# www.icivil.ir

## پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

فیلم آموزشی استاتیک و مقاومت به زبان فارسی

بیش از ۱۳ ساعت فیلم آموزشی
با حل مثالهای متعدد

برای مشاهده نمونه و سرفصل ها کلیک کنید
icivil.ir/st

@icivilir

icivil.ir

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

# دانشگاه صنعتی امیرکبیر

## دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

## جزوه درس :

مقاومت مصالح ۱

## استاد :

جناب آقای دکتر کبیر

## نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

"بسم الله الرحمن الرحیم"

حمید کاظم

مقاومت مصالح ۱

جناب آقای دکتر کبیر

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

# خلاصه مباحث درس:

## فصل اول:

مفاهیم تنش: نرمال، برشی، اصل کوشی، مولفه های تنش بر روی سطح شیدار، ضریب اطمینان

## فصل دوم:

بارگذاری محوری: تنش محوری، کرنش محوری (تغییر اندازه یا تغییر شکل)، رابطه تنش کرنش (رابطه بین بار و تغییر شکل)، خزش، خستگی، تحلیل سازه های نامعین استاتیکی، بارگذاری حرارتی، ضریب پواسون، تمرکز تنش، قانون هوک (رابطه بین تنش و کرنش در حالت خطی) برای حالت ۲ بعدی و ۳ بعدی تنش، تغییر شکل های فاندکار، تنش های پس ماند.

## فصل سوم:

پیچش: مقاطع دوار، تنش برشی ناشی از پیچش، تغییر شکل پیچشی (زاویه پیچشی)، تمرکز تنش، مسائل نامعین در پیچش، طراحی محورهای انتقال قدرت، تغییر شکل های پلاستیک (فاندکار) در پیچش، مقاطع جدار نازک در پیچش، مقاطع غیر دوار

## فصل چهارم:

خمش (خمش خالص $N/m$) : خلیات خمش ، تعریف تنش مماسی از خمش ، خمش در مقاطع مرکب ، تمرکز تنش در خمش ، تغییر شکل های غیر اری در خمش ، خمش با نیروهای محوری خارج از مرکز ، ترکیب تنش محوری و خمشی .

## فصل پنجم:

برش : خلیات برش ، تنش برشی در تیرها ، مقاطع جدار نازک ، مرکز برش ، مقاطع مرکب ، ترکیب تنش ها .

* ترکیب تنش ها جمع بندی کل چیزهایی است که خوانده ام .

Mechanics of solids
Strength of materials ⟵ مقاومت مصالح

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

حمید کاظم

## اهداف درس:

۱) استحکام Strength

۲) صلبیت (میزان الاستیکی در برابر بار وارده) Rigidity

۳) پایداری الاستیک Elastic Stability

این ۳ هدف را در مکانیک مصالح به صورت زیر خلاصه و تعریف می نمائیم:
موضوعی از علم مکانیک است که با استفاده از روش های تحلیلی به بررسی و تعیین میزان مقاومت (استحکام) و صلبیت (تغییر شکل) و پایداری اجزای اعضای باربر می پردازد.

## مفاهیم اساسی درس:

۱) جسم صلب (rigid body): به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر یا بسیار کم و قابل صرفنظر باشد.

Relative Displacement Between Particles = 0

هر جسمی در اثر نیرو تغییر شکل می دهد (حرکت جسم صلب)

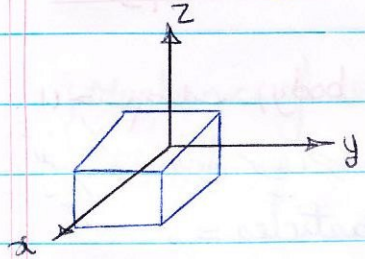
۲) جسم شکل پذیر ( Deformable body ) : به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر نباشد. Relative Displacement between particles ≠ 0.

