

# www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رايجان مهندسي عمران

بهترين و برترين مقالات روز عمران

انجمن هاي تفصلي مهندسي عمران

فروشگاه تفصلي مهندسي عمران



@icivilir



icivil.ir





Year. Month. Date. ( )

$$z^2 + 1 = z^2 - i^2 \Rightarrow z(z^2 - i^2) + 2(z+i) = 0$$

$$(z+i)(z(z-i)+2) = 0 \Rightarrow z = -i \text{ درگزینید سبب } \begin{matrix} 1 \\ 3i \end{matrix}$$

$$z^2 - iz + 2 = 0 \quad z = \frac{i \pm \sqrt{-1 - 8}}{2} = 2i, -i$$

مسئله 5: در رابطه  $z + 5i = 3x + 2iy - in + 5y$  مقدار  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - x = 5 \end{cases}$$

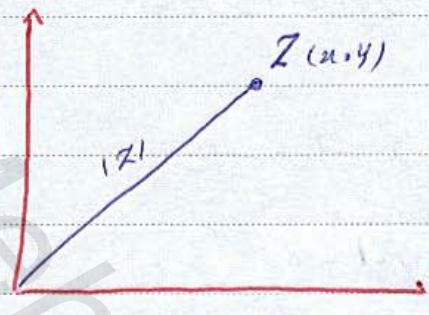
1.  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (مقدار مطلق)

2.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$       3.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

4.  $|z| = |\bar{z}|$       5.  $|z^2| = z \bar{z}$

مسئله 6: اگر  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی نباشند مقدار عبارت  $\frac{|a+ib|}{|b+ia|} = ?$  را بیابید.

$$\frac{|a+ib|}{|b+ia|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+a^2}} = 1$$



$|Z| =$  فاصله نقطه  $Z$  از مبدأ

$|Z_1 - Z_2| =$  فاصله دو نقطه  $Z_1$  و  $Z_2$

$|Z| = 1 =$  دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع 1

$|Z - Z_0| =$  مکان هندسی نقاط  $Z$  از نقطه ثابت  $Z_0$

$|Z - Z_0| = 4 =$  دایره‌ای به مرکز  $Z_0$  و شعاع 4

مسئله 7 - معادله  $|Z-1| + |Z+1| = 2\sqrt{2}$  چه مکانی را نشان می‌دهد **بعضی**

بعضی مکان هندسی تقاطعی است که مجموع آن‌ها از دو نقطه ثابت مقداری ثابت شود  
 حللولی ~ ~ ~ ~ ~ تقاضی ~ ~ ~ ~ ~  
 $|Z-1| - |Z+1| = 2\sqrt{2}$  = حللولی

9.  $|Z-1+i| < 4$  فضای بین دو دایره به شعاع 4 و 9 و مرکز دایره  $i-1$

مسئله 8 - عدد مضرب  $Z_1$  ثابت است و  $Z \neq Z_1$  نیز در معادلات  $|Z| = |Z_1|$  و  $|Z-Z_1| = |1-Z|$  در این صورت .

- ✓ 1-  $Z = \bar{Z}_1$  تمام به مرکز  $\bar{Z}_1$  دیگر هم هست
- 2-  $Z_1 = i$  و  $Z = -i$
- 3-  $Z_1 = 1+i$  و  $Z = 1-i$
- 4-  $Z_1 = iy_1$  و  $Z = -iy_1$

Year. Month. Date. ( )

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 2$$

مسئله 9 -

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = 2 \Rightarrow |z-1| = 2|z+1|$$

1 سفي

2 خط راست

3 سهمي

4 دایره ✓

6 اصل مستقیم ده عدد مختلط کلاسی است مختلط دایره  $|z|=2$

$$\text{مسئله 10 - مکان اعداد مختلط } \left| \frac{z+i}{z-i} \right| = \sqrt{2} \text{ کدام است}$$

1 خط  $y=x$ 2 دایره ای به مرکز  $(3,0)$  و شعاع  $2\sqrt{2}$ 3 دایره ای به مرکز  $(1,1)$  و شعاع  $2\sqrt{2}$ 4 دایره ای به مرکز  $(-5,0)$  و شعاع  $2\sqrt{2}$ 

$$|z+i| = \sqrt{2} |z-i| \quad |x + (1+y)i| = \sqrt{2} |x + i(y-1)|$$

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 2(x^2 + (y-1)^2)$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 12 = 0$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 8$$

دایره ای به مرکز  $(3,0)$  و شعاع  $2\sqrt{2}$

ct:

Year. Month. Date. ( )

مسئله 11  
 $z = x + iy$  ,  $w = u + iv$  ,  $w = \frac{z}{z}$   
 مقدار  $u$  بر حسب  $x$  و  $y$  بیابید.

$$z = \frac{z}{w} \Rightarrow z = \frac{z}{u+iv} \cdot \frac{u-iy}{u-iy} = \frac{zu - 2iy}{u^2 + v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2} + i \frac{2v}{u^2 + v^2}$$

چون مقدار  $u$  را می خواهیم بیابیم  $w = \frac{z}{z}$  مقدار  $w = \frac{z}{z}$  می گذاریم  
 $u = \frac{2u}{u^2 + v^2}$

مسئله 12 - اگر  $z_1$  و  $z_2$  جوابهای معادله  $z^2 + z + 1 = i$  باشند  $|z_1 - z_2|$  بیابید.

$$z^2 + z + 1 - i = 0 \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1-i)}}{2}$$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{i - \frac{3}{4}}$$

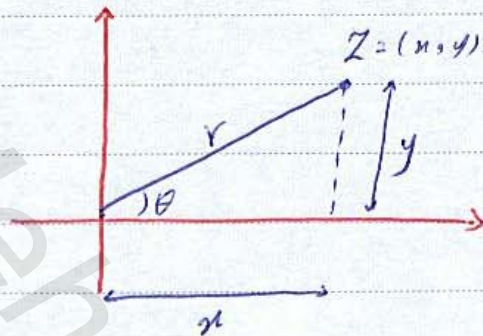
$$-\frac{1}{2} + \sqrt{i - \frac{3}{4}} - \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{i - \frac{3}{4}}\right) = 2\sqrt{i - \frac{3}{4}}$$

$$\left|i - \frac{3}{4}\right| = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left|2\sqrt{i - \frac{3}{4}}\right| = 2\sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{5}$$

مسئله 13 مکان تقاطعی که در  $|z - i| < 2$  صدق می کند بیابید. نقاط بین دو دایره به مرکز  $i$ .

Year. Month. Date. ( )

شکل قطبی اعداد مختلط :



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

اندازه  $Z$  :  $r$

Argument  $Z$  :  $\theta$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$1 + i$	ربع اول $\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$1 - i$	ربع چهارم $\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$-1 + i$	ربع دوم $\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$-1 - i$	ربع سوم $\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	$\sqrt{2}$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

فرم قطبی  $Z$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

کاربرد در معادلات = با درجه است. مثال

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

ct:

Year. Month. Date. ( )

$$z=1 \Rightarrow r=1, \theta=0$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{فومول دمو آور}$$

مثال 14 اگر  $z_1$  و  $z_2$  به صورت زیر باشند حاصل  $z_1 z_2^2$  را بیابید.

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{7} + i \sin \frac{3\pi}{7} \right) \quad -6 \checkmark$$

$$z_2 = \sqrt{3} \left( \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right) \quad -6i$$

$$z_1 z_2^2 = 6 \left( \cos \pi + i \sin \pi \right) = -6 \quad 6$$

$$z_2^2 = 3 \left( \cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7} \right) \quad 6i$$

$$z_1 z_2^2 = 6 \left( \cos \left( \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} \right) \right) = -6$$

Year. Month. Date. ( )

سؤال 15 - حاصل  $e^{\frac{1}{2}\pi i}$  کدام است -

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

سؤال 16 - اگر  $z = a(\cos n + i \sin n)$  و  $z = 1 - i$  کدام است -

$$a(\cos n + i \sin n) = 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = r e^{i\theta}$$

$$\frac{7\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4}$$

سؤال 17 - حاصل عبارت  $\left( \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10}$  کدام است -

$$2 \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

صورت و مخرج دارای  $r$  برابر هستند

$c = r$  و  $\theta$  برابر

سؤال 18 - اگر  $z = \frac{1-i}{1+i}$  حاصل  $z e^{i\frac{\pi}{2}}$  کدام است -

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad i \cdot z = \frac{i(1-i)}{1+i} = 1$$

- 1 - 1
- 2 -  $1+i$
- 3 -  $1-i$
- 4 - 1

سؤال 19 - اگر  $a$  و  $b$  ریشه های معادله  $z^2 - 2z + 4$  باشد، نگاه مقدار  $a^n + b^n + ab$  کدام است -

$$\text{جواب: } 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3} + 4$$



ct:

Year.      Month.      Date. ( )

$$1 \pm \sqrt{1-4} \Rightarrow a = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad b = 1 - i\sqrt{3}$$

$$r = 2$$

$$r = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$a^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$b^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$2^n \left( \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) + 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right) + 4 \left( \cos 0 + i \sin 0 \right)$$

$$= 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3} + 4$$

ریشه‌های  $n$ ام یک عدد مختلط

برای گرفتن ریشه  $n$ ام یک عدد مختلط باید از دستگاه مختصات قطبی استفاده نمود

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ریشه  $n$ ام  $z$  عدد مختلطی است مانند  $z_0$  که اگر  $n$  توان آن برسد می‌شود خودش

$$z = z_0 \quad z_0 \Rightarrow r_0 \quad , \quad \theta_0$$

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r_0^n (\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0)$$

$$r_0 = \sqrt[n]{r}$$

Year. Month. Date. ( )

$$n\theta_0 = 2k\pi + \theta \Rightarrow \theta_0 = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

جواب به ازای  $n=3$  با جواب با  $n=4$  برابر است

مثال ۲۰ - ریشه های 3 عدد مختلط  $z = -1 - i$  را تعیین کنید

$$r = \sqrt{2} \quad r_0 = \sqrt[6]{2}$$

$$\theta_0 = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} = \frac{5\pi + 8k\pi}{12} \quad k=0, 1, 2$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \quad k=0$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) \quad k=1$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{21\pi}{12} + i \sin \frac{21\pi}{12} \right) \quad k=2$$



مثال ۲۱ - کدام عدد مختلط یکی از ریشه های 4 در  $z^4 = 8i$  است

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad r = 8$$

$$r_0 = 8^{1/4} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi \quad k=(0, 1, 2, 3)$$

- ۱-  $\frac{11\pi}{8}$  ✓
- ۲-  $\frac{13\pi}{8}$  ✓
- ۳-  $\frac{5\pi}{8}$  ✓
- ۴-  $\frac{9\pi}{8}$  ✓



مثال ۲۲ - کدام عدد مختلط یکی از ریشه های  $z^3 = 1$  است

$$\theta = \frac{\pi}{2}, r = 1$$

$$\theta_0 = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \quad k=0 \Rightarrow 1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

- ۱-  $\frac{1}{2}(-i + \sqrt{3})$
- ۲-  $\frac{1}{2}(-i + \sqrt{3})$
- ۳-  $\frac{1}{2}(i + \sqrt{3})$
- ۴-  $\frac{1}{2}(i + \sqrt{3})$  ✓

23: یکی از ریشه های چهارم  $z = 9 - 9i$  کدام است

$r = 9$        $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$r = \sqrt{3}$        $\theta = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi$        $0, 1, 2, 3$

- $\frac{5\pi}{8}$  - 1
- $\frac{9\pi}{8}$  - 2
- $\frac{11\pi}{8}$  - 3 ✓
- $\frac{13\pi}{8}$  - 4

24: یکی از ریشه های  $z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$  کدام است

$z = \frac{1+i}{1+i-2i} = \frac{1+i}{1-i}$        $\Rightarrow r=1$        $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$       1

$z = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$        $\theta = \frac{\pi}{2}$       2 ✓

$\theta_0 = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$       3

- $\frac{\pi}{3}$  1
- $\frac{\pi}{2}$  2 ✓
- $\frac{6\pi}{3}$  3
- $\frac{4\pi}{3}$  4

Year. Month. Date. ( )

حد و بی‌نهایتی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = +\infty$$

صورت و مخرج  $\frac{0}{0}$  و  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \Rightarrow x > a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \Rightarrow x < a$$

در بی‌نهایتی مقدار تابع باید برابر باشد (مخرج و صورت) باید با هم برابر باشند

مثال 25: حد در  $x^2 - 2$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < -2 \\ 0 & x = -2 \\ 11 - x^2 & x > -2 \end{cases}$$

حد تابع برابر 7 است ولی تابع بی‌نهایت نیست

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (3x^2) = 7 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} (11 - x^2) = 7 \neq 0 = f(-2)$$

مثال 26: مقادیر a و b را تعیین کنید بطوریکه تابع در نقاط 3 و -3 حد داشته باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b - 3 & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & x > 3 \end{cases}$$

$$-3 - a = -3a + 2b \quad 3a + 2b = b - 15 \quad a = -3$$

$$b = -6$$

ct:

Year. Month. Date. ( )

سوال 27:

$$\lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{[n]} = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{-1} = \lim_{n \rightarrow -1^+} \frac{-x}{-1} = \lim_{n \rightarrow -1^+} x = -1$$

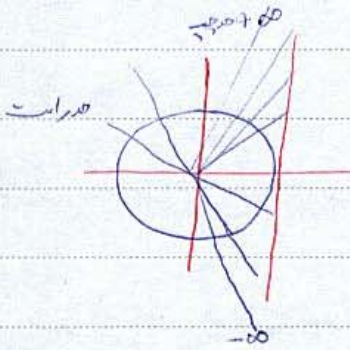
$x \rightarrow -1 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow -1 < x < 0$

قبل از نزدیک شدن به ۱- جز صغیر برابر ۱- می شود

سوال 28:

$f(x) = \frac{1}{2^{2y} + 1}$       $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

- 1- راست = 0 حد چپ = 0
- 2- " " " " = 0
- 3- " " " " = 1
- 4- حد راست = 1 حد چپ = 0



حد راست =  $\frac{1}{2^{+\infty} + 1} = \frac{1}{\infty + 1} = 0$      حد چپ (بازار  $\frac{\pi}{2}$ ) =  $\frac{1}{2^{+\infty} + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$

سوال 29:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$$

$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y = 2^{1/x} \Rightarrow y \rightarrow +\infty$       $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1+y}{3+y} = \frac{1}{1} = 1$

$x \rightarrow 0^- \Rightarrow y \rightarrow 0$       $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1+y}{3+y} = \frac{1}{3}$

$\frac{3}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	2
1	3
حد ندارد	4 ✓

شکر درجه وقتی درجه به سمت بی نهایت برود می شود درجه بزرگ صورت به درجه بزرگ مخرج

Year. Month. Date. ( )

سوال 30 - به ازای چه مقدار  $a$  تابع  $f(x)$  یو بسته است

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \Rightarrow a = 4$

سوال 31 - کدام عبارت صحیح است

- 20 حد است  $\Rightarrow$  صحیح  $\Rightarrow$   $0 < x < 1$
- $$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ \ln x & 1 < x < 2 \end{cases}$$
- 1 - در  $x=1$  معین است  $\times$
  - 2 - در  $x=1$  یو بسته است
  - 3  $\checkmark$  - در  $x=1$  یو بسته نیست
  - 4 - حد چپ و راست مساوی نیستند در  $x=1$

سوال 32 - به ازای کدام مقادیر  $k$  تابع  $f(x)$  یو بسته است

1 تمام مقادیر  $k$  صحیح

$$f(x) = [x-1] + [-x] = [x] + [-x] - 1$$

2 فقط در منفی

3 فقط تمام مقادیر صحیح و مثبت  $k$

4  $\checkmark$  تمام مقادیر صحیح  $k$

$k \in \mathbb{Z} \quad f(k) = -1$

$$\left. \begin{aligned} k-1 < x < k \quad [x] &= k-1 \\ -k < -x < -k+1 \quad [-x] &= -k \end{aligned} \right\} k-1 - k-1 = -2 \neq -1$$

در  $k$  یو بسته نیست

اگر دو تابع یو بسته باشند مجموعه آنها یو بسته است

در  $\sim$  یکی یو بسته و دیگری نایو بسته باشند مجموعه آنها نایو بسته است

در  $\sim$  نایو بسته باشند مجموعه آنها ممکن است یو بسته باشد و ممکن است نباشد

ct:

Year. Month. Date. ( )

$$k < x < k+1$$

$$[x] = k$$

$$k + (-k) - 1 = 1 = -2$$

$$-k-1 < -x < -k$$

$$[-x] = -k - 1$$

در اعداد صحیح حد دارد

مسئله 33: تابع با شرایط  $f(x)$  در نقطه  $x=0$  نامرئی پیوستگی را دارد

- |  |            |                   |                                  |     |
|--|------------|-------------------|----------------------------------|-----|
| $f(x) = \begin{cases} \frac{x- x }{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ | $x \neq 0$ | $\frac{x- x }{x}$ | فقط از راست پیوسته است           | 1   |
|  | $x = 0$    | $2$               | هم از چپ و هم از راست پیوسته است | 2 ✓ |
|  |            |                   |                                  | 3   |
|  |            |                   |                                  | 4   |

برای  $x \rightarrow 0^+$   $\frac{x-x}{x} = 0 \neq f(0) = 2$  پیوستگی راست ندارد

برای  $x \rightarrow 0^-$   $\frac{x+x}{x} = 2 = f(0) = 2$  پیوستگی چپ دارد

مسئله 34: در کدام بازه پیوسته است:

- |  |           |     |
|--|-----------|-----|
| $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \ln(x-1)$<br>$-2 \leq x \leq 2 \cap x > 1 = 1 < x \leq 2$ | $(-2, 2]$ | 1   |
|  | $[0, 2]$  | 2   |
|  | $[1, 2]$  | 3 ✓ |
|  | $[1, 2]$  | 4   |

x برای تعیین پیوستگی اول باید دامنه تابع را بیابیم

Year. Month. Date. ( )

سوال 35: برای هر مقدار  $a$  تابع  $f(x)$  در  $x=0$  نسبت به  $x$  مشتق پذیر است

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

1 1  
0 2  
 $\frac{1}{2}$  3  
1 4

$f_1(x) \cdot f_2(x)$

حد  $\infty$  ملغز =  $\frac{\infty}{\infty}$  ملغز

0 b = 0

a b =  $\infty$  اگر  $a \neq b$

$\infty \infty = \infty$

0  $\infty = \text{pro}$

سوال 36: در مورد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$  کدام گزینه صحیح است

$\frac{x}{\sin x} = x \cdot \frac{1}{\sin x}$   $\frac{0}{0} \neq \infty$

1 صحیح وجود و برابر صفر است

2  $\sim \sim \sim$  یک

3  $\sim \frac{1}{2} \sim$

4  $\sim \sim \sim$

سوال 37:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{1}{n} \right]$

$n \rightarrow \infty$

$n-1 < [n] < n \Rightarrow \frac{1}{n}-1 < \left[ \frac{1}{n} \right] < \frac{1}{n} \times n$

2 موجود نیست

عمران  $1-n < n \left[ \frac{1}{n} \right] < 1 \Leftrightarrow n > 0 = 1$

حرفی  $1-n > n \left[ \frac{1}{n} \right] > 1 \Leftrightarrow n < 0 = 1 \Rightarrow = 1$

1 3 ✓

سازوچ  $\infty$  4



سوال 38:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

1. یزد در  $x=0$  در نقطه نقاط پیوسته است ✓
2. در تمام نقاط پیوسته است ✓
3. فقط در  $(0, +\infty)$  پیوسته است
4. فقط در  $(-\infty, 0)$  پیوسته است

سوال 39: حد در نقطه  $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} ([x] + |x|) & x < -1 \\ [x] - |x| & x \geq -1 \end{cases}$$

$-2 + 1 = -1$

سوال 40: اگر  $a_n = \text{Arc cotg } \frac{1}{n}$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

1. 0
2.  $\frac{\pi}{4}$
3.  $\frac{\pi}{2}$  ✓
4.  $\pi$

سوال 41: حد  $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$

$$1 \leq i \leq n \quad n^2 < (n+i)^2 \leq 4n^2$$

$$\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{(n+i)^2} < \frac{1}{n^2} \quad n \text{ بار جمع شوند}$$

$$\frac{1}{4n} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2} < \frac{1}{n} \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

1. 1
2.  $\frac{1}{e}$
3.  $\frac{1}{e^2}$
4. صفر

$M = 0.1$

$M = 10$

$M = \frac{1}{1} = 10$

$M = \frac{1/10}{1/1} = 10$  2.2.?

Year. Month. Date. ( )

سوال 42 اگر  $a$  و  $b$  مقادير ثابت و داشته باشيم  $1 < b < a$   $f(x) = a^x + b^x$  تابع است

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{1/n} =$

- a 1
- $\frac{b}{a}$  2
- $2ae$  3
- $\frac{a}{b} e$  4

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n (1 + (\frac{b}{a})^n))^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$

$a > b$   $\frac{b}{a} < 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$   $|r| < 1$

سوال 43 مجموعه نقاط بيوستگي تابع  $f(x)$  کدام است

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 1 \Rightarrow f = 1$

- $R - \{1\}$  1
- $R - \{1\}$  2
- $\{1, -1\}$  3
- $R$  4 ✓

جواب دوم:

سوال 44 تابع  $f$  با ضابطه روبرو از نظر بيوستگي کدام است

$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ 2x - 2 & x > 1 \end{cases}$

- در هر نقطه بيوسته است
- بيوسته است ✓
- در هر نقطه بيوسته است

ct:

Year. Month. Date. ( )

سوال 45. تابع مفروضه است که اگر  $n$  فرد و  $n$  زوج است  
 $f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{|n|-1} & n \neq 1 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$   
 در نقاط مفروضه و ا- صحیح است  
 1 در هر سه نقطه بی‌نهایت  
 2 ~ ~ ~ تا ~ ~ ~

3 در یک و ا- نابینا و در هر دو بی‌نهایت ✓  
 4 در یک و ~ ~ ~ تا ~ ~ ~  
 $\lim_{n \rightarrow -2} \frac{n-1}{-n-1} = 1$      $\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n-1}{n-1} = 1$   
 در هر دو بی‌نهایت است  $\Rightarrow f(n) = 1 \Rightarrow n = 0$

در یک بی‌نهایت است  $\Rightarrow f(n) = 0$      $\frac{n-1}{n-1} = 1$   
 در نقطه ا- تابع تعریف شده است

سوال 46. مجموعه نقاط بی‌نهایتی تابع  $f(x)$  کدام است

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n+1}} \Rightarrow R$$

سوال 47. اگر تابعی بر  $R$  با ضابطه  $f(x)$  موجود باشد

این تابع از نظر بی‌نهایتی در نقاط  $x=1$  و  $x=2$  چگونه است؟  
 $f(n) = \begin{cases} 5n & n \text{ فرد} \\ n^2 + 6 & n \text{ زوج} \end{cases}$   
 1 در هر دو نقطه بی‌نهایت است  
 2 ~ ~ ~ تا ~ ~ ~  
 3 در  $x=1$  بی‌نهایت و در  $x=2$  نابینا

4 ~ ~ ~ تا ~ ~ ~ ✓  
 $5n = n^2 + 6 \quad n = 2 \text{ و } 3$   
 فقط در این دو نقطه بی‌نهایت است  $n^2 - 5n + 6 = 0$

سوال 48

تابع زوج است اگر دامنه آن متقارن باشد و  $f(-n) = f(n)$   
 ~ ~ ~ تا ~ ~ ~ و  $f(-n) = -f(n)$

Year. Month. Date. ( )

مسئله 48: اگر  $f$  در معادله تابعی  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  صدق کند، آنگاه  $f$

1 زوج است  $x=y=0 \quad f(0) = f(0) + f(0) \quad 2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

2 ✓ فرد است  $y = -x \quad f(0) = 0 = f(x) + f(-x) \quad f(-x) = -f(x) \Rightarrow$  فرد

3 نه زوج نه فرد

4 متناوب است

مسئله 49: مستقیم هر تابع زوج تابعی فرد و مستقیم هر تابع فرد تابعی زوج است

فرد  $f \Rightarrow f(-x) = f(x) \xrightarrow{\text{مستقیم}} -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow$  فرد

زوج  $f \Rightarrow f(-x) = -f(x) \xrightarrow{\text{مستقیم}} f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow$  زوج

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -2 \\ x+1 & -2 < x < +1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

مسئله 50:

$f \circ f(-1) + (f(-1))^2 = ? \quad f \circ f(x) = f(f(x))$

$1 + 0 = 1$

مسئله 51:

$f(x) = \ln \frac{2x+1}{x} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3)$

$y = \ln \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = e^y \Rightarrow 2x - x e^y = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2 - e^y}$

$y = \frac{1}{e^x - 2} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3) = \frac{1}{e^3 - 2} = 1$

مسئله 52: اگر  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

بیوسته و یک به یک باشد و  $f(0) < f(1)$  آنگاه به ازای هر  $x$  در فاصله  $[0, 1]$

1. یک به یک یا صعودی یا نزولی وجود دارد  $f(x) < f(1)$  تابع صعودی شود  $f(x) > f(1)$
2.  $f(x) < f(1)$  (جوابشای ندارد) فاصله است
3. در تابع صعودی اگر  $x_1 < x_2$   $f(x_1) < f(x_2)$   $f(x) < f(0)$
4.  $f(x) > f(0)$  ✓  $0 < x < 1$

مسئله 53:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n + \frac{1}{2}]}{n} = ?$$

$n \rightarrow \infty$

صورت  $\infty$  ثابت است (برای  $n \geq 0$ ) و قبل از این که خارج به صورت نزدیک شود صورت  
 مخرج است  $\infty$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Q} \\ x-2 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

مسئله 54:

در  $x=2$  بیوسته است ✓  
 در  $x=2$  ...  
 در  $x=\frac{1}{2}$  ...  
 در هر نقطه بیوسته است

Year. Month. Date. ( )

مشتق:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

تابع در یک نقطه مشتق پذیر است اگر مشتق چپ و راست مشتقات  $f'_+$  و  $f'_-$  یکسان باشند.  
 اگر تابعی یو-سفته نباشد مشتق پذیر نیست ولی اگر مشتق پذیر باشد و مشتق داشته باشد  
 یو-سفته است.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3 & x < 1 \\ x^3 - 2x & x > 1 \end{cases}$$

در  $x=1$  تک‌طرف نشده، چو ندارد، مشتق ندارد

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3 & x < 1 \\ x^3 - 2x + 2 & x > 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 8x & x < 1 \\ 3x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$$

تساوی منتقل نشد

$$f'_{-}(1) = 8 \neq f'_{+}(1) = 1$$

توابع ۱، ۲، ۳ صحیح و دقت مطلق چند ضابطه‌ای هستند.

$$f(x) = (4-x)[x] \quad \text{مشتق پذیر در } x=4 \text{ بررسی شود}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3(4-x) & 3.5 < x < 4 \\ 4(4-x) & 4.5 > x > 4 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} -3 \\ -4 \end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست

$$x = h(t)$$

اگر  $x$  و  $y$  حرکت تابع از  $t$  باشند =

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$y = g(t)$$

$$y = f(x), \quad x = h(t)$$

اگر  $y$  تابع  $x$  و  $x$  تابع  $t$  باشد

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

اگر  $y = f(x)$  باشد (تابع به طور مربعی باشد)

اگر  $y$  تابع از  $x$  و  $x$  تابع از  $t$  باشد و  $F(x, y)$  و  $G(x, y)$  توابع به صورت ضمنی بیان شده

$$y' = - \frac{F_x}{F_y}$$

- تابع صعودی است اگر مشتق مثبت باشد.
- نزولی به معنی منفی.

