای ساده شده و آیین نامه ایران.

طبقه	I_c (cm^4)	A_c (cm^2)	F_1 (kN)	δ_1 (cm)
1	62018	189,68	21	0,6
2	"	"	33	1,28
3	"	"	50	2,31
4	46201	168,7	67	3,5
5	"	"	81	4,4
6	"	"	95	5,7
7	20189	108,39	110	6,3
8	"	"	128	6,95
9	"	"	145	7,43
10	"	"	161	8,4



۴- دستگاهها و تجهیزات :

۱-۴- تجهیزات نمونه گیری :

۱-۱-۴- تجهیزات و دستگاههای لازم برای نمونه گیری از روش مغزه برداری یا اره کردن در آزمایش C 42 تشریح شده است.

۲-۱-۴- برای تهیه نمونه به روش حفاری از دستگاهها و تجهیزات زیر استفاده نمائید :

۱-۲-۱-۴- مته و مته ضربه ای دوار یا سرمته های پودر ساز.

۲-۲-۱-۴- قاشقک یا هر وسیله مناسب دیگری برای جمع آوری مواد نمونه گرد(پودر) شده بوسیله عمل حفاری ، بدون آلوده شدن آن.

۳-۲-۱-۴- ظروف نمونه (ظروف نگهداری نمونه) که قادر به نگهداری نمونه در یک شرایط غیر آلوده باشند.

۲-۴- دستگاهها و تجهیزات عمل آوری نمونه :

وسایل لازم برای عمل آوری نمونه ها بر اساس تناسب آنها با اهداف بازرسی انتخاب می شوند و در بیشترین حالات شامل یک اره بتن و یک یا چند گرد ساز(دستگاه گرد ساز) می شوند.

۱-۲-۴- نمونه های با بزرگترین بعد بیش از ۱ اینچ (۲۵ میلی متر) بایستی بوسیله یک سنگ شکن فکی کاهش اندازه داده شوند یا بوسیله چکش یا پتک به قطعات کوچکتر شکسته شوند. در این کار باید دقت مبذول شود تا ذرات ریزتر از دست نرود.

۲-۲-۴- ذرات با بزرگترین بعد کمتر از ۱ اینچ (۲۵ میلی متر) را با استفاده از یک دستگاه آسیاب دورانی یا بوسیله یک پودر ساز صفحه ای کاملاً خرد کنید.

۳-۲-۴- الک 850 میکرون (شماره ۲۰) مطابق با مشخصات E 11

۳-۴- دستگاههای لازم برای مرحله تعیین کلرید در آزمایش مرجع برای کلرید در مجموعه آزمایشهای C 114 آورده شده اند.

۴-۴- کاغذ شیشه ای (لعب شیشه ای Glazed) برای حداقل چسبندگی ذرات ریز . (برای استفاده در قسمت

۱-۷ به شیوه ای که شرح داده شده است)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

مدرس: ... تاریخ: ...
شماره: ... پروت: ...



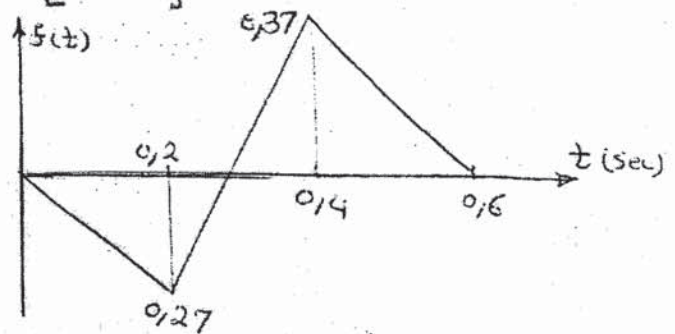
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دینامیک سازه ها

۱- ما تریس های جرم و سختی یک سازه دو درجه آزادی در زیر آمده است. مطلوب است تعیین پاسخ سازه نسبت نیروی داده شده، $f(t)$ در شکل نشان داده شده و از میرایی صرف نظر شود.

$$[K] = \begin{bmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 50 \end{bmatrix} \text{ (kip/in)}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (kip} \cdot \text{sec}^2/\text{in)}$$

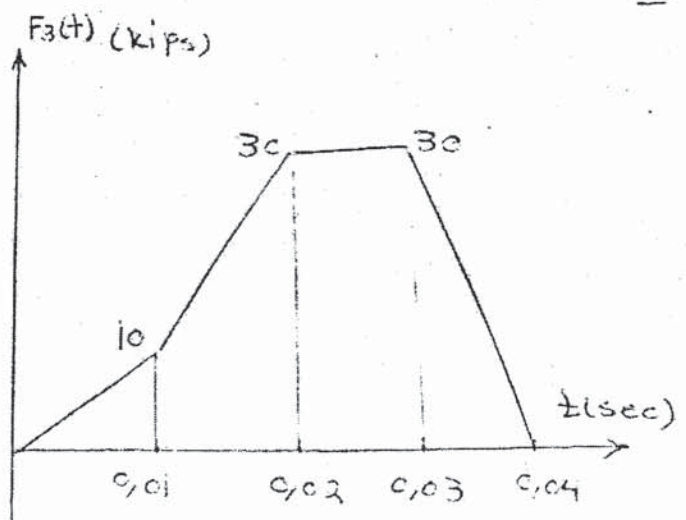
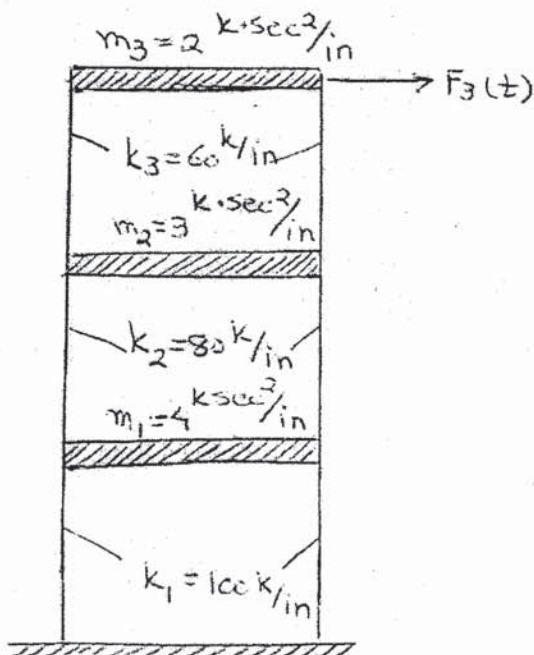
$$\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 772 \\ 386 \end{bmatrix} f(t) \text{ (kip)}$$



۲- مسئله قبل را با احتساب اندر میرایی حل کنید

$$[c] = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \text{ kip} \cdot \text{sec/in}$$

۳- مطلوب است پاسخ سازه بر روی سه طبقه نسبت به سطح آورد از میرایی صرف نظر کنید



۴- مسئله قبل را با احتساب 10% میرایی حل کنید

دست یا هر منبع تعرق دیگر اجتناب شود. تمام ابزار نمونه گیری را قبل از شروع به نمونه گیری تمیز نماید (تبصره ۳) و در خلال آزمایش از هیچ گونه روان ساز استفاده ننماید.

تبصره ۳: ابزار نمونه گیری ممکن است با یک برس، پارچه، آبکشی با اتیل الکل، آبکشی با آب، یا روشهای دیگری که نمونه را آلوده نکنند تمیز شوند.

۶-۲-۱-۲- با استفاده از قاشق یا هر وسیله مناسب دیگر نمونه پودر شده را به ظرف نمونه منتقل نمائید.

۷- آماده کردن نمونه ها:

۷-۱- نمونه را خرد کنید به طوریکه تمام مواد از الک شماره ۲۰ (۸۵۰ میکرون) عبور نمایند. مواد را به روش انتقال از یک کاغذ لعابی به کاغذ لعابی (شیشه ای) دیگر (حداقل ۱۰ مرتبه) خوب مخلوط نمائید.

۸- روش کار:

۸-۱- یک نمونه حداقل ۱۰ گرمی را انتخاب نمائید. نمونه را تا دقت ۰/۰۱ گرم توزین نموده و آن را در یک

لیوان آزمایشگاهی ۲۵۰ میلی لیتری جای دهید. 1 ± 50 میلی لیتر از آب مقطر را که دارای

مشخصات D 1193 می باشد به آن اضافه نمائید، روی لیوان را با یک شیشه ساعت

(Glass Watch) بپوشانید، محتویات لیوان را جوشانده و بگذارید ۵ دقیقه در حالت جوشیدن بماند.

بعد از جوشاندن اجازه دهید ۲۴ ساعت به حال خود باشد. از طریق جاذبه یا مکش از میان یک کاغذ

صافی کلاس G (Class G) نوع II، ریز بافت، مطابق با مشخصات E 832، عبور داده و صاف کنید. بعد

از عبور از صافی آنرا به یک لیوان (Beaker) ۲۵۰ میلی لیتری منتقل نموده، و 1 ± 3 میلی لیتر

اسید نیتریک (۱+۱) و 1 ± 3 میلی لیتر پر اکسید هیدروژن (۳۰٪ محلول) به آن اضافه نمائید. روی

لیوان را با یک شیشه شفاف معمولی بپوشانید و بگذارید ۱ تا ۲ دقیقه به همین حالت بماند، لیوان

پوشیده شده را به سرعت حرارت دهید تا به جوش آید. محلول را بیش از چند ثانیه نجوشانید. لیوان را

از روی حرارت بردارید. (تبصره ۴)

از اینجا به بعد مشابه آزمایش مرجع کلرید، از مجموعه آزمایشهای C 114 با شروع از مرحله ای که

نمونه از روی حرارت (صفحه داغ) برداشته می شود عمل نمائید.

Nonlinear Time History Analysis

محمد
۱۹۹۵

حميد کاظمه

RECOMMENDED ADDITIONAL READING

1. A. K. Chopra, *Dynamics of Structure—Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, 1995.
2. M. Paz, *Structural Dynamics—Theory and Computation* (4th edition), Chapman and Hall, 1997.

PROBLEMS

- 6.1 Repeat Example 1 in Section 6.3 but let the mass at the bottom level be reduced from $2m$ to m .
- 6.2 Repeat Example 1 in Section 6.3 but let the damping coefficient at the bottom level be reduced from $2c$ to c .
- 6.3 Repeat Example 1 in Section 6.5 but with $m_1 = 0$ and $m_2 \neq 0$. Condense the problem to have the equation of motion in terms of x_2 .
- 6.4 Repeat Example 2 in Section 6.5 but with $m_1 \neq 0$ and $m_2 = 0$. Condense the problem to have the equation of motion in terms of x_1 .
- 6.5 Repeat Example 3 in Section 6.5 but with the top mass equal to zero and the bottom mass equal to $2m$. Condense the problem to have the equation of motion in terms of x_1 .
- 6.6 Repeat Example 1 in Section 6.6 but use dynamic condensation to have the equation of motion in terms of x_2 .
- 6.7 Repeat Example 2 in Section 6.6 but use dynamic condensation to have the equation of motion in terms of x_1 .
- 6.8 Repeat Example 3 in Section 6.6 but use dynamic condensation to have the equation of motion in terms of x_1 .
- 6.9 Repeat Example 1 in Section 6.7 but with a damping ratio equal to 20%.
- 6.10 Repeat Example 1 in Section 6.7 but with a period of vibration equal to 1.0 s.
- 6.11 Repeat Example 2 in Section 6.7 but with a damping matrix equal to two times the damping matrix in the example.
- 6.12 Repeat Example 2 in Section 6.7 but with a stiffness matrix equal to one half the stiffness matrix in the example.
- 6.13 Repeat Example 1 in Section 6.8 but use $m = 2.0$.
- 6.14 Repeat Example 1 in Section 6.8 but use $k = 2 \times 315.84 = 631.68$.
- 6.15 Repeat Example 1 in Section 6.8 but with a damping matrix equal to two times the damping matrix in the example.
- 6.16 Repeat Example 2 in Section 6.8 with Rayleigh damping and a 5% damping ratio in the first two normal modes.

Chapter 7

Nonlinear Time History Analysis

7.1 OVERVIEW

The earthquake response of most buildings and civil engineering structures will induce deformations in one or more structural elements that are beyond the yield limit. Therefore, the structure will respond with a nonlinear relationship between force and deformation. The mathematical complexity of the solution increases as the response goes from the linear to the nonlinear domain. However, the computational effort is rewarded with an accurate description of response.

Consider the steel cantilever beam shown in Figure 7.1. Assume that the stress versus strain curve for the steel is as shown in Figure 7.2. As the concentrated force at the end of the beam increases in magnitude, the moment at the support of the cantilever increases in magnitude. The theory of strength of beam materials assumes that the variation of the strain on any cross-section of the beam will be zero at the neutral axis and will increase with a linear relationship with the distance from the neutral axis. This is often called "plane cross-sections remain plane." Therefore, as the force at the end of the cantilever increases, the strain in the steel at the support also increases. Because the steel stress versus strain curve is a linear function until the strain reaches its yield strain, ϵ_y , the relationship between the force and the deflection at the end of the cantilever is a linear function. Figure 7.3 shows a plot of the force versus vertical deflection at the end of the



Figure 7.1 Steel Cantilever Beam

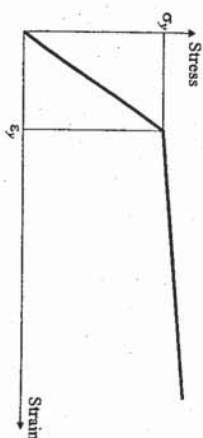


Figure 7.2 Stress versus Strain Relationship

حميد کاظمه

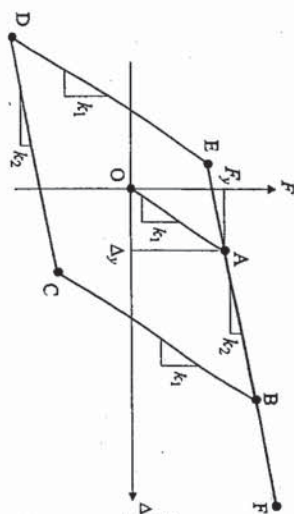


Figure 7.3 Applied Force versus Vertical Deflection

cantilever. The portion of the curve between O and A is the linear portion of the curve. If the force is less than F_y , where F_y is called the yield force, then the strain in the steel will be less than the yield strain, ϵ_y , and the moment will be less than the yield moment of the cross-section, M_y . The yield moment, M_y , is the moment that needs to be applied to the beam cross-section to produce a strain in a steel fiber farthest from the neutral axis equal to the yield strain. Therefore, if the force is less than the yield force or, alternately, the deflection of the end of the cantilever is less than the yield deflection, Δ_y , then the response of the structure is in the linear response domain.

Now consider the situation where the force exceeds F_y and therefore the strain in the steel exceeds ϵ_y . The moment that the force induces on the cross-section will increase and the deflection will increase along a path from A to B. The force versus deflection relationship will not follow the stiffness k_1 , but will now have a stiffness equal to k_2 . If the force is reduced before the steel is fractured, then the force versus deflection path will be from B to C. The stiffness can now be imagined to be equal to k_1 . The path will then proceed along the trail C to D, D to E, and E to F.

The response of this system is called nonlinear because the stiffness does not remain equal to k_1 for all amplitudes of response. There are two key elements of a nonlinear system:

1. The *envelope curve* or *backbone curve*: This is the O-A-F curve.
2. The *hysteresis relationship*: This is the law describing how the system unloads and reloads below the backbone curve. This is the B to C and D to E path.

The description of these two key elements is a function of the structural material (e.g., steel, concrete, etc.) and the nature of the redundancy of the indeterminate structure.

EXAMPLE 1 Bilinear Elastic Structure

Consider the SDOF nonlinear structural system shown in Figure 7.4. Assume that the stiffness and mass for the structure are $k_e = 631.65$ k/in. and $m = 1.0$ k-s²/in. If the structure displaces to the right 1.0 in., that is, $x(t) = 1.0$ in., it contacts a spring of stiffness k_1 . The stiffness of the spring is $k_1 = 355.31$ k/in. The natural frequency and period of vibration for displacements $x(t) \leq 1.0$ in. are

$$\omega_n = \sqrt{k_e/m} = \sqrt{631.65/1.0} = 25.13 \text{ rad/s} \quad (7.1)$$

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi/25.13 = 0.25 \text{ s.} \quad (7.2)$$

For displacements $x(t) > 1.0$ in., the natural frequency and period of vibration are

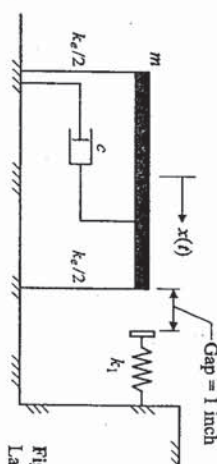


Figure 7.4 SDOF Frame with Gap to Lateral Support

$$\omega_n = \sqrt{(k_e + k_1)/m} = \sqrt{(631.65 + 355.31)/1.0} = 31.42 \text{ rad/s} \quad (7.3)$$

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi/31.42 = 0.20 \text{ s.} \quad (7.4)$$

The critical damping ratio in the system is assumed to be 5% for all response amplitudes. Then the damped natural frequency of vibration is

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \begin{cases} (25.13)\sqrt{1 - (0.05)^2} = 25.10 \text{ rad/s} & x(t) \leq 1.0 \text{ in.} \\ (31.42)\sqrt{1 - (0.05)^2} = 31.38 \text{ rad/s} & x(t) > 1.0 \text{ in.} \end{cases} \quad (7.5)$$

If the system is released from rest at a displacement of 5 in. to the left, then the initial conditions are

$$x(t=0) = -5.0 \text{ in.,} \quad \dot{x}(t=0) = 0.0 \text{ in./s.} \quad (7.6)$$

The free vibration response of an SDOF system was discussed in Section 2.2, where the equations for the displacement and velocity of the system are given in Eq. 2.21 and 2.22:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_d t} \left[x_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \sin \omega_d t \right] = e^{-1.257t} [-5.0 \cos 25.10t - 0.25 \sin 25.10t] \quad (7.7)$$

Free vibration as defined by Eqs. 7.7 and 7.8 will occur until the gap is closed. The displacement at the gap closure is $x(t) = 1.0$ in. Therefore, using Eq. 7.7, this instant in time, denoted by t_1 , is

$$e^{-1.257t_1} [-5.0 \cos 25.10t_1 - 0.25 \sin 25.10t_1] = 1.0 \text{ in.} \quad (7.9)$$

Solving for t_1 in Eq. 7.9 gives

$$t_1 = 0.07337 \text{ s.} \quad (7.10)$$

The velocity of the system at this time is

$$\dot{x}(t=t_1) = 125.8e^{-1.257(0.07337)} \sin 25.10(0.07337) = 110.5 \text{ in./s.} \quad (7.11)$$

The response of the system for time $t > t_1$ will be governed by a free vibration equation, and the SDOF system will now have a stiffness equal to $k_e + k_1$. The initial conditions that produce the response from $t = t_1$ until the system responds at displacements greater than $x(t) = 1.0$ in., comes to a stop, and then returns to $x(t) = 1.0$ in. are

$$x(t=t_1) = 0.07337 = 1.0 \text{ in.,} \quad \dot{x}(t=t_1) = 0.07337 = 110.5 \text{ in./s.} \quad (7.12)$$

The free vibration equations for the displacement and velocity of the SDOF system in this time domain are

حمید کاظمی

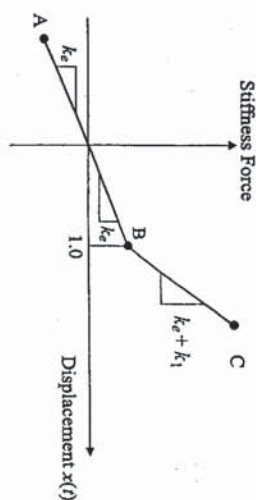


Figure 7.5 Bilinear Stiffness

$$x(t) = e^{-1.571(t-0.07337)} [\cos 31.38(t - 0.07337) + 3.571 \sin 31.38(t - 0.07337)] \quad (7.13)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-1.571(t-0.07337)} [110.5 \cos 31.38(t - 0.07337) - 36.99 \sin 31.38(t - 0.07337)] \quad (7.14)$$

The SDOF system will go out of contact with the spring k_1 when $x(t)$ returns to and becomes less than $x(t) = 1.0$ in. This time, denoted by t_2 , is obtained using Eq. 7.13, that is,

$$e^{-1.571(t_2-0.07337)} [\cos 31.38(t_2 - 0.07337) + 3.571 \sin 31.38(t_2 - 0.07337)] = 1.0. \quad (7.15)$$

Solving Eq. 7.15 gives

$$t_2 = 0.15487 \text{ s.} \quad (7.16)$$

The velocity of the system at this time is computed using Eq. 7.14, and it is

$$\dot{x}(t_2) = -101.8 \text{ in./s.} \quad (7.17)$$

The SDOF system response after $t = t_2$ returns to a system with a stiffness equal to k_e . Again, the SDOF free vibration equations given in Eqs. 7.7 and 7.8 are used to calculate the response with a time lag t_2 like the time lag t_1 in Eqs. 7.13 and 7.14. The initial conditions for this phase of the response, which starts at $t = t_2$, are

$$x(t = t_2 = 0.15487) = 1.0 \text{ in.,} \quad \dot{x}(t = t_2 = 0.15487) = -101.8 \text{ in./s.} \quad (7.18)$$

Figure 7.5 shows the stiffness force versus displacement relationship for this nonlinear SDOF system.

7.2 SINGLE DEGREE OF FREEDOM RESPONSE WITH NONLINEAR STIFFNESS

Consider the equation of motion for a linear SDOF system, which is

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_e x(t) = F_e(t) \quad (7.19)$$

where k_e denotes the elastic stiffness for a linear system. At time $t = t_n$, Eq. 7.19 can be written as

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + k_e x_n = F_e \quad (7.20)$$

where, for simplicity, $F_e = F_e(t = t_n)$. At time $t = t_{n+1}$, it similarly follows that

$$m\ddot{x}_{n+1} + c\dot{x}_{n+1} + k_e x_{n+1} = F_{e,n+1} \quad (7.21)$$

When discretization methods of analysis are used (e.g., constant acceleration method, Newmark β -method, etc.), the time variation in the acceleration between time t_n and time t_{n+1} is assumed to be of a specific form, and then the variations of the velocity and displacement between t_n and t_{n+1} follow directly from integration. For example, when constant acceleration is assumed, the acceleration is assumed to be

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t_n) = \ddot{x}_n, \quad t_n \leq t < t_{n+1} \quad (7.22)$$

and it follows from integration that

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \Delta t \quad (7.23a)$$

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_n (\Delta t)^2. \quad (7.23b)$$

In the Newmark β -method, the corresponding equations for $\dot{x}_{n+1}$ and x_{n+1} are

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + (1 - \delta) \ddot{x}_n \Delta t + \delta \ddot{x}_{n+1} \Delta t \quad (7.24a)$$

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ddot{x}_n (\Delta t)^2 + \alpha \ddot{x}_{n+1} (\Delta t)^2. \quad (7.24b)$$

Equation 7.19 represents the force equilibrium for the system, and it can be alternately expressed as

$$F_i(t) + F_d(t) + F_s(t) = F_e(t) \quad (7.25)$$

where F_i , F_d , and F_s are the forces associated with the inertia, damping, and stiffness-related deformations of the system. It is clear that

$$F_i(t) = m\ddot{x}(t) \quad (7.26)$$

and therefore the inertia force is a linear function of the acceleration because the mass, m , does not vary with time. Similarly, the viscous damping force is a linear function of the velocity, that is, $F_d(t) = c\dot{x}(t)$. Now consider the force related to the system stiffness. If the system is a linear system, then

$$F_s(t) = k_e x(t) \quad (7.27)$$

and k_e is not a function of $x(t)$. Figure 7.6 shows a linear system with a straight line in the force versus displacement plot. The value of the stiffness for a linear system is

$$k_e = \left[\frac{F_s(t_{n+1}) - F_s(t_n)}{x_{n+1} - x_n} \right] \quad (7.28)$$

Now imagine that when Eq. 7.28 is solved, k_e is not a constant because the force from the system stiffness is not a linear function of the displacement. A special solution procedure is required to solve this nonlinear stiffness problem.