* درست برعکس جسم صلب

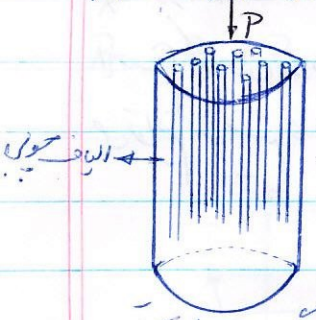
۳) جسم همگن ( Homogen ) : جسمی گویند که خصوصیات آن ( ρ ) در تمام نقاط ثابت باشد. مثلاً فولاد (با توجه به تن) ، بتن اگر خوب ویبره شود همگن می گردد. خاک همگن نیست.

۴) ایزوتروپ ( Isotrop ) : جسمی گویم که خواص مصالح آن در کلیه راستاها یکسان باشد.

مثلاً در فلزات مقابل از خاصیت یکسانی برخوردار هستند



ه) انیستروپ (Anistrop): به جسمی گویند که رفتارش در سه جهت x، y و z یکسان نیست.




بهترین مثال برای این حالت چوب است. چوب نیروی وارده P را به راحتی از P' عبور می‌دهد. چوب در حالت موازی (P) بار را الیاف تحمل می‌کند ولی در جهت عمودی (P') مواد چسباننده الیاف به همدیگر، بار را تحمل کرده و لذا بهتر است بار به صورت موازی با الیاف اعمال شود.

و) (Orthotrop): اجسامی که در سه راستای متعامد خواص متفاوتی داشته باشند.

تعادل اجسام: اجسام در حال تعادل از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$\Sigma F = 0 \quad , \quad \Sigma M = 0$$

برای به دست آوردن فرمول‌های تعادل، ۳ جهت x، y و z را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

* در مقاومت مصالح نوالط تعادل اجسام به صورت تقسیم و تکیل نیروهای داخلی اجسام بکار می رود.

می توانیم بنویسیم:

$\hat{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$ بردار کل نیرو

$\hat{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$ بردار کل تنش

---

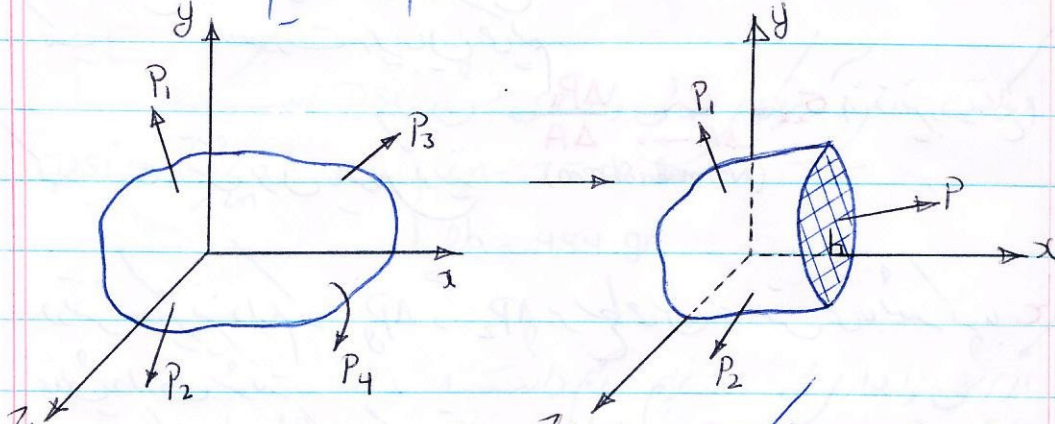
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

حمید کاظم

# فصل اول

## مفهوم تنش (Concept of stress)

اگر جسمی در فضای xyz در حال تعادل تحت تاثیر نیروی $P_1$ ، $P_2$ ، $P_3$ ، $P_4$ قرار گرفته باشد ؛ وقتی شکل را برش می زنیم خواهیم داشت :