توقف بر این نقطه است که مشتق در آن صفر باشد یا موجود نباشد.

هزینه سرمایه الزامی بر این است ولی هزینه بر این الزاماً الزام نیست.

توقف بر این اولاً متعلق به دامنه تابع ثانیاً مشتق در آن صفر باشد یا موجود نباشد.

اگر جواب مشتق اول مشتق دوم را مثبت کرد می بینیم و اگر منفی شد کار کنیم و اگر صفر شد چیزی مستحق من شود و باید جدول تعیین علامت را تشکیل داد.

Year. Month. Date. ( )

در توابع مربع مستقیم تابع به ازای نقطه تماس = مرتبه راوی نقطه  
 ~ ~ ~ ~ ~ (۴ و ۳) ~ ~ ~ ~ ~

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 5x - 1 \quad \frac{4!}{4} = 3! = 6 \quad \text{مسئله ۱:}$$

$$f(x) = ax^n + dx^{n-1} + \dots + an$$

مستقیم مرتبه n ام تابع با n! =

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \text{مستقیم مرتبه n ام}$$

مسئله ۲:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- مقدار یک می گذاریم (۱):
- ۱  $n(1-x)^n$
  - ۲  $n(1-x)^{n-1}$
  - ۳  $\frac{n!}{(1-x)^n}$
  - ۴  $n!(1-x)^{-n-1}$  ✓

مسئله ۳:

$$y = t^2, x = t^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x < -1 \\ x^2+a & x \geq -1 \end{cases} \quad \text{مسئله ۴: این تابع در R مستقیم پذیر است}$$

مقدار بگذاریم

در راست  $-a + b = 1 + a \Rightarrow b = 1 + 2a$

مستقیم راست  $a = -2 \Rightarrow a = -2$

$$f'(x) = \begin{cases} a & x < -1 \\ 2x & x \geq -1 \end{cases}$$



سوال 5:  $f(x) \sim$  مستقیم در صورت نام ( )

$$f(x) = 2x/n$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

(چون چیدمان برابر است  $\Rightarrow$  مستقیم برای  $n=1$ )

صواب (در تابع بی‌نهایت تابع بی‌نهایت است)

سوال 6: معنیقات نقطه  $P$  بر  $y = \sqrt{3x-4}$  را چنان بیابید که خط مماس بر آن در نقطه  $P$  از مبدأ بگذرد

$$y = mx \quad y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$$

$$P(x_0, \sqrt{3x_0-4}) \text{ فرض شود نقطه برابر است با } m = \frac{3}{2\sqrt{3x_0-4}}$$

$$y = \frac{3}{2\sqrt{3x_0-4}} \cdot x \Rightarrow \sqrt{3x_0-4} = \frac{3}{2\sqrt{3x_0-4}} \cdot x_0$$

$$3x_0 - 4 = \frac{3}{2} x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow y_0 = \sqrt{3 \cdot \frac{4}{3} - 4} = 0$$

سوال 7: تابع  $f(x)$  معروف است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} = 0$$

- 1-  $f$  حد ندارد و بی‌نهایت در صورت مستقیم بزرگ است
- 2-  $f$  مستقیم بزرگ است ✓
- 3-  $f$  در صورت بی‌نهایت نیست
- 4-  $f(0)$  مستقیم بزرگ بود و  $f(0) = 0$  است

بی‌نهایت است

Year. Month. Date. ( )

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0$$

تابع در صورت مشتق پذیر هست ولی مقدارش ۰ است

$$f(x) = \begin{cases} x \cos x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f'(0) = ? = 1$$

مسئله ۸:

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n \cos n - 0}{n} = 1$$

پس درست است

مسئله ۹:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = \sin x \quad x=2$$

تابع  $g$  در  $x=2$  مشتق پذیر است

$$(g \circ f)'(0) = ? \quad g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f(x))' = f'(x) \cdot g'(f(x)) = 0$$

$$\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \quad \text{در} \quad x=2 \quad \text{مقدار} \quad g'(2)$$

مسئله ۱۰:

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \sqrt{3} \Rightarrow f(1+2\sin n)$$

مشتق عبارت  $f(1+2\sin n)$  در  $n = \frac{\pi}{6}$

$$f' \Rightarrow 2 \cos n \cdot f'(1+2\sin n) \Rightarrow n = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot f'(2)$$

$$2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = 3$$

مسئله ۱۱: ضریب  $h''(n)$  در مشتق دوم  $f(g(h(n)))$  کدام است

$$(g(h(n)))' \cdot f'(g(h(n))) = h'(n) \cdot g'(h(n)) \cdot f'(g(h(n)))$$

جواب سوال (چون این قسمت در مشتق دوم ضریب  $h''$  می شود)

مسئله ۱۲:

ضریب  $\frac{dy}{dx}$  را در نقطه  $t=2$  محاسب کنید

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$t=2$

مسئله ۱۳: اگر  $f'(0) = 2$  و  $g(1) = 0$  و  $g'(1) = 6$  باشد،  $(f \circ g)'(1) = ?$

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = 6 \cdot 2 = 12$$

مسئله ۱۴: اگر  $(f \circ g)'(1) = -12$  و  $g(1) = 0$  و  $f'(0) = -2$  باشد،  $g'(1) = ?$

$$g'(1) = 6$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \sqrt{e^{-n}}$$

مسئله ۱۵:

مشتق  $f(\ln n)$  در  $n=4$  کدام است

$$f'(\ln n) = \frac{1}{n} f'(\ln n) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{e^{-\ln 4}} = \frac{1}{8}$$

Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+h) - f(u-h)}{h} = \sqrt{x} \Rightarrow \text{مسئله 16: } f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ بر اساس } a=1, \text{ ابروی } 1 \text{ و بر مبنای}$$

$$-\frac{1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \cdot f'(1) = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+h) - f(u) + (f(u-h) + f(u))}{h} = 2f'(u) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(u) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h} = \frac{2}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} = \frac{2}{5} f'(a) = \frac{8}{5}$$

مسئله 17: اگر  $f(a) = 4$  و  $f'(a) = 0$  باشد

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(a+2h)}{5} = \frac{2f'(a)}{5} = \frac{8}{5}$$

با جدول

$$y = \text{Arc } \frac{1}{x^2}$$

$$x=2$$

$$y' = \frac{2x}{1+x^4} = \frac{4}{17}$$

$$(\text{Arc } \frac{1}{u})' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$(\text{Arc } \frac{1}{h} \ln u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y' = \frac{1}{x} \ln x = 1$$

$$y = \cos(x+y) \Rightarrow \cos(x+y) - y = 0$$

$$y' = -\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)}$$

$$e^y + n^2 y^2 = 0$$

سوال 21 :

$$y' = \frac{-2n}{e^y + 2y}$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{y^2} = 2$$

$$y^2 + n^2 - 2n^2 y^2 = 0 \quad \text{در (1) و (2)}$$

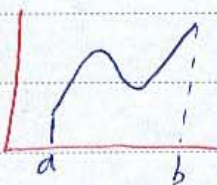
$$y' = \frac{2n - 4n^2 y^2}{2y - 4n^2 y^3}$$

سوال 23 : man تابع دو به دو در بازه زیر کدام است

$$y^2 \mid x^2 - 1 \mid$$

در بازه  $[\frac{3}{2}, 2]$

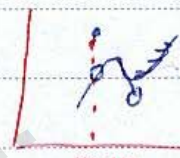
تفسیر: اگر تابعی در یک فاصله نسبت به دو بسته باشد شما دارای یک کمترین مقدار و یک بیشترین مقدار است ولی عکس آن صادق نیست.



معلق min, man دارد



min, man بعلق ندارد



man

اگر تابعی به بسته باشد min و man را باید روی بنی های کثیر د باید در دو انتها.

$c_1 \quad c_2 \quad c_3$

$f(c_1) \quad f(c_2) \quad f(c_3)$

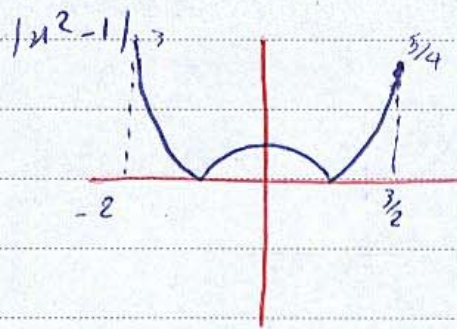
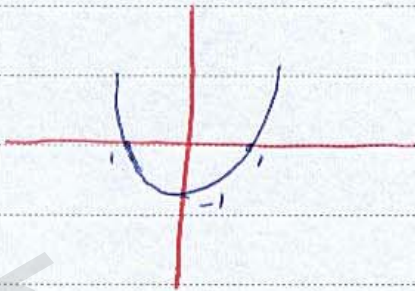
$f(a)$

$f(b)$

اگر  $f(a)$  بیشترین شد به سرفی قابل قبول است که تابع در آن تعریف شده باشد باید آن نقطه بازه دامنه بسته باشد.

Year. Month. Date. ( )

$$x^2 - 1$$



در 3 مقدار  $x$  مقدار مطلق است

مثال 24 نقاط  $\frac{17}{4}$  برای تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sin x$ ، نقاطی هستند!

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sin x$$

1. بیشترین بیشی
2. نقطه کف
3. ساده
4.  کمترین بیشی

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x = 0 \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$f''(x) = \sin x \Rightarrow f''(2k\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(2k\pi - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

$\Rightarrow$  max

صرفاً  $f''$  دلیل بر کف بود! فقط سیت و فقط برای درجه 3 است

مثال 25: بیشترین مقدار مطلق  $f(x) = \cosh x$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\cosh x$  یک تابع زوج است

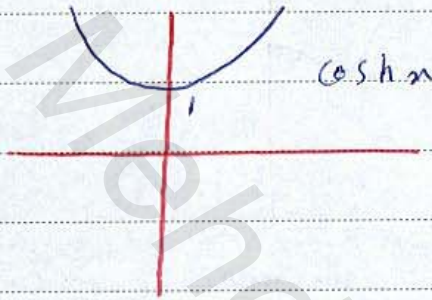
$$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$$

جان

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$y''_{(0)} = 1 > 0 \Rightarrow x=0$  min



سوال 26:

if  $g(x) = [x] \sin x \Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})$

$\frac{\pi}{2} = 1.7$   $[\frac{\pi}{2}] = 1 \Rightarrow g'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[x] \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1} = 0$

سوال 27: طول وتر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع 3 و 4 برابر  $\sqrt{5}$  است. بیشترین مقدار  $x+y$  کدام است.

$x^2 + y^2 = 5$   
 وقتی  $x$  و  $y$  طول اضلاع  $3$  و  $4$  است

$x+y \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{5-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0$

چون وتر  $\sqrt{5}$  است  $\Rightarrow$  اضلاع با اندازه  $\sqrt{5}$  که صحت ندارد و  $\sqrt{5} < 3$  و  $\sqrt{5} < 4$  پس هیچ جوابی ندارد.

$\sqrt{5-x^2} = x \Rightarrow 5-x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{10}$

Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} = ?$$

مثال 28:  $f'(a) = 8$  و  $f(a) = 20$

$$f' \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2} = 4$$

مثال 29: گاز به درون یک بالن که در آن شکل به نسبت  $5 \text{ m}^3$  در هر 5 سوراخ و وقتی سوراخ 3 است سوراخ 5 نسبتی در دقیقه زیاد می شود.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \times \pi \times 9 \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow 5 = 4 \times \pi \times 9 \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5}{36\pi}$$

مثال 30: یک نقطه در امتداد معنی تابع به معادله  $y = \sqrt{x}$  به نحوی حرکت می کند که مؤلفه آن در هر دقیقه طولی افزایش می یابد و وقتی  $x=1$  مؤلفه  $y$  آن به چه نسبتی در دقیقه تغییر می کند

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

مثال 31: یک مربع به نسبت  $7 \text{ cm}^3$  اضافی سوراخ سوراخ مربع وقتی طول ضلع آن 12 است به چه نسبتی زیاد می شود.

$$S = 6x^2 \quad \frac{dS}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

$$V = x^3 \quad \frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad 7 = 3 \times 12^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{7}{3}$$



$+nf(x) - nf(x)$

مسئله 32: اگر  $f'(2)$  موجود باشد، آنگاه  $I = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{nf(2) - 2f(n)}{n-2}$  را بیابید.

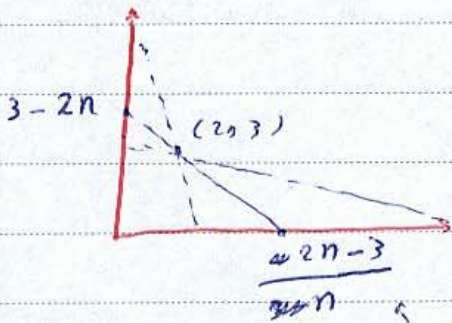
جواب:  $-2f'(2) + f(2)$

حقیقتاً  $I = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{f(2) - 2f(n)}{1} = f(2) - 2f'(2)$

مسئله 33: اگر  $n^2$  در  $n$  طبیعی فرد باشد معادله  $n^2 + n + 1 = 0$  را حل کنید.

- 1- دقیقاً یک ریشه دارد ✓
- 2- حداقل 2 ریشه دارد
- 3- ریشه مکرر دارد
- 4-  $n$  ریشه دارد

مسئله 34: دو خط گذرنده از نقاط  $(2, 3)$  و  $(3, 0)$  را در ناحیه اول یک مثلث بسازید. مساحت این مثلث چند واحد است.



$y = m \cdot x + m \Rightarrow 3 = 2m + m \Rightarrow m = \frac{3-0}{2-3} = -3$   
 $m = 3 - 2n$

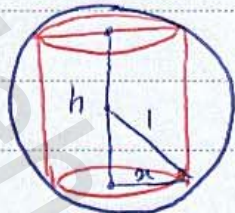
$(0,0) \Rightarrow x = -\frac{m}{m} = -1$  (قطع کند)  
 $(0,y) \Rightarrow y = 3 - 2n$

$S(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-2n}{n} \cdot (2n-3) = 0 \Rightarrow n = \frac{3}{2}$

$S(n) = \frac{1}{2} (3-2n) \left(\frac{2n-3}{n}\right)$   
 $S(n) = 0 \Rightarrow n = \frac{3}{2} \Rightarrow S\left(\frac{3}{2}\right) = 0$   
 $n = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \Rightarrow S\left(-\frac{3}{2}\right) = 12$

Year. Month. Date. ( )

سوال 35: ارتفاع استوانه‌ای با حجم ماکزیمم (رو) یک کره به شعاع واحد قرار می‌گیرد کدام است



$$V = \pi r^2 h$$

$$1 = r^2 + \frac{h^2}{4} \rightarrow r^2 = 1 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow V = \pi \left(1 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

$$V' = \pi \left(1 - \frac{3}{4} h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

سوال 36: اگر طول یک مستطیل 15 m و در حال افزایش با نرخ  $\frac{3}{5} m$  بوده و عرض آن 6 m و در حال کاهش با نرخ  $\frac{2}{5} m$  باشد در این صورت نرخ تغییر مساحت این مستطیل ... و در حال ... است

$$S(t) = x(t) \cdot y(t)$$

$$\frac{dS}{dt} = y(t) \frac{dx}{dt} + x(t) \frac{dy}{dt}$$

1 - کاهش 12 ✓

2 - 48 ✓

3 - افزایش 12

4 - 48 ✓

$$\frac{dS}{dt} = 15 \times (-2) + 6 \times 3 = -12$$

سوال 37: مجموع دو عدد صحیح و مثبت برابر 9 است حاصلضرب این دو عدد وقتی حاصلضرب آنی در مربع دیگر ماکزیمم باشد کدام است!

$$x + y = 9 \quad x = 9 - y$$

$$xy^2 = (9 - y)y^2 = A(y)$$

$$A'(y) = 18y - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 6$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow xy = 18$$

Year. Month. Date. ( )

سوال 38: اگر سطح داخلی یک کره فلزی 4 و سطح خارجی آن  $4\frac{1}{16}$  حجم تقریبی جداره کره حفره است

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi \cdot 4^2 \left(\frac{1}{16}\right)$$

سوال 39: استوانه‌ای با سطح 2 و ارتفاع h را در تقریب یک حجم این استوانه  $1 \text{ m}^3$  ای باشد ارتفاع استوانه را حساب کنید که سطح آن  $2\pi$  مینماید.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\pi h}$$

$$S(h) = 2\pi h \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi h}} + 2\pi \cdot \frac{1}{\pi h} = 2\sqrt{\pi} \sqrt{h} + \frac{2}{h}$$

$$S'(h) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}} - \frac{2}{h^2} = 0 \Rightarrow h^2 \sqrt{\pi} - 2\sqrt{h} = 0$$

$$\Rightarrow h = 1.08$$

سوال 40: نقطه‌ای بر  $y = x^2 + 1$  مابین دو نقطه (3, 1) و (1, 2) نزدیک‌ترین نقطه باشد.

$$\text{نقطه } (x, x^2 + 1) \Rightarrow d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2+1-1)^2}$$

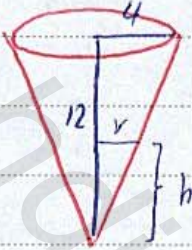
$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

$$d'(x) = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (1, 2)$$



Year. Month. Date. ( )

مثال 41: آب با سرعت  $\frac{\pi}{4}$  واحد ملعب در ثانیه وارد مخزن مخروطی شکلی به بلندی 12 واحد و شعاع قاعده 4 واحد می شود. سرعت افزایش ارتفاع آب وقتی ارتفاع آب 6 واحد باشد چقدر است.



$$\frac{r}{h} = \frac{4}{12} \Rightarrow r = \frac{h}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{27} \pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9} \pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{9} \pi \cdot 36 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}$$

پایه سوم:

مثال 42: کدام یک از مقادیر زیر تقریب مناسب تری برای  $\sqrt{5}$  هستند.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \Rightarrow f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x_0 = 4, \Delta x = 1$$

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4} \times 1 = 2.25$$

سوال 43: قطر نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  برابر با  $\sqrt{3}$  است یا نه است

$$f(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2)(3-x^2)}{(1+x^2)^4} = 0$$

1.  $(-\infty, \infty)$

2.  $(2, 3)$  ✓

3.  $(1, 2)$

4.  $(0, 1)$

$$-2x(1+x^2)(3-x^2) \quad x=0 \quad x=\sqrt{3} \quad x=-\sqrt{3}$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-

سوال 44: تابع  $f(x) = xe^{2x}$  مزیونی است

1.  $f$  در  $[0, 1]$  دارای ریشه نیست

2. حداقل دارای دو ریشه است

3. فقط یک ریشه دارد

4. هیچکدام

1. یوسسته و  $e^{2x}$  یوسسته ← ضرب یوسسته و ایوسسته ← جمع دو یوسسته یوسسته است

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = e - 1 > 0$$

⇒ حتماً یک ریشه دارد

$$f'(x) = e^{2x}(1+x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 1$$

دائره صعودی = حتماً دقیقاً یک ریشه دارد  $0 \leq x \leq 1$

Year. Month. Date. ( )

$$y = U^V \Rightarrow \ln y = V \ln U \Rightarrow \frac{y'}{y} = V \ln U + \frac{U'}{U} \cdot V$$

مشتق تابع  $U^V$

مثال 45: مشتق تابع  $y = x^{\sin x}$

$$\ln y = \sin x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x} \left[ \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

مثال 46:  $y = x^y = y^x$   $y' = ?$

$$\ln x^y = \ln y^x$$

$$y \ln x = x \ln y$$

$$y \ln x - x \ln y = 0$$

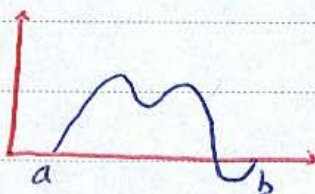
$$y' = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

مشتق نسبت به  $y$

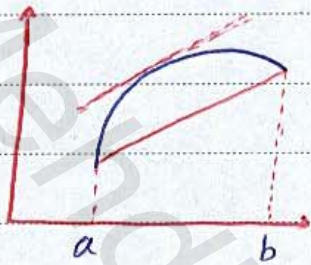
قفا یا ی رول → میانگین یا اگر اینز؟ - کوشی

تفسیر رول که با "ب" طرفه

$f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد  $\left\{ \begin{array}{l} \text{باز } (a, b) \text{ مشتق پذیر باشد} \\ \text{وجود دارد } c \in (a, b) \text{ و } f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array} \right.$



مثال /  
قضیه میانگین:



$f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد  
 $f$  بر  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد

لا اقل یک  $c$  وجود دارد در  $(a, b)$  به طوری که

$$c \in (a, b) \text{ s.t. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

قضیه کوشی:

اگر  $f$  و  $g$  در  $[a, b]$  پیوسته و در  $(a, b)$  مشتق پذیر و فرض شود  $g'(x) \neq 0$  در  $[a, b]$ ،  
آنگاه لا اقل یک  $c$  متعلق به بازه وجود دارد به طوری که

$$c \in (a, b) \text{ s.t. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

مثال 47: در کدام فاصله و اوقات  $\frac{\tan^{-1} x}{x}$   $0 < x < 1$   $f(x) = \tan^{-1}(x)$

1)  $(0, 1)$       2)  $(0, \frac{1}{2})$       3)  $(\frac{1}{2}, 1)$       4)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

شرایط قضیه میانگین برای  $f(x)$  برقرار است

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+c^2} = \frac{\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(0)}{x - 0} = \frac{\tan^{-1}(x)}{x}$$

گزینه

$$0 < c < 1 \Rightarrow 0 < c^2 < 1 \Rightarrow 1 < 1+c^2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

Year. Month. Date. ( )

مسئله ۹۸. معادله زیر دارای چند ریشه حقیقی است

$$x^5 + 3x + k = 0$$

۱- دقیقاً یک ریشه

۲- حداقل سه

۳- ریشه ندارد

۴- دو ریشه

پس بسته و مستقیم پذیر است

چون انوار فرد است چگونه صعودی است زیرا از  $- \infty$  می رود

راستی  $f(a) = f(b) = 0$  و این استوار

ریشه دومی در کار نیست  $\Rightarrow$   $5c^4 + 3 = 0 \Rightarrow c$  موجود ندارد

مسئله ۹۹: تابع  $f$  در فاصله بسته  $[0, 2]$  دو بار مستقیم پذیر است

$f(0) = f(2) = 0$  و  $x \in [0, 2] \Rightarrow f'(x) \neq 0$

در بازه  $(0, 2)$  کدام بیان درست است

- ۱- ریشه ندارد ✓
- ۲- دو ریشه متمایز دارد
- ۳- حداقل یک ریشه دارد
- ۴- ریشه ندارد

تابع  $f$  در شرایطی فقط دو ریشه صدق می کند

$f'(c) = 0 \Rightarrow c$  وجود دارد

زمن کنیم تابع  $f$  در فاصله  $(0, 2)$  یک ریشه مانند  $\alpha$  داشته باشد

$\Rightarrow f(\alpha) = 0$

$[0, \alpha] \Rightarrow$  شرایط رول برقرار است

$[\alpha, 2] \Rightarrow$  ~ ~ ~ ~





Year. Month. Date. ( )

روش جزئی به جزئی

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

برای توابع حاصلضرب که درجه مرتبه می شوند  $e^x \cos x$  و  $x \sin x$  معمولاً چیزی را  $u$  می گیریم که مشتق آن از خودش سبکتر شود و مواردی که Arc وارد اشتغال شود آنرا  $u$  می گیریم که مشتق آن چیزی می شود

مثال 2:

$$\int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$e^{2x} dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1$$

مثال 3:

$$\int \sin^{-1} x dx$$

$$u = \sin^{-1} x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$1-x^2 = u$$

مثال 4:

$$\int_0^1 \tan^{-1} \sqrt{x} dx = \int_{2T}^1 \tan^{-1} T dT$$

$$T^2 = x \Rightarrow 2T dT = dx$$

$$2TdT = dV \rightarrow V = T^2$$

$$V = \tan^{-1} T \rightarrow dV = \frac{dT}{1+T^2}$$

$$= \left. \frac{T^2 \tan^{-1} T}{0} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{T^2}{1+T^2} dT = \frac{\pi}{4} - \left( T + \tan^{-1} T \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

سوال 5:

اگر  $\ln$  زیر و فائز ال بود معمولاً بهتر است  $u$  گرفته شود

$$\int_e^{e^2} x \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$x du = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx$$

سوال 6:

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx = \int \ln u \, du = u \ln u - | \ln u = u$$

$$= \ln x \ln(\ln(x)) - \ln(x)$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln x - x$$

Year. Month. Date. ( )

مسئله 7:

$$\int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \rightarrow v = -\frac{1}{1+x}$$

$$u = x e^x \rightarrow du = e^x (x+1) dx$$

$$= -\frac{x e^x}{1+x} + \int \frac{e^x (x+1)}{(x+1)} dx$$

مسئله 8:

$$\int_{-1/2}^{1/2} (\cos x) \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0$$

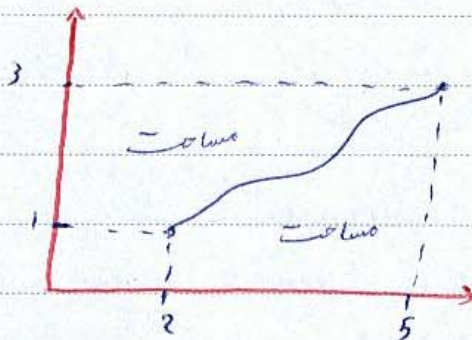
$\ln$  تابع فرد و  $\cos$  تابع زوج است. حاصلضرب آنها فرد است و انتگرال از  $-a$  تا  $a$  تابع فرد صفر است.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \text{ if } f(x) \text{ is odd}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ if } f(x) \text{ is even}$$

مسئله 9: اگر  $f$  بر بازه  $[2, 5]$  پیوسته و آید صعودی و  $f(2) = 1$  و  $f(5) = 3$  حاصل انتگرال زیر بدام است.

$$\int_2^5 f(x) dx + \int_1^3 f^{-1}(x) dx = 5 \times 3 - 2 \times 1 = 13$$



المدة  $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$  دالة  $y = \sin^2 \omega t$  المساحة: **الـ 11**

$$\left( A.V. = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \right) = \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \omega \sin^2 \omega t}{2\pi}$$

$$\int \sin^n x dx \rightarrow \text{فإن} \int \sin x (1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} dx$$

$$\int \cos^n x dx \rightarrow \text{فإن} \int \cos x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} dx$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi} \times \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt$$

**الـ 11**

$$\int_1^2 f(x) dx = 3 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = ?$$

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$-\int_2^1 f(u) du = \int_1^2 f(u) du = 3$$

**الـ 12**

$$\int x^{4n} (\ln x + 1) dx = \int y^3 dy \quad \begin{matrix} \ln x + 1 \\ u \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{matrix} \quad \begin{matrix} y \\ v \end{matrix}$$

$$y = x^{4n+1} \quad \ln y = (4n+1) \ln x \quad \frac{y'}{y} = (4n+1)$$

$$dy = (4n+1) x^{4n} dx$$

۴۷

Year. Month. Date. ( )

مثال ۱۳:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$u = \left(\frac{\sin u}{x}\right)^2 \rightarrow du = 2 \left(\frac{\sin u}{x}\right) \left(\frac{x \cos u - \sin u}{x^2}\right) du$$

$$dv = du \rightarrow v = u$$

$$\int = u \left(\frac{\sin u}{x}\right)^2 \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{2 \sin u \cos u}{x} du + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{x^2} du$$

$\frac{\sin^2 u}{x}$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{x^2} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2u}{x} du = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin T}{T} dT = \frac{\pi}{2} \Big|_{2u=T}$$

$dT = 2 du$

توابع معکوس مثلثاتی:

$$D_x (\sin^{-1} u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$y = \sin^{-1} u \Leftrightarrow u = \sin y \Rightarrow 1 = y' \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$D_x (\cos^{-1} u) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$D_u (\tan^{-1} u) = \frac{u'}{1+u^2} \rightarrow \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + c$$

$$D_u (\cot^{-1} u) = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \quad |x| \geq 1$$

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \quad |x| \geq 1$$

$$D_u (\sec^{-1} u) = \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2-1}} \rightarrow \int \frac{du}{u \sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + c$$

$$D_u (\csc^{-1} u) = \frac{-u'}{|u| \sqrt{u^2-1}}$$

$$\sin^{-1} \frac{x}{2}$$

: 14. J16

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

: 15. J16

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$\begin{aligned} u^2 &= e^x - 1 \rightarrow 2u du = e^x dx \\ e^x &= u^2 + 1 \end{aligned}$$

: 16. J16

Year. Month. Date. ( )

$$= \int_0^1 u \cdot \frac{2u}{1+u^2} du = 2 \int_0^1 \frac{u^2+1-1}{1+u^2} du = 2(u - \operatorname{tg}^{-1} u) \Big|_0^1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$$

$$u = \sin^2 x \rightarrow du = \sin 2x dx$$

مثال 17:

$$= \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{tg}^{-1} u \Big|_0^1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 \theta}{2+\operatorname{tg}^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال 18:

$$u = \operatorname{tg} \theta \quad du = (1+\operatorname{tg}^2 \theta) d\theta$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$$

مثال 19:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left( \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2} dx$$

چون (رابطه ربع اول)  $\cos + \sin$  مثبت هستند

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) dx$$

مثال 20:

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u \Big|_1^{\infty} = \cos^{-1} \left( \frac{1}{u} \right) \Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$



د.