Consider Eq. 7.20 but now for a system with nonlinear stiffness. Equation 7.20 can be written as

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + F_s(x_n) = F_e \quad (7.29)$$

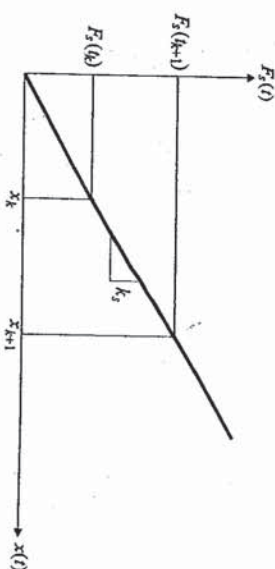


Figure 7.6 Force-Displacement Plot with Secant Stiffness

حمید کاظمی

Similarly, Eq. 7.21 can be written as

$$m\ddot{x}_{k+1} + c\dot{x}_{k+1} + F_s(x_{k+1}) = F_s(x_k) \quad (7.30)$$

Subtracting Eq. 7.29 from Eq. 7.30, it follows that

$$m[\ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k] + c[\dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k] + [F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k)] = [F_{k+1} - F_k] \quad (7.31)$$

Define the following terms:

$$\Delta\ddot{x} = \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k \quad (7.32a)$$

$$\Delta\dot{x} = \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k \quad (7.32b)$$

$$\Delta F = F_{k+1} - F_k \quad (7.32c)$$

$$\Delta F_s = F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k) \quad (7.32d)$$

where $\Delta(\cdot)$ is the change in the quantity in parenthesis between time t_k and time t_{k+1} . It then follows that

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta\dot{x} + \Delta F_s = \Delta F \quad (7.33)$$

If the variation in the stiffness-related force between x_k and x_{k+1} is assumed to be a linear function, then

$$F_s(x_{k+1}) = F_s(x_k) + \left[\frac{F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \right] (x_{k+1} - x_k) \quad (7.34)$$

The secant stiffness is defined to be

$$k_s = \left[\frac{F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \right] = \frac{\Delta F_s}{\Delta x} \quad (7.35)$$

Therefore, substituting Eq. 7.35 into Eq. 7.33, it follows that

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta\dot{x} + k_s\Delta x = \Delta F \quad (7.36)$$

Equation 7.36 can be solved exactly if the secant stiffness is known. Unfortunately, this is not the case because the displacement at time $t = t_{k+1}$ is not known.

The response solution procedure must make an assumption for k_s , and one possibility is that the secant stiffness is equal to the secant stiffness used in the previous time step, denoted k_p . Figure 7.7 shows these two stiffness terms. Therefore,

$$k_s = k_p = \left[\frac{F_s(x_k) - F_s(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right] \quad (7.37)$$

Because the secant stiffness between x_{k-1} and x_k is in general not equal to the secant stiffness between x_k and x_{k+1} , there is a force imbalance, or error, as shown in Figure 7.7. Note

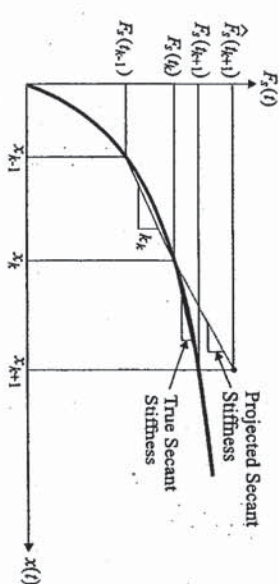


Figure 7.7 Force-Displacement Plot with Secant Stiffness

that $F_s(t_{k+1})$ is the correct force and the estimated force is $\hat{F}_s(t_{k+1})$. Substituting Eq. 7.37 into Eq. 7.36, it follows that

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta\dot{x} + k_p\Delta x = \Delta F \quad (7.38)$$

The constant acceleration method, Newmark β -method, or other numerical solution methods can be used to solve Eq. 7.36 or 7.38. Consider, for example, the constant acceleration method. Recall from Eq. 7.23 that

$$\Delta\ddot{x} = \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k = \ddot{x}_k \Delta t \quad (7.39a)$$

$$\Delta\dot{x} = \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k = \dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_k (\Delta t)^2 \quad (7.39b)$$

Substituting Eq. 7.39 into Eq. 7.36 gives

$$m\Delta\ddot{x} + c[\dot{x}_k \Delta t] + k_p[\dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_k (\Delta t)^2] = \Delta F \quad (7.40)$$

and, finally,

$$\Delta\ddot{x} = \left(\frac{\Delta F}{m} \right) - \left(\frac{c}{m} \right) [\dot{x}_k \Delta t] - \left(\frac{k_p}{m} \right) [\dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_k (\Delta t)^2] \quad (7.41)$$

Using Eqs. 7.39a, 7.39b, and 7.41, it then follows that

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x, \quad \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \Delta\dot{x}, \quad \ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \Delta\ddot{x} \quad (7.42)$$

As the time increment Δt decreases, the variation in the displacement decreases and the difference between the true stiffness and the projected stiffness decreases.

Consider now the case where the solution for the response is obtained using the Newmark β -method. Recall from Eq. 7.24 that

$$\Delta\ddot{x} = \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_k = (1 - \delta)\ddot{x}_k \Delta t + \delta\ddot{x}_{k+1} \Delta t \quad (7.43a)$$

$$\Delta\dot{x} = \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k = \dot{x}_k \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2 \quad (7.43b)$$

Substituting Eq. 7.43 into Eq. 7.36, it follows that

$$m\Delta\ddot{x} + c \left[(1 - \delta)\ddot{x}_k \Delta t + \delta\ddot{x}_{k+1} \Delta t \right] + k_p \left[\dot{x}_k \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2 \right] = \Delta F \quad (7.44)$$

A comparison of Eq. 7.40 and Eq. 7.44 shows the very significant difference that Eq. 7.40 only contains the mass term with an unknown (i.e., $\Delta\ddot{x}$). Therefore, Eq. 7.44 must be developed further before a solution can be obtained. Recall from Eq. 7.32 that

$$\ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \Delta\ddot{x} \quad (7.45)$$

Substituting Eq. 7.45 into Eq. 7.44 gives

$$m\Delta\ddot{x} + c(1 - \delta)\ddot{x}_k \Delta t + c\delta\ddot{x}_{k+1} \Delta t + c\delta\ddot{x}_k \Delta t + k_p \dot{x}_k \Delta t \quad (7.46)$$

$$+ k_p \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + k_p \alpha \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + k_p \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2 = \Delta F$$

Collecting similar terms, it follows that

$$[m + c\delta\Delta t + k_p\alpha(\Delta t)^2] \Delta\ddot{x} + c[(1 - \delta)\ddot{x}_k \Delta t + \delta\ddot{x}_k \Delta t] \quad (7.47)$$

$$+ k_p [\dot{x}_k \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_k (\Delta t)^2 + \alpha \ddot{x}_{k+1} (\Delta t)^2] = \Delta F$$

Simplifying Eq. 7.47 gives

$$[m + c\delta\Delta t + k_p\alpha(\Delta t)^2] \Delta\ddot{x} + c\ddot{x}_k \Delta t + k_p [\dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_k (\Delta t)^2] = \Delta F \quad (7.48)$$

Solving for $\Delta\ddot{x}$ gives

$$\Delta\ddot{x} = \frac{\Delta F - c\ddot{x}_k \Delta t - k_p [\dot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_k (\Delta t)^2]}{m + c\delta\Delta t + k_p\alpha(\Delta t)^2} \quad (7.49)$$

حميد
کاظمه

Equation 7.49 provides the solution for $\Delta \ddot{x}_k$ and using Eq. 7.43 it is possible to calculate Δx and $\Delta \dot{x}$. Then using Eq. 7.42, the values for x_{k+1} and $\dot{x}_{k+1}$ can be determined.

Because the value of x_{k+1} has been calculated, it is possible to calculate an improved estimate of the true secant stiffness. Denote this calculated value of x_{k+1} from the initial solution as $x_{k+1}^{(1)}$. It then follows that the secant stiffness obtained using $x_{k+1}^{(1)}$, denoted $k_2^{(1)}$, is

$$k_2^{(1)} = \left[\frac{F_s(x_{k+1}^{(1)}) - F_s(x_k)}{x_{k+1}^{(1)} - x_k} \right] \quad (7.50)$$

The initial solution for x_{k+1} (i.e., $x_{k+1}^{(1)}$) was obtained using for the estimate of the secant stiffness the value of the secant stiffness from the previous time step (see Eq. 7.37). Therefore, $x_{k+1}^{(1)}$ is not exact. If Eq. 7.50 is used in Eqs. 7.44 through 7.49, an improved estimate will be obtained for x_{k+1} . This represents one iteration of the initial solution. If the values for x_{k+1} , $\dot{x}_{k+1}$, and $\ddot{x}_{k+1}$ obtained from this iteration solution are sufficiently close to the values obtained in the initial solution, then it is appropriate to move on and calculate the response at time-step t_{k+2} given the calculated response at time t_{k+1} . However, if the response from the iteration significantly changes x_{k+1} , $\dot{x}_{k+1}$, or $\ddot{x}_{k+1}$, then either a smaller time increment should be used or a second iteration should be performed using $x_{k+1}^{(2)}$ and

$$k_2^{(2)} = \left[\frac{F_s(x_{k+1}^{(2)}) - F_s(x_k)}{x_{k+1}^{(2)} - x_k} \right] \quad (7.51)$$

Note that any error in the calculated values of x_{k+1} , $\dot{x}_{k+1}$, and $\ddot{x}_{k+1}$ will carry forward to the next time step.

Recall from Section 2.6 that the Newmark β -method solution can be represented in a matrix form (see Eqs. 2.224 through 2.232). A comparison of Eq. 7.49 and Eq. 2.227 shows that the latter is expressed in terms of the SDOF system natural frequency of vibration ω_n and critical damping ratio ζ . In a nonlinear system, k is not constant and therefore $\omega_n = \sqrt{k/m}$ is not a constant. However, if k_s and c are used instead of ω_n and ζ , then the solution can again be represented in a matrix form. First, let

$$\beta = m + c\delta\Delta t + k_s\alpha(\Delta t)^2. \quad (7.52)$$

Then Eq. 7.49 becomes

$$\Delta \ddot{x} = \left(\frac{1}{\beta} \right) \Delta F - \left(\frac{k_s \Delta t}{\beta} \right) \dot{x}_k - \left(\frac{c\Delta t + \frac{1}{2}k_s(\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k. \quad (7.53)$$

Note that Eq. 7.53 is the same as Eq. 7.41 when $\delta = 0$ and $\alpha = 0$. The acceleration at time step $k+1$ is

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{k+1} &= \ddot{x}_k + \Delta \ddot{x} = \ddot{x}_k + \left(\frac{1}{\beta} \right) \Delta F - \left(\frac{k_s \Delta t}{\beta} \right) \dot{x}_k - \left(\frac{c\Delta t + \frac{1}{2}k_s(\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k \\ &= \left(\frac{1}{\beta} \right) \Delta F - \left(\frac{k_s \Delta t}{\beta} \right) \dot{x}_k + \left(\frac{\beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_s(\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Substituting Eq. 7.54 into Eq. 7.24 gives

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k + (1-\delta)\ddot{x}_k\Delta t + \delta\Delta t \left[\left(\frac{1}{\beta} \right) \Delta F - \left(\frac{k_s \Delta t}{\beta} \right) \dot{x}_k + \left(\frac{\beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_s(\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k \right] \\ &= \left(\frac{\delta\Delta t}{\beta} \right) \Delta F + \left(\frac{\beta - \delta k_s(\Delta t)^2}{\beta} \right) \dot{x}_k + \left(\frac{\beta\Delta t - c\delta(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}\delta k_s(\Delta t)^3}{\beta} \right) \ddot{x}_k \end{aligned} \quad (7.55a)$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \dot{x}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_k(\Delta t)^2 + \alpha(\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{\beta} \right) \Delta F - \left(\frac{k_s \Delta t}{\beta} \right) \dot{x}_k + \left(\frac{\beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_s(\Delta t)^2}{\beta} \right) \ddot{x}_k \right] \\ &= \left(\frac{\alpha(\Delta t)^2}{\beta} \right) \Delta F + x_k + \left(\frac{\beta\Delta t - k_s\alpha(\Delta t)^3}{\beta} \right) \dot{x}_k + \left(\frac{\frac{1}{2}\beta(\Delta t)^2 - c\alpha(\Delta t)^3 - \frac{1}{2}k_s\alpha(\Delta t)^4}{\beta} \right) \ddot{x}_k. \end{aligned} \quad (7.55b)$$

Therefore, representing Eqs. 7.54 and 7.55 in matrix form, it follows that

$$\begin{Bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_N^{(n)} \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_N^{(n)} \Delta F \quad (7.56)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_N^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \beta & \beta\Delta t - k_s\alpha(\Delta t)^3 & \frac{1}{2}\beta(\Delta t)^2 - c\alpha(\Delta t)^3 - \frac{1}{2}k_s\alpha(\Delta t)^4 \\ 0 & \beta - \delta k_s(\Delta t)^2 & \beta\Delta t - c\delta(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}\delta k_s(\Delta t)^3 \\ 0 & -k_s\Delta t & \beta - c\Delta t - \frac{1}{2}k_s(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_N^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \begin{Bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 \\ \delta\Delta t \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.57)$$

and the superscript (n) denotes nonlinear time history analysis. Let

$$\mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix}$$

Then Eq. 7.56 becomes

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F}_N^{(n)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(n)} \Delta F = \mathbf{F}_N^{(n)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(n)} F_{k+1} - \mathbf{H}_N^{(n)} F_k. \quad (7.58)$$

Example 3 in Section 2.6 showed that if the SDOF was excited by an earthquake ground motion, then Eq. 7.58 was still valid with the $\mathbf{H}_N^{(n)}$ matrix and ΔF changed to $\mathbf{H}_N^{(nEO)}$ and Δa_k , where

$$\mathbf{H}_N^{(nEO)} = - \begin{Bmatrix} m \\ \beta \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 \\ \delta\Delta t \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (7.59)$$

Thus Eq. 7.58 becomes

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F}_N^{(n)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(nEO)} a_{k+1} - \mathbf{H}_N^{(nEO)} a_k. \quad (7.60)$$

One important note to Eqs. 7.58 and 7.60 is that the forcing function at time step k (i.e., F_k or a_k) appears in the equation, which is different from Eq. 2.232. This is because the dynamic equilibrium equation of motion was used in Section 2.6 at time step k to replace this forcing function by the displacement, velocity, and acceleration at time step k (i.e., x_k , $\dot{x}_k$, and $\ddot{x}_k$). Therefore, the effect of F_k or a_k in the response is embedded in the $\mathbf{F}_N^{(n)}$ matrix in Section 2.6. In this section, the dynamic equilibrium equation of motion cannot be used because k_s represents the incremental stiffness, which is not the stiffness that goes through x_k from the origin. The result is that the $\mathbf{F}_N^{(n)}$ matrix changes in Eqs. 7.58 and 7.60 and that F_k or a_k appears in the equations.

Equation 7.49 can have a denominator that becomes very small or even zero because k_s can be negative. The denominator will be zero when

$$m + c\delta\Delta t + k_s\alpha(\Delta t)^2 = 0 \quad (7.61)$$

حمید کاظمی

or dividing Eq. 7.61 by m , it follows that

$$1 + \left(\frac{c}{m}\right) \delta \Delta t + \left(\frac{k_2}{m}\right) \alpha (\Delta t)^2 = 0. \quad (7.62)$$

Solving for k_2/m in Eq. 7.62 gives

$$\left(\frac{k_2}{m}\right) = -\left(\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}\right) - \left(\frac{c}{m}\right) \frac{\delta}{\alpha \Delta t}. \quad (7.63)$$

As in Chapter 2 for an SDOF system, define $(c/m) = 2\zeta_c \omega_{nc}$ where $\omega_{nc} = \sqrt{k_2/m}$ and k_2 is the pre-yield elastic stiffness; then

$$\left(\frac{k_2}{m}\right) = -\left(\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}\right) - (2\zeta_c \omega_{nc}) \frac{\delta}{\alpha \Delta t}. \quad (7.64)$$

As Δt becomes smaller, it takes a much larger negative k_2 to produce a denominator that is zero. If the damping term is assumed to be zero, then a zero denominator exists when

$$\left(\frac{k_2}{m}\right) = -\left(\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}\right). \quad (7.65)$$

EXAMPLE 1 Free Vibration of an SDOF System with a Stiffening Bilinear Stiffness

Example 1 in Section 7.1 presented the exact solution for the free vibration of an SDOF system with a bilinear stiffness-related force versus deflection relationship as shown in Figure 7.5. This type of relationship is called a nonlinear stiffness force versus deflection relationship because the path on the force versus deflection curve that is followed is "up and down" the same path. For example, for all deflections less than 1.0 in., that is, $x(t) \leq 1.0$ in., the path is along line AB. For all deflections greater than 1.0 in., that is, $x(t) > 1.0$ in., the path is along line BC.

A Newmark β -method solution for this problem requires that the stiffness and associated natural frequency of vibration be calculated for each time and then either Eq. 7.49 or Eq. 7.58 be used to solve for the response. This example considers a solution using Eq. 7.58.

The constant average acceleration approach to the Newmark β -method is used with $\delta = \frac{1}{2}$ and $\alpha = \frac{1}{4}$. The initial displacement and velocity are $x(0) = -5.0$ in. and $\dot{x}(0) = 0.0$ in/s. The mass and critical damping ratio are assumed to be 1.0 k-s²/in. and 5%, respectively. The initial stiffness is 631.65 k/in., and therefore

$$\omega_n = \sqrt{k_1/m} = \sqrt{631.65/1.0} = 25.13 \text{ rad/s} \quad (7.66)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{25.13} = 0.25 \text{ s} \quad (7.67)$$

$$c = 2\zeta_c \omega_n m = 2(0.05)(25.13)(1.0) = 2.513 \text{ k-s/in.} \quad (7.68)$$

To aid in the selection of Δt , recall from Section 2.6 that $\Delta t \leq T_n/10 = 0.025$ s, and therefore $\Delta t = 0.02$ s can be used. However, a smaller time step size of $\Delta t = 0.005$ s is used in this example because error may be introduced when the response is in the nonlinear domain and, as in this case, there is an abrupt change in stiffness. It follows from the derivation of the Newmark β -method and Eq. 7.52 that

$$\beta = 1 + (2.513)(\frac{1}{4})(0.005) + (631.65)(\frac{1}{4})(0.005)^2 = 1.01023. \quad (7.69)$$

It then directly follows from Eq. 7.57 that

$$\mathbf{F}_n^{(n)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0.0 & -3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

At time $t = 0$, the acceleration response is

$$\ddot{x}(0) = -\left(\frac{c}{m}\right) \dot{x}(0) - \left(\frac{k_2}{m}\right) x(0) = -\left(\frac{2.513}{1.0}\right)(0) - \left(\frac{631.65}{1.0}\right)(-5.0) = 3158.273 \text{ in./s}^2. \quad (7.71)$$

At $t = \Delta t = 0.005$ s, it follows from Eq. 7.58 that

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0.0 & -3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.0 \\ 0 \\ 3.158.273 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.96092 \\ 15.63144 \\ 3.094.303 \end{Bmatrix} \quad (7.72)$$

At $t = 2\Delta t = 0.010$ s, it follows from Eq. 7.58 that

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0.0 & -3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.96092 \\ 15.63144 \\ 3.094.303 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8.84478 \\ 30.82410 \\ 2.982.760 \end{Bmatrix} \quad (7.73)$$

Calculation continues for several time steps until the displacement response reaches $x(t) = 1.0$ in. This happens at time step $t = 15\Delta t = 0.075$ s, where

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{15} \\ \mathbf{x}_{15} \\ \mathbf{x}_{15} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.996092 & 0.004965 & 0.000006 \\ -1.56314 & 0.985965 & 0.002475 \\ -625.258 & -5.61411 & -0.01013 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.61268 \\ 113.320 \\ -671.81 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.16875 \\ 109.109 \\ -1.012.47 \end{Bmatrix} \quad (7.74)$$

When $x(t) = 1.0$ in., the exact time t is 0.073 s (see Eq. 7.10). A more appropriate method of handling the change in stiffness within a time step is to calculate the response from 0.070 s to 0.073 s using the initial stiffness k_1 (see Figure 7.5) and then the response from 0.073 s to 0.075 s using the stiffness $k_2 + k_1$, where $k_1 = 355.31$ k/in. Although this is the case, approximation using the initial stiffness k_1 through this time step is taken for simplicity and for illustration purposes. However, this approximation violates the dynamic equilibrium equation of motion because the stiffness force is not properly adjusted for the change in stiffness. One way to overcome this problem is to impose the condition of satisfying the dynamic equilibrium equation by updating the acceleration response, that is,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{15} &= -\left(\frac{c}{m}\right) \dot{x}_{15} - \left[\frac{F_1(x_{15})}{m}\right] \\ &= -\left(\frac{2.513}{1.0}\right)(109.109) - \left[\frac{631.65}{1.0}(1.0) + \left(\frac{631.65 + 355.31}{1.0}\right)(1.6875 - 1.0)\right] \\ &= -1,140.98. \end{aligned} \quad (7.75)$$

This new value of $\ddot{x}_{15} = -1,140.98$ in./s² is different from what was originally calculated, which was -1,012.47 in./s².

The calculation continues, and at time step $t = 15\Delta t = 0.075$ s, the natural frequency of vibration and damping becomes

$$\omega_n = \sqrt{(631.65 + 355.31)/1.0} = 31.42 \text{ rad/s} \quad (7.76)$$

$$c = 2(0.05)(31.42)(1.0) = 3.142 \text{ k-s/in.} \quad (7.77)$$

حميد کاظمه

Note that in this example, the damping ratio is assumed to be 5%. Therefore, the damping value c must be adjusted when the value of the natural frequency of vibration changes. It follows from the derivation of the Newmark β -method and Eq. 7.52 that

$$\beta = 1 + (3.142)(\frac{1}{2})(0.005) + (631.65 + 355.31)(\frac{1}{2})(0.005)^2 = 1.01402. \quad (7.78)$$

It then directly follows from Eq. 7.57 that

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004970 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.987834 & 0.004931 \\ 0.0 & -4.86656 & 0.972343 \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

At time step $t = 16\Delta t = 0.080$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{16} \\ \dot{\mathbf{x}}_{16} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{16} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004970 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.987834 & 0.004931 \\ 0.0 & -4.86656 & 0.972343 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.16875 \\ 109.109 \\ -1140.98 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.69692 \\ 102.156 \\ -1640.41 \end{Bmatrix} \quad (7.80)$$

This calculation process continues, and the displacement and velocity response are shown in Figures 7.8 and 7.9, respectively.

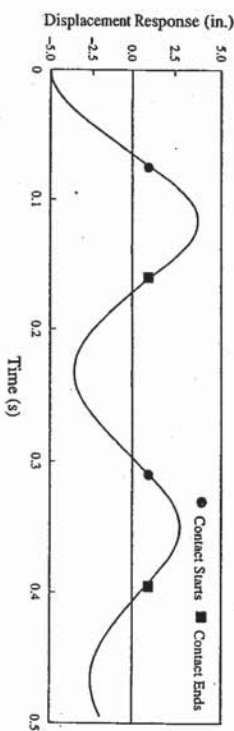


Figure 7.8 Displacement Response

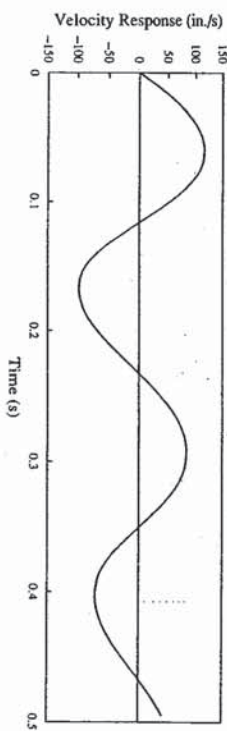


Figure 7.9 Velocity Response

EXAMPLE 2 Free Vibration of an SDOF System with Bilinear Stiffness

Assume that the SDOF system has following mass and damping properties:

$$m = 1.0 \text{ k-s}^2/\text{in.}, \quad \zeta = 5\%.$$

Also assume that when the absolute value of the response is less than 1.0 in., then the stiffness is 631.65 k/in. When the absolute value of the response exceeds 1.0 in., the stiffness

of the system decreases to 20% of the initial stiffness. This type of nonlinear relationship is like the cantilever beam discussed in Section 7.1 and shown in Figures 7.1 to 7.3. Let this reduced stiffness be denoted as k_2 . Therefore,

$$k_1 = 631.65 \text{ k/in.}, \quad k_2 = 0.2k_1 = 126.33 \text{ k/in.}, \quad x_y = 1.0 \text{ in.}$$

and

$$\omega_n = \begin{cases} \sqrt{k_1/m} & |x_k| \leq 1.0 \\ \sqrt{k_2/m} & |x_k| > 1.0 \end{cases} = \begin{cases} 25.13 \text{ rad/s} & |x_k| \leq 1.0 \\ 11.24 \text{ rad/s} & |x_k| > 1.0 \end{cases} \quad (7.81)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \begin{cases} 0.25 \text{ s} & |x_k| \leq 1.0 \\ 0.56 \text{ s} & |x_k| > 1.0 \end{cases} \quad (7.82)$$

$$c_1 = 2(0.05)(25.13)(1.0) = 2.513 \text{ k-s/in.} \quad (7.83)$$

$$c_2 = 2(0.05)(11.24)(1.0) = 1.124 \text{ k-s/in.} \quad (7.84)$$

Figure 7.10 shows the force versus displacement curve. An example of a structure with stiffness force versus displacement characteristics shown in this figure is the base isolated system, which is discussed in Chapter 8.

The time step size should be less than $(T_n/10)$, and for this case it follows that $\Delta t \leq (T_n/10) = 0.025$ s. In this example, a time step of 0.005 s is selected for the Newmark β -method of analysis.

Consider the case where the system is initially at an undeformed position (i.e., $x_0 = 0.0$) but with an initial velocity of $\dot{x}_0 = 40.0$ in./s. Therefore, the initial acceleration is given by the dynamic equilibrium equation, where

$$\ddot{x}_0 = -\left(\frac{c}{m}\right)\dot{x}_0 - \left(\frac{k_1}{m}\right)x_0 = -\left(\frac{2.513}{1.0}\right)(40) - \left(\frac{631.65}{1.0}\right)(0) = -100.531 \text{ in./s}^2 \quad (7.85)$$

The response is given in Eq. 7.58, and for the constant average acceleration method (i.e., $\delta = \frac{1}{2}$ and $\alpha = \frac{1}{2}$) it follows that

$$\beta = 1.0 + \frac{1}{2}(2.513)(0.005) + \frac{1}{2}(631.65)(0.005)^2 = 1.01023. \quad (7.86)$$

It then follows from Eq. 7.58 that

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0.0 & -3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \dot{\mathbf{x}}_k \\ \ddot{\mathbf{x}}_k \end{Bmatrix} \quad (7.87)$$

Equation 7.87 represents the response of the structure if the displacement is within the range DA in Figure 7.10. At $t = \Delta t = 0.005$ s, it follows from Eq. 7.87 that

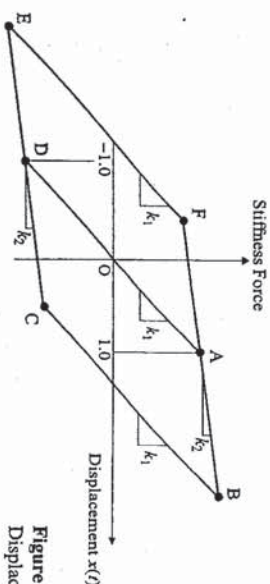


Figure 7.10 Force versus Displacement Curve

حمید کاظمی

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0.0 & -3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 40.0 \\ -100.531 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.197975 \\ 39.18981 \\ -223.546 \end{Bmatrix} \quad (7.88)$$

At this level of displacement, the stiffness force, denoted as $F_{s,1}$ is

$$F_{s,1} = 631.65(0.197975) = 125.05 \text{ kip.} \quad (7.89)$$

At $t = 2\Delta t = 0.010$ s, it follows from Eq. 7.87 that

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.197975 \\ 39.18981 \\ -223.546 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.390392 \\ -37.77710 \end{Bmatrix} \quad (7.90)$$

and at this level of displacement, the stiffness force is

$$F_{s,2} = 631.65(0.390392) = 246.59 \text{ kip.} \quad (7.91)$$

This calculation process continues for several time steps until the displacement response reaches $x(t) = 1.0$ in. This happens at time step $t = 6\Delta t = 0.03$ s, where

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.905802 \\ 30.26189 \\ -648.210 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \end{Bmatrix} \quad (7.92)$$

and at this level of displacement, the stiffness force is

$$F_{s,6} = 631.65(1.0) + 126.33(1.048499 - 1.0) = 637.78 \text{ kip.} \quad (7.93)$$

Note that the displacement of 1.0 in. occurs at about 0.029 s, and therefore the stiffness changes from k_1 to k_2 within the time period of 0.025 s to 0.03 s. The more accurate way of solving this problem is to use $k_1 = 631.65$ k/in. for the time period 0.025 s to 0.029 s, and then use $k_2 = 126.33$ k/in. for the time period 0.029 s to 0.030 s. However, this is not done because Eq. 7.87 must be reformulated using a time step of $\Delta t = 0.004$ s with stiffness k_1 , and then using a time step of $\Delta t = 0.001$ s with stiffness k_2 . The resulting response obtained in Eq. 7.92 will therefore violate the dynamic equilibrium equation of motion because the stiffness force is not properly adjusted for the change in stiffness. One way to overcome this problem is to impose the condition of satisfying the dynamic equilibrium equation by updating the acceleration response, that is,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_6 &= -\left(\frac{c}{m}\right)\dot{x}_6 - \left[\frac{F_s(\dot{x}_6)}{m}\right] \\ &= -\left(\frac{1.124}{1.0}\right)(26.81715) - \left[\left(\frac{631.65}{1.0}\right)(1.0) + \left(\frac{126.33}{1.0}\right)(1.048499 - 1.0)\right] \\ &= -667.923. \end{aligned} \quad (7.94)$$

This new value of $\ddot{x}_6 = -667.923$ in./s² is different from what was originally calculated, which was -729.688 in./s².

The calculation continues, and the displacement response of the structure follows the path AB in Figure 7.10. At time step $t = 6\Delta t = 0.03$ s, the natural frequency of vibration of $\omega_n = 11.22$ rad/s and damping of $c = 1.124$ k-s/in. It follows from the derivation of the Newmark β -method and Eq. 7.58 that

$$\beta = 1 + (1.124)(\frac{1}{4})(0.005) + (126.33)(\frac{1}{4})(0.005)^2 = 1.00360. \quad (7.95)$$

It then follows from Eq. 7.57 that

$$F_N^n = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004996 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.998427 & 0.004982 \\ 0.0 & -0.62939 & 0.992827 \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

At time step $t = 7\Delta t = 0.035$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004996 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.998427 & 0.004982 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \\ -667.923 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.174160 \\ 23.44731 \\ -680.011 \end{Bmatrix} \quad (7.97)$$

and at this level of displacement, the stiffness force is

$$F_{s,7} = 631.65(1.0) + 126.33(1.174160 - 1.0) = 653.66 \text{ kip.} \quad (7.98)$$

This calculation process continues until $t = 14\Delta t = 0.07$ s, when the response is

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{14} \\ \dot{x}_{15} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004996 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.998427 & 0.004982 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.564722 \\ 2.464924 \\ -705.767 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.568247 \\ -1.05513 \\ -702.256 \end{Bmatrix} \quad (7.99)$$

and at this level of displacement, the stiffness force is

$$F_{s,14} = 631.65(1.0) + 126.33(1.568247 - 1.0) = 703.43 \text{ kip.} \quad (7.100)$$

At this time, the velocity response becomes a negative number, which means that a maximum displacement has been reached and the displacement at the next time step will be less than 1.568247 in. The system will now be in an unloading process, and the displacement response of the structure will follow the path BC in Figure 7.10. The stiffness for this path is $k_1 = 631.65$ k/in. It follows that at $t = 15\Delta t = 0.075$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{15} \\ \dot{x}_{16} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.568247 \\ -1.05513 \\ -702.256 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.554341 \\ -4.50722 \\ -681.687 \end{Bmatrix} \quad (7.101)$$

At this level of displacement, the unloading process occurs elastically. Therefore, a reduction of displacement from 1.568247 in. to 1.554341 in. changes the stiffness force elastically:

$$F_{s,15} = 631.65(1.0 - 1.568247 + 1.554341) + 126.33(1.568247 - 1.0) = 696.44 \text{ kip.} \quad (7.102)$$

Calculation continues using stiffness k_1 . Note that the maximum displacement is equal to 1.568247 in. Therefore, the structure will begin to yield under reversed loading at a displacement equal to

$$x_y = 1.568247 - 2.0 = -0.431753 \text{ in.} \quad (7.103)$$

where the value 2 in Eq. 7.103 represents the elastic displacement envelope, which is the range between the upper and lower limits of the path corresponding to k_1 in Figure 7.10 (i.e., the displacement or horizontal distance between A and D, C and E and F). This displacement level of $x_y = -0.431753$ in. is reached at time step $t = 36\Delta t = 0.18$ s. The response at this time step is

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{36} \\ \dot{x}_{37} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.38752 \\ -11.1242 \\ 561.531 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.43598 \\ -8.25808 \\ 584.935 \end{Bmatrix} \quad (7.104)$$

حميد کاظمه

At this level of displacement, the stiffness changes from k_1 to k_2 , and the path is between C and E. Therefore, the stiffness force can be computed by

$$F_{s,36} = 631.65(-1.0) + 126.33(-0.43598 + 1.0) = -560.40 \text{ kip.} \quad (7.105)$$

Similar to Eq. 7.94, imposing the condition to satisfy the dynamic equilibrium equation by updating the acceleration response gives

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{36} &= -\left(\frac{c}{m}\right)\dot{x}_{36} - \left[\frac{F_s(x_{36})}{m}\right] \\ &= -\left(\frac{1.124}{1.0}\right)(-8.25808) - \left[\left(\frac{631.65}{1.0}\right)(-1.0) + \left(\frac{126.33}{1.0}\right)(-0.431753 + 1.0)\right] \\ &= -569.683. \end{aligned} \quad (7.106)$$

Again, this new value of $\ddot{x}_{36} = -569.683 \text{ in./s}^2$ is different from what was originally calculated, which was -584.935 in./s^2 .

This calculation process continues, and Table 7.1 summarizes the calculations at different time steps. In addition, the displacement and velocity responses are shown in Figures 7.11 and 7.12, respectively, and the force versus displacement curve is shown in Figure 7.13.

Table 7.1 Summary of Calculations of Response at Selected Time Steps

k	Time (s)	x_k (in.)	$\dot{x}_k$ (in./s)	$\ddot{x}_k$ (in./s ²)	$F_{s,k}$ (kip)
0	0.000	0.00000	40.0000	-100.531	0.00
1	0.005	0.19797	39.1898	-223.546	125.05
2	0.010	0.39039	37.7771	-341.537	246.59
3	0.015	0.57431	35.7915	-452.721	362.77
4	0.020	0.74697	33.2710	-555.446	471.83
5	0.025	0.90580	30.2619	-648.210	572.15
6	0.030	1.04850	26.8171	-667.923	637.78
7	0.035	1.17416	23.4473	-680.011	653.66
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	0.065	1.56472	2.4649	-705.767	703.47
14	0.070	1.56825	-1.0551	-702.256	703.43
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	0.175	-0.38752	-11.1243	561.531	-532.04
36	0.180	-0.43598	-8.2581	569.683	-560.40

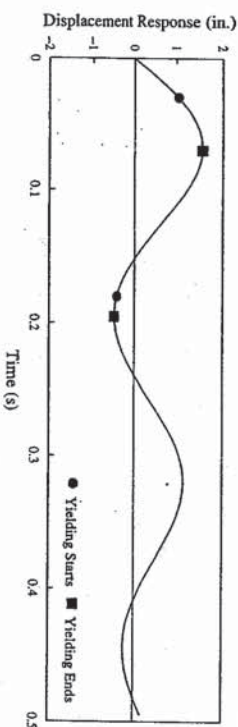


Figure 7.11 Displacement Response of a Bilinear Structure

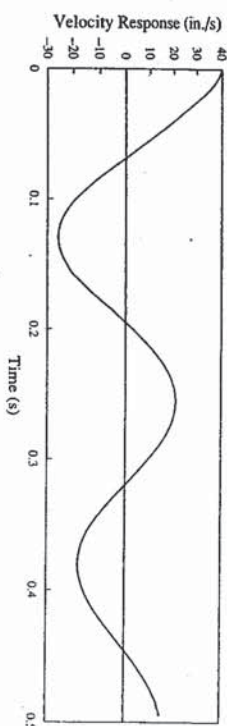


Figure 7.12 Velocity Response of a Bilinear Structure

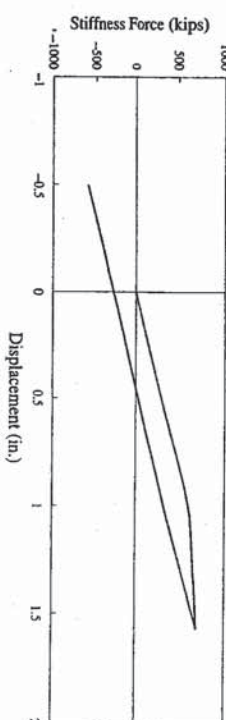


Figure 7.13 Stiffness Force versus Displacement Response of a Bilinear Structure

EXAMPLE 3 Forced Response of an SDOF System with Bilinear Stiffness

Consider Example 2 with bilinear stiffness of $k_1 = 631.65 \text{ k/in.}$ and $k_2 = 126.33 \text{ k/in.}$, and a yield displacement of $x_y = 0.6 \text{ in.}$ The structure has a mass equal to $m = 1.0 \text{ k-s}^2/\text{in.}$, and it is assumed to have zero initial displacement and initial velocity but is subjected to a magnified bilinear pulse ground acceleration as shown in Figure 7.14. The constant acceleration method with a time step of $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ is used. The equations, given in Eqs. 7.30 and 7.39 are

$$\ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + \ddot{x}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_k (\Delta t)^2 \quad (7.107)$$

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \ddot{x}_k \Delta t \quad (7.108)$$

$$\ddot{x}_{k+1} = a_{k+1} - \left(\frac{c}{m}\right)\dot{x}_{k+1} - \frac{F_s(x_{k+1})}{m} \quad (7.109)$$

For this example, the damping value is fixed and is equal to 2.513 k-s/in. This means that the damping ratio ζ changes for different values of ω_n .

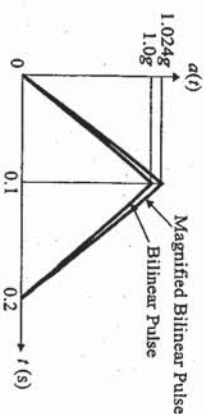


Figure 7.14 Bilinear Pulse

حميد کاظمه

The ground acceleration at time zero is equal to 0. The initial acceleration can be computed using Eq. 7.109:

$$\ddot{x}_0 = 0 - \left(\frac{c}{m} \right) (0) - \frac{(0)}{m} = 0 \text{ in./s}^2 \quad (7.110)$$

At $t = 2\Delta t = 0.010$ s, the ground acceleration is equal to $0.0512g$. The response can be computed using Eqs. 7.107 to 7.109:

$$x_1 = (0) + (0)(0.005) + \frac{1}{2}(0)(0.005)^2 = 0 \text{ in.} \quad (7.111)$$

$$\dot{x}_1 = (0) + (0)(0.005) = 0 \text{ in./s} \quad (7.112)$$

$$\ddot{x}_1 = -(0.0512 \times 386.4) - \left(\frac{2.513}{1.0} \right) (0) - \frac{631.65(0)}{1.0} = -19.7837 \text{ in./s}^2 \quad (7.113)$$

$$F_{1,1} = 631.65(0) = 0.0 \text{ kip} \quad (7.114)$$

At $t = 2\Delta t = 0.010$ s, it follows from Eqs. 7.107 to 7.109 that

$$x_2 = (0) + (0)(0.005) + \frac{1}{2}(-19.7837)(0.005)^2 = -0.00025 \text{ in.} \quad (7.115)$$

$$\dot{x}_2 = (0) + (-19.7837)(0.005) = -0.09892 \text{ in./s} \quad (7.116)$$

$$\ddot{x}_2 = -(0.1024 \times 386.4) - \left(\frac{2.513}{1.0} \right) (-0.09892) - \frac{631.65(-0.00025)}{1.0} = -39.1625 \text{ in./s}^2 \quad (7.117)$$

$$F_{2,2} = 631.65(-0.00025) = -0.16 \text{ kip} \quad (7.118)$$

Calculation continues until a displacement of 0.6 in. is reached. This corresponds to a time step of $t = 23\Delta t = 0.115$ s and a ground acceleration of $0.8704g$. The responses at time step $t = 22\Delta t = 0.11$ s are $x_{22} = -0.55586$ in., $\dot{x}_{22} = -11.4312$ in./s, and $\ddot{x}_{22} = 23.7360$ in./s². Therefore, the displacement and velocity responses at time step 23 follow from Eqs. 7.107 to 7.109:

$$x_{23} = (-0.55586) + (-11.4312)(0.005) + \frac{1}{2}(23.7360)(0.005)^2 = -0.61272 \text{ in.} \quad (7.119)$$

$$\dot{x}_{23} = (-11.4312) + (23.7360)(0.005) = -11.3126 \text{ in./s} \quad (7.120)$$

$$\ddot{x}_{23} = -0.8704g - \left(\frac{2.513}{1.0} \right) (-11.3126) - \frac{631.65(-0.6) + 126.33(-0.01272)}{1.0} = 72.7089 \text{ in./s}^2 \quad (7.121)$$

$$F_{2,3} = 631.65(-0.6) + 126.33(-0.61272 + 0.6) = -380.58 \text{ kip} \quad (7.122)$$

where for the total displacement of 0.61272 in., a 0.6-in. displacement corresponds to the stiffness of $k_1 = 631.65$ k/in. and a 0.01272-in. displacement corresponds to the stiffness of $k_2 = 126.33$ k/in.

The calculation process continues. Note that the acceleration response is computed after the displacement and velocity responses are calculated. Therefore, the dynamic equilibrium equation will be satisfied and no acceleration value must be updated due to the stiffness nonlinearity, which was not the case in Examples 1 and 2. This is because the constant acceleration method is used in this example.

Table 7.2 summarizes the calculations at different time steps. In addition, the displacement and velocity responses are shown in Figures 7.15 and 7.16, respectively. The force versus displacement curve is shown in Figure 7.17.

Figure 7.18 shows a comparison of displacement response between the nonlinear response shown in Figure 7.15 and the linear response based on the calculation using stiffness $k_1 = 631.65$ k/in. only.

Table 7.2 Summary of Calculations of Response at Selected Time Steps

k	Time (s)	a_g (g)	x_g (in.)	$\dot{x}_g$ (in./s)	$\ddot{x}_g$ (in./s ²)	$F_{2,k}$ (kip)
0	0.000	0.00	0.000000	0.0000	0.000	0.00
1	0.005	0.0512	0.000000	0.0000	-19.783	0.00
2	0.010	0.1024	-0.00025	-0.0989	-39.163	-0.16
3	0.015	0.1536	-0.00123	-0.2947	-57.832	-0.78
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
22	0.110	0.9216	-0.55586	-11.4312	23.736	-351.11
23	0.115	0.8704	-0.61272	-11.3126	72.709	-380.58

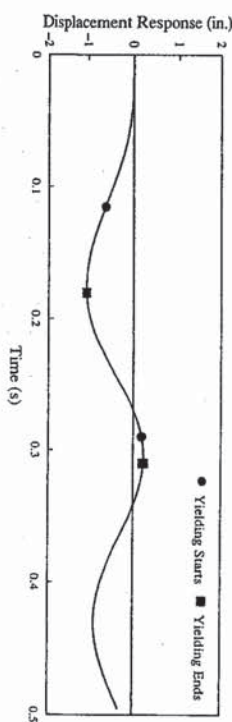


Figure 7.15 Displacement Response of a Bilinear Structure

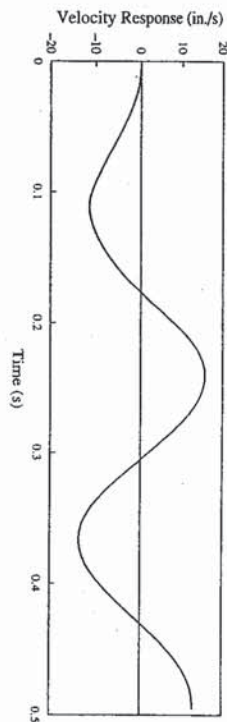


Figure 7.16 Velocity Response of a Bilinear Structure

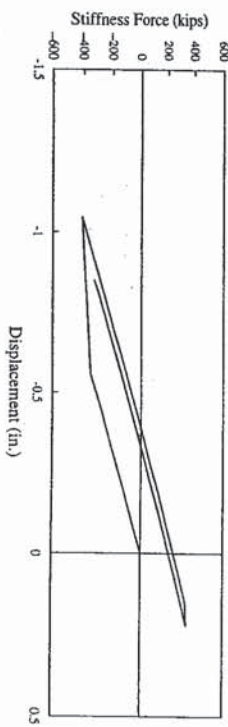


Figure 7.17 Stiffness Force versus Displacement Response of a Bilinear Structure

حمید کاظمی

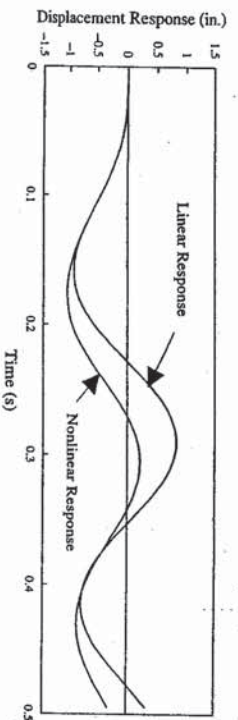


Figure 7.18 Comparison of Displacements between Linear and Nonlinear Responses

EXAMPLE 4 Fictitious Stiffness-Related Force

Recall that the stiffness used in the solution for time step t_{k+1} is the stiffness from time step t_{k-1} to t_k . If an iteration of this initial solution is performed, then this initial stiffness is replaced by $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)}$, or more.