: 21 ج 2

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$f(x) = 2 \int_0^x \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = 2 \int_0^x \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

$$e^{\frac{t}{2}} = u$$

$$f(x) \neq \frac{1}{u} \int u f(x)$$

: 22 ج 2

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{Arc cot} \frac{1}{h} = \frac{\pi}{2}$$

: 23 ج 2

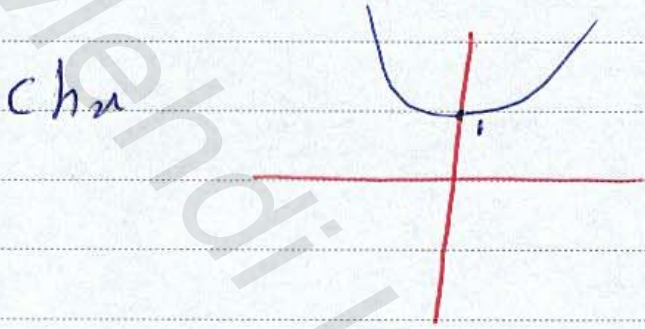
$$f(x) = \sinh^{-1}(x) \Rightarrow f'(0) = ?$$

$$\left( f(x) = \sinh^{-1}(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} \right) \quad \text{بقا}$$

$$\frac{1 + x^2 n}{\sqrt{x^2 n + 1}} = 1$$

Year. Month. Date. ( )

مثال 24: کدام مورد در باره تابع  $\psi \text{ch} x$  نادرست است -  
 1 زوج 2 فرد 3 دارای نقطه عطف 4 دارای بیش از یک



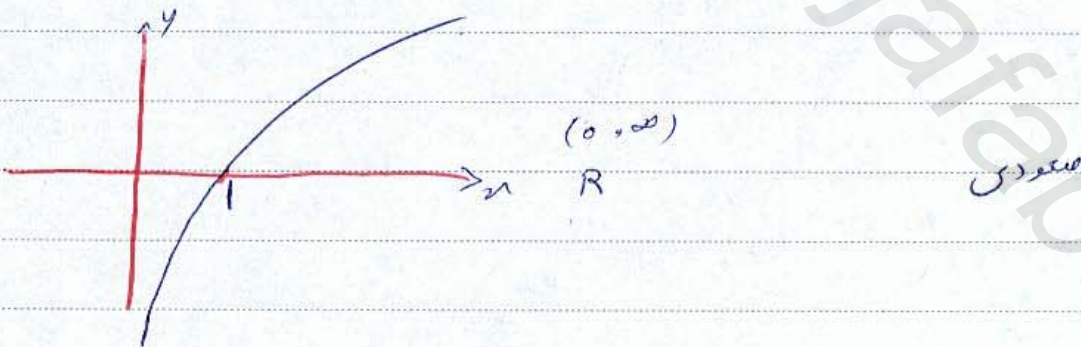
مثال 25: مشتق تابع در  $x=2$  کدام است

$$(\text{sh}^2 2x)' = 2 \text{sh} 2x \cdot \text{ch} 2x = 2 \text{sh} 4x = e^4 - e^{-4}$$

تابع لگاریتمی و نمایی:

تعریف تابع لگاریتمی

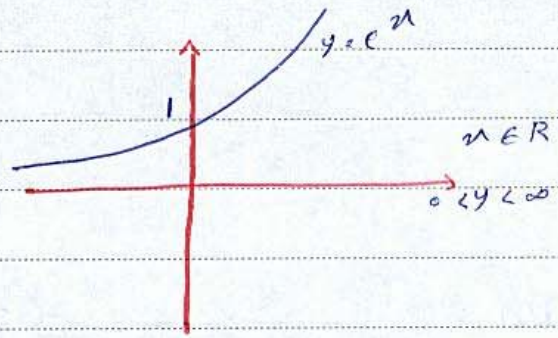
$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0$$



$$D_x (\ln u) = \frac{u'}{u} \rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

Year. Month. Date. ( )

$$\llcorner y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \llcorner$$



$$\llcorner a^x = e^{x \ln a} \llcorner$$

$$\llcorner \ln a^x = x \ln a \llcorner$$

$$\llcorner y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u \llcorner$$

$$\llcorner \int e^u du = e^u + C \llcorner$$

$$\llcorner D_x(a^u) = u' a^u \ln a \llcorner$$

$$\llcorner \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C \llcorner$$

$$\times y = 2^{\cos x} \Rightarrow y' = -\sin x \cdot 2^{\cos x} \ln 2$$

$$\times \int 2^{4x+1} dx = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\ln 2} \times 2^{4x+1} + C$$

$$\llcorner \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \llcorner$$

$$\llcorner D_x \left( \log_a u \right) = \frac{u'}{u \ln a} \llcorner$$

سوال 26:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) + C$$

سوال 27: نمودارهای  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  و ثابت  $y=c$  را در یک صفحه در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱- اگر  $c$  کوچکتر یا مساوی صفر آنگاه یک نقطه تلاقی دارد.

۲-  $0 < c < \frac{1}{e}$  دو نقطه تلاقی دارد.

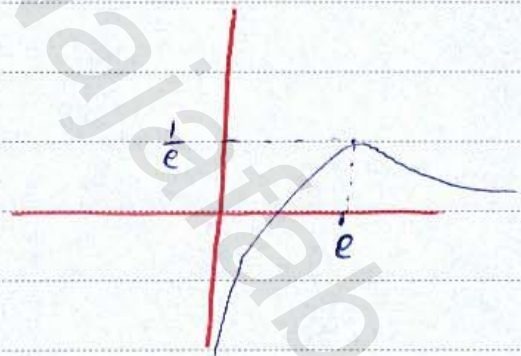
۳-  $c > \frac{1}{e}$  هیچ نقطه تلاقی ندارد.

۴-  $0 < c < \frac{1}{e}$  سه نقطه تلاقی دارد.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$



سوال 30:

$$\int \frac{\ln u}{u(1+\ln u)} du$$

$$u = 1 + \ln u$$

$$du = \frac{1}{u} du$$

$$= \int \frac{u-1}{u} du = u - \ln u + C$$

مسئله 31

$$\int_1^3 \frac{du}{u-2} = \int_1^2 \frac{du}{u-2} + \int_2^3 \frac{du}{u-2} = -\infty - \infty = -\infty$$

مسئله 32

$$\frac{x^{\log y}}{y^{\log x}} = \frac{x^{\log y}}{y^{\log x}}$$

$$\log_a y = A \quad y = a^A$$

$$\log_a x = B \quad x = a^B$$

$$\Rightarrow \frac{(a^B)^A}{(a^A)^B} = 1$$

مسئله 33

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) \cot u \, du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u \, du$$

$$u = \ln(\sin u) \quad du = \frac{\cos u}{\sin u} du = \cot u \, du$$

مسئله 34: برای مقادیر  $a$  انتگرال هر کس

4  $a < 1$   
 $a \neq 1$

3  $a < 1$

2  $a > 1$

1  $|a| = 1$   
 $a \neq 1$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^a}$$

$$\ln x = u$$

$$\Rightarrow = \int_0^{\ln 2} u^{-a} du = \frac{1}{1-a} u^{1-a} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{1-a} (\ln 2)^{1-a}$$

اگر  $1-a > 0 \Rightarrow a < 1$  یعنی  $u$  می تواند به  $0$  برسد

۵۵

Year. Month. Date. ( )

سوال 35:  $2^x = 3x$  در کدام بازه جواب دارد.1)  $(-2, 0)$ 2)  $(-1, 0)$ 3)  $(1, 2)$ 4)  $(0, 1)$  ✓

سوال 36:

$$f(x) = \ln \frac{2x+1}{x} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3)$$

$$y = \ln \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = e^y \quad 2x+1 - xe^y = 0$$

$$x(2 - e^y) = -1 \quad x = \frac{1}{e^y - 2} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3) = 1$$

$$y = (x^2 + 1)e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_1 = ?$$

سوال 37:

$$\ln y = e^x \ln(x^2 + 1) \quad \frac{y'}{y} = e^x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x}{x^2 + 1} e^x$$

$$y'_{x=1} = 2^e (e \ln 2 + e)$$

سوال 38:

$$x = t^2 - 1 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1}$$

$$y = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-1}{t^2}}{2t} = \frac{-1}{2t^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{3}{2t^4}}{2t} = \frac{3}{4t^5}$$

$$x = \sqrt{t}$$

$$y = \sin t$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{11}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

:39 الج

$$f(x) = \ln x$$

$$f \circ g(x) = x \ln x \Rightarrow g'(2) = ?$$

$$g'(x) f'(g(x)) = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow f'(g(x)) = \ln x^x$$

$$g(x) = x^x \Rightarrow \ln g(x) = x \ln x$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow g'(2) = 4(1 + \ln 2)$$

:41 الج ما كزيمو تابع زير بدو اس

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x = x^{-x}$$

$$\ln y = x \ln \frac{1}{x}$$

$$\ln f(x) = -x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln x - 1$$

$$f'(x) = -x^{-x} (1 + \ln x)$$

$$\ln x = -1 \quad x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

x ≠ 0 في سواد جود او دامت تابع سنيت

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = (e)^{\frac{1}{e}}$$

Year. Month. Date. ( )

مسئله 42: انتگرال معین = مشتق معکوس شود

$$y = e^{1+\sin x} + \int_0^2 \ln(2+\sin u) du$$

$$y'(x) = \ln y = 1 + \sin x + \ln \int \frac{y}{y}$$

$$y' = (1 + \sin x) e^{1+\sin x}$$

مسئله 43:

$$\int_0^2 2^{x^3} x^2 dx \quad u = x^3 \quad du = 3x^2 dx$$

$$\frac{1}{3} \int_0^8 2^u du = \frac{1}{3} \frac{2^u}{\ln 2} \Big|_0^8 = 122.63$$

مسئله 44: مقدار متوسط تابع  $f(x) = 2^x$  در بازه  $[0, 1]$

$$A.V = \frac{\int_0^1 2^x dx}{1-0} = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

مسئله 45:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x} \sin x^2}{x + ne^{1/x}} = \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \frac{x}{1 + e^{-1/x}}$$

از بازه  $\sin x^2$   $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + e^{-1/x}} = \frac{0}{1+0} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + e^{-1/x}} = 0$$

برای رسیدن تابع  $\sin x^2$  به صفر  $x^2$  باید از صورت است  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x^2 = 0$  زیرا  $\sin$  در صورت صفر شود صفر می شود

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (h) = 0$$



مثال 46:  $\int_1^2 e^{-x^2} d(x/|x|) = \int_{-1}^0 e^{-x^2} d(-x^2) + \int_0^1 e^{-x^2} d(x^2)$

تابع زوج است  $f \neq 0$   
 $= e^{-x^2} \Big|_{-1}^0 + e^{-x^2} \Big|_0^1 = 1 - e^{-1} - e^{-1} + 1 = 2 - 2e^{-1}$

مثال 47:

$\int_1^e \frac{\ln x^2}{x} dx$        $\ln u^2 = u$        $du = \frac{2x}{x^2} dx$        $\frac{1}{2} du = \frac{1}{x} dx$

$= 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 2 \int_0^1 u du = 1$

دسته مسوق میری از استرالیا!

$D_x \int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt = f(V(x))V'(x) - f(U(x))U'(x)$

مثال 1:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - \sqrt{2x}} \int_2^x \frac{t+1}{t^3-5} dt$        $\frac{0}{0}$        $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{x^3-5} \times 1 - 0}{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}} = \frac{4}{3}$

مثال 2:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - \sqrt{2x}} \int_2^x \sqrt{5+t^2} dt = 6$

Year. Month. Date. ( )

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin(\tau n)}{n} d\tau$$

:3

$$t \sin t : \frac{\sin \tau n}{n} : \frac{2 \sin t^2}{t} : \int_0^t \cos(\tau n) d\tau \quad \checkmark$$

$$\frac{\sin t^2}{t}$$

}

:4

$$D_n \left[ \int_{3n}^{4n^2+3} \sqrt{\cos t} dt \right] = 8n \sqrt{\cos(4n^2+3)} - 3 \sqrt{\cos 3n}$$

:5

$$D_n: \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt$$

:6

$$I(B) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-n^2}}{2\sqrt{n}} \cos \beta n dn \Rightarrow I'(2) = ?$$

$$I(2) - I(2) \quad \text{الف}$$

$$I(B) = \int_0^{\infty} -e^{-n^2} \sin \beta n dn \quad \text{ب}$$

$$u = \sin \beta n \Rightarrow du = \beta \cos \beta n$$

$$-n e^{-n^2} dn = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{-n^2}$$

$$I'(B) = \frac{1}{2} \frac{e^{-n^2}}{n} \sin \beta n \Big|_0^{\infty} - \frac{B}{2} \int_0^{\infty} e^{-n^2} \cos \beta n dn$$

$$I'(2) = -I(2)$$

:7

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \int_0^a x \sin x dx = 0$$

:8

$$G(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2) dt \Rightarrow G'(0) = ?$$

$$G'(x) = 3x^2 \cos x^6 - \cos x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{x \int_{x_1}^x f(t) dt}{x - x_1} = \frac{\int_{x_1}^{x_1} f(t) dt + x_1 f(x_1)}{1} = x_1 f(x_1) \quad :9$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \frac{2e^{x^2} (\int_0^x e^{t^2} dt)}{2xe^{x^2}} = \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2x} \rightarrow 0 \quad :10$$

|| فرض شود تابع  $g$  در همه جا پیوسته و انتگرال  $\int_0^1 g(t) dt = 1$   $f'(1) = ?$   $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt$

الف - 1 ج - 2 د - 3 ه - 4

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - 2xt + t^2) g(t) dt$$

$$x^2 \int_0^x g(t) dt - 2x \int_0^x t g(t) dt + \int_0^x t^2 g(t) dt$$

$$-2x \int_0^x t g(t) dt = -2 \int_0^x t g(t) dt - 2x \int_0^x g(t) dt$$

# www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسين عمران

ارائه كتابها و جزوات رایگان مهندسی عمران

بهترین و برترین مقالات روز عمران

انجمن های تخصصی مهندسی عمران

فروشگاه تخصصی مهندسی عمران



@icivilir



icivil.ir



$$\int_0^x t^2 g(t) dt = x^2 g(x)$$

$$f'(x) = 2x \int_0^x g(t) dt + x^2 g(x) - 2 \int_0^x t g(t) dt - 2x g(x) + x^2 g(x)$$

$$f''(x) = 2 \int_0^x g(t) dt + 2x g(x) - 2x g(x)$$

$$f''(1) = 2$$

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{\cos x} = 1 \quad : 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \int_2^x \sqrt{20-t^4} dt = \frac{x}{x-2} \int_2^x \sqrt{20-t^4} dt \quad : 13$$

$$= \frac{2}{x-2} \int_2^x \sqrt{20-t^4} dt$$

$$f'(x) = \int_0^{\sin x} x e^{-t^2} dt = x \int_0^{\sin x} e^{-t^2} dt + x \cos x e^{-\sin^2 x} \quad : 14$$

$$f'(1) = ?$$

$$f'(x) = \int_0^{\sin x} e^{-t^2} dt + x \cos x e^{-\sin^2 x} = -1$$

$$f(x) = \int_1^x \frac{du}{1+u^4} \quad f(1) + f(1) = ? \quad : 15$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

۹۷

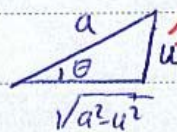
Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^2}{n-1} \int_1^{x^2} \frac{\sin \frac{\pi}{4} t}{t} dt = \sqrt{2}$$

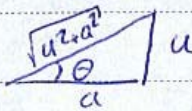
: 16

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} \int_1^{x^2} \dots = \lim_{n \rightarrow 1} 2x \frac{\sin x^2 \frac{\pi}{4}}{x^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{a^2 - u^2} \quad u = a \sin \theta$$



$$\sqrt{a^2 + u^2} \quad u = a \operatorname{tg} \theta$$



$$\sqrt{u^2 - a^2} \quad u = a \operatorname{sec} \theta$$

انستراسی از توابع بی فون زبر

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{-(x^2 - x)} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2} dx = 1$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta \quad du = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{3/4} 2\sqrt{1+t^2} dt = ? \quad t = \tan \theta \quad \frac{15}{16} + \ln 2 \quad :2$$

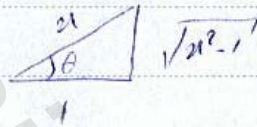
$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{4u-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{4-(u-2)^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{u-2}{2} \Big|_1^3 = \frac{\pi}{3} \quad :3$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \int \frac{\tan^2 \theta \sec \theta}{\sec \theta} d\theta = \tan \theta - \theta \quad :4$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$x = \sec \theta$$



باید ↓

$$\cos \theta = \frac{1}{x}$$

جد استرال  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$

درجه معرف بسیر از صورت = معرف تغییر می شود

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x^2+4)(x^2-2x+5)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{x^2-2x+5}$$

$\ln + \text{Arctg}$        $\ln + \int \frac{a}{x^2-2x+5}$  مع کمال شود

گوناگون توابع ضلای  $\int \dots dx$

$$\Rightarrow z = \tan \frac{x}{2}$$

Year. Month. Date. ( )

$$\cos n = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\sin n = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$dn = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\int \frac{dn}{2 - \cos n} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2 - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2}{1+3z^2} dz$$

:5

انستگرال نامعین معنی ندارد انستگرال گیری از توابع ناممکن جزء صریح و قدر مطلق

$$n \in [2, 3]$$

1: به ازای هر مقدار  $n$  تساوی زیر برقرار است

$$\int_0^n [t^2] dt = 2(n-1)$$

$$\int_0^1 0 dt + \int_1^2 1 dt + \int_2^n 4 dt = 2(n-1)$$

$$1 + 4(n-2) = 2(n-1) \Rightarrow n = \frac{5}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} [n^2] dn = \int_0^1 0 dn + \int_1^{\sqrt{2}} 1 dn + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2 dn$$

:2

$$0 < n^2 < 1 \quad = \sqrt{2} - 1 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$1 < n^2 < 2 \quad 1 < n < \sqrt{2}$$

$$2 < n^2 < 3 \quad \sqrt{2} < n < \sqrt{3}$$



$$\int_0^3 (x - [x] + \frac{1}{2}) dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{2}) dx + \int_1^2 (x - \frac{1}{2}) dx + \int_2^3 (x - \frac{3}{2}) dx \quad :3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 \sin^2 x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 0 dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1 dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3 dx \quad :4$$

$$0 < 4 \sin^2 x < 1 \Rightarrow 0 < \sin^2 x < \frac{1}{4} \quad 0 < \sin x < \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{4} < \sin^2 x < \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} < \sin^2 x < \frac{3}{4} \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{3}{4} < \sin^2 x < 1 \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^{n+1} \ln [x] dx = \int_1^2 \ln(1) dx + \int_2^3 \ln 2 + \dots + \int_n^{n+1} \ln n \quad :5$$

$$\ln [x] \quad 1 < x < 2 \quad \ln n! \quad \ln(n+1)! \quad \ln \frac{n}{n+1} \quad \ln \frac{n+1}{n}$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \ln n!$$

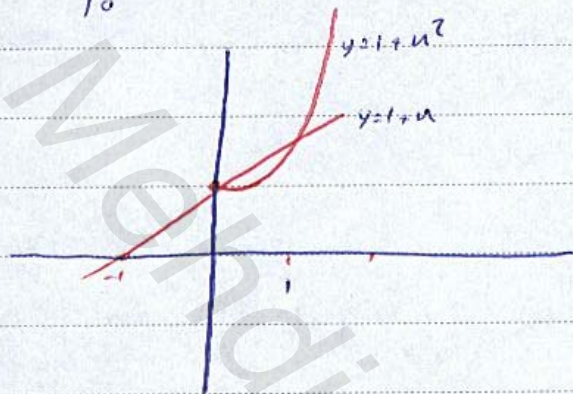
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \sin x] dx \Big|_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 0 dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \quad :6$$

$$0 < 2 \sin x < 1 \quad 0 < \sin x < \frac{1}{2} \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}$$

$$1 < 2 \sin x < 2 \quad 0 < \sin x < 1 \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$$

Year. Month. Date. ( )

$$\int_0^2 \max(1+u, 1+u^2) du = \int_0^1 1+u du + \int_1^2 1+u^2 du \quad :7$$



$$1+u^2 = 1+u$$

$$u^2 - u = 0 \quad u=1$$

انتگرالهای نامتناهی با نامبره:

$$\int_a^{+\infty} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b$$

$$\int_{-\infty}^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b$$

باید تک انتگرالها موجود باشد

$$x \geq a \quad 0 \leq g(x) \leq f(x) \Rightarrow 0 \leq \int_a^{\infty} g(x) dx \leq \int_a^{\infty} f(x) dx$$

- هگرانی ① ← هگرانی ②  
واگرانی ② ← واگرانی ①

:1

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$
 اگر  $p > 1$        $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$        $p < 1$        $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

اگر انٹگرل روپرو چکرانا پس در نتیجہ انٹگرل ازینز چکر است و عکس آن صادق نیست

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx \rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$$

اگر  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$        $\int_a^{\infty} f(x) dx$

1 اگر  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  چکر مطلق  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  چکر  
 2 اگر  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  چکر مطلق  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  چکر  
 3 اگر  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  چکر مطلق  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  چکر

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^5} \quad 0 < \frac{1}{1+x^5} < \frac{1}{x^5}$$

اگر  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}$        $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

اگر  $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  چکر مطلق  
 چکر مطلق  $\cos$  ازینز کو چکر است ولی  $-1 \leq \cos \leq 1$  چکر مطلق  $\cos$  را می توانیم

:1 موجود نیست

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = ? \quad 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{1} - (-\frac{1}{0}) = -1 + \infty = \infty$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^2}$$

Year. Month. Date. ( )

$$f(a) = \infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$f(b) = \infty = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \int_a^{b+\delta}$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad f(c) = \infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_a^{c+\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b$$

:2

$$\int_0^1 \ln x dx = x \ln x - x \Big|_0^1 = -1$$

$$\frac{\infty}{\infty} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x$$

:3

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{2} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}$$

:4

$$\int_2^4 \frac{t}{\sqrt{t^2-9}} dt = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2-9}} dt + \int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t^2-9}} dt = \sqrt{5} - \sqrt{7}$$

صورتها:

$\frac{0}{0}$  ,  $\frac{\infty}{\infty}$  ,  $0 \times \infty$  ,  $\infty - \infty$  ,  $0^0$  ,  $\infty^0$  ,  $1^\infty$

خوبتر

$0 \times \infty \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \Rightarrow \frac{f_1}{\frac{1}{f_2}} = \frac{\infty}{\frac{0}{\infty}}$

معمولاً بهتر است  $\ln$  در صورت باشد

$\infty - \infty \Rightarrow f_1 - f_2 \rightarrow f_1 \left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right) \Rightarrow \infty \left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)$

توصیفی شود

$\infty \times \infty = \infty$   
 $\infty \times 0 = 0$

$0^0, \infty^0, 1^\infty \Rightarrow y = f_1^{f_2} \Rightarrow \ln y = f_2 \ln f_1 \Rightarrow \lim \ln y = \lim f_2 \ln f_1$

$\ln(\lim y) = \lim f_2 \times \lim \ln f_1 = \lim f_2 \times (\ln(\lim f_1))$

$\infty^0 \Rightarrow \lim f_2 = \infty, \lim f_1 = 0 \Rightarrow \ln \lim y = \infty \times (-\infty) = -\infty$

$0^0 \Rightarrow \lim f_2 = 0, \lim f_1 = 0 \Rightarrow \ln \lim y = 0 \times (-\infty) = 0$

$\infty^0 \Rightarrow \lim f_2 = \infty, \lim f_1 = 0 \Rightarrow \ln \lim y = \infty \times (-\infty) = -\infty$

$1^\infty \Rightarrow \lim f_2 = 1, \lim f_1 = \infty \Rightarrow \ln \lim y = 0 \times \infty = 0$

بعد از رفع ابهام  $\ln(\lim y) = a \Rightarrow (\lim y = e^a)$

$0^\infty \Rightarrow \lim f_2 = 0, \lim f_1 = \infty \Rightarrow \ln \lim y = 0 \times (-\infty) = -\infty$

$\infty^0 \Rightarrow \lim f_2 = \infty, \lim f_1 = 0 \Rightarrow \ln \lim y = \infty \times (-\infty) = -\infty$

Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{1/n} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n+c}\right)^{Bn+r} = e^{\alpha B}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n+c}\right)^{Bn+r} = e^{\alpha B}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{n}{n-\sin n} - \frac{6}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{n^3 - 6n + 6\sin n}{n^2(n-\sin n)} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+c}{n-c} \right)^{2n} = 4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2c}{n-c} \right)^{2n}$$

تجربۀ لانه، بازي می کند

$$t = n + c \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2c}{t} \right)^t = e^{2c} = 4 \quad c = \ln 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+5}{2n-1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{2n-1} \right)^{2n} = e^6$$

تجربۀ لانه، بازي می کند

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) = 0$$

:4

$n \rightarrow \infty$

در فرجه ضرب و تقسیم شود.

:5  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که راجعه زیر برقرار شود.

$$I = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{b + \sin n} \int_0^n \frac{t^2}{\sqrt{a-t}} dt = -2$$

$\exists x$   $a = -1$   $b = -1$

$a = 1$   $b = 1$

$a - t > 0 \Rightarrow a > t \Rightarrow n > t > 0 \quad a > 0 \Rightarrow a = 1 \quad b = -1 \quad \checkmark$



$\exists x$   $a = -1$   $b = 1$

$$I = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\frac{n^2}{\sqrt{a-n}}}{b + \cos n} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n^2}{\sqrt{a-n}(b + \cos n)}$$

در  $n = 0$  صورت  $= 0$  اگر معراج میزنند  $I = 0 = 1 - 2 = -1 \neq -2$  می شود

$=$  باید معراج معر شود تا حد بینار برآید  $(\neq)$   $b = -1 \Leftrightarrow b < 0 \Leftrightarrow \cos n > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{1/n} - 1)^n$$

:6

$n \rightarrow \infty$

$$y = (a^{1/n} - 1)^n$$

$$\ln y = n \ln(a^{1/n} - 1)$$

$\infty \times (-\infty) = -\infty$

$$\lim y = e^{-\infty} = 0$$

۷۷

Year. Month. Date. ( )

تا بیج  $\Gamma$ : گاما

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

برای  $\alpha > 0$  هر است.

برای مقادیر  $\alpha \in [1, 2]$  مقدار انتگرال دارای جدول خواهد بود. برای مقادیر غیر گامی می بینیم  $\alpha$  در بازه ذکر شده قرار بگیرد.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

اگر  $\alpha > 2$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \underbrace{x^{\alpha}}_u dx = -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$\frac{dx}{dv}$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

مثال:  $\Gamma(4) = 3 \Gamma(3) = 3 \times 2 \times \Gamma(2) = 3 \times 2 \times 1 = 3!$

مثال:  $\Gamma(5.7) = 4.7 \Gamma(4.7) = 4.7 \times 3.7 \times 2.7 \times 1.7 \Gamma(1.7) = (4.7)!$

اگر  $\alpha < 1$

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

مثال  $\Gamma(-2.6) = \frac{\Gamma(-1.6)}{(-2.6)} = \frac{\Gamma(-0.6)}{(-2.6)(-1.6)} = \frac{\Gamma(0.4)}{(-2.6)(-1.6)(-0.6)(0.4)}$

از جدول

فائده این برای تمام اعداد متعلق به  $R$  تعریف می شود به جز اعداد صحیح منفی



$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$        $\Rightarrow 1 = 0!$       تعریف نشده       $\Gamma(0) = -1!$       قرین شده

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$        $1 = 0(-1)!$       تعریف نشده

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

:1

$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$

:2 عراق

$\left(\frac{3}{2}\right)! = ? = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)!$

:3

~~✗✗✗~~  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{3}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

:4

$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \frac{6!}{2^7}$

$2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$

$\int_0^{\infty} x^6 \cdot e^{-2x} dx = \frac{1}{2^7} \int_0^{\infty} e^{-t} t^6 dt$

انتگرالها بی‌نهایت نابدا آنها  $\rightarrow \infty$  است یا از لاپلاس بار  $\Gamma$  حل می‌شود

Year. Month. Date. ( )

:5

$$\int_0^1 (-\ln t)^3 dt$$

وجود ندارد از ۰ تا ۱ پس دهده می توان با تغییر متغیر با نظر ایا  
۰ تا ∞ کرد

$$-\ln t = x \Rightarrow -\int_{\infty}^0 x^3 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = 3! = 6$$

$$t = e^{-x}$$

$$dt = -e^{-x} dx$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/4} dt$$

:6

$$x^4 = t$$

$$4x^3 dx = dt$$

$$x^2 dx = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x} dt \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{4} t^{-1/4} dt$$

$$x = t^{1/4} \Rightarrow x^{-1} = t^{-1/4}$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

تابع B

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\text{مثال: } \int_0^1 x^2 (1-x)^4 dx = B(3, 5) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \frac{2! 4!}{7!}$$

نقشه فرمول

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{2 \Gamma(m+n)} \quad , m, n > 0$$

دنباله دوسری

دنباله تابعی است مانند  $f$  که از مجموعه اعداد طبیعی  $N$  به مجموعه اعداد حقیقی  $R$  تعریف می شود

$$f(n) = \frac{2}{n+1} \\ a_1, a_2, \dots, a_n$$

دنباله همگراست اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ موجود باشد}$$

$$\frac{4n}{n-1} \quad \text{همگرا به } 4$$

$$\frac{4n^2}{n-1} \quad \text{واگر}$$

$$1, 1, 1, \dots \quad \text{همگرا به } 1 \quad \text{واگر } (-1)^n$$

اگر  $|r| < 1$  باشد دنباله  $r^n$  همگراست و حد آن صفر می شود ولی برای مساوی بار بزرگتر واگر است.

$$\begin{array}{cc} a_n & \text{و} & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & b \end{array}$$

$$a_n \pm b_n \xrightarrow{\text{همگرا به}} a \pm b$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$



$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

دنباله  $\{S_n\}$  موجود باشد  $\lim S_n = L$

از هر دنباله  $S_n$  موجود باشد آنگاه سری به  $\lim S_n$  که برابر است - همگرا می باشد.

∴ حاصل سری زیر کدام است.

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \quad \text{با } n \text{ فرد } n=2k-1$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$n=1 \quad \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$n=3 \quad \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

$$n=5 \quad \frac{1}{5 \times 7} = \frac{1}{10} - \frac{1}{14}$$

$$\vdots$$

$$n=n \quad \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

مقدار همگرا می

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+2)}$$

VA

Year. Month. Date. ( )

:2

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

$$n=1 \quad \frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$n=2 \quad \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$n=n \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

مقدار زیر کد او است :3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = ? \Rightarrow$$

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$n=1 \quad \frac{2}{1 \times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$n=2 \quad \frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

سری هندسی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

مجموعه اول  
قدر نسبت

اگر  $|q| < 1$  سری همگرا به  $\frac{a}{1-q}$

اگر  $|q| \geq 1$  سری واگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

همگرا

سری همساز:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

واگرا

اگر یک سری همگرا نباشد حد جمله عمومی آن صفری نباشد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$n \rightarrow \infty$

اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  صفر نبود سری واگرا است ولی اگر صفر بود دلیل بر همگرایی نیست.

مثال  $\sum \frac{2n-1}{4n+3}$  واگرا  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$

نوع سری حاصل از حذف  $m$  جمله از سری با سری اولیه فرقی نمی کند

مثال  $\sum \frac{1}{n+4}$   $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$

واگرا  $\sum \frac{1}{n}$   $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \Rightarrow \sum \frac{1}{n+4}$





**P سری:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$p > 1$  هژا  
 $p < 1$  واژا

۱: برازای کدام مقادیر P سری هژا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3p+3}}$$

$$-3p-3 > 1 \Rightarrow p < -\frac{4}{3}$$

$$p < -\frac{3}{4}$$

$$p < -\frac{4}{3} \checkmark$$

$$-\frac{3}{2} < p < -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4} < p < -\frac{4}{3}$$

**قضیه:** سری با جلاست مثبت

هژا  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$  آنگاه  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  همنوع هستند.

هر دو همنوع هستند  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+4)} = 1$  واژا  $\Rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+4)} = 1$  واژا  
 مثال:  $\frac{1}{n+4}$

هژا  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  آنگاه اگر  $b_n$  هژا،  $a_n$  هژا است.

هر دو هژا  $\frac{1}{n^3+4} \sim \frac{1}{n^3}$  و  $\frac{1}{n^2}$

هژا  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$  آنگاه اگر  $b_n$  واژا،  $a_n$  واژا است.

Year. Month. Date. ( )

آزمون دالامبر:

اگر  $\sum a_n$  یک سری مثبت و  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  آنگاه اگر  
 هرگاه  $L < 1$   $\Rightarrow$   $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$   $\Rightarrow$   $\lim a_n = 0$   $\Rightarrow$   $\sum a_n$  همگرا است  
 اگر  $L > 1$   $\Rightarrow$   $\lim a_n \neq 0$   $\Rightarrow$   $\sum a_n$  واگراست  
 اگر  $L = 1$   $\Rightarrow$   $\lim a_n = 0$   $\Rightarrow$   $\sum a_n$  همگراست یا واگراست

آزمون کوشی

اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$   $\Rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$   
 هرگاه  $L < 1$   $\Rightarrow$   $\sum a_n$  همگراست  
 اگر  $L > 1$   $\Rightarrow$   $\sum a_n$  واگراست  
 اگر  $L = 1$   $\Rightarrow$   $\sum a_n$  همگراست یا واگراست

اگر  $a_n$  توان  $n$  داشته باشد (در این آزمون) حل شود

قضیه

اگر سری  $\sum a_n$  یک سری مثبت و  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$  موجود باشد آنگاه اگر  
 مخالف صفر  $\Rightarrow$   $\sum a_n$  همگراست  
 صفر  $\Rightarrow$   $\sum a_n$  واگراست

$p > 1$  سری همگرا  
 $0 < p < 1$  سری واگرا

مثال  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \times \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow p = 1$   $\Rightarrow$   $\sum \frac{1}{n}$  واگراست

اگر  $p = 1$   $\Rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2}{n^2+3} = 1$   $\Rightarrow$   $\sum \frac{n}{n^2+3}$  واگراست

اگر  $p = 2$   $\Rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n^2+3} = 1$   $\Rightarrow$   $\sum \frac{1}{n^2+3}$  همگراست

اگر تابع  $f(x)$  به ازای  $x \geq a$  پیوسته و مثبت و اندکاً نزولی باشد، آنگاه سری  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  سبب به شکل  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  همگرا یا واگرا باشد، همگرا یا واگراست.

مثال  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  **مثال فقط شود**  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  **مثال فقط شود**

$$f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x \ln x)^2}$$

فرض شود  $e > x$   $\ln x = -1$   $x = \frac{1}{e}$   $\ln x + 1 = 0$   
 حتماً نباید عدد خاصی باشد فقط باید سه شرط فوق را ارضاء کند

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) \Big|_e^{\infty} = \infty \Rightarrow \text{واگر}$$

سری با جملات مثبت و منفی (سری درمیا): سری متناوب.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0$$

آزمون لایب نیشتر

اگر یک سری داشته باشیم:

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots \quad \text{شرط اول}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{شرط دوم}$$

$$n \rightarrow \infty$$

آنگاه سری همگراست.

Year. Month. Date. ( )

\* اگر تعداد متناهی جمله از سری رابنویسیم فضای حاصل از قدر مطلق جمله بعدی کمتر است.  
 اگر شرایط برقرار نشد دلیل و اگرایی مثبت

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \text{مجموعه} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots$$

فضای هر یک کمتر از  $\frac{1}{5}$  است

اگر سری بدلتجوازه جمله است مثبت و منفی دانسته باشد:

سری حاصل از قدر مطلق جمله است رابنویسیم که تمام قضایای سری مثبت برای آن صادق است

اگر سری حاصل از قدر مطلق جمله است همگرا شود سری را همگرای مطلق گوئیم  
 و اگر نه و خود سری همگرا شود آنرا همگرای مشروط گوئیم

اگر نوع سری با آن همگرا قابل تشخیص نباشد همین است که روش زیر بتواند نوع سری را تشخیص کند.

آزمون رابنوی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = L \begin{cases} L > 1 & \text{همگرای مطلق} \\ L = 1 & \text{صحت نمی یابیم} \\ L < 1 & \text{همگرای مطلق نیست} \end{cases}$$

۱: سری  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$  یک سری ناهگرای است؟

۱- مطلقاً است نه ثابت شد ۱۱ واگراست  
 ۲- هگرایست

۳- ساده است  $\frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$  ؟  
 ۴- هیچکدام

$n+1 > n$   $\ln(n+1) > \ln(n)$  یعنی متودی

$\Rightarrow (n+1) \ln(n+1) > n \ln n$

حکماً ساده  $\Rightarrow$

۲: سری  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$  داده شده کدام گزینه درست است؟

۱- سری هگرایست و مقدار هگرای یک است  
 ۲- ... ..

۳- واگراست  $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{e}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$  هگرایست  
 ۴- هیچکدام

۱ و ۲ مقدار هگرای  $\frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}$   $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$  قدر نسبت  $\frac{1}{e}$

۳: سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

۱- سری هگرایست و مقدار هگرای  $\frac{3}{2}$  است  $a_n = \frac{3}{2^n}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

۲- ... ..  $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$   $2^{n+1} > 2^n$

۳- واگراست

۴- هگرایست  $\Rightarrow$  سری هگرایست

Year. Month. Date. ( )

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \dots - (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64})$$

$$- (\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots) + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$$

قریباً  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$        $\frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$  قریباً

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \quad 3a - \frac{1}{3} = -1$$

$$\sum (-1)^n \frac{n+1}{n^2} \quad 4$$

1- سری واگراس - به دلیل این اختلاف توان صورت و مخرج می شود واگراس سری مطلقاً

2- مطلقاً همگراست

$$d_n = \frac{n+1}{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

3- همگراست ولی مطلقاً همگرا نیست ✓

4- هیچ انقضای نظری نمی توان کرد

$$\frac{n+1}{n^2} > \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

$$(n+1)^3 > n^3 + 2n^2$$

$$\cancel{3n^2 + 3n + 1} > \cancel{2n^2} \quad \Rightarrow \quad \text{همگراست}$$

5:  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-n})$  کران است

$$= \sum \frac{1}{2^n} + \sum \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$$

۱۶:  $\sum \frac{n^2}{n^2+1}$

$\lim a_n = 1$  واکرا

اگر مخالف صفر شد واکرا ولی اگر صفر شد دلتا بر همگانی نیست

معدود است

نوع a مستقیم است

همگراست

واکراست ✓

۱۷:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(1-\frac{1}{n})}$

واکراست ✓

$\lim \ln(1-\frac{1}{n})^n$

مشابه ولی نامعین است

همگراست

$\ln e^{-1} = -1 \neq 0$  واکرا

بر دلیل وجود و اما در معراج کسر می توان اظهار نظر کرد

۱۸: کدام همگرا و کدام واکرا است

I  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3-1}$  واکرا

II  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

هر دو همگرا

هر دو واکرا

I همگرا لا واکرا

II همگرا لا واکرا ✓

همگرا  $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < 1$  دلتا بر

بسیار  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Year. Month. Date. ( )

$$\sum \frac{n^{\frac{3}{2}}}{1+n^2}, \quad \sum \frac{n^{\frac{3}{2}} \times a_n}{1+n^3}$$

واریا                      هکرا

۱۹

ماده سری تابع:

$$\sum u_n$$

\* سری تابع به ازای مقادیری که اشتقاقی کند تبدیل به سری عددی می شود که ممکن است هم هکرا باشد به معنی هم مقادیر آن که به ازای آن مقادیر سری هکرا می شود را پیدا می کنیم.

سری توانی

$$1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-c)^n = C_0 + C_1(x-c) + C_2(x-c)^2 + \dots + C_n(x-c)^n + \dots$$

$$2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + \dots$$

$$2 \leftarrow 1 \quad c \quad x-c = x$$

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L = 1$$

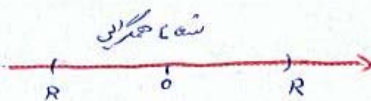
هکرا

بجای نیند

واریا

فقط برای سری توانی از اصطلاح شعاع هکرا می شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| < 1$$



$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| \Rightarrow |n| < R$$



سُغاع هڪراني سري حاصل از مستقيم ڪيري جملو به جملو از ڪيري سري باهه اشتغال ڪيري جملو به جملو از ڪيري سري  
 فار ~ ~ ~ اوليو برابر است

$$c_n = \frac{1}{n^n}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \infty$$

۱-  $\sum \frac{x^n}{n^n}$  و  $x > 0$

واگر است  
 حد ندارد

✓ هڪراني نه ده جا هڪراني  $R = \infty$  سُغاع هڪراني  
 نزولي وواگر است

حفظ شوند!

$$e^x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h!}$$

$$\sin x = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$R = \infty$

براي  $x$  مقدار  $2n$  ي کواچ  $\cos 2n$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

فقط  $\cos x$  زوج است  $\Rightarrow$  برعكس

- !
- $\sin x$
- $\cos x$  ✓
- $e^x$
- 0

۹.

Year. Month. Date. ( )

2: وقتی سبب زير صيغ است

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 \dots$$

$$|z| < \infty$$

$$|z| < 1$$

$$\checkmark |z| < 1$$

$$|z| < \infty \text{ مد دلخواه}$$

3: فاصله هرگانی و شعاع هرگانی R را برای سری زیر پیدا کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)^n}{2^n (3n-1)}$$

توانی

$$0 < n < 2 \quad R=1$$

$$-3 < n < -1 \quad R=2$$

$$1 < n < 3 \quad R=2 \checkmark$$

$$-1 < n < 3 \quad R=2 \checkmark$$

توجه کنید  
R در (5) و (6) دایره در نظر  
گرفته می شود

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (3n+2)}{2^n (3n-1)} = 2$$

$$-2 < n - 1 < 2 \quad -1 < n < 3$$

4: شعاع هرگانی

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! (n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = e$$

5: طبق نقاط هرگانی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n$$

عبارت استاندارد

$$n > \frac{1}{2} \checkmark$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\left| \frac{n-1}{n} \right| < 1$$

$$-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$$

$$n > 0$$

$$0 < n < 1$$

$$-1 < \frac{x-1}{x} < 1$$

برای همگرایی

$$-1 < 1 - \frac{1}{x} < 1$$

$$-2 < -\frac{1}{x} < 0$$

$$0 < \frac{1}{x} < 2$$

$$x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$$

6:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{(n^2+1)3^n}$  همگرایی

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^2+1)^{n+1}}{(n^2+1)3^{n+1}} = 3$$

برای همگرایی  $-3 < 2n+1 < 3$

7: کدام یک از سری های زیر همگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2+1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \sin \frac{1}{n} = 1 \quad \text{و اگر } p=1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n^2+1}{n^2} = \sin 1 \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

۹۰

t:  
Year. Month. Date. ( )

۸- باره هگرانی  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nn}$  / کلام -

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) e^{-(n+1)n}}{n e^{-nn}} < 1$  (0, ∞)  
[0, ∞)

$e^{-n} < 1 \Rightarrow -n < \ln 1 = 0 \Rightarrow n > 0$  (-∞, 0]

۹- حالت  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$  / کلام -

$\sum \frac{a^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  0 ✓

تایید شود  
بی کرانی  
ولسبت به a

۱۰-  $v_n = \cos \frac{1}{n}$  و  $v_{(n)} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$  / کلام -  
آنکه از نظر هگرانی دوسری زیر صیونند

$S = \sum_{j=1}^{\infty} v_j$  و  $T = \sum_{l=1}^{\infty} v_l$

$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^{\cos} = 1 \neq 0$  / کلام -  
و اگر

$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$   $n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$   $p > \frac{1}{n}, n > 1 \Rightarrow p < 1$   
و اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

۱۱:۴

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

و آنرا

$\ln \frac{1}{2}$  هرگز آید ✓

$$\ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \ln \frac{n}{n+1} + \ln \frac{n+2}{n+1}$$

$\ln 2 \sim \sim$

$\ln \frac{1}{a} \sim \sim$

$$a_1 = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{2}{3}$$

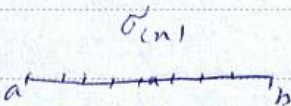
$$a_2 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{3}{4}$$

$$a_n = \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2}$$

$$s_n = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow s_n = \ln \frac{1}{2}$$

ریاضی II :

$$\int f(x) dx = F(x) \quad F'(x) = f(x)$$



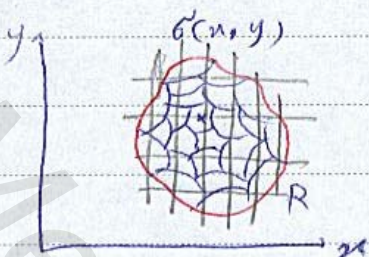
$$\lim_{\| \Delta \| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma_{(x_i)} \Delta x_i = L$$

۱۱:۵۱ نام  $\Delta$  بزرگترین فاصله از میان اعداد

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

اشکالهای هندسی که نه همیشه بیان شده است به یک مورد هستند

Year. Month. Date. ( )

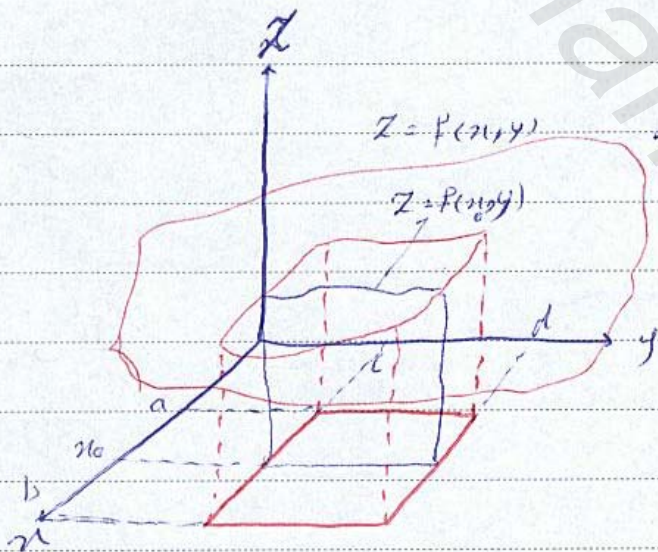


۱۱۵۱۱ طول بزرگتر قطر زیرخانه = بزرگتر فاصله بين دو صفحه از خانه  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i, y_i) \Delta_i A = I$   
 ۱۱۵۱۱  $\rightarrow 0$

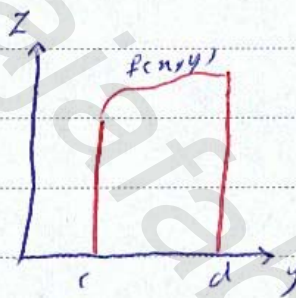
اگر چه معمولاً که معمولاً (و مستقل از نا، رشتين در) صفحه با بند

$$\int_R \int f(x, y) dA$$

پارسيش بندي منقسم  $\Rightarrow \Delta_i A = \Delta_i x \Delta_i y \Rightarrow \int_R \int f(x, y) dx dy$

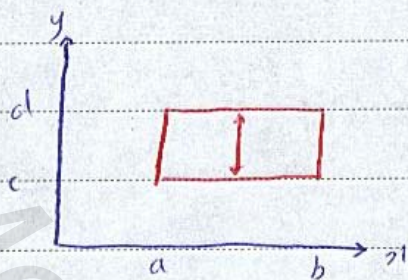


چه ارسد حتماً با به قائم و به موازات محور سوم باشند

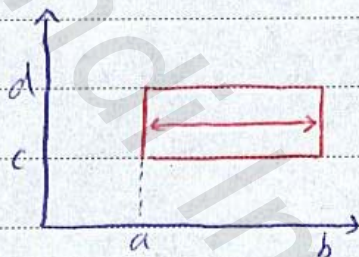


$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

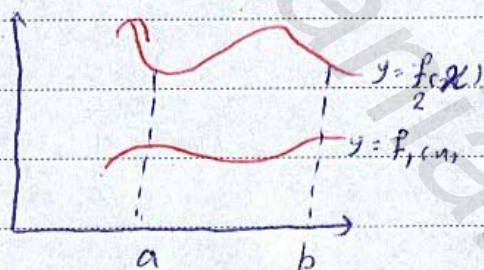
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$



$$\int_a^b \int_c^d f \, dy \, dx$$

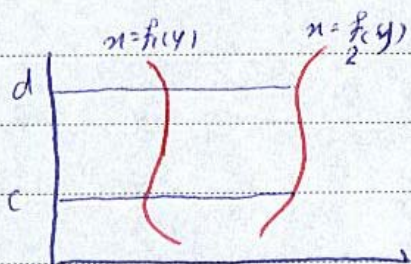


$$\int_c^d \int_a^b f \, dx \, dy$$

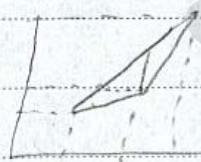
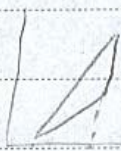
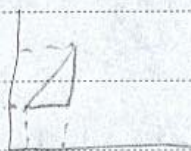


$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f \, dy \, dx$$

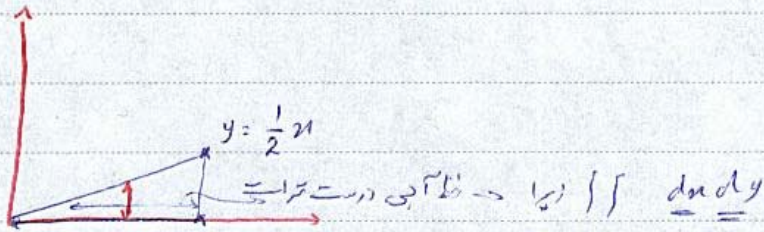
با این خط را عمود بر دایره می کشند



$$\int_c^d \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f \, dx \, dy$$



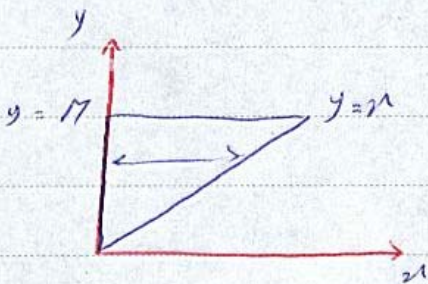
1- حاصل  $\iint_D e^{2y-x} dx dy$  که در آن میدان  $D$  با سر راس  $(0,0)$  باشد کدام است



$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} e^{2y-x} dy dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{2y-x} \Big|_0^{\frac{1}{2}x} = \int_0^2 \frac{1}{2} (1 - e^{-x}) dx$$

$$= \frac{1}{2} (x + e^{-x}) \Big|_0^2$$

2- در روی مثلث معین در پایین از ناحیه اول و قدرتهاو خط  $y = \pi$  را محاسبه کنید  $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$



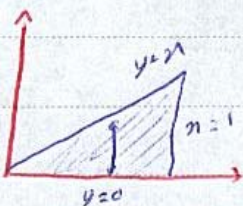
انتگرال  $\int \frac{\sin u}{u} du$  قابل فاسب نیست

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

چون وجود دیر فور و ها هست پس

$$\int_0^{\pi} \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} x \Big|_0^y dy = \int_0^{\pi} \sin y dy = -\cos y \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

3- وقتی  $D$  ناحیه درونی حاصل از خطوط  $y=0$ ،  $y=x$  و  $x=1$  باشد کدام است  $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dA$



انتگرال  $\int e^{\frac{a}{x}} dx$  قابل فاسب نیست پس ما به خط عمود بر  $y=x$  قرار می دهیم



$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{y/n} e^{y/n} dy \cdot dn = \int_0^1 n e^{y/n} \Big|_0^{y/n} dn = \int_0^1 n(e-1) dn$$