An alternate approach to this iterative solution is to apply a "fictitious force" to the system at time t_{k+1} to compensate for the error in the initial estimate of the stiffness. Assume that Eq. 7.35 is used to estimate the stiffness of the SDOF system at time step t_{k+1} . Therefore, the equation of motion from Eq. 7.30 is

$$m\ddot{x}_{k+1} + c\dot{x}_{k+1} + F_s(x_{k+1}) = \hat{F}_{k+1} \quad (7.123)$$

where from Figure 7.7

$$F_s(x_{k+1}) = F_s(x_k) + k_s(x_{k+1} - x_k) = \hat{F}_s(t_{k+1}) = \hat{F}_{s,k+1} \quad (7.124)$$

Now imagine that a solution is obtained using the Newmark β -method, and a value for x_{k+1} is calculated to be $x_{k+1}^{(1)}$. Then from Figure 7.19,

$$\hat{F}_s(x_{k+1}^{(1)}) = \hat{F}_s^{(1)}(t_{k+1}) = \hat{F}_{s,k+1}^{(1)} \quad (7.125)$$

The exact force is $F_s(t_{k+1}) = F_{s,k+1}$, but it is unknown. The force used in the initial solution is $\hat{F}_{s,k+1}$. The force that would be used in an iteration is $\hat{F}_{s,k+1}^{(1)}$. The difference between the initial solution force and the iterative force is

$$\Delta \hat{F}_s = \hat{F}_{s,k+1}^{(1)} - \hat{F}_{s,k+1} \quad (7.126)$$

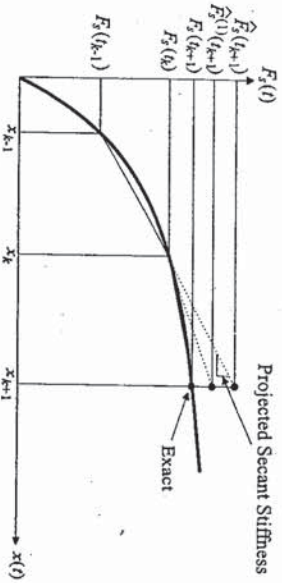


Figure 7.19 Nonlinear Force versus Deflection Curve

The equation of motion for the next time step from Eq. 7.30 is

$$m\ddot{x}_{k+2} + c\dot{x}_{k+2} + F_s(x_{k+2}) = \hat{F}_{k+2} \quad (7.127)$$

where

$$F_s(x_{k+2}) = F_s(x_{k+1}) + k_{k+1}(x_{k+2} - x_{k+1}) \quad (7.128)$$

and

$$k_{k+1} = \left[\frac{F_s(x_{k+1}) - F_s(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \right] \quad (7.129)$$

However, in the initial solution the stiffness used and the related force were incorrect by an amount $\Delta \hat{F}_s = \hat{F}_{s,k+1}^{(1)} - \hat{F}_{s,k+1}$ because the iteration was not performed. Therefore, imagine that a fictitious force is now applied to the right-hand side of Eq. 7.127, and it follows that

$$m\ddot{x}_{k+2} + c\dot{x}_{k+2} + F_s(x_{k+2}) = \hat{F}_{k+2} + \Delta \hat{F}_s \quad (7.130)$$

The solution approach and extensions of it can be used as an alternative to a smaller time step or repeated iterations for the response at time t_{k+1} .

Consider Example 2, where the force versus deflection curve is a bilinear relationship with $k_1 = 631.65$ k/in., $k_2 = 126.33$ k/in., and a yield displacement of $x_y = 1.0$ in. Since this force versus deflection curve is linear up to the elastic limit of $x_y = 1.0$ in., there will be no imbalance of force in the response. However, at the time step when k_1 changes to k_2 (i.e., at the time when yielding occurs), there is an imbalance of force, which can be seen in Eqs. 7.92 and 7.93. From Eq. 7.92, the response is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_6 \\ \dot{x}_6 \\ x_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004980 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.992184 & 0.004949 \\ 0.0 & -3.12629 & 0.979745 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.905802 \\ 30.26189 \\ -648.210 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \\ -729.688 \end{Bmatrix} \quad (7.131)$$

and at this level of displacement, the stiffness force is

$$\hat{F}_{s,6} = 631.65(1.0) + 126.33(1.048499 - 1.0) = 637.78 \text{ kip.} \quad (7.132)$$

However, from the dynamic equilibrium equation of motion as given in Eq. 7.123, where $m = 1.0$ k-s²/in., $c = 2.513$ k-s/in., and $F_k = 0$ (i.e., no external force), the stiffness force is $\hat{F}_s(x_6^{(1)}) = -m\ddot{x}_6 - c\dot{x}_6 = -(1.0)(-729.688) - (2.513)(26.81715) = 699.55$ kip

$$\text{and therefore Eq. 7.126 becomes} \quad (7.133)$$

$$\Delta \hat{F}_s = \hat{F}_{s,6}^{(1)} - \hat{F}_{s,6} = 699.55 - 637.78 = 61.76 \text{ kip.} \quad (7.134)$$

Consider this $\Delta \hat{F}_s$ in Eq. 7.134 as a fictitious force; it follows from Eq. 7.130 that the equation of motion for the next time step becomes

$$m\ddot{x}_7 + c\dot{x}_7 + F_s(x_7) = \Delta \hat{F}_s \quad (7.135)$$

Now, instead of calculating the response of the SDOF system with no external force, this fictitious force introduces a term on the right-hand side of Eq. 7.135. This $\Delta \hat{F}_s$ is considered as an external force in the next time step, and therefore Eq. 7.56 becomes

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_7 \\ \dot{x}_7 \\ x_7 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_N^{(n)} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_6 \\ \dot{x}_6 \\ x_6 \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_N^{(n)} \Delta \hat{F}_s \quad (7.136)$$

where $\mathbf{F}_N^{(n)}$ was calculated in Eq. 7.96 for $k_s = k_2 = 126.33$ k/in., which is

حمید کاظمی

$$\mathbf{F}_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004996 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.998427 & 0.004982 \\ 0.0 & -0.62939 & 0.992827 \end{bmatrix} \quad (7.137)$$

and $\mathbf{H}_N^{(n)}$ is

$$\mathbf{H}_N^{(n)} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 \\ \Delta t \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1.00360} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(0.005)^2 \\ \frac{1}{2}(0.005) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000006 \\ 0.002491 \\ 0.996413 \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

Therefore, the response at the next time step follows from Eqs. 7.135 to 7.138:

$$\begin{Bmatrix} x_7 \\ \dot{x}_7 \\ \ddot{x}_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.004996 & 0.000012 \\ 0.0 & 0.998427 & 0.004982 \\ 0.0 & -0.62939 & 0.992827 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.048499 \\ 26.81715 \\ -729.688 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.000006 \\ 0.002491 \\ 0.996413 \end{bmatrix} (61.76) = \begin{bmatrix} 1.174106 \\ 23.29351 \\ -679.792 \end{bmatrix} \quad (7.139)$$

and at this level of displacement, the stiffness force is

$$\hat{F}_{s,7} = 631.65(1.0) + 126.33(1.174106 - 1.0) = 653.62 \text{ kip.} \quad (7.140)$$

However, from Eq. 7.123, the stiffness force is

$$\hat{F}_s(x_7^{(1)}) = -m\ddot{x}_7 - c\dot{x}_7 = -(1.0)(-679.792) - (1.124)(23.29351) = 653.61 \text{ kip} \quad (7.141)$$

and therefore the fictitious force in Eq. 7.126 becomes

$$\Delta \hat{F}_s = \hat{F}_s^{(1)} - \hat{F}_{s,7} = 653.61 - 653.62 = -0.01 \text{ kip.} \quad (7.142)$$

This calculation process continues as time progresses to adjust for the imbalance of force. Note that the fictitious force in Eq. 7.142 is much smaller than that in Eq. 7.134, which shows that the imbalance of force has been considered in the calculation process.

EXAMPLE 5 Nonlinear Response Spectrum

Section 5.2 discussed the development of a response spectrum for a linear elastic SDOF system. The spectral displacement was the maximum displacement of the system for a given earthquake ground motion acceleration versus time and a given value of damping and natural period of vibration. Wu and Hanson,⁽¹⁾ as discussed in Section 5.3, studied the response of an SDOF system for an ensemble of earthquake ground motions and developed an equation for a damping response reduction coefficient, R_d . This coefficient enables the structural engineer to modify the 5% damped elastic response spectrum to obtain a spectrum for any selected value of damping, ζ . Equation 5.49 presented the equation for R_d . Wu and Hanson also studied the response of an elastic-plastic SDOF system for the same ensemble of earthquake ground motions.

Define x_y to be the displacement of an SDOF system for a given earthquake ground motion and with a pre-yield natural period of vibration T_n and damping value of ζ . Now assume that the SDOF has an elastic-plastic stiffness of the type shown in Figure 7.20 and a yield force level, F_y , equal to $F_y = k_1 x_y$, where k_1 is the pre-yield stiffness of the SDOF system. Denote the maximum response of this nonlinear SDOF system as $x_{\max}^{(n)}$. Define the ductility demand for the given earthquake ground motion acceleration versus time to be μ , where

$$\mu = \frac{x_{\max}^{(n)}}{x_y} \quad (7.143)$$

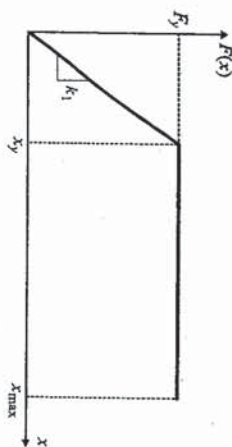


Figure 7.20 Elastic-Plastic Stiffness

Wu and Hanson studied many earthquake ground motions for a given pre-yield natural period of vibration T_n . For a given earthquake ground motion, the maximum displacement for 5% damping, that is, $S_d(T_n, 5\%)$, and the maximum displacement for damping ζ and the maximum ductility demand μ , that is $S_d(T_n, \zeta, \mu)$, are obtained. The ratio of these two maximum response quantities, denoted by R_{dn} ,⁽¹⁾ is

$$R_{dn} = \frac{S_d(T_n, \zeta, \mu)}{S_d(T_n, 5\%)}. \quad (7.144)$$

Wu and Hanson then derived the following equations:

$$R_{dn} = -0.349 \ln(0.0959\zeta)(2.89\mu - 1.89)^{-0.244}, \quad T_n = 0.1 \text{ s} \quad (7.145)$$

$$R_{dn} = -0.547 \ln(0.417\zeta)(1.82\mu - 0.82)^{-0.562}, \quad T_n = 0.5 \text{ s} \quad (7.146)$$

$$R_{dn} = -0.471 \ln(0.524\zeta)(1.53\mu - 0.53)^{-0.706}, \quad T_n = 1.0 \text{ s} \quad (7.147)$$

$$R_{dn} = -0.478 \ln(0.475\zeta)\mu^{-1.06}, \quad T_n = 3.0 \text{ s.} \quad (7.148)$$

Figure 7.21 shows a plot of R_{dn} as a function of natural period of vibration and ductility with damping ratio equal to 5%. Figure 7.22 shows a plot of R_{dn} as a function of a natural period of vibration and damping ratio with ductility equal to 3.

Newmark and Hall did a similar study but only for an SDOF system with 5% damping.⁽²⁾ They calculated a response reduction factor of

$$R_{s\mu} = \frac{S_d(T_n, 5\%, \mu)}{S_d(T_n, 5\%)}, \quad (7.149)$$

which is similar to Eq. 7.144. The equation they proposed was

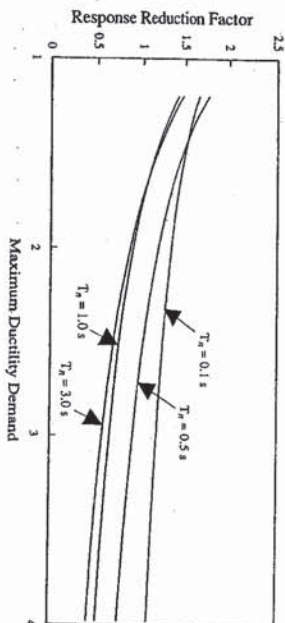


Figure 7.21 Response Reduction Factor (R_{dn}) as a Function of Natural Period of Vibration and Ductility with Damping $\zeta = 5\%$ (Wu and Hanson)

حمید کاظمی

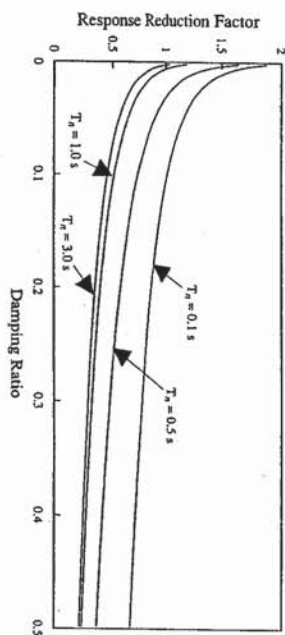


Figure 7.22 Response Reduction Factor (R_{dh}) as a Function of Natural Period of Vibration and Damping Ratio with Ductility $\mu = 3$ (Wu and Hanson)

$$R_{S\mu} = 1.0, \quad T_n \leq 0.3 \text{ s} \quad (7.150)$$

$$R_{S\mu} = \sqrt{2\mu - 1}, \quad 0.3 < T_n \leq 1.0 \text{ s} \quad (7.151)$$

$$R_{S\mu} = \mu, \quad T_n > 1.0 \text{ s} \quad (7.152)$$

Krawinkler and Nassar developed for 15 Western U.S. earthquake records the following equation for R_{dh} ⁽³⁾:

$$R_{dh} = [c(\mu - 1) + 1]^{1/c} \quad (7.153)$$

where

$$c = \left(\frac{T_n}{1 + T_n} \right) + \left(\frac{b}{T_n} \right) \quad (7.154)$$

The pre-yield natural period of vibration is denoted T_n . The slope of the post-yield force versus deflection curve is called the *strain hardening coefficient* and is denoted α (e.g., $\alpha = 0\%$ is elastic-plastic as shown in Figure 7.20). The value of the coefficient b in Eq. 7.154 is a function of α , and for a 5% damped SDOF system, the value of b is

$$\alpha = 0\%, \quad b = 0.42 \quad (7.155)$$

$$\alpha = 2\%, \quad b = 0.37 \quad (7.156)$$

$$\alpha = 10\%, \quad b = 0.29 \quad (7.157)$$

Figure 7.23 shows a plot of c versus T_n . Figure 7.24 shows a plot of R_{dh} versus T_n .

This example demonstrates how, for a given SDOF system and ensemble of earthquake ground motion records, it is possible to develop generalized design equations for use in structural engineering.

7.3 MULTI-DEGREE OF FREEDOM RESPONSE WITH NONLINEAR STIFFNESS

Consider now a response solution for a multi-degree of freedom system where any of the elements in the stiffness matrix have a nonlinear force versus deflection relationship. The matrix equation of motion for this multi-degree of freedom system is

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + [K(X)]X(t) = -Ma(t), \quad (7.158)$$

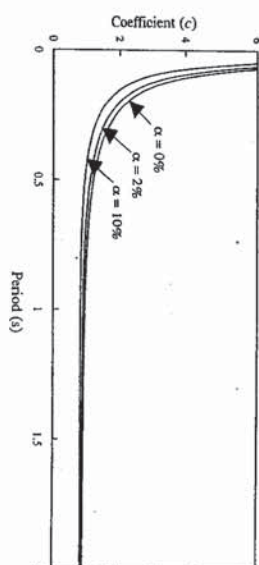


Figure 7.23 Coefficient (c) as a Function of the Natural Period of Vibration and Strain Hardening Coefficient (Krawinkler and Nassar)

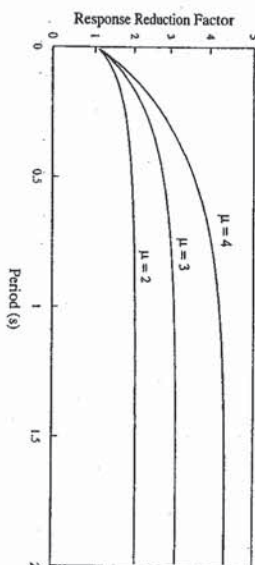


Figure 7.24 Response Reduction Factor (R_{dh}) as a Function of Natural Period of Vibration with $\alpha = 0\%$ (Krawinkler and Nassar)

In the previous chapters, the stiffness matrix $K(X)$ in Eq. 7.158 was a constant, that is, $K(X) = K$, which was not a function of X and therefore not a function of time. Now consider the stiffness matrix to be a function of the deformed position of the structure, that is, $K(X)$.

Consider the case where the solution for the response is obtained by using the Newmark β -method. Recall from Eq. 3.224 that

$$M\ddot{X}_{k+1} + C\dot{X}_{k+1} + KX_{k+1} = F_{k+1} \quad (7.159a)$$

$$\dot{X}_{k+1} = \dot{X}_k + (1 - \beta)\ddot{X}_k\Delta t + \beta\ddot{X}_{k+1}\Delta t \quad (7.159b)$$

$$X_{k+1} = X_k + \dot{X}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{X}_k(\Delta t)^2 + \alpha\ddot{X}_{k+1}(\Delta t)^2 \quad (7.159c)$$

Equation 7.159a represents the dynamic equilibrium equation of motion for the case where the stiffness matrix K is not a function of X . For the case where the stiffness depends on the displacement X , Eq. 7.159 must be written in an incremental form, that is,

$$M\Delta\ddot{X} + C\Delta\dot{X} + K_s\Delta X = \Delta F \quad (7.160a)$$

$$\Delta\ddot{X} = (1 - \beta)\ddot{X}_k\Delta t + \beta\ddot{X}_{k+1}\Delta t \quad (7.160b)$$

$$\Delta\dot{X} = \dot{X}_k\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{X}_k(\Delta t)^2 + \alpha\ddot{X}_{k+1}(\Delta t)^2 \quad (7.160c)$$

where K_s represents the stiffness corresponding to the displacement from X_k to X_{k+1} , and

$$\Delta X = X_{k+1} - X_k, \quad \Delta\dot{X} = \dot{X}_{k+1} - \dot{X}_k, \quad \Delta\ddot{X} = \ddot{X}_{k+1} - \ddot{X}_k, \quad \Delta F = F_{k+1} - F_k. \quad (7.161)$$

حميد کاظمه

Substituting Eqs. 7.160b and 7.160c into Eq. 7.160a, it follows that

$$M\Delta\ddot{X} + C[(1-\delta)\ddot{X}_k\Delta t + \delta\ddot{X}_{k+1}\Delta t] + K_x[\ddot{X}_k\Delta t + (\tfrac{1}{2}-\alpha)\ddot{X}_k(\Delta t)^2 + \alpha\ddot{X}_{k+1}(\Delta t)^2] = \Delta F. \quad (7.162)$$

From Eq. 7.161,

$$\ddot{X}_{k+1} = \ddot{X}_k + \Delta\ddot{X}. \quad (7.163)$$

Substituting Eq. 7.163 into Eq. 7.162 gives

$$M\Delta\ddot{X} + (1-\delta)\Delta C\ddot{X}_k + \delta\Delta C\ddot{X}_k + \delta\Delta C\Delta\ddot{X} + \Delta K_x\ddot{X}_k + (\tfrac{1}{2}-\alpha)(\Delta t)^2 K_x\ddot{X}_k + \alpha(\Delta t)^2 K_x\ddot{X}_k + \alpha(\Delta t)^2 K_x\Delta\ddot{X} = \Delta F. \quad (7.164)$$

Collecting similar terms, it follows from Eq. 7.164 that

$$[M + \delta\Delta C + \alpha(\Delta t)^2 K_x]\Delta\ddot{X} + [(1-\delta)\Delta t + \delta\Delta t]C\ddot{X}_k + \Delta K_x\ddot{X}_k + [(\tfrac{1}{2}-\alpha)(\Delta t)^2 + \alpha(\Delta t)^2]K_x\ddot{X}_k = \Delta F. \quad (7.165)$$

Simplifying Eq. 7.165 gives

$$[M + \delta\Delta C + \alpha(\Delta t)^2 K_x]\Delta\ddot{X} + \Delta C\ddot{X}_k + \Delta K_x\ddot{X}_k + \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 K_x\ddot{X}_k = \Delta F. \quad (7.166)$$

Solving for $\Delta\ddot{X}$ gives

$$\Delta\ddot{X} = [M + \delta\Delta C + \alpha(\Delta t)^2 K_x]^{-1}[\Delta F - \Delta C\ddot{X}_k - \Delta K_x\ddot{X}_k - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 K_x\ddot{X}_k] \quad (7.167)$$

Equation 7.167 provides the solution for $\Delta\ddot{X}$, and using Eq. 7.160 it is possible to calculate $\Delta\ddot{X}$ and $\Delta\ddot{X}$. Then using Eq. 7.161, the values for $\ddot{X}_{k+1}$ and $\ddot{X}_{k+1}$ can be determined.