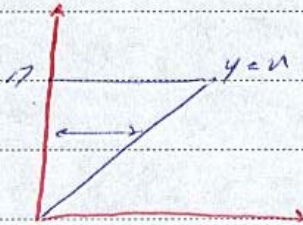
با این ترتیب تابع زیر استقرال می شود و تابعی دو متغیر می شود که استقرال آن راحت تر است

$$\int_0^1 \int_0^{y/n} y n^{\frac{1}{2}} dn dy \quad \text{--- 4}$$

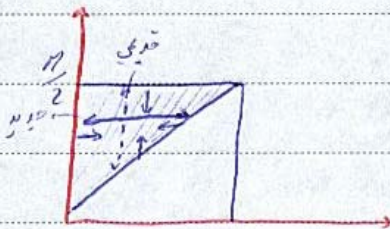
(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)

$$y=0, y=2\pi, x=0$$

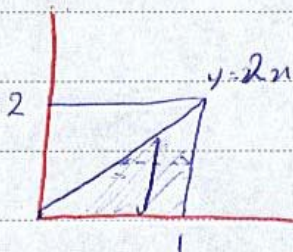
$$\int_E \int \cos(x+y) dx dy \quad \text{--- 5}$$



$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} \Big|_0^{\pi/2} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} dy$$



$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} dx dy$$



$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy \quad \text{--- 7}$$

تغییر متغیر استقرال می شود

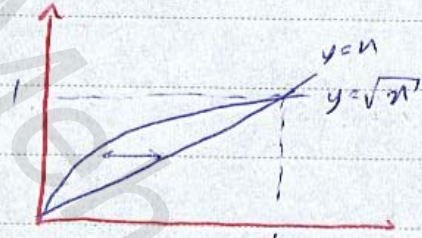
$$\int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 e^{x^2} y \Big|_0^{2x} dx = \int_0^1 2x e^{x^2} dx$$

۹۱

Month. ( ) Date. ( )

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \phi(x,y) dy$$

8- ترتيب باره كارا عوفن كنيد

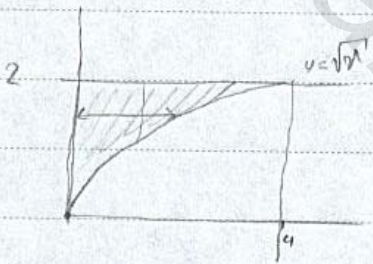


$$\int_0^1 \int_{y^2}^y \phi(x,y) dx dy$$

9-

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3) dy dx$$

عوض كنيد

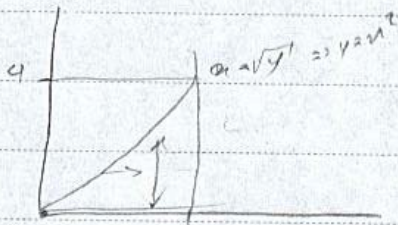


$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3) dx dy =$$

10-

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1} dx dy$$

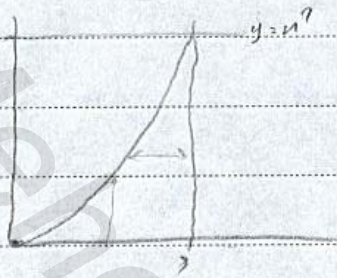
عوض كنيد



$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1} dy dx$$

$$\int_0^{\theta} \int_{\sqrt{y}}^3 \cos y^3 \, dy \, d\theta$$

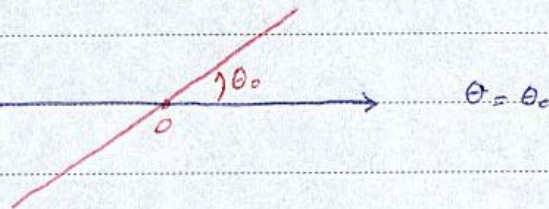
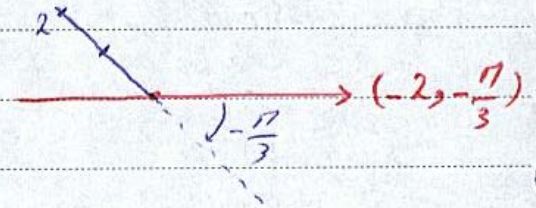
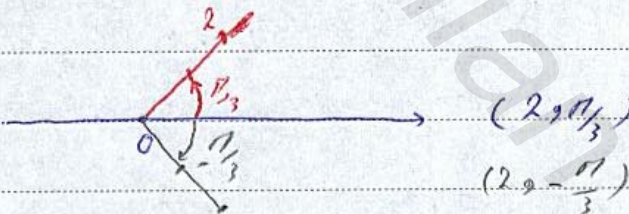
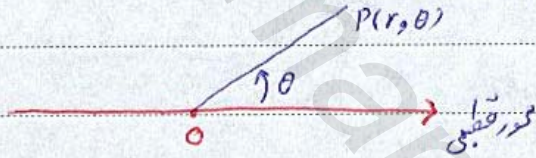
11 - 16



$$\int_0^3 \int_{\theta^3}^{\pi^3} \cos^3 y \, dy \, d\theta$$

سیستم قطبی

هر نقطه در سیستم قطبی به وسیله زوج  $(r, \theta)$  بیان می شود.



$\theta = \theta_0$  (استقامت حاصل نویسد)



$r = r_0$  دایره ای به مرکز مبدأ و استقامت  $r_0$

$$r \, dr \, d\theta$$

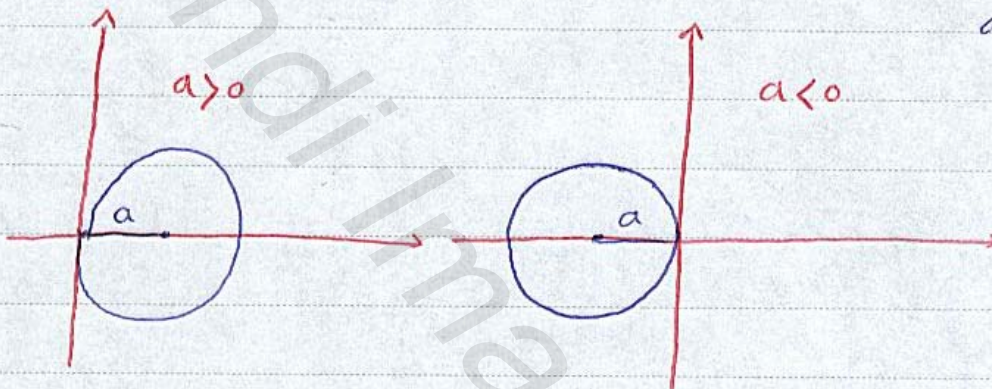
$r = 2a \cos \theta$  خط مشور

$x = r \cos \theta$

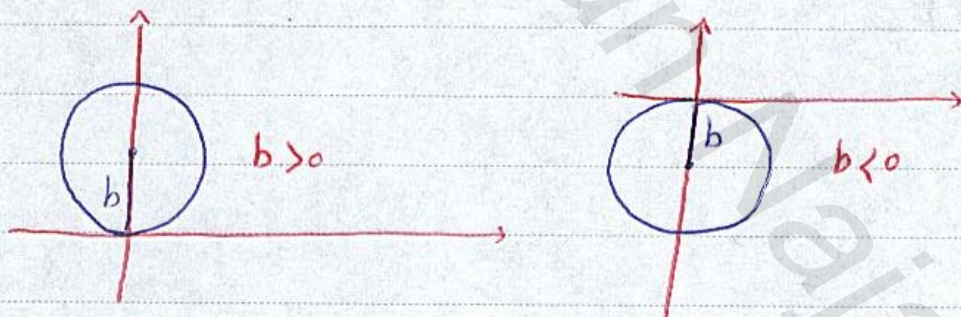
$y = r \sin \theta$

$r^2 = 2ax \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$

دایره به مرکز  $(a, 0)$  و شعاع  $a$



$r = 2b \sin \theta$  شکل حقیقتی



$r = a \cos n\theta$

$r = a \sin n\theta$

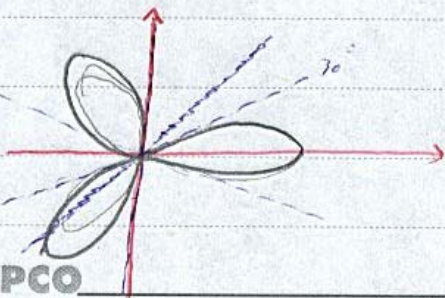
اگر  $n$  فرد باشد  $n$  پر دارد  
اگر  $n$  زوج باشد  $2n$  پر دارد

$r = \cos 3\theta$

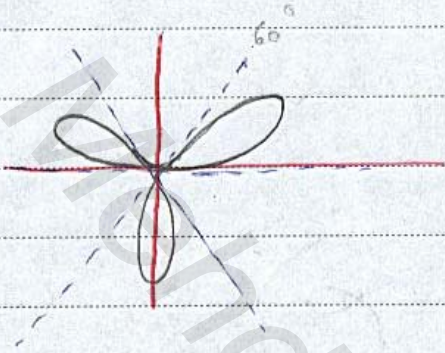
$r = 0$

$\cos 3\theta = 0$

$\theta = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$



$r = a \sin 3\theta$

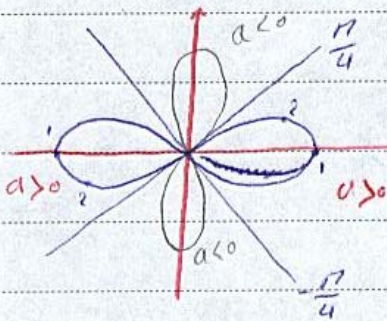


برای  $\frac{\pi}{3}$  از  $\theta$  که در  $\theta = \frac{\pi}{3}$  قرار دارد

$r^2 = a \cos 2\theta$       یا       $r^2 = a \sin 2\theta$

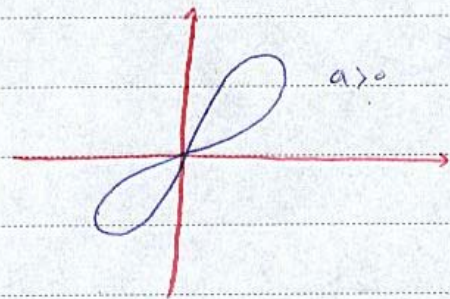
برای

$r^2 = a \cos 2\theta$        $r = 0$        $\cos 2\theta = 0$        $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$



اگر  $a$  مثبت باشد  $\cos 2\theta$  باید مثبت باشد  $\cos 2\theta = 0$  در ربع اول یا چهارم  
 $\theta$  باید بین  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{3\pi}{4}$  و بین  $\frac{5\pi}{4}$  و  $\frac{7\pi}{4}$  باشد

اگر  $a$  منفی باشد  $\cos 2\theta$  باید منفی باشد  $\cos 2\theta = 0$  در ربع دوم و سوم  
 $\theta$  باید بین  $\frac{3\pi}{4}$  و  $\frac{5\pi}{4}$  یا  $\frac{7\pi}{4}$  و  $\frac{9\pi}{4}$  باشد



$r^2 = a \sin 2\theta$

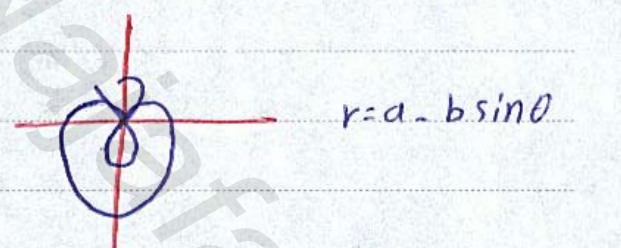
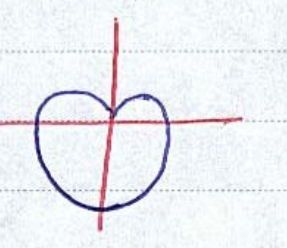
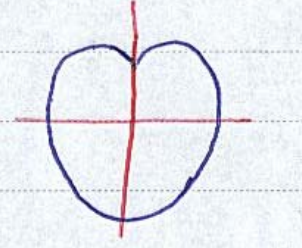
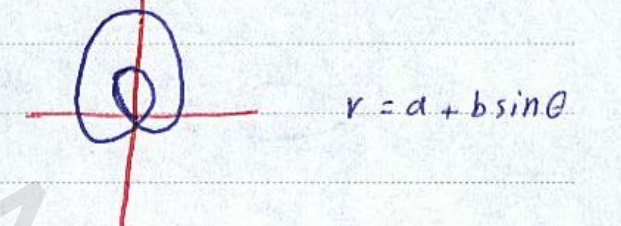
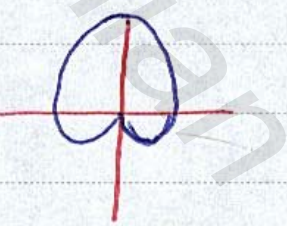
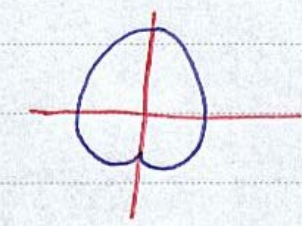
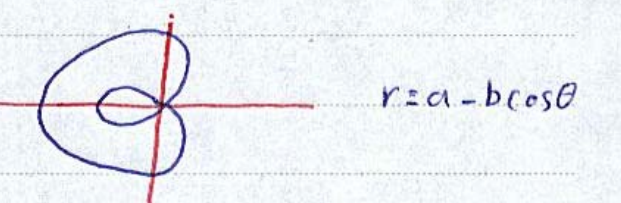
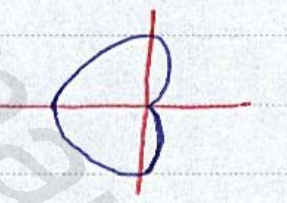
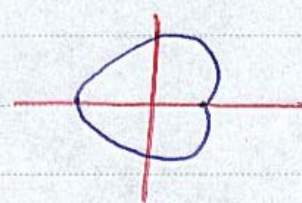
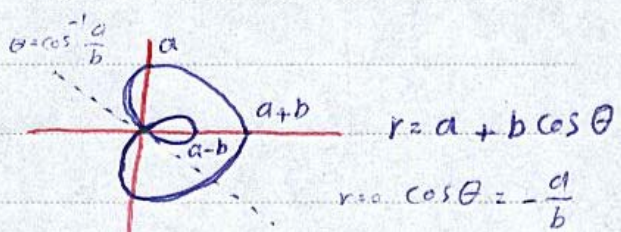
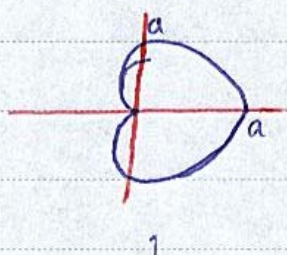
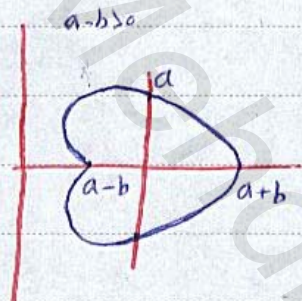
لنگون

$r = a + b \cos \theta$  یا  $r = a + b \sin \theta$

$a > b$

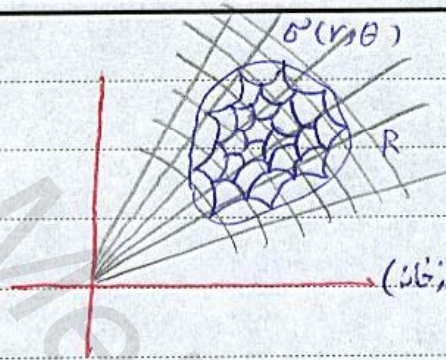
$a = b$

$a < b$



دلنا

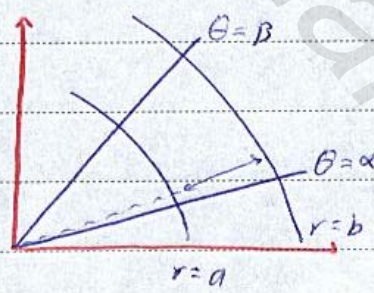
دلنا در فضا دراز بر خنقی دلوازی شود



نم  $\Delta$  یعنی فول بزرگترین قطرهای خانه (بزرگترین فاصله بین دو نقطه از خانه)

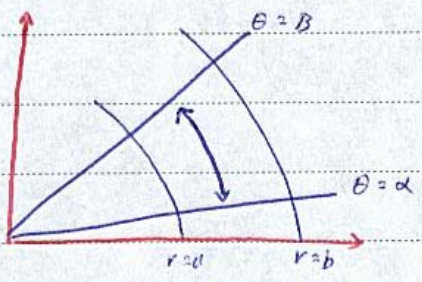
$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma(r_i, \theta_i) \Delta_i A = L \quad \iint_R f(r, \theta) dA$$

$$\Delta_i A = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) \Delta_i r \Delta_i \theta = r dr d\theta \quad \int_R \int f(r, \theta) r dr d\theta$$

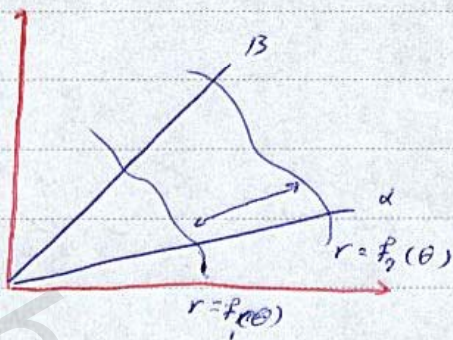


باند بیرونی تا بیرونی چهارم در دو باند است تا حاصل انتگرال یک عدد شود

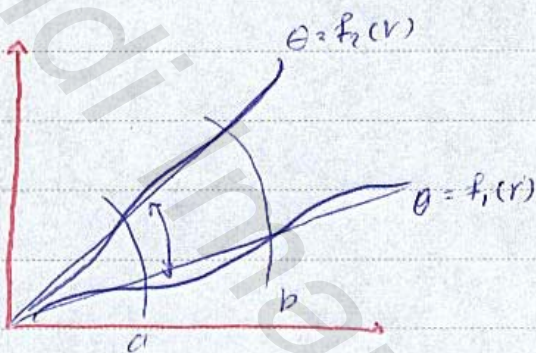
$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r, \theta) r dr d\theta$$



$$\int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r, \theta) r d\theta dr$$

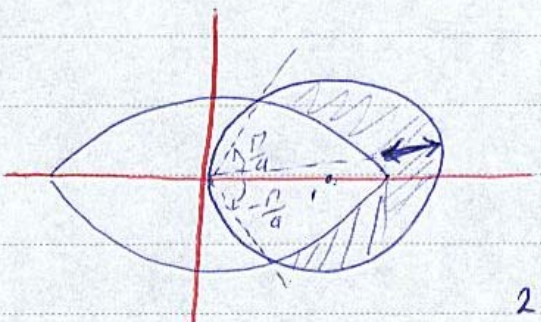


$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$



$$\int_a^b \int_{f_1(r)}^{f_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr$$

۱- مساحت ناحیه بین  $r = \sqrt{2}$  و  $r = 2\cos\theta$

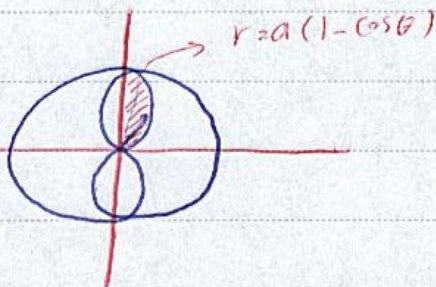


$$\sqrt{2} = 2\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} r dr d\theta$$

مساحت منطقه مطلوب  
لازم نبود  $f(r, \theta)$  نوشته شود.

۲- ناحیه مشرک  $r = a(1 - \cos\theta)$  و  $r = a(1 + \cos\theta)$



$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a(1-\cos\theta)} r dr d\theta$$



108

Month.      Date.      ( )

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\iint f(x, y) \, dx \, dy = \iint f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, \underline{r} \, dr \, d\theta$$

والنوع تبديل

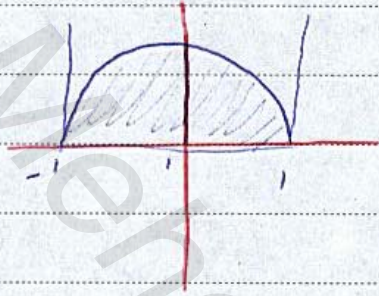
$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

107

t:

Month. Date. ( )

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2} dy dx$$

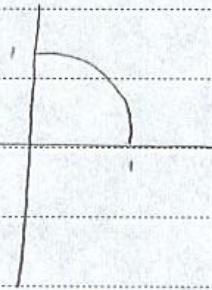


$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r(r^2)^{3/2} dr d\theta$$

8- آر R به صورت معرود به  $x^2+y^2=1$  در ناحیه اول متناهی است. ابتدا نگاه

$$\int_A \int e^{-(x^2+y^2)} dA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{-r^2} dr d\theta$$



تغییر متغیر در انتگرال دوگانه:

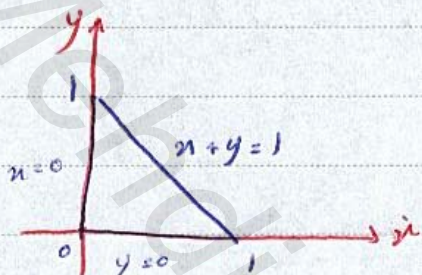
$$x = h(u, v)$$

$$y = g(u, v)$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(h(u, v), g(u, v)) |J| du dv$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

1- اگر پ کا تعین معصوم رہیں  $x=0, y=0, x+y=1$  کے آنگے  $\iint e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  کی قیمت کا تعین کریں۔

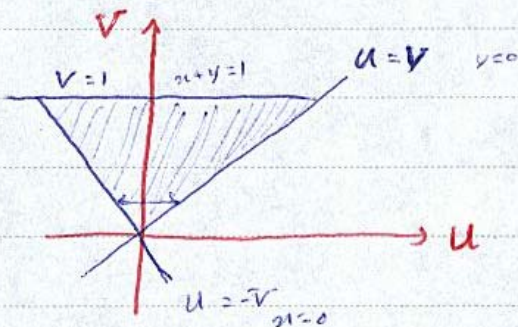


$$u = x - y \quad x = \frac{1}{2}(u + v)$$

$$v = x + y \quad y = \frac{1}{2}(v - u)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv$$

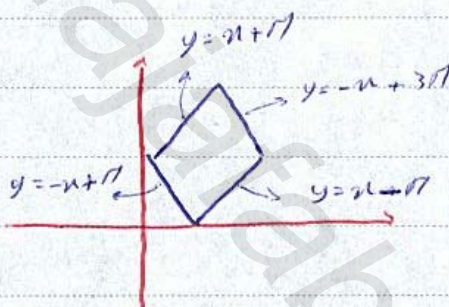


2- اگر  $R$  درج ذیل جہاں فضائی بنا، رقبہ سے  $(0,0), (\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$  اور  $(0, \pi)$  کے آنگے

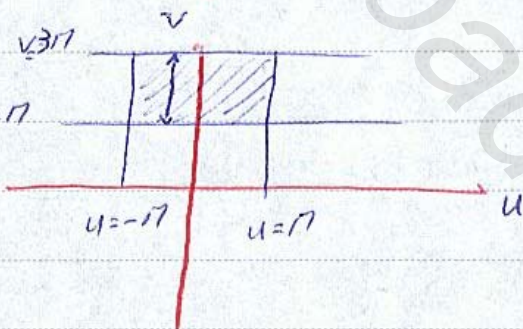
$$\iint (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$$

$$u = x - y$$

$$v = x + y$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 \sin^2 v dv du \quad v = \pi$$



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx$$

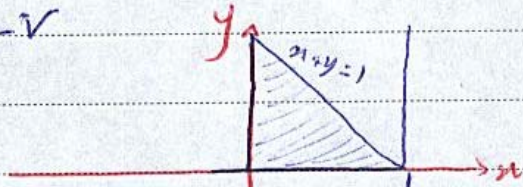
۳

$$x+y=1$$

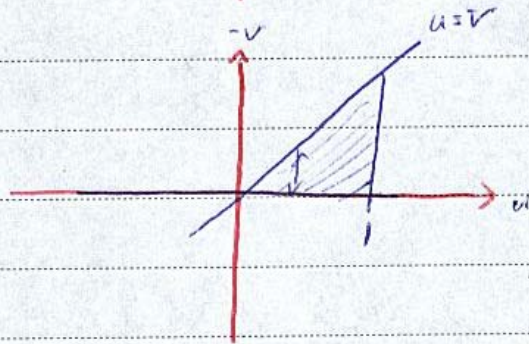
$$y=v$$

$$x=1-y=1-v$$

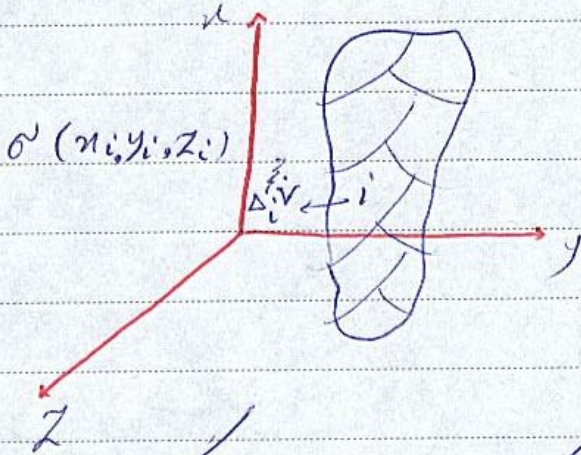
$$y=v$$



$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$



$$= \int_0^1 \int_0^u e^{\frac{v}{u}} dv du$$



انتگرال سه گانه

$$\lim_{\| \Delta V \| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V = I$$

اگر  $\Delta V$  از  $\Delta x$ ،  $\Delta y$  و  $\Delta z$  بزرگترین قطر این خانه ها و بزرگترین فاصله بین دو نقطه در خانه

$$= \iiint_D f(x, y, z) dV$$

اگر ابعاد قطبی فنلم  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  باشد و موازی با محورهای مختصات انتخاب شود

ملعب مستطیل در این سیستم از دو دو لایه دو لایه ثابت تشکیل می شود و اینها را تشکیل می دهد

بازه بیرونی حتماً باید دو عدد باشد  
معمولاً در انتگرال اول اینها را رویم 2 بار می شود

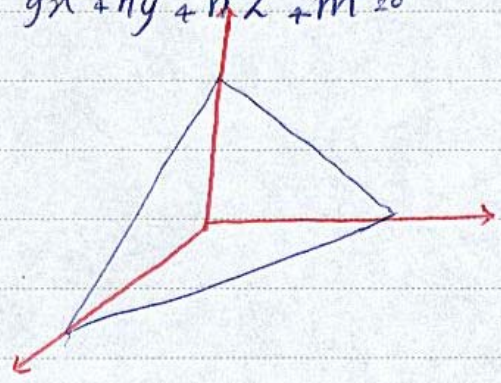
### رویه های فضاپی

سطوح درجه دوم فضا :

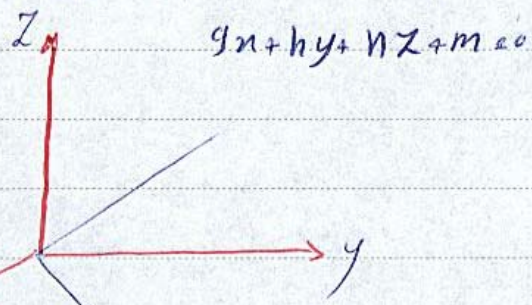
شکل کلی :  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + m = 0$