To represent the solution in a matrix form, first let

$$B = M + \delta\Delta C + \alpha(\Delta t)^2 K_x. \quad (7.168)$$

Then Eq. 7.167 becomes

$$\Delta\ddot{X} = [B^{-1}]\Delta F - [B^{-1}]\Delta C\ddot{X}_k - [B^{-1}]\Delta K_x\ddot{X}_k - [B^{-1}]\tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 B^{-1}K_x\ddot{X}_k. \quad (7.169)$$

Then the acceleration at time step $k+1$ is

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{k+1} &= \ddot{X}_k + \Delta\ddot{X} = \ddot{X}_k + [B^{-1}]\Delta F - [B^{-1}]\Delta C\ddot{X}_k - [B^{-1}]\Delta K_x\ddot{X}_k - [B^{-1}]\tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 B^{-1}K_x\ddot{X}_k \\ &= [B^{-1}]\Delta F - [B^{-1}]\Delta C\ddot{X}_k + [I - \Delta B^{-1}C - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 B^{-1}K_x]\ddot{X}_k. \end{aligned} \quad (7.170)$$

Substituting Eq. 7.170 into Eqs. 7.160b, 7.160c and 7.161 gives

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{k+1} &= \ddot{X}_k + (1-\delta)\ddot{X}_k\Delta t + \delta\Delta t[B^{-1}]\Delta F - (\Delta B^{-1}C)\ddot{X}_k + (1-\Delta B^{-1}C - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 B^{-1}K_x)\ddot{X}_k \\ &= [\delta\Delta B^{-1}]\Delta F - [I - \delta(\Delta t)^2 B^{-1}K_x]\ddot{X}_k + [(\Delta t)I - \delta(\Delta t)^2 B^{-1}C - \tfrac{1}{2}\delta(\Delta t)^2 B^{-1}K_x]\ddot{X}_k. \end{aligned} \quad (7.171a)$$

$$\ddot{X}_{k+1} = \ddot{X}_k + \Delta\ddot{X}_k + (\tfrac{1}{2}-\alpha)(\Delta t)^2 \ddot{X}_k$$

$$\begin{aligned} &+ \alpha(\Delta t)^2[B^{-1}]\Delta F - (\Delta B^{-1}C)\ddot{X}_k + (1-\Delta B^{-1}C - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 B^{-1}K_x)\ddot{X}_k \\ &= [\alpha(\Delta t)^2 B^{-1}]\Delta F + \ddot{X}_k + [(\Delta t)I - \alpha(\Delta t)^2 B^{-1}K_x]\ddot{X}_k \\ &+ [\tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 I - \alpha(\Delta t)^2 B^{-1}C - \tfrac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 B^{-1}K_x]\ddot{X}_k. \end{aligned} \quad (7.171b)$$

Therefore, representing Eqs. 7.170 and 7.171 in matrix form, it follows that

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X}_{k+1} \\ \ddot{X}_{k+1} \\ \ddot{X}_{k+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_N^{(n)} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_k \\ \ddot{X}_k \\ \ddot{X}_k \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_N^{(n)} \Delta F \quad (7.172)$$

where

$$\mathbf{F}_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Delta t)I - \alpha(\Delta t)^2 B^{-1}K_x & \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 I - \alpha(\Delta t)^2 B^{-1}C - \tfrac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 B^{-1}K_x \\ (\Delta t)I - \delta(\Delta t)^2 B^{-1}K_x & (\Delta t)I - \delta(\Delta t)^2 B^{-1}C - \tfrac{1}{2}\delta(\Delta t)^2 B^{-1}K_x \\ -\Delta B^{-1}K_x & I - \Delta B^{-1}C - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 B^{-1}K_x \end{bmatrix} \quad (7.173a)$$

$$\mathbf{H}_N^{(n)} = \begin{bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 B^{-1} \\ \delta\Delta B^{-1} \\ B^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.173b)$$

and the superscript (n) denotes nonlinear time history analysis. Let

$$\mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} \ddot{X}_k \\ \dot{\ddot{X}}_k \\ \ddot{X}_k \end{Bmatrix}$$

Then Eq. 7.172 becomes

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F}_N^{(n)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(n)} \Delta F = \mathbf{F}_N^{(n)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(n)} \mathbf{F}_{k+1} - \mathbf{H}_N^{(n)} \mathbf{F}_k. \quad (7.174)$$

When the structure is subjected to an earthquake ground motion, then Eq. 7.174 is still valid with the $\mathbf{H}_N^{(n)}$ matrix and ΔF changed to $\mathbf{H}_N^{(n)}$ and Δa , respectively, where

$$\mathbf{H}_N^{(nEO)} = \begin{bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 B^{-1} \mathbf{M} \\ \delta\Delta B^{-1} \mathbf{M} \\ B^{-1} \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (7.175)$$

Thus Eq. 7.175 becomes

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F}_N^{(n)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(nEO)} \mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{H}_N^{(nEO)} \mathbf{a}_k. \quad (7.176)$$

Note that the $\mathbf{F}_N^{(n)}$ and $\mathbf{H}_N^{(nEO)}$ matrices in Eq. 7.176 are functions of time, and therefore these matrices must be computed at each time step. Also, note that computing the $\mathbf{F}_N^{(n)}$ and $\mathbf{H}_N^{(nEO)}$ matrices requires the inversion of the $\mathbf{B}$ matrix at each time step.

Finally, when the constant acceleration method is used (i.e., $\delta = 0$ and $\alpha = 0$), then Eqs. 7.168, 7.173, and 7.175 become

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} + (0)\Delta C + (0)(\Delta t)^2 K_x = \mathbf{M} \quad (7.177a)$$

$$\mathbf{F}_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & (\Delta t)I & \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 I \\ 0 & I & (\Delta t)I \\ 0 & -\Delta M^{-1}K_x & I - \Delta M^{-1}C - \tfrac{1}{2}(\Delta t)^2 M^{-1}K_x \end{bmatrix} \quad (7.177b)$$

$$\mathbf{H}_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_N^{(nEO)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \quad (7.178)$$

EXAMPLE 7.3 Free Vibration of a 2DOF System

Consider the two-story braced frame as shown in Figure 7.25. Assume that the material property of the braces is bilinear, of the form shown in Figure 7.26. The mass and stiffness matrices for the structure are

حميد کاظمه

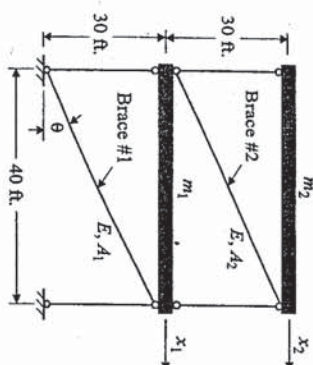


Figure 7.25 Two-Story Frame

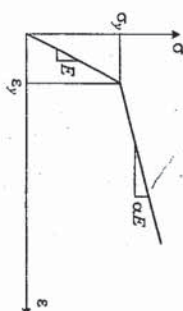


Figure 7.26 Stress versus Strain Behavior of Braces 1 and 2

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0.0 \\ 0.0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E}{L_1} \cos^2 \theta + \frac{A_2 E}{L_2} \cos^2 \theta & -\frac{A_2 E}{L_2} \cos^2 \theta \\ -\frac{A_2 E}{L_2} \cos^2 \theta & \frac{A_2 E}{L_2} \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (7.179)$$

Let $m_1 = m_2 = 1.0 \text{ k-s}^2/\text{in.}$, $A_1 = A_2 = A = 2.5 \text{ in.}^2$, $E = 37,500 \text{ ksi}$, and $\alpha = 20\%$ (i.e., $\alpha E = 0.2 \times 37,500 = 7,500 \text{ ksi}$). The mass and initial stiffness matrices are

$$M = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (7.180)$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2AE}{L} \cos^2 \theta & -\frac{AE}{L} \cos^2 \theta \\ -\frac{AE}{L} \cos^2 \theta & \frac{AE}{L} \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \frac{(2.5)(37,500)}{(50)(12)} \left(\frac{4}{5} \right)^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (7.181)$$

When Brace 1 yields, then the stiffness matrix becomes

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{(1+\alpha)AE}{L} \cos^2 \theta & -\frac{AE}{L} \cos^2 \theta \\ -\frac{AE}{L} \cos^2 \theta & \frac{AE}{L} \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \frac{(2.5)(37,500)}{(50)(12)} \left(\frac{4}{5} \right)^2 \begin{bmatrix} 1.2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (7.182)$$

If Brace 2 yields, then the stiffness matrix becomes

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{(1+\alpha)AE}{L} \cos^2 \theta & -\frac{\alpha AE}{L} \cos^2 \theta \\ -\frac{\alpha AE}{L} \cos^2 \theta & \frac{\alpha AE}{L} \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \quad (7.183)$$

Finally, if both Braces 1 and 2 yield, then the stiffness matrix becomes

$$K_{12} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha AE}{L} \cos^2 \theta & -\frac{\alpha AE}{L} \cos^2 \theta \\ -\frac{\alpha AE}{L} \cos^2 \theta & \frac{\alpha AE}{L} \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} = \alpha K. \quad (7.184)$$

Assume that the damping is proportional initial stiffness matrix with a Rayleigh proportionality constant of $\beta = 0.01$. Then the damping matrix is

$$C = (0.01) K = (0.01) \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.185)$$

In addition, assume that this damping matrix will not change even when the stiffness matrix changes due to yielding of the braces. Let the yielding of the braces be equal to $\epsilon_y = 0.002$ for both tension and compression; then these braces will yield at a relative displacement of

$$x_y = \frac{L \epsilon_y}{\cos \theta} = \frac{(50)(12)(0.002)}{4/5} = 1.5 \text{ in.} \quad (7.186)$$

This means that Brace 1 yields at $|x_1| = 1.5 \text{ in.}$ and Brace 2 yields at $|x_2 - x_1| = 1.5 \text{ in.}$

Recall from Eq. 3.10 that the natural frequencies of vibrations are

$$\omega_1^2 = \frac{((k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1) - \sqrt{((k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2} \quad (7.187)$$

$$\omega_2^2 = \frac{((k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1) + \sqrt{((k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2} \quad (7.188)$$

where $m_1 = m_2 = 1.0 \text{ k-s}^2/\text{in.}$ and $k_1 = k_2 = 100 \text{ k/in.}$ Since $k_1 = k_2$ and $m_1 = m_2$, it follows from Eq. 3.28 that

$$\omega_1 = 0.618 \sqrt{100/1.0} = 6.18 \text{ rad/s} \quad (7.189)$$

$$\omega_2 = 1.618 \sqrt{100/1.0} = 16.18 \text{ rad/s.} \quad (7.190)$$

The natural periods of vibration are

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{6.18} = 1.02 \text{ s} \quad (7.191)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{16.18} = 0.39 \text{ s.} \quad (7.192)$$

Assume the frame has no initial displacement (i.e., $X_0 = 0$) but has an initial velocity of $\dot{x}_{10} = 30 \text{ in./s}$ and $\dot{x}_{20} = 50 \text{ in./s}$ and no external force. The time step size should be less than $(T_n/10)$. Since $T_2 < T_1$ for this case it follows that $\Delta t \leq (T_2/10) = 0.039 \text{ s}$. Assume that the constant acceleration method is used with a time step of $\Delta t = 0.01 \text{ s}$. Then the solution follows from Eq. 7.174 or 7.176 that

$$q_{k+1} = F_{k+1}^{(a)} q_k \quad (7.193)$$

where, for the elastic structure, the matrices in Eq. 7.193 are

حمید کاظمی

$$\mathbf{F}_N^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -2.0 & 1.0 & 0.97 & 0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -1.0 & 0.015 \end{bmatrix} \mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}_k \quad (7.194)$$

At time step 0, the initial acceleration is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -20 \end{bmatrix} \quad (7.195)$$

Then using Eq. 7.195, the response at time step $k = 1$ (i.e., $t = \Delta t = 0.01$ s) is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -2.0 & 1.0 & 0.97 & 0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -1.0 & 0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2995 \\ 0.4990 \\ 29.900 \\ 49.800 \\ -20.00 \\ -39.85 \end{bmatrix} \quad (7.196)$$

The relative displacement between the two floors at $t = \Delta t = 0.01$ s is

$$(\Delta z_{-1})_1 = x_2 - x_1 = 0.4990 - 0.2995 = 0.1995 \text{ in.} \quad (7.197)$$

This calculation process continues, and at $t = 6\Delta t = 0.06$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_6 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -2.0 & 1.0 & 0.97 & 0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -1.0 & 0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.47250 \\ 2.44551 \\ 28.5005 \\ 47.0445 \\ -59.907 \\ -115.844 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75451 \\ 2.91016 \\ 27.9015 \\ 45.8860 \\ -69.804 \\ -133.549 \end{bmatrix} \quad (7.198)$$

At this displacement of $x_{1,6} = 1.75451$ in., Brace 1 yields. The resulting $\mathbf{F}_N^{(0)}$ matrix becomes

$$\mathbf{F}_N^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -1.2 & 1.0 & 0.974 & 0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -1.0 & 0.015 \end{bmatrix} \quad (7.199)$$

In addition, since Brace 1 yields, the acceleration response must be calculated again using the new stiffness matrix (i.e., $\mathbf{K}_{1,1}$). Using Eq. 7.160a, it follows that

$$\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} = \ddot{\mathbf{x}}_k - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{x} \quad (7.200)$$

Substituting the numerical values into Eq. 7.200 gives

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_6 = \begin{bmatrix} -59.907 \\ -115.844 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27.9015 & -28.5005 \\ 45.8860 & -47.0445 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47.243 \\ -133.549 \end{bmatrix} \quad (7.201)$$

Then the calculation process continues using the $\mathbf{F}_N^{(0)}$ matrix in Eq. 7.199, and at time step $t = 9\Delta t = 0.09$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_9 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -1.2 & 1.0 & 0.974 & 0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -1.0 & 0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.30368 \\ 3.80034 \\ 27.0729 \\ 43.0482 \\ -47.106 \\ -165.641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.57314 \\ 4.22253 \\ 26.8198 \\ 41.3918 \\ -38.129 \\ -179.511 \end{bmatrix} \quad (7.202)$$

and the relative displacement between the two floors at $t = 9\Delta t = 0.09$ s is

$$(\Delta z_{-1})_9 = x_{2,9} - x_{1,9} = 4.22253 - 2.57314 = 1.64940 \text{ in.} \quad (7.203)$$

Since the relative displacement given in Eq. 7.203 is greater than the yield displacement of 1.5 in., Brace 2 yields. The resulting $\mathbf{F}_N^{(0)}$ matrix becomes

$$\mathbf{F}_N^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.2 & 0.978 & 0.011 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0.011 \end{bmatrix} \quad (7.204)$$

In addition, since Brace 2 yields, the acceleration response must be calculated again using the new stiffness matrix (i.e., $\mathbf{K}_{1,2}$). Using Eq. 7.160a, it follows that

$$\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} = \ddot{\mathbf{x}}_k - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_{1,2} \Delta \mathbf{x} \quad (7.205)$$

Substituting the numerical values into Eq. 7.205 gives

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_9 = \begin{bmatrix} -47.106 \\ -165.641 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26.8198 & -27.0729 \\ 41.3918 & -43.0482 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28.790 \\ -167.293 \end{bmatrix} \quad (7.206)$$

Then the calculation process continues using the $\mathbf{F}_N^{(0)}$ matrix in Eq. 7.204, and at time step $t = 22\Delta t = 0.22$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{22} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.2 & 0.978 & 0.011 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0.011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.48433 \\ 7.96410 \\ 20.7054 \\ 20.9052 \\ -78.664 \\ -169.528 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.68745 \\ 8.16468 \\ 19.9188 \\ 19.2100 \\ -82.900 \\ -168.569 \end{bmatrix} \quad (7.207)$$

حمید کاظمی

The relative displacements between the two floors at both time steps $t = 21\Delta t = 0.21$ s and $t = 22\Delta t = 0.22$ s are

$$(\Delta_{2-1})_{21} = x_{2,21} - x_{1,21} = 7.96410 - 5.48433 = 2.47978 \text{ in.} \quad (7.208)$$

$$(\Delta_{2-1})_{22} = x_{2,22} - x_{1,22} = 8.16468 - 5.68745 = 2.47723 \text{ in.} \quad (7.209)$$

Since the relative displacement between the two floors reduces from $(\Delta_{2-1})_{21} = 2.47978$ in. to $(\Delta_{2-1})_{22} = 2.47723$ in., unloading of Brace 2 occurs. This means that the stiffness matrix returns to K_1 , and the $F_N^{(n)}$ matrix is given in Eq. 7.199. The acceleration response must again be calculated using Eq. 7.201:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{22} = \begin{Bmatrix} -94.982 \\ -170.072 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.9188 & -20.7054 \\ 19.2100 & -20.9052 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -83.103 \\ -168.365 \end{Bmatrix} \quad (7.210)$$

Calculation continues using the $F_N^{(n)}$ matrix in Eq. 7.199, and at time step $t = 39\Delta t = 0.39$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{39} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -1.2 & 1.0 & 0.974 & 0.015 \\ 0 & 0 & 1.0 & -1.0 & 0.015 & 0.985 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7.44836 \\ 9.30966 \\ -0.2559 \\ -3.0307 \\ -161.806 \\ -104.706 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.43771 \\ 9.27412 \\ -1.8740 \\ -4.0778 \\ -161.893 \\ -102.788 \end{Bmatrix} \quad (7.211)$$

At this time step, since the displacement of the lower floor reduces from $x_{1,38} = 7.44836$ in. to $x_{1,39} = 7.43771$ in., unloading of Brace 1 occurs. This means that the stiffness matrix returns to the original stiffness K_1 , and the $F_N^{(n)}$ matrix is given in Eq. 7.194. The acceleration response must again be calculated using Eq. 7.160a:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{39} = \begin{Bmatrix} -162.244 \\ -104.706 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.8740 & 0.2559 \\ -4.0778 & 3.0307 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -161.041 \\ -102.788 \end{Bmatrix} \quad (7.212)$$

The calculation process continues. Note that the maximum displacement of the lower floor is $x_{1,\max} = x_{1,38} = 7.44836$ in., which causes an inelastic extension of Brace 1. Therefore, Brace 1 will begin to yield in compression at a displacement level of

$$x_{1y} = x_{1,\max} - 2x_y = 7.44836 - 2(1.5) = 4.44836 \text{ in.} \quad (7.213)$$

Similarly, the maximum relative displacement between the upper floor and the lower floor is $\Delta_{2-1,\max} = \Delta_{2-1,21} = 2.47978$ in. Therefore, Brace 2 will begin to yield in the opposite direction at a displacement level of

$$\Delta_{2-1y} = \Delta_{2-1,\max} - 2x_y = 2.47978 - 2(1.5) = -0.52022 \text{ in.} \quad (7.214)$$

The displacement and velocity responses are shown in Figures 7.27 and 7.28, respectively.

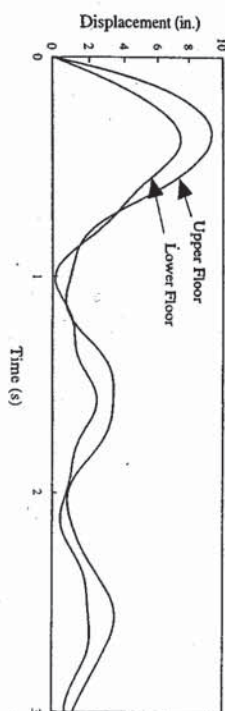


Figure 7.27 Floor Displacement Response

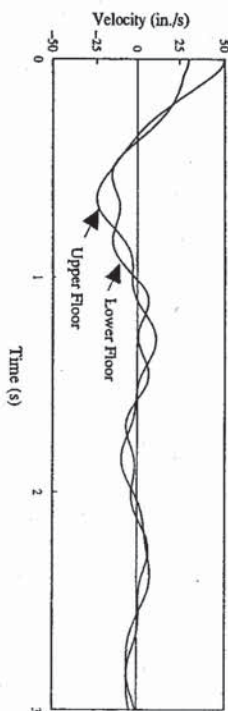


Figure 7.28 Floor Velocity Response

EXAMPLE 2 Forced Vibration of a 2DOF System

Consider the 2DOF system discussed in Example 1 with no initial displacement and velocity, but subjected to a bilinear pulse ground acceleration shown in Figure 7.14. Use the constant acceleration method with a time step size of $\Delta t = 0.01$ s (recall from Example 1 that $\Delta t = T_2/10 = 0.039$ s). The solution follows from Eq. 7.176 that

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F}_N^{(n)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(nEO)} \mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{H}_N^{(nEO)} \mathbf{a}_k \quad (7.215)$$

where, for the elastic structure, the matrices in Eq. 7.215 are

$$\mathbf{F}_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & -2.0 & 1.0 & 0.97 & 0.015 \\ 0 & 0 & 1.0 & -1.0 & 0.015 & 0.985 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_N^{(nEO)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.216)$$

$$\mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_k, \quad \mathbf{a}_k = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a_{sk}, \quad \mathbf{H}_N^{(nEO)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (7.217)$$

حميد کاظمه

حمید کاظمی

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{27} = \begin{Bmatrix} 129.155 \\ 154.995 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -14.1663 + 15.5882 \\ -27.9464 + 29.4963 \end{Bmatrix} \quad (7.220)$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.30854 + 4.15977 \\ -5.85785 + 5.57064 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 141.103 \\ 157.636 \end{Bmatrix}$$

Calculation continues using the $F_N^{(n)}$ matrix in Eq. 7.228, and at time step $t = 39\Delta t = 0.39$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}_{39} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.04512 \\ -7.93238 \\ 0.3724 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -14.1663 + 15.5882 \\ -27.9464 + 29.4963 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.03546 \\ -8.01681 \\ 1.5584 \end{Bmatrix} \quad (7.231)$$

At this time step, since the displacement of the lower floor reduces from $x_{1,38} = -5.04512$ in. to $x_{1,39} = -5.03546$ in., unloading of Brace 1 occurs. This means that the stiffness matrix is equal to K_2 as given in Eq. 7.183, and the $F_N^{(n)}$ matrix is equal to

$$F_N^{(n)} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.03546 \\ -8.01681 \\ 1.5584 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -14.1663 + 15.5882 \\ -27.9464 + 29.4963 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.03546 \\ -8.01681 \\ 1.5584 \end{Bmatrix} \quad (7.232)$$

The acceleration response must be calculated again using the new stiffness matrix (i.e., K_2). Using Eq. 7.160a, it follows that

$$\ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k - \Delta a - M^{-1}CA\ddot{x} - M^{-1}K_2\Delta x. \quad (7.233)$$

Substituting the numerical values into Eq. 7.233 gives

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{39} = \begin{Bmatrix} 118.600 \\ 180.332 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.5584 - 0.3724 \\ -7.5415 + 9.3448 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 115.184 \\ 181.597 \end{Bmatrix} \quad (7.234)$$

Then the calculation process continues using the $F_N^{(n)}$ matrix in Eq. 7.232, and at time step $t = 50\Delta t = 0.50$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}_{50} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.00005 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.01 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.03546 \\ -8.01681 \\ 1.5584 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -14.1663 + 15.5882 \\ -27.9464 + 29.4963 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.03546 \\ -8.01681 \\ 1.5584 \end{Bmatrix} \quad (7.235)$$

The relative displacements between the two floors at both time steps $t = 49\Delta t = 0.49$ s and $t = 50\Delta t = 0.50$ s are

$$(\Delta_{2-1})_{49} = x_{2,49} - x_{1,49} = -7.85334 + 4.38723 = -3.46611 \text{ in.} \quad (7.236)$$

$$(\Delta_{2-1})_{50} = x_{2,50} - x_{1,50} = -7.73589 + 4.28301 = -3.45288 \text{ in.} \quad (7.237)$$

Since the relative displacement between the two floors reduces from $(\Delta_{2-1})_{49} = -3.46611$ in. to $(\Delta_{2-1})_{50} = -3.45288$ in., unloading of Brace 2 occurs. This means that the stiffness matrix returns to K_1 , and the $F_N^{(n)}$ matrix is given in Eq. 7.216. The acceleration response must again be calculated using Eq. 7.160a:

$$\ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k - \Delta a - M^{-1}CA\ddot{x} - M^{-1}K_1\Delta x. \quad (7.238)$$

Substituting the numerical values into Eq. 7.238 gives

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}_{50} = \begin{Bmatrix} 41.734 \\ 181.568 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 12.6531 - 10.8371 \\ 10.6304 - 10.2130 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 32.558 \\ 179.905 \end{Bmatrix} \quad (7.239)$$

The calculation process continues. Note that the maximum displacement of the lower floor is $x_{1,\max} = x_{1,38} = -5.04512$ in., which causes an inelastic compression of Brace 1. Therefore, Brace 1 will begin to yield in tension at a displacement level of

$$x_{1y} = x_{1,\max} + 2x_y = -5.04512 + 2(1.5) = -2.04512 \text{ in.} \quad (7.240)$$

Similarly, the maximum relative displacement between the upper floor and the lower floor is $\Delta_{2-1,\max} = \Delta_{2-1,49} = -3.46611$ in. Therefore, Brace 2 will begin to yield in the opposite direction at a displacement level of

$$\Delta_{2-1y} = \Delta_{2-1,\max} + 2x_y = -3.46611 + 2(1.5) = -0.46611 \text{ in.} \quad (7.241)$$

The displacement and velocity responses are shown in Figures 7.29 and 7.30, respectively.