معمولاً در انتگرال اول اینها را رویم 2 بار می شود

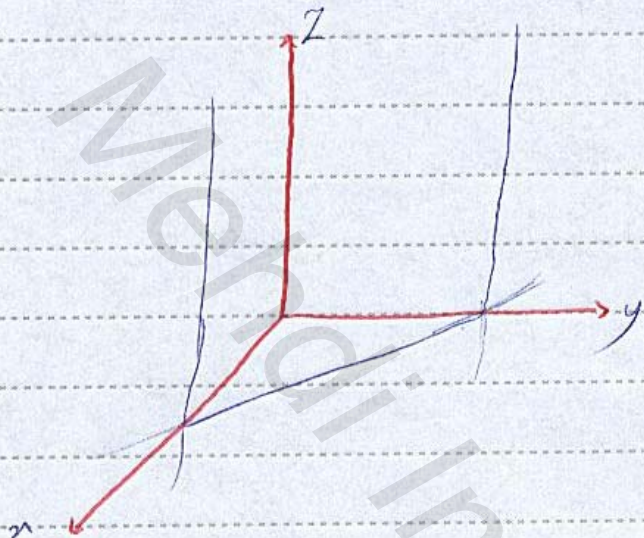
$ax^2 + by^2 + cz^2 + kx + l = 0 \quad n \neq 0$   
 $gx + hy + kz + m = 0$



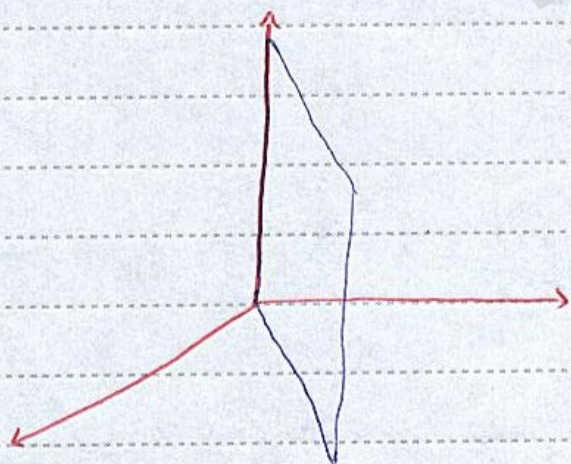
$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad n = 0$  اگر ضرایب مختلفاً می گذرد  $\Rightarrow$



معادلهای به موازات محور  $Z$  ها  $ax + by + d = 0$   $d \neq 0$

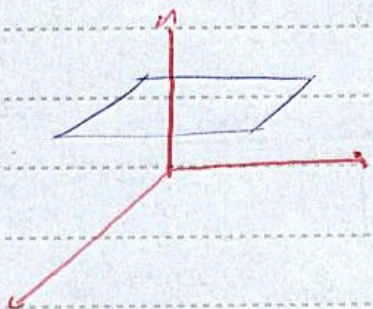


معادلهای به موازات محور  $Z$  ها ندارند، صوابی ندارند،  $d = 0$  و  $ax + by + d = 0$



و  $Z = Z_0$

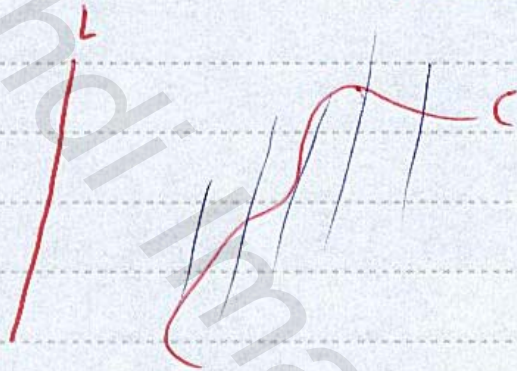
به موازات معادله  $ax + by + d = 0$



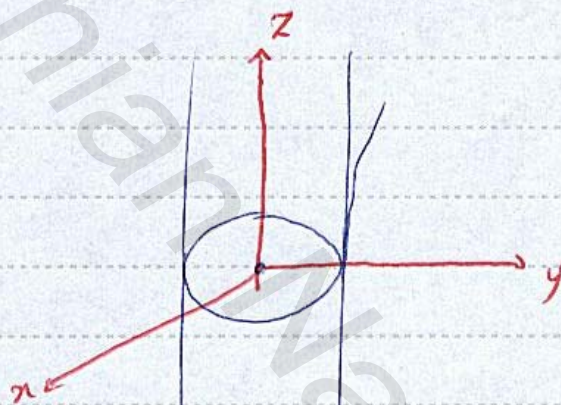
استوانه‌ها:

اگر معنی C در یک صفحه و خط L غیر واضح در آن صفحه مفروض باشد استوانه روی آن است که از حرکت خطی به موازات L روی C پدید می آید

معنی C معنی‌های خط L مولد است



1)  $x^2 + y^2 = R^2$

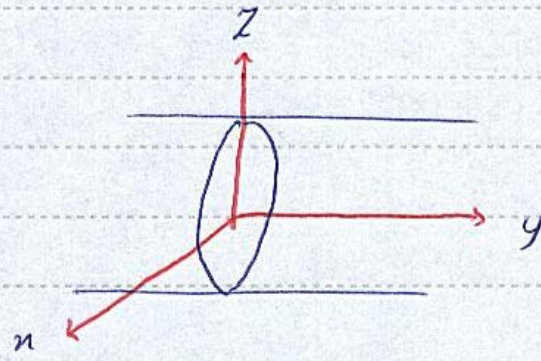


مستقل از z = به ازای هیچ مقدار z دایره را داریم

استوانه ای که معنی‌های دایره ای به معادله  $x^2 + y^2 = R^2$  و مولد آن محور z هست که به آن استوانه مستطیل گویند (های آن در تمام مقاطع دایره است)

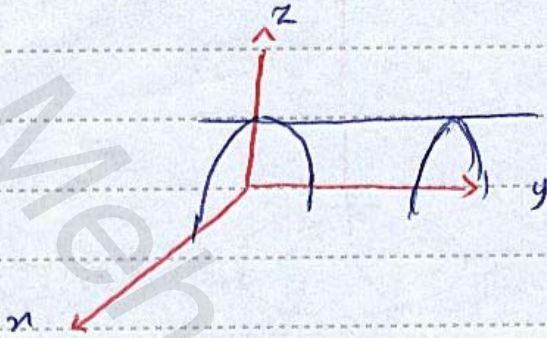
2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

استوانه بیضی



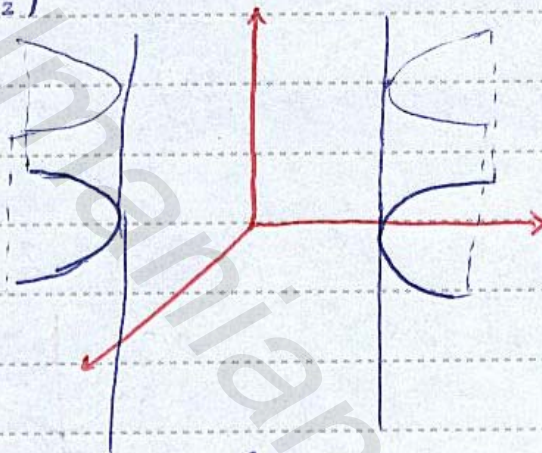
3)  $x^2 + z^2 = 1$

و ندارد پس به y معترض در هیچ



استوانه سهمی معنی هادی در صفحه x و z

4)  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



استوانه هذلولی

اگر بی از ما را مترهای او را و z غائب باشد می شود استوانه

5)  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$  یک کره به مرکز  $(\alpha, \beta, \gamma)$  و به شعاع  $R$

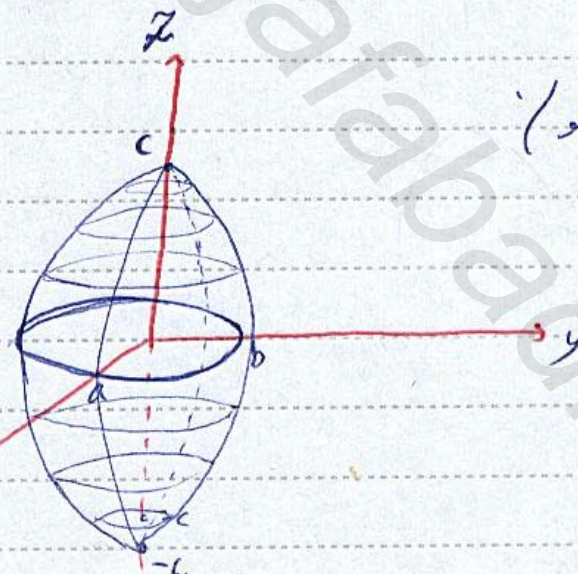
6)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

بیضی

1)  $z=0$  در  $xy$  یک بیضی درج

2)  $z=c$  یا  $z=-c$  یک بیضی به موازات  $xy$  با شعاع  $c$

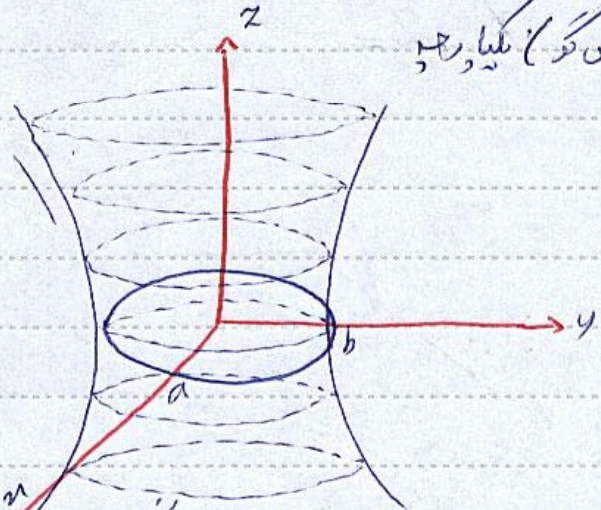
های کوچکتر





7)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

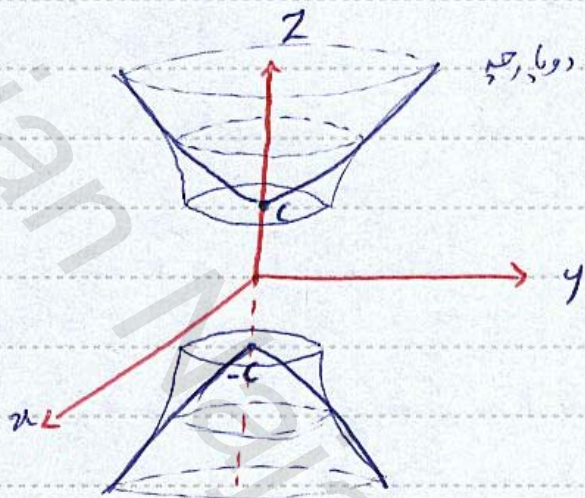
هذلولی کوئی یکپارچه



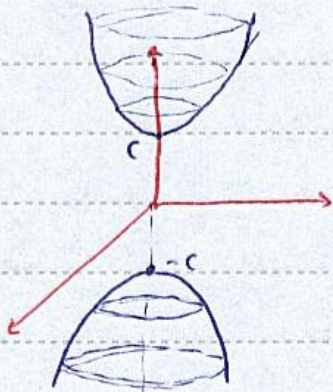
اگر به 2 عدد بدیم یعنی است اگر به 3 است مساوی برود یا به 4 کلج می شود که اگر کل معادله را به عدد 2 مساوی است مساوی تقسیم کنیم تا یک حاصل شود می بینیم که با افزایش 2 شعاع یعنی ها افزایش می یابد

8)  $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

هذلولی دو پارچه



z > c



به 2 کو حلیته از c می توان داد زیرا ( ) دو عدد یعنی می شود

9)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

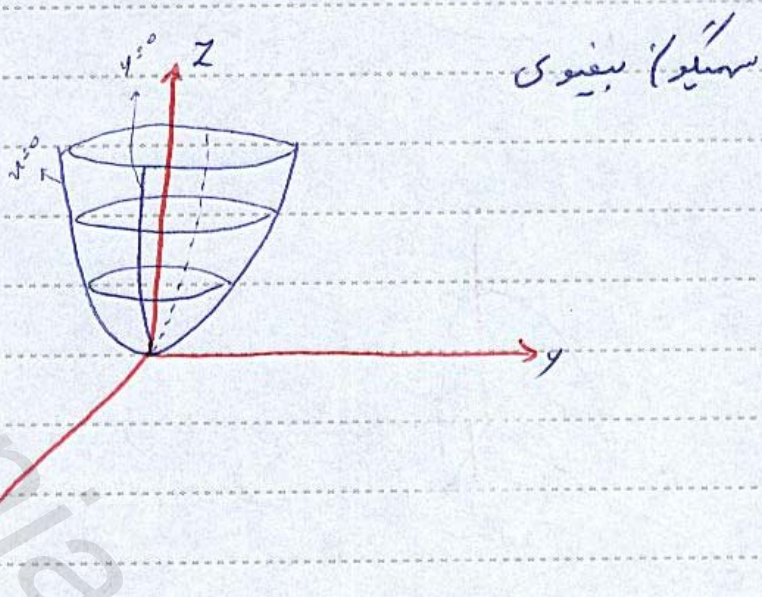
if  $c > 0 \Rightarrow z > 0$

if  $c < 0 \Rightarrow z < 0$

ست چپ مثبت  $\Leftarrow$  سمت راست مثبت  $\Leftarrow$  سمت چپ مثبت

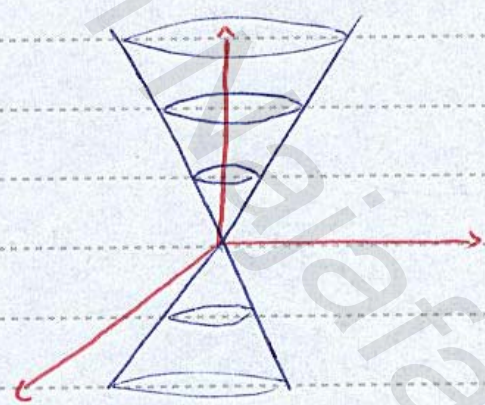
$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

$c > 0$



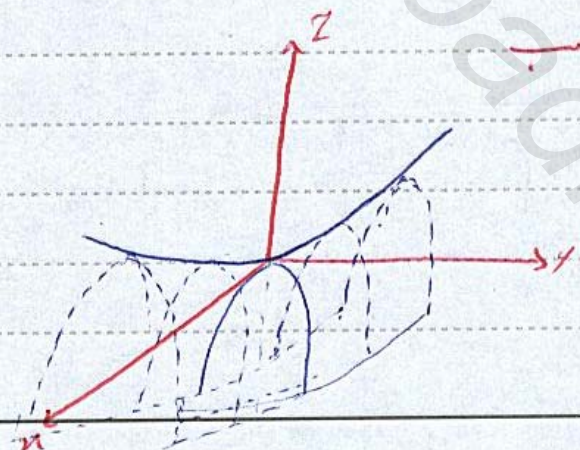
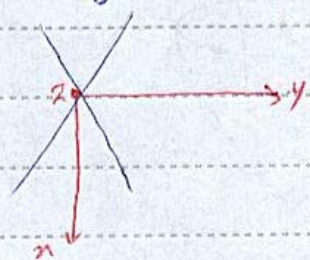
10)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

if  $a=b \Rightarrow$  مقطع دایره (circular section)



11)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$   $c > 0$

زین اسب (saddle shape)

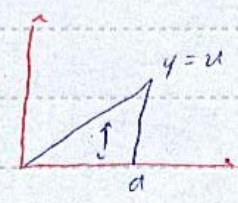
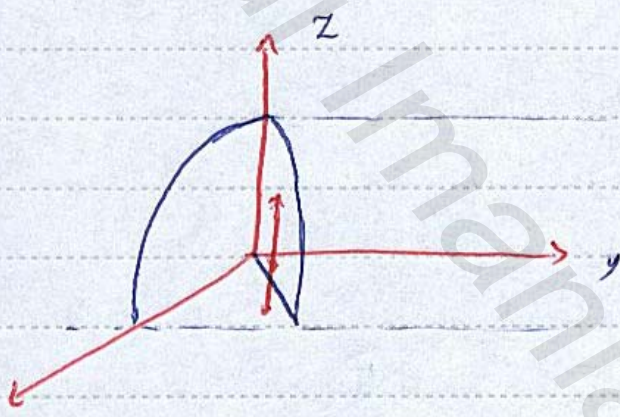


از day وارد معادله شود محور x و y یک دوران 45° پیدا می کنند

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$   
 $x^2 + y^2 = a^2 - z^2$

1- حجم جسم معذور بوسیله رویه های به معادلات زیر را بدست آورید!

$x^2 + z^2 = a^2$   
 $y = 0, x = 0, z = 0$   
 $y = x$

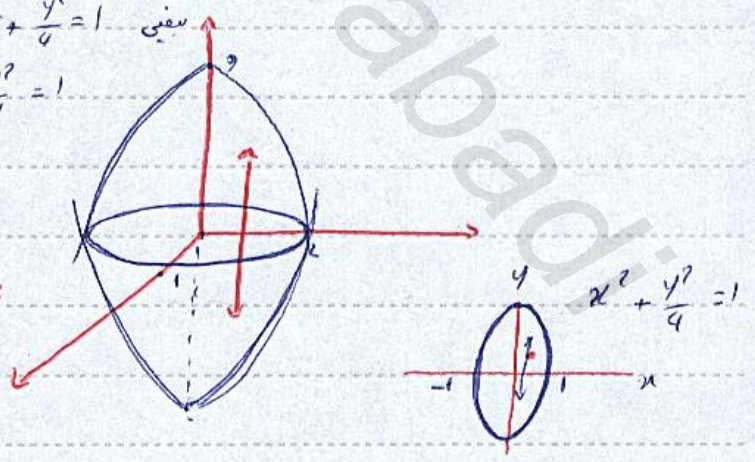


$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz dy dx$$

2- حجم معذور ب رویه های به معادلات زیر را بدست آورید

$36x^2 + 9y^2 + 4z = 36$  (1)       $z = a - x^2 + \frac{y^2}{4}$  یعنی  
 $4x^2 + y^2 - z = 4$  (2)       $z = 0, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+y^2-4}^{9-9x^2-\frac{9}{4}y^2} dz dy dx = 13$$



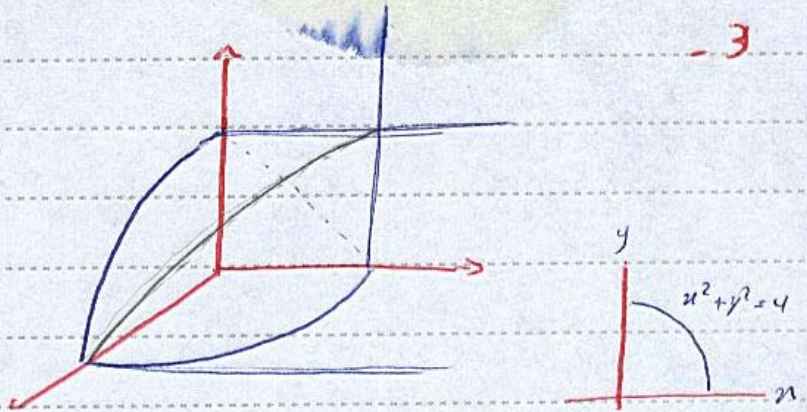
117

Month. Date. ( )

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + z^2 = 4$$

$$x \geq 0, z \geq 0, y \geq 0$$

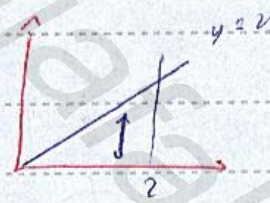
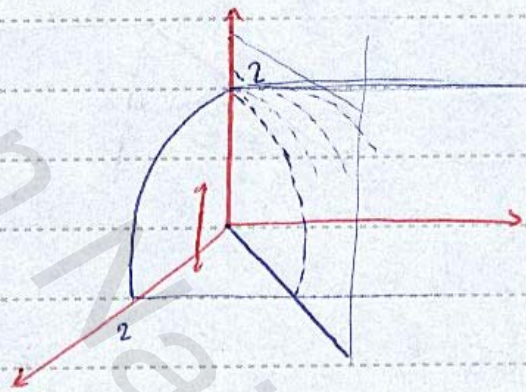


$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz dy dx = \frac{16}{3}$$

4 مقدار انتگرال سه گانه تابع  $f$  در ناحیه محدود شده زیر بدایست

$$y = z = 0, x \geq 0, z = 2 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} xyz \, dz dy dx$$



$$\iiint F(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint F(\underbrace{h(u, v, w)}_x, \underbrace{g(u, v, w)}_y, \underbrace{k(u, v, w)}_z) |J| \, du dv dw$$

$$x = h(u, v, w)$$

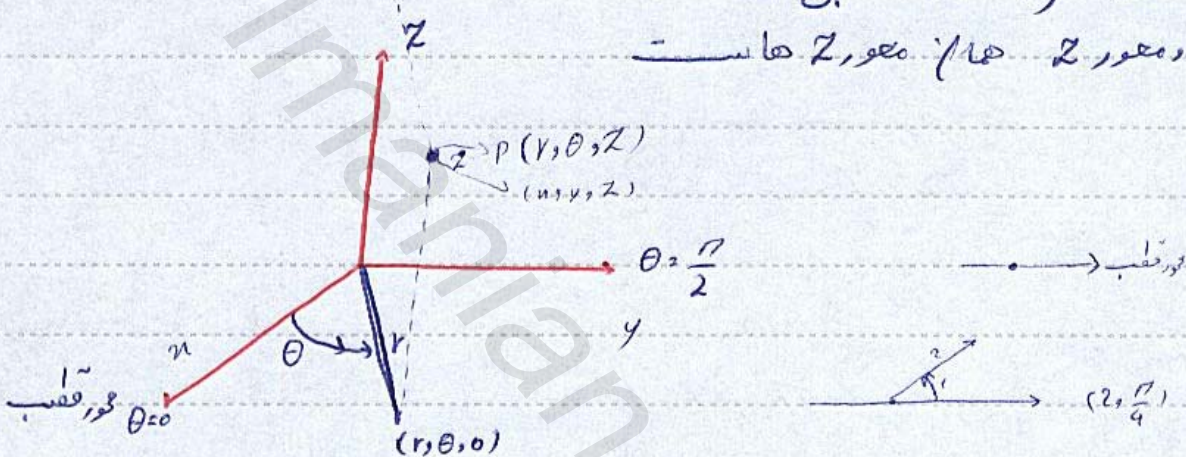
$$y = g(u, v, w)$$

$$z = k(u, v, w)$$

$$j' = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

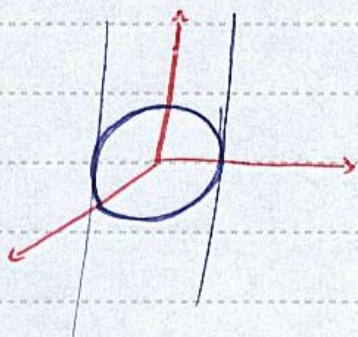
انتگرال سه گانه در مختصات استوانه‌ای:

صفحه  $xy$  صفحه قطبی است  
 و محور  $z$  همان محور  $Z$  است



$r \in \mathbb{R}$   
 $Z \in \mathbb{R}$   
 $0 < \theta < 2\pi$

$Z = Z_0$  صفحه‌ای موازی صفحه قطبی  
 $\theta = \theta_0$  محور بر صفحه  $Z$  است  
 و با صفحه  $Z$  زاویه  $\theta_0$  می‌سازد  
 $r = r_0$  استوانه



$dv = r dr d\theta dz$

$$\iiint_D f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

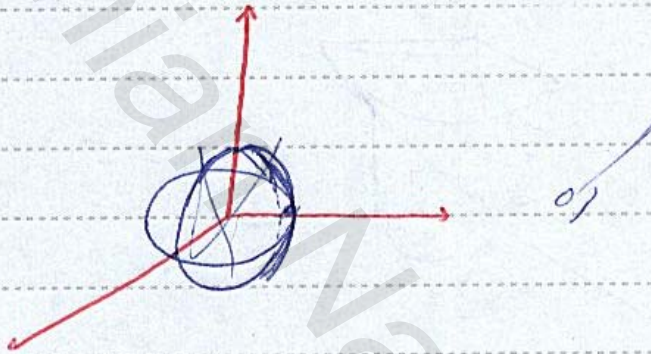
در موارد دید انتگرالهای سه گانه درگیر با استوانه یا هسته ای از استوانه است. برعکساً وارد سیستم استوانه ای می شویم

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \quad j = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \text{ تبدیل دکارتی به قطبی}$$

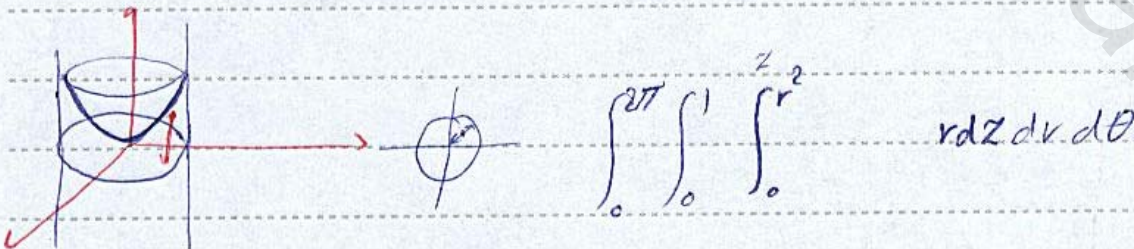
این  $r$  و  $z$  و  $\theta$  را تبدیل است و با  $r$  شعاع فرق می کند

فقط در قطب استوانه ای و دکارتی  $r$  با مقدار بردار آمده تا چند سه یی است

$$r^2 + z^2 = 4$$

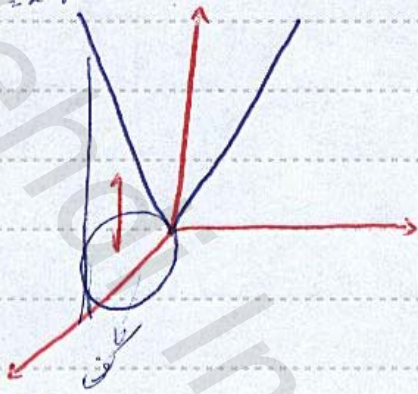


چگونه تعیین دور و به معادلات  $x^2 + y^2 = z^2$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  کدام است. ما نصفه  $xy$  را  $z=0$



2- حجم محدود به صفحه  $z=0$  از بالا،  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  از بالا و  $x^2+y^2=2az$  از اطراف بدام است.

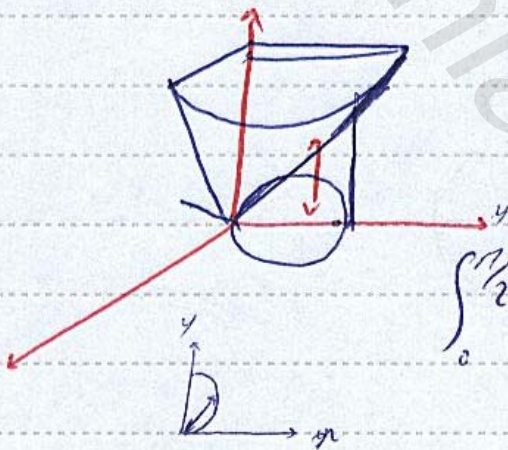
$z = \sqrt{x^2+y^2}$



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$r = 2a \cos \theta$

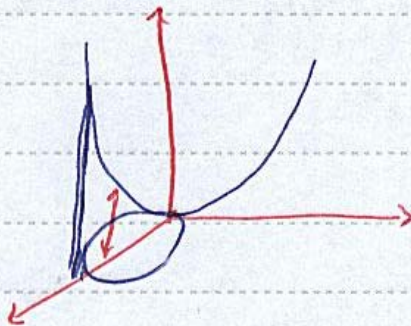
3- حجم بین  $z=r$ ،  $r = \sin \theta$ ،  $z > 0$ ،  $y > 0$ ،  $x > 0$  بدام است.