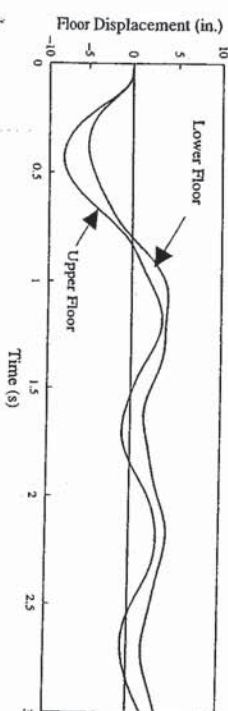


Figure 7.29 Floor Displacement Response

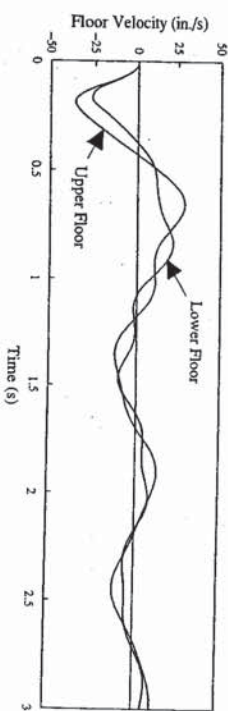


Figure 7.30 Floor Velocity Response

حمید کاظمی

EXAMPLE 3 Response of a 2DOF System Subjected to a Modified El-Centro Earthquake

Consider the 2DOF system discussed in Examples 1 and 2, that is, $A_1 = A_2 = A = 2.5 \text{ in.}^2$, $E = 37,500 \text{ ksi}$, $\alpha = 20\%$, and

$$M = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (7.242)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}, \quad K_{12} = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} = \alpha K. \quad (7.243)$$

Let the yielding of the braces be equal to $\epsilon_y = 0.006$ for both tension and compression; then these braces will yield at a relative displacement of

$$x_y = \frac{L\epsilon_y}{\cos \theta} = \frac{(50)(12)(0.006)}{4/5} = 4.5 \text{ in.} \quad (7.244)$$

and therefore Brace 1 yields at $|x_1| = 4.5 \text{ in.}$ and Brace 2 yields at $|x_2 - x_1| = 4.5 \text{ in.}$ Assume that the system has no initial displacement and velocity and that it is subjected to the modified El-Centro earthquake ground motion shown in Figure 6.11.

Use the constant average acceleration method (i.e., $\delta = \frac{\pi}{2}$ and $\alpha = \frac{\pi}{2}$) with a time step size of $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ (recall from Example 1 that $\Delta t = T_g/10 = 0.039 \text{ s}$). Then the solution follows from Eq. 7.176 that

$$q_{k+1} = F_N^{(n)} q_k + H_N^{(nEO)} a_{k+1} - H_N^{(nEO)} a_k = F_N^{(n)} q_k + H_N^{(nEO)} (a_{k+1} - a_k) \quad (7.245)$$

where

$$q_k = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_k, \quad a_k = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a_k. \quad (7.246)$$

The matrices in Eq. 7.245 can be calculated using Eqs. 7.168, 7.173 and 7.175:

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (0.02) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} (0.02)^2 \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 & -0.02 \\ -0.02 & 1.02 \end{bmatrix} \quad (7.247)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (0.02) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} (0.02)^2 \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.032 & -0.02 \\ -0.02 & 1.02 \end{bmatrix} \quad (7.248)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (0.02) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} (0.02)^2 \begin{bmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.032 & -0.012 \\ -0.012 & 1.012 \end{bmatrix} \quad (7.249)$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (0.02) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} (0.02)^2 \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.024 & -0.012 \\ -0.012 & 1.012 \end{bmatrix} \quad (7.250)$$

Inverting the matrices given in Eqs. 7.247 to 7.250 results in

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.961901 & 0.018861 \\ 0.018861 & 0.980762 \end{bmatrix}, \quad B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.969361 & 0.019007 \\ 0.019007 & 0.980768 \end{bmatrix} \quad (7.251)$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.969126 & 0.011492 \\ 0.011492 & 0.988279 \end{bmatrix}, \quad B_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.976698 & 0.011581 \\ 0.011581 & 0.988280 \end{bmatrix} \quad (7.252)$$

Therefore, it follows from Eq. 7.173a that

$$F_N^{(n)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.019619 & 0.000189 & 0.000192 & 0.000004 \\ 0.0 & 1.0 & 0.000189 & 0.019808 & 0.000004 & 0.000196 \\ 0.0 & 0.0 & 0.961901 & 0.018861 & 0.019238 & 0.000377 \\ 0.0 & 0.0 & 0.018861 & 0.980762 & 0.000377 & 0.019615 \\ 0.0 & 0.0 & -3.809883 & 1.886081 & 0.923802 & 0.037722 \\ 0.0 & 0.0 & 1.886081 & -1.923802 & 0.037722 & 0.961524 \end{bmatrix} \quad (7.253)$$

$$F_1^{(n)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.019771 & 0.000190 & 0.000194 & 0.000004 \\ 0.0 & 1.0 & 0.000192 & 0.019808 & 0.000004 & 0.000196 \\ 0.0 & 0.0 & 0.977116 & 0.019007 & 0.019387 & 0.000380 \\ 0.0 & 0.0 & 0.019159 & 0.980765 & 0.000380 & 0.019615 \\ 0.0 & 0.0 & -2.288451 & 1.900707 & 0.938721 & 0.038014 \\ 0.0 & 0.0 & 1.915913 & -1.923516 & 0.038014 & 0.961530 \end{bmatrix} \quad (7.254)$$

$$F_2^{(n)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.019768 & 0.000038 & 0.000194 & 0.000002 \\ 0.0 & 1.0 & 0.000037 & 0.019961 & 0.000002 & 0.000198 \\ 0.0 & 0.0 & 0.976787 & 0.003831 & 0.019383 & 0.000230 \\ 0.0 & 0.0 & 0.003677 & 0.996093 & 0.000230 & 0.019766 \\ 0.0 & 0.0 & -2.32131 & 0.383054 & 0.938252 & 0.022983 \\ 0.0 & 0.0 & 0.367732 & -0.390715 & 0.022983 & 0.976557 \end{bmatrix} \quad (7.255)$$

$$F_{12}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.019922 & 0.000039 & 0.000195 & 0.000002 \\ 0.0 & 1.0 & 0.000039 & 0.019961 & 0.000002 & 0.000198 \\ 0.0 & 0.0 & 0.992233 & 0.003861 & 0.019534 & 0.000232 \\ 0.0 & 0.0 & 0.003861 & 0.996093 & 0.000232 & 0.019766 \\ 0.0 & 0.0 & -0.776726 & 0.386047 & 0.953396 & 0.023163 \\ 0.0 & 0.0 & 0.386047 & -0.390679 & 0.023163 & 0.976559 \end{bmatrix} \quad (7.256)$$

and from Eq. 7.175 that

$$H_N^{(nEO)} = \begin{bmatrix} -0.000096 & -0.000002 \\ -0.000002 & -0.000098 \\ -0.009619 & -0.000189 \\ -0.000189 & -0.009808 \\ -0.961901 & -0.018861 \\ -0.018861 & -0.980762 \end{bmatrix}, \quad H_1^{(nEO)} = \begin{bmatrix} -0.000097 & -0.000002 \\ -0.000002 & -0.000098 \\ -0.009694 & -0.000190 \\ -0.000190 & -0.009808 \\ -0.969361 & -0.019007 \\ -0.019007 & -0.980765 \end{bmatrix} \quad (7.257)$$

حميد کاظمه

$$\mathbf{H}_2^{(EO)} = \begin{bmatrix} -0.000097 & -0.000001 \\ -0.000001 & -0.000099 \\ -0.009691 & -0.000115 \\ -0.000115 & -0.009883 \\ -0.969126 & -0.011492 \\ -0.011492 & -0.988279 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{12}^{(EO)} = \begin{bmatrix} -0.000098 & -0.000001 \\ -0.000001 & -0.000099 \\ -0.009767 & -0.000116 \\ -0.000116 & -0.009883 \\ -0.976698 & -0.011581 \\ -0.011581 & -0.988280 \end{bmatrix} \quad (7.258)$$

At time step $k = 0$, the initial acceleration is

$$\ddot{\mathbf{x}}_0 = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_0 = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a_{so} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x}_0. \quad (7.259)$$

$$= -\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 200 & -100 \\ 100 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.993 \\ 0.993 \end{Bmatrix}$$

At time step $t = \Delta t = 0.02$ s, the structure will respond in the elastic range. Therefore, using $\mathbf{F}_N^{(o)}$ and $\mathbf{H}_N^{(EO)}$ from Eqs. 7.253 and 7.257, respectively, it follows from Eq. 7.245 that the response is

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_N^{(EO)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -7.651 + 0.993 \\ 0.993 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00085 \\ 0.00086 \\ 0.0848 \\ 0.0864 \\ -7.484 \\ 7.647 \end{Bmatrix} \quad (7.260)$$

$$(\Delta_{2-1})_1 = x_{2,1} - x_{1,1} = 0.00086 - 0.00085 = 0.00001 \text{ in.} \quad (7.261)$$

Then, at time step $t = 2\Delta t = 0.04$ s, the ground acceleration is -7.148 in./s^2 . It follows from Eq. 7.245 that the response is

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0.00085 \\ 0.00086 \\ 0.0848 \\ 0.0864 \\ -7.484 \\ 7.647 \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_N^{(EO)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -7.148 + 7.651 \\ 0.2342 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00395 \\ 0.00407 \\ 0.2251 \\ 0.2342 \\ 6.550 \\ 7.127 \end{Bmatrix} \quad (7.262)$$

$$(\Delta_{2-1})_2 = x_{2,2} - x_{1,2} = 0.00407 - 0.00395 = 0.00012 \text{ in.} \quad (7.263)$$

The calculation process continues, and at time step $t = 139\Delta t = 2.78$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_{139} = \begin{Bmatrix} 4.31573 \\ 6.62956 \\ 18.5755 \\ 40.6829 \\ -209.989 \\ -266.822 \end{Bmatrix} \quad (7.264)$$

$$(\Delta_{2-1})_{139} = x_{2,139} - x_{1,139} = 6.62956 - 4.31573 = 2.31383 \text{ in.} \quad (7.265)$$

The ground acceleration at this time step is $0.0345g$, and the ground acceleration at the next time step (i.e., $t = 140\Delta t = 2.80$ s) is $-0.017g$. It follows from Eq. 7.245 that the response at the next time step is

$$\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_{140} = \mathbf{F}_N^{(o)} \begin{Bmatrix} 4.31573 \\ 6.62956 \\ 18.5755 \\ 40.6829 \\ -209.989 \\ -266.822 \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_N^{(EO)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -6.723 + 13.331 \\ 35.1381 \\ -178.424 \\ -287.661 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.64840 \\ 7.38777 \\ 14.6914 \\ 35.1381 \\ -178.424 \\ -287.661 \end{Bmatrix} \quad (7.266)$$

$$(\Delta_{2-1})_{140} = x_{2,140} - x_{1,140} = 7.38777 - 4.64840 = 2.73937 \text{ in.} \quad (7.267)$$

At this displacement of $x_{1,140} = 4.64840$ in., Brace 1 yields, and therefore the resulting $\mathbf{F}_N^{(o)}$ and $\mathbf{H}_N^{(EO)}$ matrices become $\mathbf{F}_N^{(o)}$ and $\mathbf{H}_N^{(EO)}$, as given in Eqs. 7.254 and 7.257, respectively.

Now consider the method of using fictitious forces to adjust for the imbalance of forces as discussed in Example 4 of Section 7.2. The horizontal components of forces in Braces 1 and 2 at $x_{1,140} = 4.64840$ in. and $(\Delta_{2-1})_{140} = 2.73937$ in. are

$$F_{21,140} = (100)(4.5) + (20)(4.64840 - 4.5) = 453.30 \text{ kip} \quad (7.268)$$

$$F_{22,140} = \left(\frac{AE}{L} \cos^2 \theta \right) (\Delta_{2-1})_{140} = (100)(2.73937) = 273.94 \text{ kip.} \quad (7.269)$$

Since $F_{21,140} = 453.30$ kip acts only on the lower floor mass whereas $F_{22,140} = 273.94$ kip acts on both the lower and upper floor masses (i.e., $+273.94$ kip acting on the upper floor mass and -273.94 kip acting on the lower floor mass), the brace forces acting on each degree of freedom are

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{21} \\ \hat{F}_{22} \end{Bmatrix}_{140} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} F_{21,140} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} F_{22,140} = \begin{Bmatrix} 453.30 - 273.94 \\ 273.94 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 179.36 \\ 273.94 \end{Bmatrix} \text{ kip.} \quad (7.270)$$

However, from the dynamic equilibrium equation of motion, the horizontal components of forces in Braces 1 and 2 are

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{21} \\ \hat{F}_{22} \end{Bmatrix}_{140} = -\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{140} - \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}_{140} - \mathbf{M} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a_{g,140} = \begin{Bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -178.424 \\ -287.661 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 14.6914 \\ 35.1381 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -6.723 \\ -273.94 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 190.90 \\ 273.94 \end{Bmatrix} \quad (7.271)$$

and therefore there is an imbalance of forces when Brace 1 yields, and it is

$$\begin{Bmatrix} \Delta \hat{F}_{21} \\ \Delta \hat{F}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_{21}^{(o)} \\ \hat{F}_{22}^{(o)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{F}_{21} \\ \hat{F}_{22} \end{Bmatrix}_{140} = \begin{Bmatrix} 190.90 \\ 273.94 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 179.36 \\ 273.94 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.54 \\ 0.00 \end{Bmatrix} \text{ kip.} \quad (7.272)$$

It follows from Eq. 7.130 that Eq. 7.245 must be modified, and it becomes

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F}_N^{(o)} \mathbf{q}_k + \mathbf{H}_N^{(EO)} (\mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_k) + \mathbf{H}_N^{(o)} \Delta \hat{\mathbf{F}}_k \quad (7.243)$$

where $\mathbf{H}_N^{(o)}$ is given in Eq. 7.173b:

حمید کاظمی

$$\mathbf{H}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.000096 & 0.000002 \\ 0.000002 & 0.000098 \\ 0.009619 & 0.000189 \\ 0.000189 & 0.009808 \\ 0.961901 & 0.018861 \\ 0.018861 & 0.980762 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.000097 & 0.000002 \\ 0.000002 & 0.000098 \\ 0.009694 & 0.000190 \\ 0.000190 & 0.009808 \\ 0.969361 & 0.019007 \\ 0.019007 & 0.980765 \end{bmatrix} \quad (7.274)$$

$$\mathbf{H}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.000097 & 0.000001 \\ 0.000001 & 0.000099 \\ 0.009691 & 0.000115 \\ 0.000115 & 0.009883 \\ 0.969126 & 0.011492 \\ 0.011492 & 0.988279 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.000098 & 0.000001 \\ 0.000001 & 0.000099 \\ 0.009767 & 0.000116 \\ 0.000116 & 0.009883 \\ 0.976698 & 0.011581 \\ 0.011581 & 0.988280 \end{bmatrix} \quad (7.275)$$

Since Brace 1 yields at time step $t = 140\Delta t = 2.80$ s, it follows that $\mathbf{H}_1^{(0)}$ in Eq. 7.274 will be used in Eq. 7.273 to calculate the next time step:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{141} = \mathbf{F}_1^{(0)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_1^{(0)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.64840 \\ 7.38777 \\ 14.6914 \\ 35.1381 \\ -178.424 \\ -287.661 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30.719 + 6.724 \\ 11.54 \\ 0.00 \\ 29.2755 \\ -110.034 \\ -298.603 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.91338 \\ 8.03191 \\ 11.8068 \\ 29.2755 \\ -110.034 \\ -298.603 \end{Bmatrix} \quad (7.276)$$

$$(\Delta_2-1)_{141} = x_{2,141} - x_{1,141} = 8.03191 - 4.91338 = 3.11853 \text{ in.} \quad (7.277)$$

$$F_{1,141} = (100)(4.5) + (20)(4.91338 - 4.5) = 458.27 \text{ kip} \quad (7.278)$$

$$F_{2,141} = (100)(3.11853) = 311.85 \text{ kip.} \quad (7.279)$$

The brace forces acting on each degree of freedom are

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{11} \\ \hat{F}_{12} \end{Bmatrix}_{141} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} F_{1,141} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} F_{2,141} = \begin{Bmatrix} 458.27 - 311.85 \\ 311.85 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 146.42 \\ 311.85 \end{Bmatrix} \text{ kip} \quad (7.280)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{11}^{(0)} \\ \hat{F}_{12}^{(0)} \end{Bmatrix}_{141} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -110.034 \\ -298.603 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 11.8068 \\ 29.2755 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -30.719 \\ -298.603 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 146.42 \\ 311.85 \end{Bmatrix} \quad (7.281)$$

and therefore the imbalance of forces is

$$\begin{Bmatrix} \Delta \hat{F}_{11} \\ \Delta \hat{F}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_{11}^{(0)} \\ \hat{F}_{12}^{(0)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{F}_{11} \\ \hat{F}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 146.42 \\ 311.85 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 146.42 \\ 311.85 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{Bmatrix} \text{ kip} \quad (7.282)$$

which means that the imbalance of forces has been corrected.

The calculation process continues, and at time step $t = 148\Delta t = 2.96$ s, the response is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{148} = \begin{Bmatrix} 5.89769 \\ 9.07667 \\ -0.1897 \\ -15.1666 \\ -187.981 \\ -316.059 \end{Bmatrix} \quad (7.283)$$

$$(\Delta_2-1)_{148} = x_{2,148} - x_{1,148} = 9.07667 - 5.89769 = 3.17898 \text{ in.} \quad (7.284)$$

At this level of response, the velocity response for both the lower and upper floor masses becomes negative, which means that the displacement has reached maximum value and thus Brace 1 begins to unload. Therefore, $\mathbf{F}_1^{(0)}$ and $\mathbf{H}_1^{(0)}$ in Eqs. 7.253 and 7.257 will be used for the next time step calculation. The ground acceleration at this time step is $0.0340g$, and the ground acceleration at the next time step (i.e., $t = 149\Delta t = 2.98$ s) is $0.0771g$. It follows from Eq. 7.245 that the response at the next time step is

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{149} = \mathbf{F}_1^{(0)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \mathbf{H}_1^{(0)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.89769 \\ 9.07667 \\ -0.1897 \\ -15.1666 \\ -187.981 \\ -316.059 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 29.791 - 13.138 \\ -21.3154 \\ -229.796 \\ -298.816 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.85212 \\ 8.71185 \\ -4.3674 \\ -21.3154 \\ -229.796 \\ -298.816 \end{Bmatrix} \quad (7.285)$$

$$(\Delta_2-1)_{149} = x_{2,149} - x_{1,149} = 8.71185 - 5.85212 = 2.85973 \text{ in.} \quad (7.286)$$

$$F_{1,149} = (100)(4.5 - 5.89769 + 5.85212) + (20)(5.89769 - 4.5) = 473.39 \text{ kip} \quad (7.287)$$

$$F_{2,149} = (100)(2.85973) = 285.97 \text{ kip.} \quad (7.288)$$

The brace forces acting on each degree of freedom are

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{11} \\ \hat{F}_{12} \end{Bmatrix}_{149} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} F_{1,149} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} F_{2,149} = \begin{Bmatrix} 470.39 - 285.97 \\ 285.97 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 187.42 \\ 285.97 \end{Bmatrix} \text{ kip} \quad (7.289)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{11}^{(0)} \\ \hat{F}_{12}^{(0)} \end{Bmatrix}_{149} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -229.796 \\ -298.816 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.3674 \\ -21.3154 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -29.791 \\ -298.816 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 187.42 \\ 285.97 \end{Bmatrix} \quad (7.290)$$

and therefore the imbalance of forces is

$$\begin{Bmatrix} \Delta \hat{F}_{11} \\ \Delta \hat{F}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_{11}^{(0)} \\ \hat{F}_{12}^{(0)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{F}_{11} \\ \hat{F}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 187.42 \\ 285.97 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 187.42 \\ 285.97 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{Bmatrix} \text{ kip.} \quad (7.291)$$

Note from Eq. 7.291 that there is no imbalance of forces during unloading because the change in stiffness from $\mathbf{F}_1^{(0)}$ to $\mathbf{F}_1^{(0)}$ occurs in different time steps, whereas the change in stiffness from $\mathbf{F}_1^{(0)}$ to $\mathbf{F}_1^{(0)}$ during loading (see Eqs. 7.266 to 7.272) is within one time step from $k = 139$ to $k = 140$. Also, note that the maximum displacement of the lower floor mass has reached is 5.89769 in., which means that it will yield negatively when this lower floor mass reaches

$$x_{y1} = 5.89769 - 2(4.5) = -3.10231 \text{ in.} \quad (7.292)$$

حميد کاظمه

Calculation continues using $F_N^{(9)}$ and $H_N^{(9EO)}$ in Eq. 7.245 until time step $t = 165\Delta t = 3.30$ s, when the response is

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{165} = \begin{Bmatrix} -3.05789 \\ -4.90826 \\ -24.7757 \\ -44.7627 \end{Bmatrix} \quad (7.293)$$

$$(\Delta_{2-1})_{165} = x_{2,165} - x_{1,165} = -4.90826 - (-3.05789) = -1.85037 \text{ in.} \quad (7.294)$$

The ground acceleration at this time step is $0.248g$, and the ground acceleration at the next time step (i.e., $t = 166\Delta t = 3.32$ s) is $0.375g$. It follows from Eq. 7.245 that the response at the next time step is

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}_{166} = F_N^{(9)} + H_N^{(9EO)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.52959 \\ -5.78253 \\ -22.3934 \\ -42.6641 \end{Bmatrix} \quad (7.295)$$

$$(\Delta_{2-1})_{166} = x_{2,166} - x_{1,166} = -5.78253 - (-3.52959) = -2.25295 \text{ in.} \quad (7.296)$$

Since the displacement is $x_{1,166} = -3.52959$ in., which exceeds the yield displacement computed in Eq. 7.292, Brace 1 yields negatively. The resulting $F_N^{(9)}$ and $H_N^{(9EO)}$ matrices become $F_N^{(10)}$ and $H_N^{(10EO)}$ as given in Eqs. 7.254 and 7.257, respectively. The horizontal components of forces in Braces 1 and 2 at this time are

$$F_{x1,166} = (100)(-4.5) + (20)(-3.52959 + 4.5) = -430.60 \text{ kip} \quad (7.297)$$

$$F_{x2,166} = \left(\frac{AE}{L} \cos^2 \theta \right) (\Delta_{2-1})_{166} = (100)(-2.25295) = -225.30 \text{ kip.} \quad (7.298)$$

Therefore, the brace forces acting on each degree of freedom are

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix}_{166} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} F_{x1,166} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} F_{x2,166} = \begin{Bmatrix} -430.60 - (-225.30) \\ -225.30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -205.30 \\ -225.30 \end{Bmatrix} \text{ kip} \quad (7.299)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{F}_{x1}^{(10)} \\ \ddot{F}_{x2}^{(10)} \end{Bmatrix}_{166} = \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 96.702 \\ 100.665 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -22.3934 \\ -42.6641 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 144.900 \\ 141.529 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -239.48 \\ -225.30 \end{Bmatrix} \quad (7.300)$$

and therefore the imbalance of forces is

$$\begin{Bmatrix} \Delta \ddot{F}_{x1} \\ \Delta \ddot{F}_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{F}_{x1}^{(10)} \\ \ddot{F}_{x2}^{(10)} \end{Bmatrix}_{166} - \begin{Bmatrix} \ddot{F}_{x1} \\ \ddot{F}_{x2} \end{Bmatrix}_{166} = \begin{Bmatrix} -239.48 \\ -225.30 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -205.30 \\ -225.30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -34.18 \\ 0.00 \end{Bmatrix} \text{ kip.} \quad (7.301)$$

This imbalance of forces will be adjusted in the next time step.

Calculation continues, and the displacement and velocity responses within a 20-s period are shown in Figures 7.31 and 7.32.

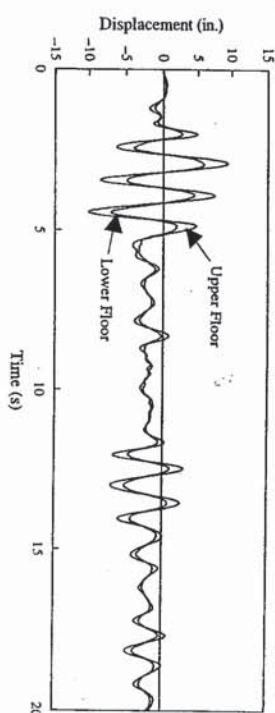


Figure 7.31 Floor Displacement Response

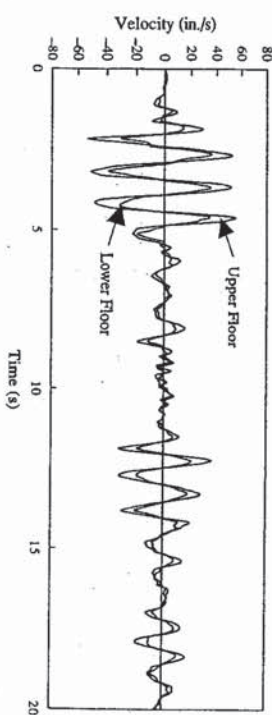


Figure 7.32 Floor Velocity Response

7.4 INELASTIC DISPLACEMENT AND FORCE ANALOGY METHOD

Previous sections of this chapter presented an inelastic structural response method where the stiffness of the structural members is the structural property that changes as a function of time. In this section and the rest of this chapter, a different method is presented, called the *force analogy method*. This method was first proposed by Professor T. H. Lin. Before the details of the force analogy method are presented, it is necessary to present the concept of an *inelastic displacement*.

The objective of changing the stiffness in the previous sections of this chapter was to capture the force in the structure after yielding. Consider the SDOF spring-mass system as shown in Figure 7.33a with the spring force versus deflection curve shown in Figure 7.33b. The force in the spring, F_s , for a displacement of the spring greater than the yield displacement can be expressed as

$$F_s = F_y + F_a \quad (7.302)$$

where F_y represents the yield force due to the elastic portion of the displacement and F_a represents the force due to the displacement after yielding. Let the initial stiffness be denoted by k_e and the post-yield stiffness be denoted by k_r . It then follows from Eq. 7.302 that

$$F_s = k_e x_y + k_r x_i \quad (7.303)$$

where x_y is the displacement of the spring at yield and x_i is the part of the total spring displacement that occurs after yielding. The total displacement of the spring, x , is

حمید کاظمی

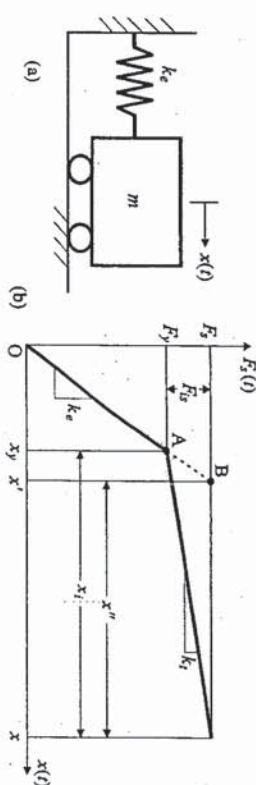


Figure 7.33 SDOF System with Bilinear Force versus Deflection Curve

and therefore Eq. 7.303 becomes

$$F_s = k_e x_y + k_i (x - x_y) \quad (7.305)$$

$$x = x_y + x'' \quad (7.304)$$

Equation 7.305 shows the relationship between the pre- and post-yield stiffness and the force in the spring.

In the force analogy method, the inelastic structural response focuses on a change in displacement, not stiffness, to give the same level of force. As shown in Figure 7.33b, the elastic displacement, x' , is calculated by extending the initial stiffness line (i.e., OA) until it equals the force in the spring F_s at the total displacement x . This point is denoted as B. At this force level, the total displacement is x , and the difference between the total displacement and the elastic displacement is called the *inelastic displacement*, denoted by x'' :

$$x = x' + x'' \quad (7.306)$$

The force in the spring at the displacement x is given by the equation

$$F_s = k_e x' \quad (7.307)$$

Solving for x' in Eq. 7.306 and substituting the result into Eq. 7.307 gives

$$F_s = k_e (x - x'') \quad (7.308)$$

Equation 7.308 shows the effect that a change in the displacement of the system (i.e., x) has on the force level. The elastic displacement is not a constant and it changes as the force changes, and the elastic displacement is not equal to the yield displacement, that is,

$$x' \neq x_y \quad (7.309)$$

The basic concept of the force analogy method is to replace the inelastic displacement, x'' , by a fictitious force (i.e., a force is an analogy to the inelastic displacement). In the SDOF spring-mass system, assume that an unknown force is applied and the resulting total displacement is x . The objective is to calculate the spring force, F_s , and the inelastic displacement, x'' . Equation 7.308 gives one equation for solving for the two unknowns. Another equation is provided by the force deflection relationship described in Figure 7.33b, and based on this relationship both the yield force F_y and the yield displacement x_y are known. Equation 7.308 can be rewritten as

$$F_s + k_e x'' = k_e x \quad (7.310)$$

with the unknowns F_s and x'' on the left-hand side. To solve Eq. 7.310, the total displacement level is compared with the yield displacement. If the total displacement is less than

the yield displacement, then the response will be elastic (i.e., no inelastic displacement and $x'' = 0$). Then it follows that the spring force is obtained from Eq. 7.310, where

$$F_s = k_e x, \quad x'' = 0. \quad (7.311)$$

If the total displacement is greater than the yield displacement, then F_s in Eq. 7.310 becomes

$$F_s = F_y + k_i (x - x_y) \quad (7.312)$$

Substituting Eq. 7.312 into Eq. 7.310 gives

$$F_y + k_i (x - x_y) + k_e x'' = k_e x \quad (7.313)$$

Rearranging terms in Eq. 7.313 and solving for x'' gives

$$x'' = x - \left(\frac{F_y}{k_e} \right) - \left(\frac{k_i}{k_e} \right) (x - x_y) = \left(\frac{k_e - k_i}{k_e} \right) x + \left(\frac{k_i}{k_e} \right) x_y - \left(\frac{F_y}{k_e} \right) \quad (7.314)$$

Recall from Figure 7.33b that $F_y/k_e = x_y$; it follows from Eq. 7.314 that

$$x'' = \left(\frac{k_e - k_i}{k_e} \right) x + \left(\frac{k_i - k_e}{k_e} \right) x_y = \left(\frac{k_e - k_i}{k_e} \right) (x - x_y) = \left(1 - \frac{k_i}{k_e} \right) (x - x_y) \quad (7.315)$$

In summary, the results are

$$x'' = \begin{cases} 0 & x \leq x_y \\ \left(1 - k_i/k_e \right) (x - x_y) & x > x_y \end{cases}, \quad F_s = \begin{cases} k_e x & x \leq x_y \\ F_y + k_i (x - x_y) & x > x_y \end{cases} \quad (7.316)$$

Note that the derivation of the force analogy method made no assumption as to whether the bilinear model is of strain-hardening type, elastic-plastic type, or strain-softening type. Thus, this method can be applied to any type of spring-hardening model.

In addition, note that in Eq. 7.315, $(x - x_y) = x''$, which is the displacement after yielding. Thus it follows from Eq. 7.315 that

$$x'' = \left(1 - \frac{k_i}{k_e} \right) x'' \quad (7.317)$$

Equation 7.317 and Figure 7.34 show that the inelastic displacement is always less than the displacement after yielding for a spring with strain hardening. When the spring is of the strain-softening type (i.e., $k_i < 0$), then Eq. 7.317 and Figure 7.34 show that the inelastic displacement is always greater than the displacement after yielding. Finally, for an elastic-plastic spring, $k_i = 0$, and therefore the inelastic displacement is equal to the displacement after yielding (i.e., $x'' = x''$) (see Figure 7.34).

The inelastic displacement represents the inelasticity of the structure. This is because the inelastic displacement remains in the spring when the force F_s is removed from the spring-mass system. As shown in Figure 7.35, when the force F_s is unloaded from the displacement x (i.e., at point C), the path of the unloading follows line CD and the slope is equal to the initial stiffness k_e . When the force F_s is completely removed (i.e., at point D), the residual displacement is equal to inelastic displacement:

$$x'' = x - x' \quad (7.318)$$

حمید کاظمی

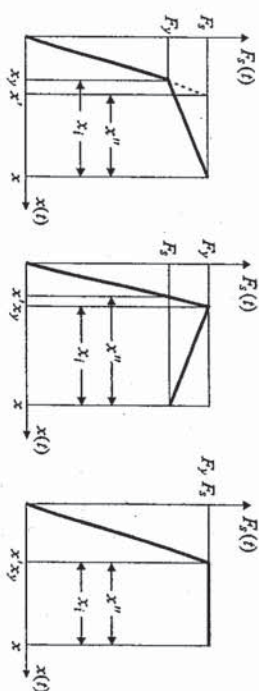


Figure 7.34 Comparison between Displacement after Yielding and Inelastic Displacement

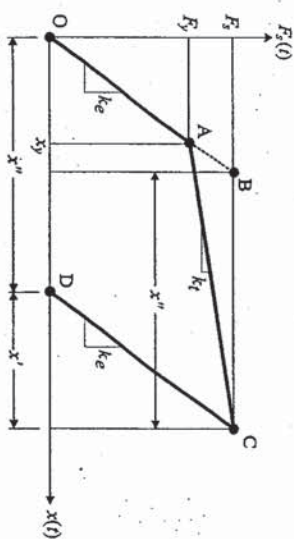


Figure 7.35 Path of Force Deflection Curve

EXAMPLE 1 Bilinear Spring-Mass System

Consider a bilinear spring-mass system shown in Figure 7.35, which has the stiffness properties

$$k_e = 500 \text{ k/in.}, \quad k_t = 100 \text{ k/in.}, \quad x_y = 1.0 \text{ in.} \quad (7.319)$$

At a total displacement of $x = 0.5 \text{ in.}$, it follows from Eq. 7.316 that

$$x'' = 0 \text{ in.} \quad (7.320)$$

$$F_2 = k_t x = (500)(0.5) = 250 \text{ kip.} \quad (7.321)$$

Similarly, at a total displacement of $x = 3.0 \text{ in.}$, it follows from Eq. 7.316 that

$$x'' = (1 - k_t/k_e)(x - x_y) = \left(1 - \frac{100}{500}\right)(3.0 - 1.0) = 2.4 \text{ in.} \quad (7.322)$$

$$F_2 = F_y + k_t(x - x_y) = (500)(1.0) + (100)(3.0 - 1.0) = 700 \text{ kip.} \quad (7.323)$$

EXAMPLE 2 Trilinear Force-Deflection Relationship

A powerful approach that structural engineers often use in modeling a multilinear force versus deflection curve is to combine many bilinear force versus deflection relationships. In this example, two bilinear force versus deflection relationships are combined to form a trilinear force versus deflection curve. Consider the spring-mass system shown in Figure 7.36, where two springs with different stiffnesses, denoted k_1 and k_2 , are attached to the mass.

The force versus deflection relationships for Spring 1 and Spring 2 are shown in Figures 7.37a and 7.37b, respectively. The yield displacement for Spring 1 is assumed to be greater than Spring 2. Because the two springs are in parallel, a displacement of x

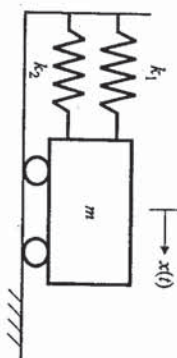


Figure 7.36 SDOF System with Two Springs

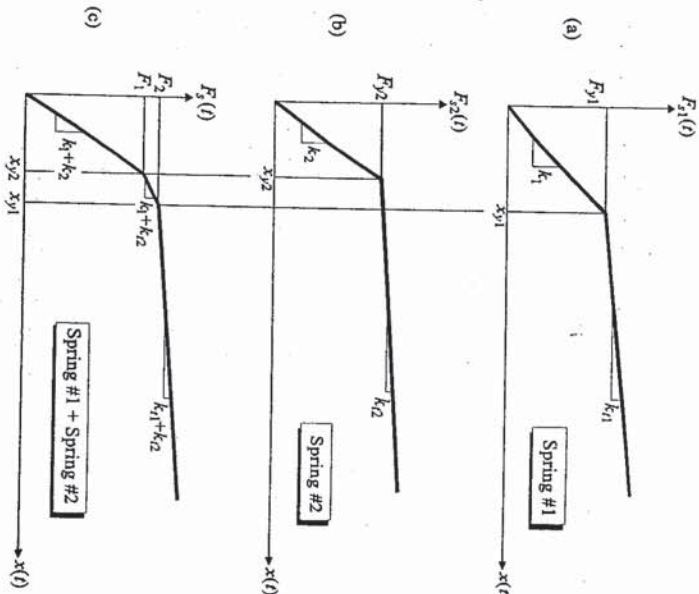


Figure 7.37 Trilinear Force-Deflection Relationship

حمید کاظمی

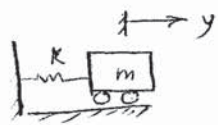
نکات درسی

حمید کاظمی

حميد کاظمه

نکات دینامیک ساده :

۱- اصل "D'Alembert" معادله دینامیکی حرکت جسم متحرک بر مبنای اصل دینامیک قائم با معادله دینامیک حرکت جسم در حالت استقراری است.

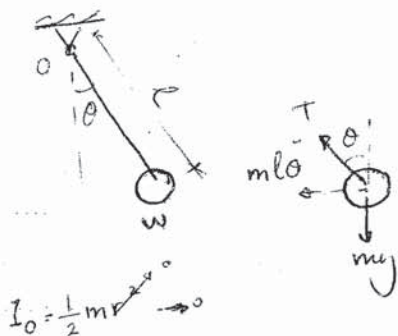


$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow ky_0 = w \\ (ky_0 + y) &= w \quad ky \\ -(w + ky) + w &= m\ddot{y} \\ \Rightarrow m\ddot{y} + ky &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{ke/m}, \quad m \leq w/g, \quad g = 386 \frac{\text{in}}{\text{sec}^2} = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

نکات معادله حرکت پاندول

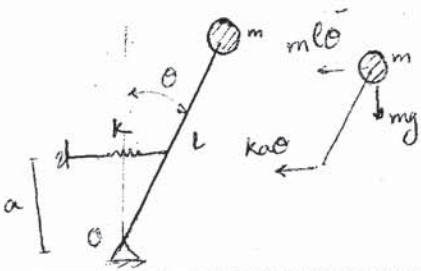


$$\begin{aligned} T \cos \theta &= mg \\ ml\ddot{\theta} + T \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta &= 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \\ \Sigma M_0 = 0 &\Rightarrow ml\ddot{\theta} l + mg \sin \theta l = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \\ \Rightarrow \theta &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \rightarrow \omega = \frac{g}{l} \end{aligned}$$

رشته

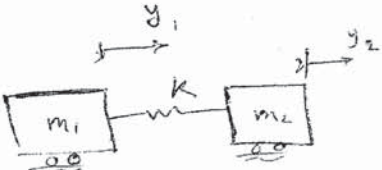
$$A = \theta_0, \quad B = \dot{\theta}_0$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$



$$\begin{aligned} \Sigma M_0 = 0 &\Rightarrow ml\ddot{\theta} l + ka^2 \theta - mgl \sin \theta = 0 \\ \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + (ka^2 - mgl) \theta &= 0 \end{aligned}$$

خطرات نقص معادله دینامیکی حرکت برای تحریرهای سیم در هم (u = y_2 - y_1)



$$m_1 \ddot{y}_1 + k(y_2 - y_1) = 0$$

$$m_1 \ddot{y}_1 - k(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow \ddot{y}_1 = \frac{k}{m_1} (y_2 - y_1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow m_2 (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = 0$$

$$\Rightarrow m_2 \ddot{u} + k u + \frac{km_2}{m_1} (y_1 - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow m_2 \ddot{u} + k \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) u = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{k \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \right)} = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$$

حمید کاظمی

Subject :

Year.

Month.

Date.

طراحی برای اسامی

معیار مقایسه روش طراحی برای اسامی

میزان رقابت و تنوع در نام

در این بحث به بحث می‌پردازیم که چگونه می‌توانیم برای اسامی که در این زمینه دارند و در این زمینه

معیار مقایسه روش طراحی برای اسامی

معیار مقایسه روش طراحی برای اسامی

معیار مقایسه روش طراحی برای اسامی

معیار مقایسه روش طراحی برای اسامی

معیار مقایسه روش طراحی برای اسامی

Subject :

Year. Month. Date.

۱- سیستم یک درجه آزادی با مشخصات زیر مفروض است

$$m = 1.0 \text{ k.s}^2/\text{in}$$

$$\xi = 0.05$$

$$T_n = 1.0 \text{ sec}$$

با فرض اینکه $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ باشد و $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$ با اعمال رکورد زلزله طسین

(مؤلفه L) مطلوب است تعیین پاسخ سازه تحت شرایط زیر:

۱- روش نیومارک B (کتاب متوسط)

۲- روش نیومارک B (کتاب خفای)

۳- روش Wilson- θ با فرض اینکه $\theta = 1/4$ باشد

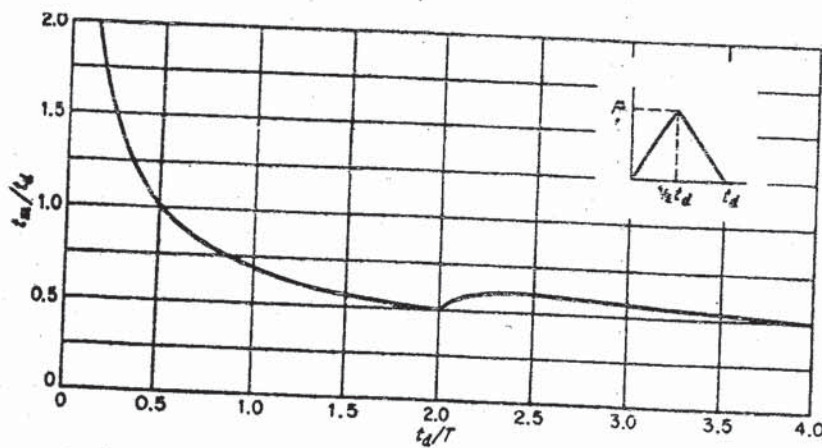
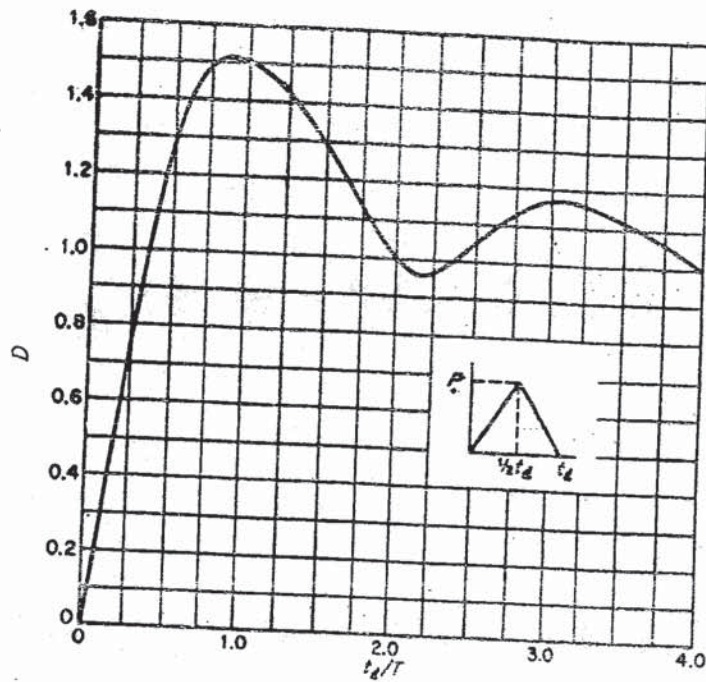
۴- در مسئله قبل به ازای گام‌های زمانی زیر دقت پاسخ سازه نسبت آمده
را کنترل نمایید

۱- $\Delta t = 0.02$

۲- $\Delta t = 0.01$

۳- $\Delta t = 0.04$

حميد کاظمه



شکل (۸-۶) - تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی (D) و زمان مربوطه t_m بر حسب t_d/T (بارگذاری ضربه‌ای مثلی متساوی‌الساقین بدون میرایی)

بر حسب

ایق شکل
دستگاه P_1 P_2

:

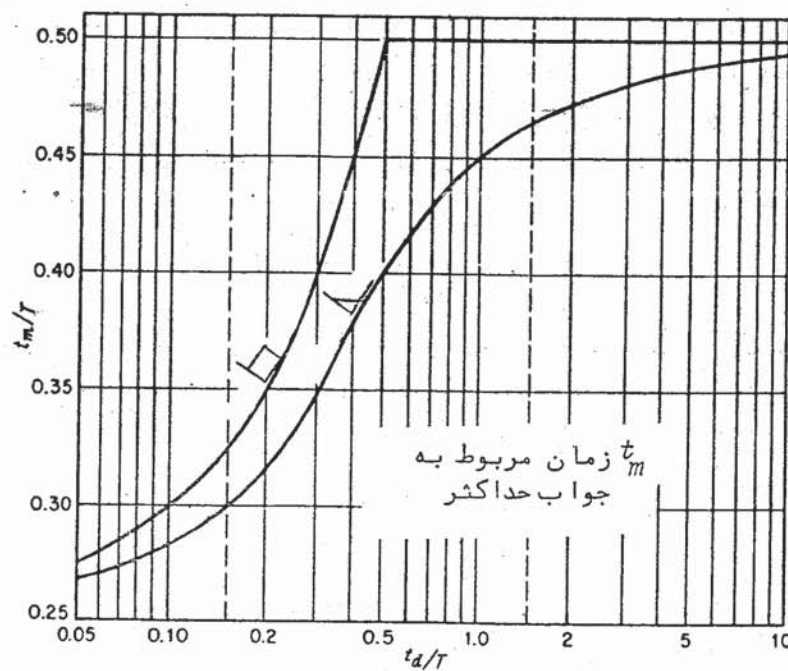
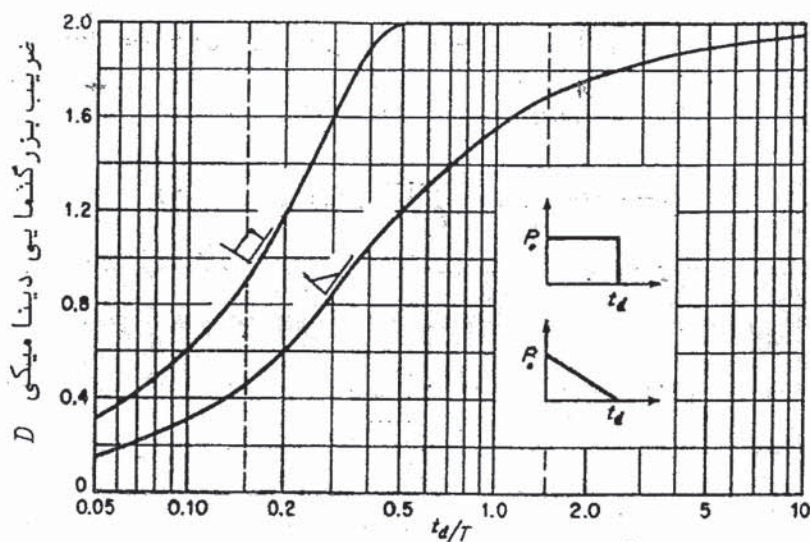
 R_1 R_2 R_3

نه گردیده است

مورد استفاده

حمید کاظمی

حمید کاظمی



شکل ۶-۵ - تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی (D) و زمان مربوطه

t_m برحسب $\frac{t_d}{T}$ در بارگذاری ضربه‌ای مستطیلی و مثلثی

(قائم الزاویه) بدون میرایی

مرح
لحظ

و معاد
نوشت

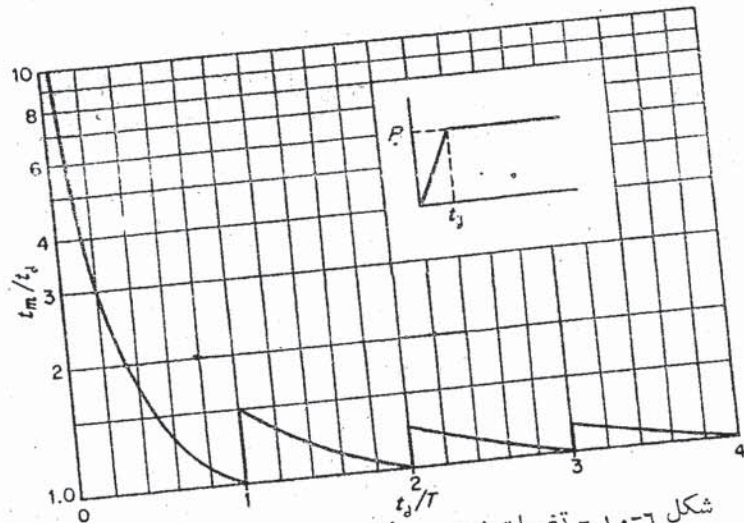
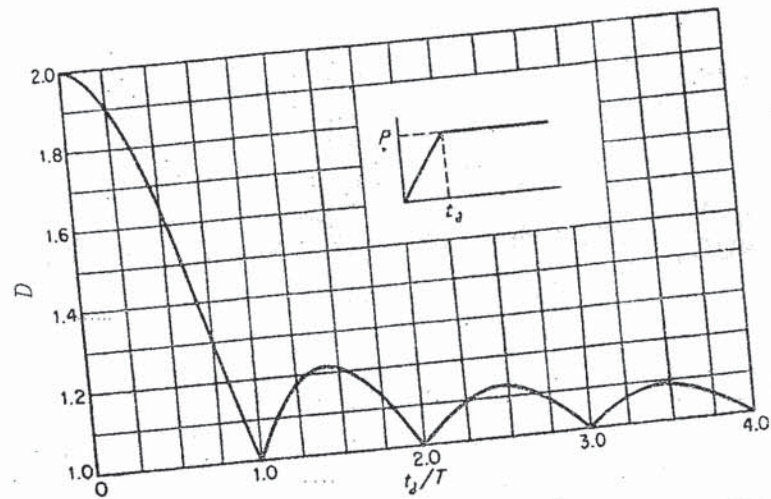
۶-)

برای
اثر بار
را برای

مثلی

رخ می
باردین

حميد کاظمه



شکل ۱۰-۶ - تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی و زمان مربوطه t_m بر حسب t_d/T (بارگذاری ثابت با سیر صعودی اولیه ، حالت بدون میرایی)

مثال ۳-۶ - در وسط دهانه یک تیر فولادی از نوع $IPB\ ۳۴$ مطابق شکل جسمی به وزن $۴/۵$ تن، قرار دارد. اگر نیروی ضربه‌ای ثابت با زمان صعودی اولیه برابر $t_d = ۰/۰۷۵$ ثانیه و مقدار ثابت، تن $P_0 = ۹$ بر روی جسم فوق اثر نماید با صرف نظر نمودن از وزن تیر و معادل گرفتن آن به صورت دستگاه یک درجه آزادی حداکثر تنش خمشی تولید شده در تیر را محاسبه نمایید.

حميد کاظمه

سیستم های پویا: $\frac{d^2}{dx^2} (EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2}) + N \frac{d^2 v}{dx^2} + m \frac{d^2 v}{dt^2} = p$ مدون استوار

با استوار: $\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 v}{dx^2}) + m \frac{d^2 v}{dt^2} + c \frac{dv}{dt} = p(x,t)$

با انحراف از موازی: $v(x,t) = \phi(x) \gamma(t) \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - a^2 \phi(x) = 0 \\ \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \omega^2 \gamma(t) = 0 \end{cases} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{m}$

$\phi(x) = C e^{-sx} (s^2 - a^2) C e^{sx} \Rightarrow s = \pm ia, \pm ic \Rightarrow \gamma(t) = \frac{\gamma(0)}{\omega} \sin \omega t + \gamma'(0) C$

$\Rightarrow \phi(x) = A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \sinh ax + A_4 \cosh ax$

$\frac{EI, m, c, l}{l} \quad a = \frac{n\pi}{L} \quad \omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad \phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$

$\frac{EI, m, l}{l} \quad \omega_n = \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \phi_n(x) = b_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) + \cosh a_n x - \cos a_n x$
 $a_n = \frac{\omega_n^2 m}{EI} \quad b_n = \frac{\cosh a_n l - \cos a_n l}{\sinh a_n l - \sin a_n l}$

$\frac{EI, m, l}{l} \quad \omega_n = \frac{(n + \frac{1}{2}) \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \phi_n(x) = b_n (\sinh a_n x - \sin a_n x) + \cosh a_n x - \cos a_n x$
 $a_n, b_n = \dots$

$\frac{EI, m, l}{l} \quad \omega_n = \frac{(n + \frac{1}{4}) \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \phi_n = \dots$

توریل کرد: $m \frac{d^2 u}{dt^2} - EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad u(x,t) = \phi(x) \gamma(t) \rightarrow \begin{cases} \gamma''(t) + \omega^2 \gamma(t) = 0 \\ \phi''(x) + b^2 \phi(x) = 0 \end{cases}$
 $b^2 = \frac{\omega^2 m}{EA}$

$\frac{m, EA, l}{l} \quad b^2 l = \frac{2n-1}{2} \pi \quad \omega_n = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{m l^2}} \rightarrow \phi(x) = \sin(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{l})$

$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 v}{dx^2}) + m \frac{d^2 v}{dt^2} = p(x,t) \quad \left\{ \begin{aligned} M_n &= \int_0^l m(x) \phi_n^2(x) dx \\ \omega_n^2 &= \frac{\int_0^l EI(x) (\phi_n'')^2 dx}{\int_0^l m(x) \phi_n^2 dx} \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} p_n(t) &= \int_0^l \phi_n(x) p(x,t) dx \\ p_n(t) &= p_0 \phi_n(x=x_0) \end{aligned}$

روش سیستم های چند درجه آزادی: $(K - \omega^2 M) \rightarrow \omega_i \rightarrow a_i \rightarrow M_i = a_i^T M a_i \rightarrow \phi_i = \frac{a_i}{\sqrt{M_i}}$

$M \ddot{y} + K y = F(t) \quad y = \phi z$

$\Rightarrow \ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = \phi_n^T F(t) = \phi_n^T F(t) \rightarrow z_i(t) \rightarrow y_i(t)$

در این روش کلیت آن شبیه به حل روش مودال می باشد. در این روش مودال هر یک از مودال های سیستم را به صورت جداگانه حل می کنند و سپس نتایج را با هم جمع می کنند. این روش برای سیستم های چند درجه آزادی بسیار مناسب است. در این روش، مودال های سیستم را به صورت ϕ_i و ω_i مشخص می کنند. سپس معادله حرکت برای هر مودال را به صورت $\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = \phi_i^T F(t)$ حل می کنند. در نهایت، نتایج را با هم جمع می کنند تا به جواب نهایی $y(t)$ برسند.

کامپوزیت

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 + \sum I_{0i} (\psi_i')^2$$

$$C^* = \int_0^L C(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum C_i \psi_i^2$$

$$K^* = \int_0^L k(x) [\psi(x)]^2 dx + \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + \sum k_i \psi_i^2$$

$$K_G^* = N \int_0^L [\psi'(x)]^2 dx$$

$$\text{if } u_g \rightarrow P(x, t) = -\ddot{u}_g(t) m(x) \rightarrow P^*(t) = \int_0^L P(x, t) \psi(x) dx + \sum P_i \psi_i$$

$$= \int_0^L -m \ddot{u}_g(t) \psi(x) dx = -M \ddot{u}_g(t)$$

$$m^* = \int_0^b \int_0^a m(x, y) [\psi(x, y)]^2 dx dy + \sum m_i \psi_i^2$$

$$K^* = D \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$P^*(t) = \int_0^b \int_0^a P(x, y) \psi(x, y) dx dy + \sum P_i \psi_i$$

$$\frac{H}{D} < 1.5 \rightarrow \psi(x) = \sin \frac{\pi x}{2H}$$

$$1.5 < \frac{H}{D} < 3 \rightarrow \psi(x) = \frac{x}{H}$$

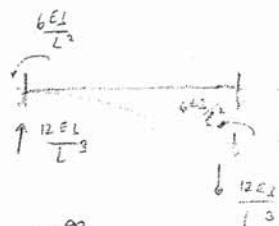
$$\frac{H}{D} > 3 \rightarrow \psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2H}$$

$$m^* = \sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2$$

$$K^* = \sum k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2$$

$$L^* = \sum m_j \psi_j$$

$$N_{cr} = \frac{\int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx}{\int_0^L (\psi')^2 dx}$$



$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \cos \left(\frac{2n\pi}{T_p} t \right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \sin \left(\frac{2n\pi}{T_p} t \right) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{K} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\beta_n)^2} \times \left\{ a_n \times 2\beta_n + b_n (1-\beta_n^2) \right\} \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \right.$$

$$\left. + \left\{ a_n (1-\beta_n^2) - b_n \times 2\beta_n \right\} \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \right)$$

$$\text{if } \beta_n = 1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{K} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t \right) \right)$$

محمد
نور

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \rightarrow u = u_0 \cos \omega t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right) \sin \omega t$$

فرض: $\frac{u_0}{\dot{u}_0} \omega = \tan \alpha \rightarrow u = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2} \sin(\omega t + \alpha)$, $\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega u_0}{\dot{u}_0}$

یا $u = \cos(\omega t - \theta)$, $\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \rightarrow$$

$$\zeta < 1 \rightarrow u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega u_0}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right]$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$u(t) = A e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t - \alpha)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega}$$

$$c = 2\zeta\sqrt{km}$$

$$A^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega u_0}{\omega_d} \right)^2$$

$$\tan \alpha = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega u_0}{\omega_d u_0}$$

$$\zeta = 1 \rightarrow u(t) = [u_0 + (\dot{u}_0 + \omega u_0)t] e^{-\omega t}$$

$$\zeta > 1 \rightarrow u(t) = e^{-\zeta\omega t} (C_1 \sinh \omega_d t + C_2 \cosh \omega_d t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{u_{st}}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\ln \frac{u_p}{u_R} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\zeta = \frac{0.11}{N} \quad \frac{u_p}{u_R} = e^{\zeta\omega N T_d} = 2$$

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin \omega t$$

$$u_0 = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{P_0/k}{1 - \beta^2} \sin \omega t$$

برای تعیین ضرایب: $A_1 = \frac{-P_0}{k} \frac{\beta}{1 - \beta^2}$, $A_2 = 0 \rightarrow u = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \omega t - \beta^2 \sin \omega t)$

$$D = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$R = \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \omega t - \beta^2 \sin \omega t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t$$

$$p_0 \cos \omega t$$

$$\rightarrow u_c = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t)$$

$$u_p = M \sin \omega t + N \cos \omega t, \quad M = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$-N \cos \omega t + M \sin \omega t$$

$$N = \frac{P_0}{k} \frac{-2\zeta\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$u_p = A \sin(\omega t - \alpha), \quad A = \frac{P_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2]^{-1/2}$$

$$D = \frac{A}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \quad D(\beta=1) = \frac{1}{2\zeta}$$

$$1 \text{ kgf} = 9.81 \text{ N}, \quad g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 386 \frac{\text{in}}{\text{s}^2} = 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ kip} = 1000 \text{ lbf} = 453.9 \text{ kgf} = 0.7 \text{ T/m}^2$$

$$\zeta = 1 \rightarrow D = \frac{1}{2\zeta} \rightarrow \frac{dD}{d\beta} = 0 \rightarrow D_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) - \frac{P_0}{2k\zeta} \cos \omega t$$

$$A_1 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad A_2 = \frac{P_0}{2k\zeta}$$

$$R(t) = \frac{u(t)}{P_0/k} = \frac{1}{2\zeta} (e^{-\zeta\omega t} - 1) \cos \omega t$$

$$\zeta = 1 \rightarrow R(t) = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

حمید کاظمی

$$\ddot{x} = \Phi \ddot{y}, \quad M_i = \Phi_i^T M \Phi_i, \quad k_i = M_i \omega_i^2, \quad c_i = 2 \xi_i \omega_i M_i \rightarrow M_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i = \Phi_i^T P(t)$$

$$\ddot{y}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{\Phi_i^T P(t)}{M_i} \quad \begin{matrix} M_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}} \\ M_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_2^2}} \\ M_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_3^2}} \end{matrix} \rightarrow \ddot{y}_i(t) = \omega_i^2 y_i(t) = \frac{\Phi_i^T P(t)}{M_i}$$

$$y_i = \frac{\Phi_i^T P(t)}{M_i} \frac{1}{\omega_i} (1 - \cos \omega_i t) \quad \text{شرایط در صفر}$$

$$x = \Phi \tilde{x} = \Phi y \quad (\Phi) \text{ زمانیه} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^T M \Phi}}$$

$$f = k^{-1} \rightarrow Q = f \times M \rightarrow \{\Phi\} \rightarrow \{\bar{\Phi}\} = Q \{\Phi\} \rightarrow \{\bar{\Phi}\} = \omega^2 \{\bar{\Phi}\} \quad \text{درین استروک}$$

$$\{\bar{\Phi}\}^2 = Q \{\Phi\} \rightarrow \{\Phi\} = \omega^2 \{\bar{\Phi}\} \quad \omega^2 = \frac{\Phi_{in}^{(r-1)}}{\Phi_{in}^{(r)}}$$

$$\{\Phi\} = \{\Phi\} - \frac{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}}{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}} \{\Phi\} \rightarrow \{\bar{\Phi}\} = Q \{\Phi\} \rightarrow \{\Phi\}$$

$$\{\Phi\} = \{\Phi\} - \frac{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}}{\{\Phi\}^T M \{\Phi\}} \{\Phi\} \rightarrow \{\bar{\Phi}\} = Q \{\Phi\} \rightarrow \{\Phi\}$$

$$\{\Phi\} = \{\Phi\} - \frac{\Phi_1^T M \Phi_1}{\Phi_1^T M \Phi_1} \Phi_1 - \frac{\Phi_2^T M \Phi_2}{\Phi_2^T M \Phi_2} \Phi_2$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt$$

$$u(t) = \frac{1}{k} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \times \{ [a_n \times 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)] \sin \omega_n t + [a_n(1-\beta_n^2) - b_n \times 2\xi\beta_n] \cos \omega_n t \} \right)$$

مدار الاستیک - مدار حثی - مدار القایی - مدار ترکیبی

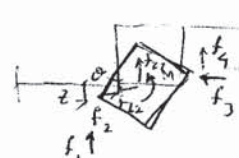
مدار الاستیک: مدار که در آن نیرو و جابجایی رابطه دارد.

مدار حثی: مدار که در آن نیرو و سرعت رابطه دارد.

مدار القایی: مدار که در آن نیرو و شتاب رابطه دارد.

مدار ترکیبی: مدار که در آن نیرو و جابجایی، سرعت و شتاب رابطه دارد.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}$$



$$f_1 = \frac{12EI}{L^3} \times z(t) \quad f_2 = \frac{EA}{L} \times \frac{L}{L} \times \theta$$

$$f_3 = \frac{EA}{L} \times \frac{L}{L} \times \theta \quad f_4 = \frac{12EI}{L^3} (z(t), L\theta)$$

$$M = \frac{1}{12} m (L^2 + L^2) \ddot{\theta}$$

$$f_{I_1} = m(\ddot{z}(t) + L_2 \ddot{\theta}) \quad f_{I_2} = m(\ddot{z}(t) + L_2 \ddot{\theta})$$

$$\ddot{\omega} \Sigma M_A = 0$$

$$t_0, \Delta t$$

$$\begin{bmatrix} x_b \\ \dot{x}_b \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix} = F_{N_1} \begin{bmatrix} x_b \\ \dot{x}_b \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix} \rightarrow F_{S,b} = k_1 x_1 + k_2 (x_b - i)$$

$$F_{S,b} = m \ddot{x}_b - C \dot{x}_b$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \dot{x}_7 \\ \ddot{x}_7 \end{bmatrix} = F_{N_2} \begin{bmatrix} x_b \\ \dot{x}_b \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix} + H_N \Delta F = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

حاجی اسفندیار

حاجی اسفندیار

حاجی اسفندیار

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \rightarrow u = u_0 \cos \omega t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right) \sin \omega t$$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \rightarrow \begin{cases} \zeta < 1: u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega u_0}{\omega_d}\right) \sin \omega_d t \right], \omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \\ \zeta = 1: u(t) = A e^{-\omega t} [u_0 + (\dot{u}_0 + \omega u_0)t] \\ \zeta > 1: u(t) = e^{-\zeta\omega t} (C_1 \sinh \omega_d t + C_2 \cosh \omega_d t) \end{cases}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{9}{u_{st}}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

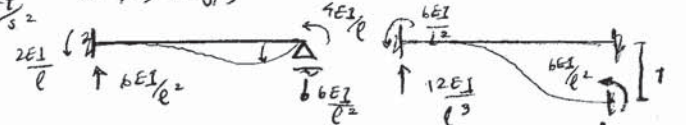
$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin \omega t \rightarrow u = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{P_0/k}{1-\beta^2} \sin \omega t \quad \text{مقادیر: } A_1 = -\frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2}, A_2 = 0$$

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + ku = P_0 \sin \omega t \rightarrow u = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) \quad u = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega_d t)$$

$$u_p = M \sin \omega t + N \cos \omega t \quad D = \frac{1}{1-\beta^2}, R = \frac{1}{1-\beta^2} \quad D(\beta=1) = \frac{1}{2\zeta}$$

$$1 \text{ kg} = 9.81 \text{ N}, g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 981 \text{ cm/s}^2 = 386 \text{ in/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$$

$$1 \text{ kip} = 1000 \text{ lb} = 453.4 \text{ kg} \cdot f = 0.7 \text{ t}_m$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T_d} \quad u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega_d t) \quad \text{برای } t \leq t_d: \text{ مرده}$$

$$t_d = \frac{2\pi n}{\omega} \quad u(t) = -\frac{P_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \left[\left(1 + \cos \frac{\pi}{\beta} \sin \omega t + \sin \frac{\pi}{\beta} \cos \omega t\right) \right] \quad \text{مرده}$$

$$t_m = \frac{2\pi n}{\omega}$$

$$u_{max} = \frac{P_0}{k} \frac{2/\beta}{(1-\beta^2)} \cos \frac{\pi}{2\beta}$$

$$D_1 = \frac{\sin \omega t_m - \beta \sin \omega_d t_m}{1-\beta^2}$$

$$D_2 = \frac{2/\beta}{1-\beta^2} \cos \frac{\pi}{2\beta}$$

$$R_1 = 1 - \cos \omega t$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t) \quad \text{مرده}$$

$$R_2 = \cos \omega(t - t_d) - V u(t) = \frac{P_0}{k} [\cos \omega(t - t_d) - \cos \omega t] \quad u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t) \cos \omega(t - t_d) + \frac{P_0}{k} \sin \omega t_d \sin \omega t$$

$$R_1 = 1 - \cos \omega t \quad u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t) + \frac{P_0}{k} \left(\frac{t}{t_d} \omega t - t \right) \quad u(t) = \frac{P_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_d} \right) \quad \text{مرده}$$

$$R_2 = \frac{1}{\omega t_d} [\sin \omega t - \sin \omega(t - t_d)] \quad u(t) = \frac{P_0}{k \omega t_d} [\sin \omega t - \sin \omega(t - t_d)] - \frac{P_0}{k} \cos \omega t \quad \text{مرده}$$

$$R_1 = \frac{2}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$P(t) = 2P_0 \frac{t}{t_d}$$

$$R_2 = \frac{2}{t_d} \left\{ t_d - t + \frac{1}{\omega} \left[2\sin \omega \left(t - \frac{t_d}{2} \right) - \sin \omega t \right] \right\} \frac{t_d}{2}$$

$$P(t) = 2P_0 \left(1 - \frac{t}{t_d} \right) \quad t_d/2 \leq t \leq t_d$$

$$R_3 = \frac{2}{\omega t_d} [2\sin \omega(t - \frac{t_d}{2}) - \sin \omega t - \sin \omega(t - t_d)]$$

$$P(t) = 0 \quad t \geq t_d$$

$$R_1 = \frac{1}{t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$P(t) = \frac{t}{t_d} P_0 \quad t \leq t_d$$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{\omega t_d} [\sin \omega(t - t_d) - \sin \omega t]$$

$$P(t) = P_0 \quad t \geq t_d$$

$$u(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

در حالت پویا

$$u(t) = \frac{\int P(\tau) d\tau}{m\omega} \sin \omega t$$

در حالت ایستا

$$u(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega_d} P(\tau) \sin \omega_d(t - \tau) e^{-\zeta\omega(t - \tau)} d\tau$$

در حالت پویا

حمید کاظمی

حمید کاظمہ

حمید کاظمی