$z=r$ ،  $\theta$  برابر است با  $\theta = 90^\circ$  (را می توان ثابت کرد)

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \int_0^r r \, dz \, dr \, d\theta$$

4- حجم بین  $az = x^2+y^2$ ،  $z=0$ ،  $x^2+y^2=2az$ ،  $a > 0$  بدام است.



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} \int_0^{y/a} r \, dz \, dr \, d\theta$$

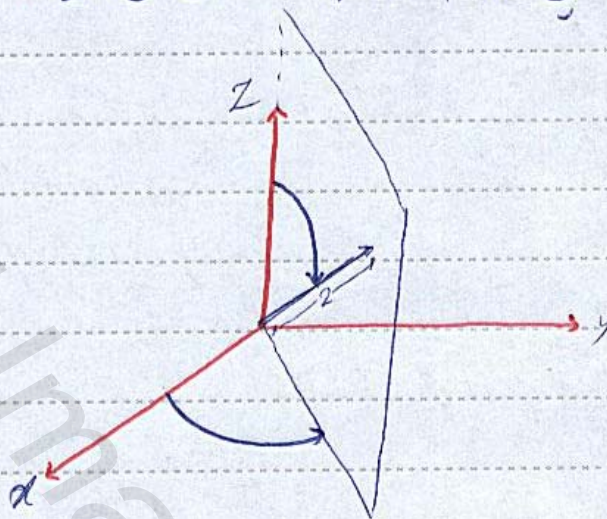
سیستم کروی

هر نقطه بوسیله سه تا بی متغیر می شود.

$\rho \geq 0$

$0 \leq \phi \leq \pi$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

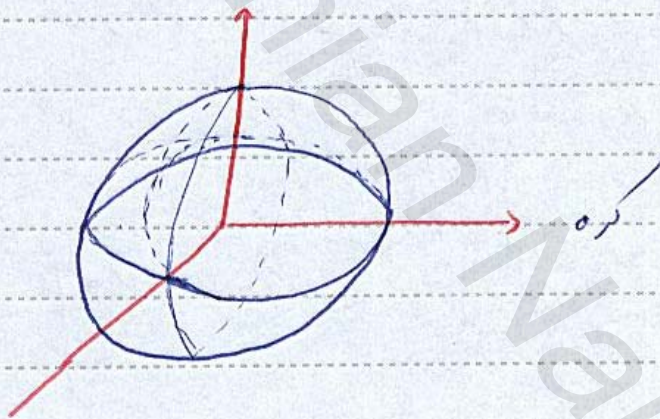


$(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

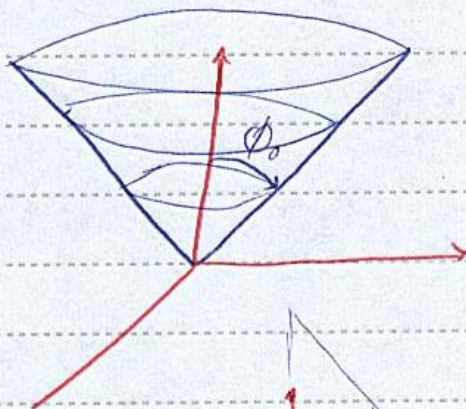
$\phi$  با محور z ها

$\theta$  با محور x ها

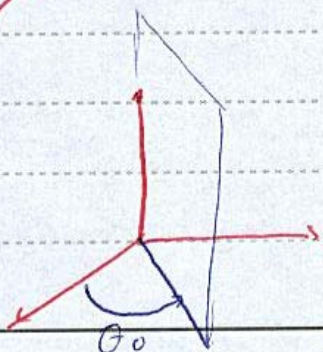
$\rho = \rho_0$



$\phi = \phi_0$



$\theta = \theta_0$

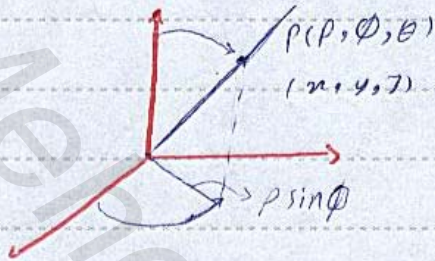


با صفحه  $y=0$  زاویه  $\theta$  می سازد

با صفحه



$$dv = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$



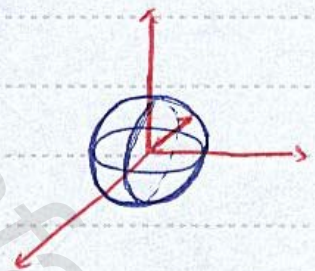
کره و مخروط = وارد سیتم کره می شود

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos \phi \\ x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \end{aligned}$$

$$j = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

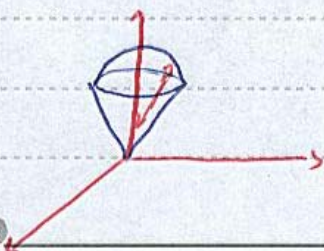
۱- حجم یک کره توپر به شعاع واحد که همگانی در هر نقطه برابر با فاصله آن نقطه از مرکز است

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho \, \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$



اول در جهت rho وارد می شود

۲- نسبتاً ورماند حول محور z ها برای حجم محدود از بالا کره از rho و از پایین به مخروط phi = pi/3 و همگانی است



$$\text{نسبتاً ورماند حول محور z های شعاع rho} = \rho^2 \sin^2 \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho \quad (x^2 + y^2)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin^2 \phi \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

3- حجم محدود به کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  و داخل مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  است.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^3 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi \cos \phi = \rho \sin \phi \quad \phi = 45^\circ$$

4-  $z > 0, y > 0, x > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

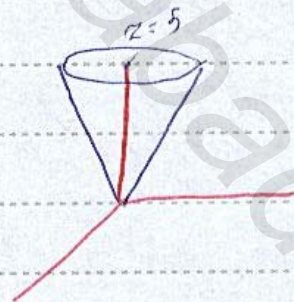
$$\iiint xyz \, dV$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\dots) (\dots) (\dots) \rho^3 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

5- حجم مخروط  $\phi = \pi/3$  به ارتفاع 5 است.

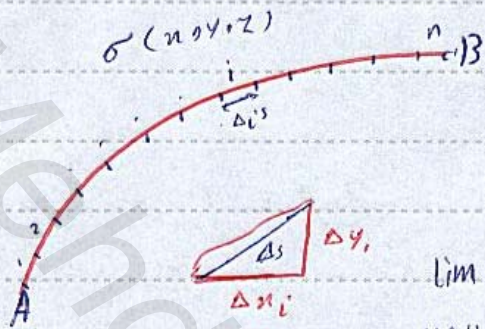
$$\frac{2}{3} \times \pi \times 2.5^2 \times 5 = \frac{31.4 \times 125}{60} = 10.49$$

$$\int_0^{\pi/3}$$



انتگرال مضمن الخط : نوع اول

طول قوس و حجم برای توابع مختلط



$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i$$

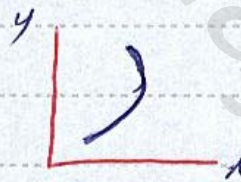
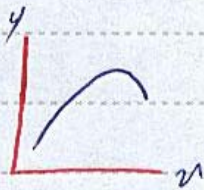
$$\int_C f ds$$

مضمن در فضا حتماً باید پارامتری شود.

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)$$

$$\int f(x, y) ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x)) \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$



باید روی محور x تصویر شود

باید روی محور y تصویر شود

$$\int f(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

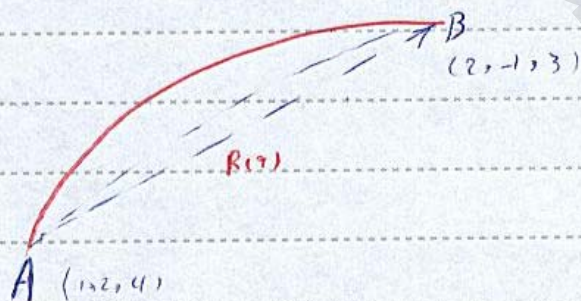
۱- حاصل انتگرال زیر روی منحنی  $y = 2\sqrt{x}$  کدام است  $x=3$  تا  $x=24$

$$\int_C y ds = \int_3^{24} 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 2 \int_3^{24} \sqrt{x+1} dx$$

۲-  $\int_C xy^2 ds$  ،  $C: x = \cos t$  ،  $y = \sin t$  ،  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt$$

انتگرال منحنی الخط نوع دوم: کار



از این می‌توانیم مستقیماً از مسیر پارامتر

$$R(t) = (1-t)A + tB \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{R}(t) = (1-t)(i + 2j + 4k) + t(2i - j + 3k)$$

$$(1-t+2t)i + (2-2t-t)j + (4-4t+3t)k$$

$x$

$y$

$z$

فرض شود  $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

$$w = \int_c P dx + Q dy$$

میدان نگهداری توانماری  
خط مستقیم حرکت کرد در غیر این صورت  
باید روی مسیر معنی حرکت کرد

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$w = \int_c P dx + Q dy + R dz$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

۱- مقدار انتگرال زیر روی مسطحی  $y = x^5$  کدام است (۱،۱) تا (۰،۰)

$$\int_c (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$$

$$\frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} = 2y$$

میدان نگهداری

(۰،۰)  $\gg y = x$   $x = t$   
(۱،۱)  $y = t$

$$\int_0^1 (2t^2 + 2t^2) dt$$

اگر یک معادله مسیر نسبت به پارامتر  $t$  باشد و انتگرال صورت گیرد یعنی مستقل از مسیر بود (اگر بتواند) کامل این عدم استقلال را پیدا کرد و انتگرال آن را جدا حساب کرد بقیه مستقل از مسیر است که انتگرال آن صفر است  $\odot$  کاربرد بی نهایت

$$x = \cos t$$

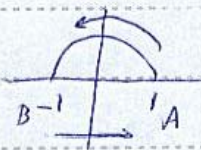
$$y = \sin t$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_C e^y dx + x e^y dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{مستقل از مسیر}$$

$$\int_B^A dt$$



$$x = t - 1, t \in [1, 2]$$

$$y = 0$$

$$\int x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

$$C \circledast \quad x^2 + y^2 = R^2 \quad -3$$

$$z = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

باید روی معنی حرکت کرد و مستقل از مسیر نیست

$$\int_0^{2\pi} (-R^6 \cos^2 \theta \sin^4 \theta + R \sin \theta) d\theta = \frac{\pi R^6}{5}$$

-4

$$\int_C (x+y) dx + (x-y) dy = \frac{8}{9} \quad C: x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1}{t+1} \quad 0 < t < 2$$

$$t=0 \Rightarrow (0, 1)$$

می توان روی فضا مستقیم حرکت کرد  $\Rightarrow$

$$t=2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(1-t)\vec{j} + t\left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right)$$

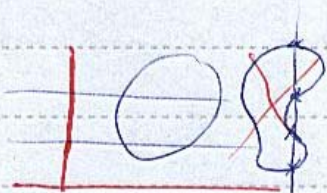
$$x = \frac{2}{3}t \quad y = 1 - \frac{2}{3}t \quad 0 < t < 1$$

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$W = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

اگر مستقل باشد (نگهدار باشد)

$$R(t) = (1-t)A + tB \quad 0 < t < 1$$



تفسیر کردن:  $\oint_C P dx + Q dy$

نقطه برای صفحه است و برای فضا مطرح نمی شود  
حتماً باید مسیر بسته باشد جهت حرکت مثبت مثلثی

مسیری که داریم باید نسبت به محورها منظم باشد یعنی حلقه‌ی موازی محورها آن را جدا کند در دو نقطه قطع کند

طول ناحیه مستوی جزئی مرتبه اول دانسته می‌شود

$$\oint_C p dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

کاربرد دیگر در محاسب مساحت است

$$R \text{ مساحت ناحیه} = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_R dA$$

$$= \oint_C x dy$$

$$- \oint_C y dx$$

محاسب مساحت بیضی فقط با قضیه گرین ممکن است

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ba \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta) d\theta$$

۱- مقدار انتگرال که در آن  $x^2 + y^2 = d^2$  دایره است که یک بار در خلاف جهت عقربه‌های

ساعت می‌چرخد شده کدام است

$$\int \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$$

مسیر بسته: انتگرال در صفحه: دایره ای شکل

-۲۱۷ ✓

۰

۲۱۷

۱۱



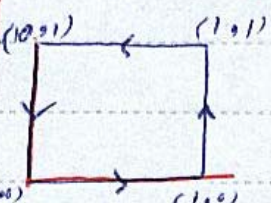
چون مسیر بسته است باید حتماً شرط نگرین (میدان) محاسب شود

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 - y^2 - 2x(y-x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$$

هیچکدام زرد داخل مرکز دایره (0,0) مستقیم  
 چایی مرتبه اول ندارند (مخرج صفر می شود) در نتیجه  
 شرط نگرین صادق نیست  
 = باید روی مسیر حرکت کرد  
 در تمام نقاط همگام ذکر شده باید مستقیم راست

-2

$$\oint_C (e^{-x^2} + y^2) dx + (\ln y - x^2) dy = \int_0^1 \int_0^1 -2(x+y) dx dy = -2$$


چون نوبت تیز دارد معادله معادله در چهار نقطه تغییر می کند = چهار معادله داریم و باید در روتنهاای کاری  
 چهار بار در انتگرال بگیریم

}

$$C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$$\oint_C (6y + x) dx + (y + 2x) dy$$

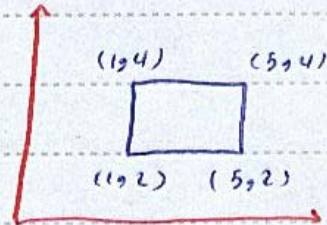
فقط نگرین

$$= \iint_D (2 - 6) dA = -4 \times \text{مساحت دایره به شعاع 2} = -16.7$$

اگر خلاف جهت مثلثاتی حرکت شود در منفی ضرب می شود

4- c: مستطیلی بر روی مس (1,2) - (5,2) - (5,4) - (1,4)

برای نگین برقرار است -  $\oint_C (e^{n^2} + y) dx + (n^2 - \sqrt{y}) dy = \int_1^5 \int_2^4 (2n-1) dx dy$

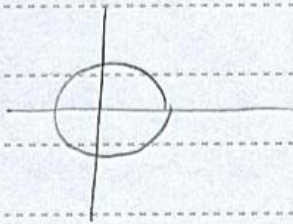


5- c: مربعی بر اضلاع |x|=1 و |y|=1

تابع فرد است  $\oint_C (n^2 + ny) dx + (y^2 + n^2) dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2n-n) dx dy = 0$

6- که در آن c: معنی ساده نسبت به محورهای (صفر و صفر) است که ام می باشد

(2π) حقیقی نگین صادق نیست  $\int_C (x dy - y dx) / (x^2 + y^2) = 2\pi$   
می توان از طرف آن یک دایره زد که صفر و صفر در آن باشد



$x = \cos \theta$   
 $y = \sin \theta$   
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$

7-  $\oint_C (n^3 + 2y) dx + (4n - 3y^2) dy = \iint (4-2) dA = 4\pi$  -7

گر یک صادق است

$c: n^2 + 4y^2 = 4$  بیضی

$\oint_C y dx + 3x dy = 2 \iint dA = 2 \times \frac{1}{2} \pi$

8-  $c: n^2 + 4y^2 = 1$

$a=1$   
 $b=1/2$

$$\int_c (\sin^4 x + e^{2x}) dx + (\cos^2 y - e^y) dy = 0 \quad -9$$

$$c: x^4 + y^4 = 16$$

استدلال رویی

S: سطح هموار (اتوی) دست روی آن کشیده شود. نزدیک احساس میکنم و h روی S تعریف شده باشد

$$\iint_S h(x, y, z) dS \quad \text{مثلاً } c = h = 6$$

اگر S مستوی از رویه  $z = f(x, y)$  باشد که مقصود قائم است روی صفحه xy ناحیه R باشد و مقصود برآیند بر افقی باشد

$$\Rightarrow = \iint_S h(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

$$\iint_S dS = \iint_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

$f_x$  مشتق نسبت به x  
 $f_y$  مشتق نسبت به y

★★★ نکته گذشته

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k = \text{بردار}$$

f تابع اسکالر  
 گرادیان f تابع برداری ← هر دو بردار

۱۳۳

Month. Date. ( )

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad \text{بردار}$$

اگر  $F$  هم برداری نباشد

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \quad \text{بردار}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{معادله دیویدرژانس}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad \text{معادله کُرل}$$

$$P = 3x^2 y z \quad \text{نقطه}$$

مثال ۱:

$$\nabla P = 6xy z \vec{i} + 3x^2 z \vec{j} + 3x^2 y \vec{k}$$

$$\vec{F} = (3x + y z) \vec{i} + (4xy z) \vec{j} + 3y z \vec{k}$$

مثال ۲:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3 + 4xy z + 3y$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x + yz & 4xyz & 3yz \end{vmatrix} = (3z - 4xy) \vec{i} - (0 - y) \vec{j} + (4yz - z) \vec{k}$$

☆☆☆

فرض کنیم یک رویه جواربه معادله  $C(x, y, z) = 0$  و  $n = \frac{\nabla C}{|\nabla C|}$  بردار واحد عمود بر رویه است.


بر روی  $C$  برای میدان بردار  $F = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$  در جهت مثبت  $n$  (برای جهت مثبت)

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds$$

را شمار (نمود)  $F$  در امتداد  $S$  کوئید

$F$  و  $n$  هر دو بردار هم‌جهت هستند. نقطه‌ای دور از کنار می‌سوزد.

روشنی تناسب  $\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds$  :

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds &= \iint_R \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{n}|} dndy \\ &= \iint_{R_1} \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{j}|} dndz \\ &= \iint_{R_2} \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{i}|} dydz \end{aligned}$$


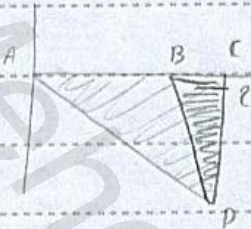
۱- مساحت بیضی بریده شده از صفحه  $z = cn$  از ناحیه  $x^2 + y^2 = a^2$  یک استوانه داریم که یک صفحه از رویه می‌سوزد (بیضی) که تقویر آن روی  $n$  و  $y$  یک دایره است.

۲. مساحت یک دایره بر سطح  $z = cn$   $\int \int \sqrt{1+c^2} dA = \sqrt{1+c^2}$

۲- مساحت مثلثی با رئوس  $A(0,0,0)$  و  $B(1,0,2)$  و  $C(2,0,0)$  کدام است

	$x=0$	$y=0$	$z=0$	
معادله صفحه	$1=0$	$0=0$	$2=0$	$\Rightarrow z=2x+2y$
	$2=0$	$-2=0$	$0=0$	

$$\iint \sqrt{1+4+4} dA = 3 \int_{-2}^0 \int_0^{+2} dA = 6$$



$$A = ACP - BCP$$

3- انتگرال روی سطح برداری

$$F = (x - 2z) i + (x + 3y + z) j + (5x + y) k$$

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$$

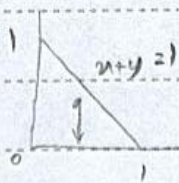
رو کجای رویه کدام است؟

$$C: x + y + z = 1 \quad z = 1 - x - y$$

انتگرال F روی رویه = شای

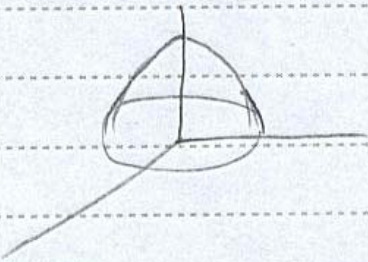
$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} (i + j + k)$$

$$\iint_S (F \cdot n) dS = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(x - 2z + x + 3y + z + 5x + y) \cdot (-z, -1+x+y)}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}} dy dx$$



$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (8x + 5y) dy dx \quad ?$$

4- انتگرال روی میدان  $F = xz i$  را برای سطح  $z = 1 - x^2 - y^2$  که بالای صفحه  $z = 0$  قرار دارد برابر است با.



$G: z + x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \vec{\nabla} G = 2xi + 2yj + k$

$n = \frac{2xi + 2yj + k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$

$\iint_S (F \cdot n) ds = \iint \frac{2x^2 z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \left( \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} (n \cdot n) \right) dx dy$

$= \iint 2x^2 (1 - x^2 - y^2) dx dy$

به محضات قطبی می بریم:



$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cos^2 \theta (1 - r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{6}$

5 - مقدار  $\iint_S (x+y+z) ds$  در ناحیه  $x+y=1$  و  $x, y \geq 0, z \leq 1$  است.

که نام است  
تساوی خواهد

صحنه ای هم موازی است که می توان از آن روی این صفحه برد.

$y_x = 1 \quad y_x = 0$

$\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

$I = \int_0^1 \int_0^1 (x+1-x+z) \sqrt{2} dx dz$

6: اگر  $\phi$  یک تابع عددی باشد حاصل عبارت زیر کدام است.

- هر دار صغریه  $\nabla \cdot (\nabla \phi)$
- هر دار صغریه  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \phi)$
- هر دار صغریه  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \phi)$
- هر دار صغریه  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \phi)$

7: اگر  $f(x, y, z) = 2x^2y - xz^2$  حاصل  $\nabla^2 f$  کدام است

$$\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4y - 6xz$$

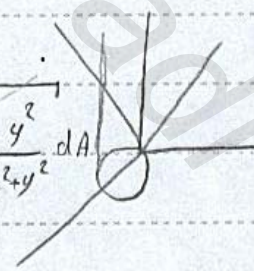
8:  $F = xy^2z^3i + z^2 \sin y j + e^{-\frac{1}{2}z^2} k$  curl  $F = ?$

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^3 & z^2 \sin y & e^{-\frac{1}{2}z^2} \end{vmatrix} = (-2z \sin y)i - (-3xy^2z^2)j + (-2xyz^3)k$$

اگر نقطه ای خاص curl خود را در برداریم حاصل یک عدد می‌گردد

9: استوانه  $x^2 + y^2 = 2x$  از ناحیه بالایی مخروطی  $z^2 = x^2 + y^2$  عبور می‌کند. سطحی مانند  $S$  را برای آن

$$\int_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS$$

$$\sqrt{2} \int_R \int (x^4 - y^4 + y^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)x^2 + 1) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dA$$


$$= \sqrt{2} \int_R dA = \sqrt{2} \cdot (\text{مساحت دایره به شعاع 1}) = \pi\sqrt{2}$$



قضیه واکرائی با دایره زائش

اگر  $F = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$  و دایره زائش  $F$ ،  $\nabla \cdot \vec{F}$  در رویه مستقیم نسبت به  $S$  و نقاط داخلی  $V$  به دست آورده شود و  $S$  با  $S$  باشد نگاه

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \iiint_V (\nabla \cdot F) dv$$

با برابر است

$$= \iiint_V \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \right) dv$$

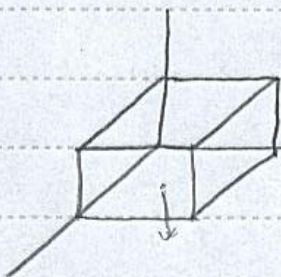
فرمول استراده سازی:

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \iiint_V \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \right) dv = \iiint_V p dx dy dz + q dx dz + r dx dy$$

تبدیل استراده

برای سطح کف در  $z=0$  داریم  $n = -k$  و  $F = x e^{-y} \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2x \mathbf{k}$  و  $S$  رویه مستطیل به ابعاد ۲ و ۳ و ۱ بردار یکانی قائم خارجی بر  $S$  باشد

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \iiint_V 1 \times dv = 6$$



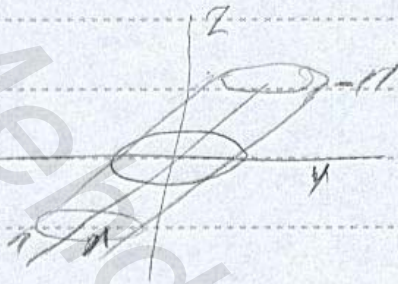
برای سطح کف در  $z=0$  داریم  $n = -k$  و  $F = x e^{-y} \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2x \mathbf{k}$

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iint_S \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|n \cdot u|} = 0$$



$\iint_S F \cdot n \, ds = ?$

$F = x^6 i + y \cos^3 z j + 2z k$



$S: x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4 \quad -\pi \leq z \leq \pi$   
 بردار، قائم، یکد، خارجی  
 دو کروی، صدق می‌کنند

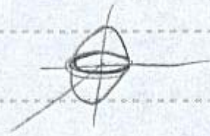
$\iint_S F \cdot n \, ds = \int \int \int (6x^5 + \cos^3 z + 2) \, dV$

$= \int \int \int_{-\pi}^{\pi} (6x^5 + \cos^3 z + 2) \, dV = \int \int a \, dA = a \times \text{مساحت بیضی}$

حاصل اشکال داخلی عدد است.  $a = 2$

$\iint_S F \cdot n \, ds = ?$

$F = (x, y, z) \Rightarrow \text{دایره زائده} = 3 = 1+1+1$



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$= 4\pi abc$

$\iint_S F \cdot n \, ds = ?$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = 9, F = x i + (1-y) j + (2z+1) k$  - 4

$\int \int x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = 9 = 3 \times 3$  - 5

$x + y + z = 2 \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

با فرمول استراسبرادسی برای کره دانیم

$\iint F \cdot n \, dS = ?$   $F = (xy^2, yz^2, zn^2)$  6

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$   $S: x^2 + y^2 + z^2 = d^2$

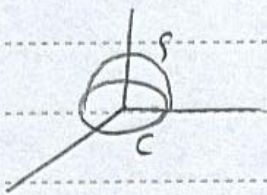
$\iiint \rho^3 \rho^2 \sin \theta \, d\theta$

$\iint F \cdot n \, dS = ?$   $z = \sqrt{1 - y^2 - x^2}$  7  
 $x = y, x = -y$

دایره زائده = ۱  $F = (y^3 e^{z^2} + z^5) i + x^2 z^3 j + zk$

$\iiint = \frac{1}{8}$   $\frac{1}{8}$  کره

$\int_C p \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iiint_S (\nabla \cdot F) \cdot n \, dS$  قرمول استولس:  $\vec{F}$



اشدال رویای (نکار)

$= \int_S \int (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_R \int \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|n \cdot n|} \, dx \, dy$  نام کار روی C

طوری با روی حرکت کرد که فضای C است چه ما

۱- فرض  $F = 2xz\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$  و  $S$  نیمه کره بالایی  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

و  $C$  باشد  $z=0$ ،  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، آنگاه:

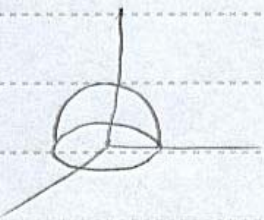
$$\int_C F \cdot dR = ? = 0$$

$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & 2y & yz \end{vmatrix} = \vec{0}$

۲- اگر  $S$  سطح خارجی رویه‌ای  $z=0$ ،  $x^2+y^2 \leq a^2$  و  $C$  معنی که از تلاقی  $S$  با صفحه  $z=0$  حاصل می‌شود و  $F = (y, 5, z)$ ، آنگاه

برای استوکیس برقرار است  $\nabla \times F = -k$  باید در  $xy$  صفحه برستو

$$\oint_C F \cdot dR = ? \quad = \iint_R \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|} dudy = \iint_R \frac{-n \cdot k}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|} dudy = -\pi a^2$$



۳- اگر  $C$  معنی فصل مشرف  $z=0$  و  $x^2+y^2=1$  باشد آنگاه  $xy$

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz = ?$$

ی تو (۱)  $z=0$  که است و در آن

$\nabla \times F = 3(x^2+y^2)\mathbf{k}$   
 $n = k$

$|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}| = 1$

$$(\nabla \times F) \cdot \mathbf{n} = 3(x^2+y^2) = 3 \iint_D r^2 dr d\theta$$



4- در کدام امتداد با بیشترین سرعت تغییر می کند  $w = x^2 - xy + 2z^2 + yz$

(1 و 2 و 3)

$$= 3i - 3j - 3k$$

5- بردار عمود بر سطح  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$  در (1 و 2 و 3) کدام است؟

بردار عمود بر سطح در هر نقطه همان بردار گرادیان است  $\vec{n} = 8i + 16j - 2k$

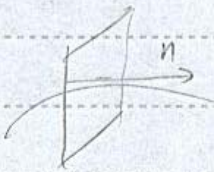
6- معادله صفحه مماس بر  $z$  در نقطه (2 و 1 و 1) کدام است

$$z = x^2 + y^2$$

$$\vec{n} = 2i + 2j - 2k$$

$$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$$

7- معادله صفحه مماس بر  $r(t) = e^t i + (t+1)j + \ln(1+t)k$  در  $t=0$  کدام است



$$r'(t) = e^t i + j + \frac{1}{1+t} k$$

بردار عمود بر صفحه مماس  $r'(0) = i + j + k$

$$r(0) = i + j \quad (1, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \text{معادله صفحه مماس} \quad (x-1) + (y-1) + z = 0$$

دو منحنی وقتی بر هم مماس هستند که زاویه بین مماس هر دو یکی آنها صفر نباشد.  
 دو صفحه وقتی بر هم قائم هستند که بردارهای آنها در آن نقطه بر هم قائم باشند.

۸- بردار این معادله در فضا کدام است

$$2z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

همدولوی وار یکبار چه  
 ✓ همدولوی وار دوبار چه  
 سه‌بار همدولوی  
 مروط

$$x^2 + y^2 = z^2$$

۹- مروط

برای بدست آوردن خط مماس بر محل تلاقی دو منحنی باید عامل ضرب خارجی دو بردار نرمال دو منحنی در نقطه مماس را بدست آورد.

۱۰- معادله صفحه مماس بر منحنی  $\begin{cases} y = x^2 \\ z^2 = 16 - y \end{cases}$  در نقطه  $(4, 16, 0)$  کدام است

جواب  $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow$  *نقطه مماس در دو صفحه*

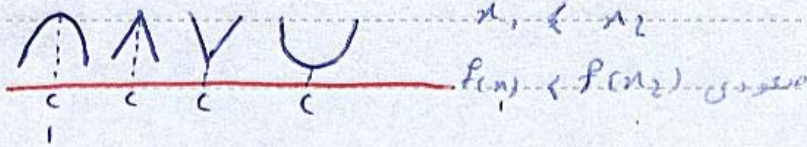
$$N_1 = -2xi + j$$

$$N_2 = j + 2zk$$

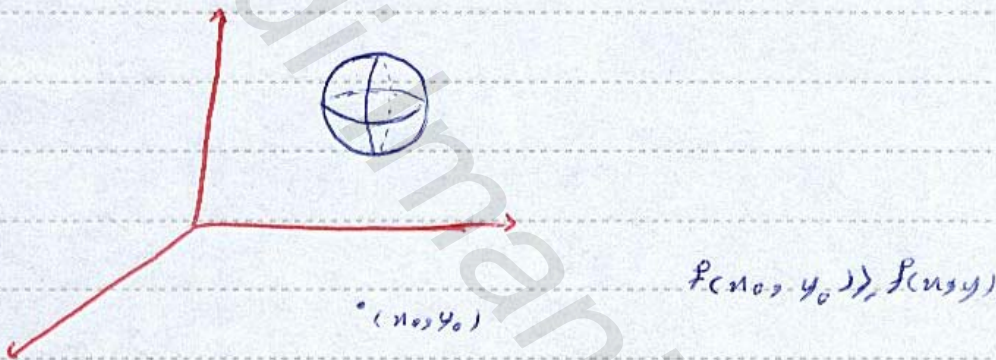
$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8k$$



اکثر هم توابع دو متغیره



تعریف ماکزیمم نسبی برای توابع یک متغیره:  $\forall x \in I, f(x) > f(c)$



برای تعیین اکثر هم نسبی در توابع دو متغیره می توان از آزمون مشتق مرتبه اول استفاده کرد.

اکثر همهای نسبی در تقاطعی شکل می گیرند. مشتق در آن نقاط منفرجه یا وجود نداشته باشند.

۴. فرض کنید تابع  $Z = f(x, y)$  در یک همسانی از  $P_0(x_0, y_0)$  تعریف شده باشد. گوئیم  $F$  در  $P_0$  دارای مینیمم نسبی (ماکزیمم نسبی) می باشد اگر یک همسانی از  $P_0$  وجود داشته باشد. طوریکه برای هر  $(x, y)$  در آن همسانی  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  (یا  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ )

قضیه اگر تابع  $Z = f(x, y)$  در نقطه  $P_0$  به اکثر هم خود برسد آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول در آن نقطه برابر صفر هستند یا وجود ندارند.

تعریف نقطه  $(x_0, y_0)$  را یک نقطه بحرانی برای تابع  $F$  گوئیم اگر  $F$  در  $(x_0, y_0)$  مشتق پذیر باشد و یا

$$\begin{cases} F_x(x_0, y_0) = 0 \\ F_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Year. Month. Date. ( )

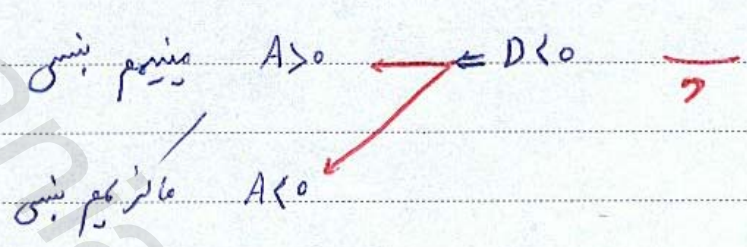
آن نقاط بحرانی که منجر به مقادیر اکثریم بنی من شود را فقط زینتی نامیم

اگر نقطه  $(x_0, y_0)$  یک نقطه بحرانی باشد و زینتی کنیم  $A = f_{xx}(x_0, y_0)$  و  $B = f_{xy}(x_0, y_0)$  و  $C = f_{yy}(x_0, y_0)$

$$D = \frac{B^2}{A^2} - AC$$

الف  $D > 0$  نقطه زینتی

نتیجه بی دهن  $D = 0$



۱- نقطه  $(0,0)$  برای سطح معادله  $Z = 3x^2 - 3y^2$  چگونه نقطه است؟

ماکزیم بنی  
مینیم  
زینتی ✓  
عادی

در دو دستگاه صدق می کند، نقطه ای است  $(0,0)$

$$Z_{xx} = 6x \Rightarrow A = 0$$

$$Z_{xy} = -3 = Z_{yx} \Rightarrow B = -3 \Rightarrow D = 9$$

$$Z_{yy} = 6y \Rightarrow C = 0$$

۲- مینیم تابع  $Z = x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 12$  کدام است

$$\begin{cases} Z_x = 2x - 6 = 0 \\ Z_y = 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3, -1)$$

ect:

Year. Month. Date. ( )

$$Z(3, -1) = 9 + 2 - 18 - 4 + 12 = -1$$

$$Z_{xx} = 2 = A$$

$$Z_{xy} = 0 = B$$

$$Z_{yy} = 4 = C$$

$$D < 0 \Rightarrow A > 0 \Rightarrow \text{مینیم}$$

3. نقطه  $(\frac{2}{9}, -\frac{10}{9})$  برای تابع  $f = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 4x$

$$\begin{cases} f_x = 4x + 2y + 4 = 0 \\ f_y = 2x + 10y = 0 \end{cases}$$

ماکزیم بیش

✓ مینیم بیش

زینی

نقطه بحرانی نمی باشد

$$f_{xx} = 4 = A$$

$$f_{xy} = 2 = B$$

$$f_{yy} = 10 = C$$

$$D < 0 \Rightarrow A > 0$$

4. می مینیم  $f = x^2 - 4xy + 3y^2 + 4y$  تمام است

$$\begin{cases} f_x = 2x - 4y = 0 \\ f_y = -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(4, 2) \Rightarrow f(4, 2) = 0$$

دو نقطه دارد معادله می گذاریم

$$(4, 2)$$

$$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$$

چون کدام کمتر بود مینیمیم است

$$f_{xx} = 2 = A$$

$$f_{xy} = -4 = B$$

$$f_{yy} = 6 = C$$

چون هیچ کدوم از آن ها مشکلی است می توان نقطه دارد رابطه رو به روز کرد و در کدام

که  $D < 0$  و  $A > 0$  دارد آن مینیمیم است یعنی در تابع  $f$  در تابع می گذاریم  $f_{min}$  رابطه می آوریم

5- نقطه جوان  $Z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 7y$  کدام است

$$\begin{cases} Z_x = 2x - 3y - 5 = 0 \\ Z_y = -3x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, -1)$$

6- کدام یک از نقاط زیر مینیمم مبنی تابع  $f = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$  است ؟

$$\begin{cases} f_x = 6x + 2y + 2 = 0 \\ f_y = 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \left( -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$$

7- ماکزیمم  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$  کدام است

$$\begin{cases} f_x = e^{-(x^2 + y^2)} (2x - 2x(x^2 + y^2)) = 0 \\ f_y = e^{-(x^2 + y^2)} (2y - 2y(x^2 + y^2)) = 0 \end{cases}$$

$x = 0$  یا  $x^2 + y^2 = 1$    
 $y = 0$  یا  $x^2 + y^2 = 1$    
 نقاط  $x^2 + y^2 = 1$  ماکزیمم می سازد  $c = \frac{1}{2} e^{-1/2}$    
 $2e^{-2}$  در تابع  $f$  قرار می شود   
 $e^{-1}$  مقدار ماکزیمم از  $f(x, y)$    
 $f = e^{-1}$

ماکزیمم و مینیمم مستوی (معدنی) :

زمانی که می خواهیم استریم تابع  $Z = f(x, y)$  را با شرط  $g(x, y) = 0$  تعیین کنیم برای این کار از تابع لاگرانژ استفاده می کنیم

$$U = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = f_x + \lambda g_x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = f_y + \lambda g_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & U_{xx} & U_{xy} \\ g_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix}$$

ect:

Year. Month. Date. ( )

$Z < 0$  منیم بیس

$Z > 0$  ماکسیم بیس

$Z = 0$  جواب بی دهد

۱- منیم مقدار تابع  $Z = x^2 + y^2 - 2x$  با شرط  $3x + 2y = 3$  کدام است - !

در این معادله شرط بدست آوریم در تابع قرار دهیم. مستقیم بگیریم. مقدار منیم را جداگانه بیسیم (ارتباط بیوان مستقیم)

$$Z = x^2 + \frac{9}{4}(1-x)^2 - 2x$$

$$Z' = 2x - \frac{9}{2}(1-x) - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Z_{\min} = -1$$

با دوام  $U = x^2 + y^2 - 2x + \lambda(3x + 2y - 3)$

$$g = 3x + 2y - 3$$

$$\begin{cases} U_x = 2x - 2 + 3\lambda = 0 & \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}\lambda & x = 1 \\ U_y = 2y + 2\lambda = 0 & \Rightarrow y = -\lambda & y = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 0)$$

$$3x + 2y = 3 \Rightarrow 3 - \frac{9}{2}\lambda - 2\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 6 + 2(-4) = < 0 \Rightarrow (1, 0) \text{ منیم}$$

$$Z(1, 0)_{\min} = -1$$

اگر در مستقیم  $g$  متغیرهای اولی باشد باید مقدار  $(1, 0, 0)$  را قرار نگیرد زیرا تمام اعضای  $J$  عدد هستند

Year. Month. Date. ( )

2- min مقدار تابع  $z = x^2 - y^2$  به شرط  $x + 2y = 6$  کدام است

$z_{min} = -12$

3- طول وتر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع  $x$  و  $y$  برابر  $\sqrt{5}$  است. بیشترین مقدار  $x + y$  کدام است

$f = x + y$   
 $x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow g = x^2 + y^2 - 5 = 0$   
 $F = \sqrt{5 - x^2} + x$  (3)  
 $\sqrt{5}$

$U = x + y + \lambda (x^2 + y^2 - 5)$   
 $F' = 1 + \frac{-2x}{\sqrt{5-x^2}} = 0$

$$\begin{cases} U_x = 1 + 2x\lambda = 0 & x = -\frac{1}{2\lambda} \\ U_y = 1 + 2y\lambda = 0 & y = -\frac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

مقیاس اول قبول است تا حاصل مثبت شود  
 $\frac{1}{2\lambda^2} = 5 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{10} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \left( \frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} \right)$

4- مقدار ماکسیمم و مینیمم  $f = 3x + 4y$  بر دایره  $x^2 + y^2 = 1$  کدام است؟

$f_{max} = 5$

$f_{min} = -5$

5- دو تابع  $f$  و  $g$  در زیر به هم فاصله مبدأ از  $x$  و  $y$  در  $x^2 + ny + y^2 = 16$  کدام است؟

$f = 2x + \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow g = x^2 + ny + y^2 = 16$   
 $f = 2x + y^2 \Rightarrow g = x^2 + ny + y^2 = 16$

ject:

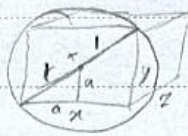
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{aligned}
 & 2\lambda x + y\lambda \\
 x \times \left\{ \begin{aligned} U_x &= 2x + \lambda(2x+y) \\ U_y &= 2y + \lambda(x+2y) = 0 \end{aligned} \right. \quad \lambda = -1, y = \pm x \\
 & g = x^2 + xy + y^2 - 16
 \end{aligned}$$

فایده منفرجه شود در  $x, y = 0$   $\lambda \neq -1 \Rightarrow$  مارتق نیست  $\lambda = -1$

$$\begin{aligned}
 x = y & \Rightarrow f_{\min} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \\
 x = -y & \Rightarrow f_{\min} = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

6. بیشترین حجم مکعب مستطیلی که داخل کره به شعاع 2 و ارتفاع 4 میگیرد کدام است



$$V = xyz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \rightarrow \text{مربع قائم} \Rightarrow V_{\max} = \frac{8}{9}\sqrt{3}$$

بیشترین مقدار یک مکعب است

۱۵۶

Year. Month. Date. ( )

7- نقطه min تابع  $f = 4x^2 + y^2 + z^2$  را بر طبق  $2x + 3y + z = 12$  بیابید.

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

$$8xi + 2yj + 2zk = 2\lambda i + 3\lambda j + k\lambda$$

$$\begin{cases} 8x = 2\lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 2z = \lambda \\ 2x + 3y + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda}{4} \\ y = \frac{3}{2}\lambda \\ z = \frac{\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{24}{11}$$

$$\left( \frac{6}{11}, \frac{36}{11}, \frac{12}{11} \right)$$

چون min خواهد بود همین نقطه برای نقطه min می باشد.

بردار یکانی هماس قائم اول و دوم:

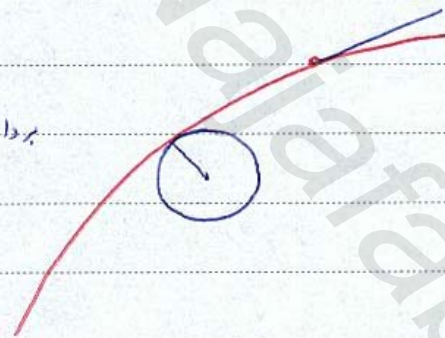
$$c: \vec{R}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} \quad \text{بردار یکانی هماس اول}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} \quad \text{بردار قائم یکانی اول}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \quad \text{بردار یکانی قائم دوم}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{R}'(t)| dt \quad \text{طول قوس از } t_1 \text{ تا } t_2$$





ject:

Year. Month. Date. ( )

ایضا (مسئله از رسمت)

$$k = \frac{|R' \times R''|}{|R'|^3}$$

ایضا

مسئله ایضا  $\rho = \frac{1}{k}$

اگر در صفحه باشد و دایره باشد

$$y = f(x)$$

$$\Rightarrow k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

اگر در صفحه باشد و معادلات به صورت پارامتری باشد

$$R(t) = x(t)i + y(t)j$$

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

اگر در صفحه باشد و معادلات به صورت قطبی باشد

$$r = f(\theta)$$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

بعد دایره برسان فقط در صفحه مطرح می شود

معنای مرکز دایره برسان (در رابطه از بردار)

$$x_c = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

۱۵۵

Year. Month. Date. ( )

۱- اگر  $\alpha(t) = (6 \sin 2t, 6 \cos 2t, 5t)$  و آنگاه  $\alpha'(t)$  را در  $\alpha(0)$  برام ( )

$$\alpha' \times \alpha = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 \cos 2t & -12 \sin 2t & 5 \\ -24 \sin 2t & -24 \cos 2t & 0 \end{vmatrix} = 120 \cos 2t i - 120 \sin 2t j - 12 \times 24 k$$

$$|120i - 12 \times 24k| = 24 \times 13$$

$$|\alpha'| = |12i + 5k| = 13$$

$$k(0) = \frac{24 \times 13}{(13)^3} = \frac{24}{169}$$

۲- اگر  $R(t) = (\sin t, \cos t, \frac{1}{2}t^2)$  و آنگاه  $R'(t)$  را در  $t=0$  برام ( )

$$k = \sqrt{2}$$

$$|R' \times R''| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & -\sin t & t \\ -\sin t & -\cos t & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}$$

$$|R'| = 1$$

$$|R''| = \sqrt{2}$$

۳- اگر  $R(t) = (\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, 0)$  و آنگاه  $R'(t)$  را در  $t=1$  برام ( )

$$k = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}$$

$$k = \frac{t^2 - 2t^3}{(t^4 + t^2)^{3/2}}$$

ject:

Year. Month. Date. ( )

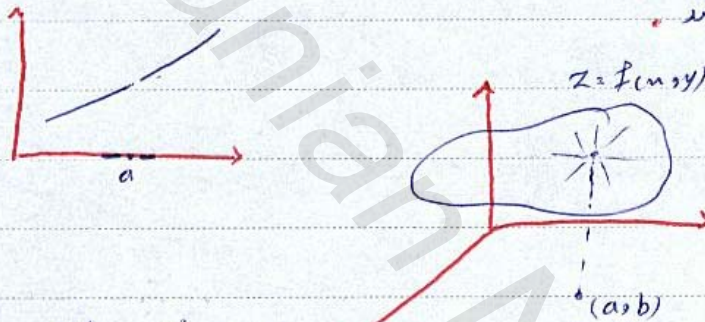
اگر  $k=0$  و  $p=0$  معنی ما به صورت خط صاف می باشد که شعاع دایره بی نهایت است

معنی به شکل خط صاف است  $R' \neq 0$  و  $(R' \times R'') = 0$  مثلا

حد و پیوستگی:

تابع وقتی حد دارد که وقتی ما از هر طرف به آن نزدیک شویم مقدار تابع تغییر نکند

در رویه های متفاوتی دیگر حد وجود دارد معنی زیر الزامات متفاوت زیادی باید بود نقطه مورد نظر نزدیک شد



معمولا می توان روی این خط به نقطه نزدیک شد  $y = mx + a$  اگر به  $m$  بسنجی پیدا کردی تابع حد ندارد ولی اگر به  $m$  بسنجی پیدا نکردی تو (اقتت حد عدد حاصل است و می توان گفت

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \begin{cases} \epsilon > 0 \\ \delta > 0 \end{cases}$$

عدد بسته باشد عدد آن چنان

فاصله (تقریباً) عدد است

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

اگر در زیرینها (عدد ندارد) وجود ندارد (ها) عدد عدد است

حدود مرکب:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right] = L_{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] = L_{21}$$

اگر  $L_{12}$  و  $L_{21}$  دو موجود دو مخالف باشند، حد ندارد. وجود عدد مساوی بود / دلیل بر حد نیست بلکه بر این معناست که اگر عدد وجود داشته باشد (ها) / عدد است.

اگر یکی عدد دیگری بنیاد است پس می توان گفت حد ندارد ولی اگر داشته باشد (ها) / عدد است.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] = 0$$

$$y = mx \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m}{x \sqrt{1+m^2}} = 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \epsilon$$

اگر بخواهیم عدد (در حد) صفر است

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{|x||y|}{|y|} = |x| \leftarrow \sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{y^2}$$

$\delta$  را مساوی  $\epsilon$  می گیریم

$$|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta = \epsilon$$

ject:

Year. Month. Date. ( )

2- تابع با ضابطه؟  
 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ a & x=y=0 \end{cases}$  معوضه مقادیر  $a$  را طوری پیدا کنید که  $f$  پیوسته شود!

تابع حد ندارد در  $(0,0)$  پس

3- حاصل حد  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \cos y}$  کدام است؟  
 جواب:  $(0,0)$  است  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \cos y} = \frac{e^0 + e^0}{\cos 0 + \cos 0} = \frac{2}{2} = 1$

4-  $f = \sin \frac{y}{x}$  در کدام نقاط پیوسته است؟  
 در همه جا پیوسته است.

5- حد  $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$  در  $(0,0)$  کدام است؟  
 حد وجود ندارد.

$L_1 = L_2 = 0$

$y = m x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = 0$

وجود ندارد ✓

$y = m x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^4 + m^2 x^4} = 1 \neq 0$  تابع حد ندارد

6-  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} \times \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y}} = \frac{1}{2}$

برای همبندی می توانیم دو متغیر با هم  
 راجع به همبندی برای یک متغیره مادی است

Year. Month. Date. ( )

$L_{12} = L_{21} = 0$

$f(x,y) \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  7

$y = mx \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$

در  $(0,0)$  یو ستر ۱۳

دارای مشتقات نسبی است

حد ندارد

مشتق نیز برای

$f = \frac{x^2+y^2}{y}$  تابع توکل در دامنه این مشتق پذیر است

8. در کدام نقاط مشتق پذیر است

R

در هر نقطه از دامنه است

با  $(0,0)$

$u = x^2 + xy$

9. در  $x=2, y=1$  کدام  $\frac{\partial u}{\partial x}$

$v = x^2 + y^2$

$w = 3x - 2y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = ? = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = (2x+y)(2) + x(-2) = 6$

$u = x^2 + y^2 + z^2$

10

$v = xy + z$

$w = xy + yz + xz$

$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = ? = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$

ect:

Year. Month. Date. ( )

$$Z = y \phi(x^2 - y^2)$$

-11

$$\frac{1}{x} Z_x + \frac{1}{y} Z_y = ? = \frac{Z}{y^2}$$

$$Z_x = 2xy \phi(x^2 - y^2)$$

$$Z_y = \phi(x^2 - y^2) - 2y^2 \phi(x^2 - y^2)$$

$$u = x^2 + y^2$$

-12

$$x = 4s - 3t$$

$$y = 5t^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ? \quad t = s = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 18$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2x(-3) + 2y(25t)$$

به جای  $s$  و  $t$  مقادیر داده امتری آنها را وارد می کنیم

تابع  $f(x, y, z)$  را همین از درجه  $\alpha$  گوئیم اگر به جای  $x, y, z$  مقادیر  $\lambda x, \lambda y, \lambda z$  بگذاریم مقدار  $\lambda^\alpha$  را فاکتور دهد و خود تابع به دست آید

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)$$
اگر  $f$  تابعی همین از درجه  $\alpha$  باشد آنگاه

$$x f_x + y f_y + z f_z = \alpha f$$

۱۶۱

Year. Month. Date. ( )

$$z = \frac{x - 3y}{xz} \Rightarrow x z_x + y z_y = ?$$

تابع هگن از درجه ۱  $\alpha = -1$ 

$$\Rightarrow x z_x + y z_y = -1 \cdot z$$

$$z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \Rightarrow x z_x + y z_y = ?$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow x z_x + y z_y = 0 \cdot z = 0$$

هگن از درجه صفر

$$f = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{xy}} \Rightarrow x f_x + y f_y = ? = 2f$$

$$\alpha = 2$$

هگن از درجه ۲

قضیه اگر  $F(u) = f(x, y, z)$  و هگن از درجه  $\alpha$  باشد آنگاه

$$x u_x + y u_y + z u_z = \alpha \frac{F(u)}{F'(u)}$$

$$u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y} \Rightarrow x u_x + y u_y = ? = \frac{\sin u}{\cos u}$$

دلی هگن از درجه ۱ است ولی  $\sin u$  هگن نیست زیرا که از زیر قوس بیرون می آید و در دلتا قوس با مخرج هگن است

$$\sin u = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$



ect:

Year. Month. Date. ( )

$$u = \ln \frac{x^4 + y^4}{x-y} \Rightarrow dU_x + yU_y = ? \quad 3 \times \frac{F(x)}{F'(x)}$$

2

$$e^u = \frac{x^4 + y^4}{x-y} \Rightarrow \lambda = 3$$

بردار ویژه مختلط بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  کدام است؟

$$\lambda(i-2j)$$

$$\lambda(2i-j)$$

$$\lambda(2i+j)$$

$$\lambda(i+2j)$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & \\ & a_{22} - \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

رابطه

مقادیر ویژه را در

$$\begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 5)(\lambda + 2) - 4 = 0 \quad \lambda = -1, -6$$

ریشه‌های معادله مشخصه را مقادیر ویژه گویند.

ماتریس

$$AX = \lambda X$$

X را بردار ویژه گویند

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5a + 2b = -a \\ 2a - 2b = -b \end{cases} \quad \begin{matrix} 2a = b \\ 2a = b \end{matrix}$$

$$a=1 \Rightarrow b=2 \quad \text{فرضی}$$

$$i \quad 2j$$

4- کدام بردار یک بردار ویژه  $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  است

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$        $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$        $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$        $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 6$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a + 4b = a \\ a + 2b = b \end{cases} \Rightarrow a = -b$$

5- می دانیم  $\lambda_1 = 2$  یک مقدار ویژه ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  و در میان آن  $36$  دو مقدار دیگر کدام است

حاصلضرب مقادیر ویژه باید در میان برابر است  $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 36$

$$36 = 2 \times \lambda_2 \times \lambda_3$$

$T_r(A) =$  مجموع مقادیر ویژه  $T_r =$  جمع مقادیر روی قطر

$$3 + 5 + 3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + \lambda_2 + \lambda_3$$

6- می دانیم  $\lambda_1, \lambda_2$  یک مقدار ویژه  $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$  و ماتریس  $A$  مقدار  $\lambda_3$  دو مقدار دیگر کدام است