برش را طوری می زنیم که محور z بر مقطع عمود باشد

P برآیند نیروهای داخلی در سطح مقطع می باشد که $P_1$ ، $P_2$ دارای برآیند صفر است

برای بیان مفهوم تنش روی سطح مقطع تقسیم بندی های انجام می دهیم . فرض کنیم مساحت سطح مقطع A و قسمت کوچک مورد نظر $\Delta A$ باشد ؛ در اینصورت می توان گفت به آن $\Delta P$ نیرو وارد می شود که اگر آن را بصورت بردار نرمال

$$\vec{\Delta P} = \vec{\Delta P_x}\,\hat{i} + \vec{\Delta P_y}\,\hat{j} + \vec{\Delta P_z}\,\hat{k}$$

خواهیم داشت:

(چون P بر سطح عمود است پس $\Delta P$ نیز بر مقطع این عمود می‌باشد). بنابراین $\Delta P_x$ بر سطح عمود و $\Delta P_y$، $\Delta P_z$ بر سطح مماس هستند. از تعریف تنش در نقطه را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$ (تنش نرمال و عمود بر سطح)

(Normal stress)

که به $\sigma_x$ تنش نرمال یا عمودی گوییم.

دو تنش دیگر نیز داریم که $\Delta P_y$ و $\Delta P_z$ بر سطح مماس عامل می‌باشند که با $\tau$ نمایش داده می‌شوند.

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$xy$ بیانگر سطحی است که در آن تنش وارد می‌شود یعنی سطحی که بر محور $x$ عمود است.

$x$ در $xy$ بیانگر سطح عمود تنش است و $y$ در $xy$ بیانگر جهت بردار است.

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

بهتر است از نوشتن اندیس‌های تنش دو یکسان خودداری کنیم.

* اولین اندیس $\tau$ تنش را به صفحه‌ای که روی آن عمل می‌کند مربوط می‌سازد و اندیس دوم نشان‌دهنده جهت آن می‌باشد.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

در سیستم استاندارد (SI) نیرو را N یا kN و سطح را $mm^2$ نمایش می‌دهند.
پس واحد تنش MPa یا $\frac{kN}{mm^2}$ است.

$$1Pa = N/m^2 \qquad 1MPa = 10\ kg/cm^2$$

در کشور قدیم و آمریکا برای نمایش واحدهای تنش Psi است که

$$Psi = lb/in^2 \rightarrow \begin{cases} in = 25.4\ mm \\ lb = 454\ gr \end{cases}$$

اگر برش را موازی محور zz بزنیم خروجی داریم:

$$\sigma_{yy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \quad \text{محور y عمود است}$$

$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

* تنش کمیتی تانسوری (Tonsor) است. یعنی برداری است که سطح داشته باشد. برای یعنی که علاوه بر مقدار و راستا، سطحی که برآن اعمال می‌شود نیز معلوم باشد.

Tensor از نظر واژگان کلمه ای برگرفته از لاتین است.

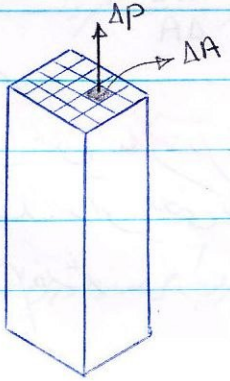
تانسور تنش را (فعلا) به صورت زیر می نویسیم:

تانسور تنش $\rightarrow$ دارای ۹ مولفه است $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

اگر تانسور تنش بصورت قطری باشد عملا تبدیل به یک اسکالر می شود (زیاد وارد این بحث نخواهیم شد!!)

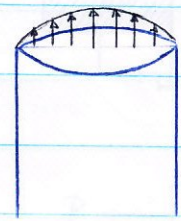
تعریف (Exact Define) تنش:



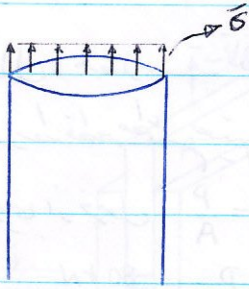

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

متوسط $\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$

در واقع وقتی P به سطح اعمال می‌شود، نیروها به صورت متقابل می‌باشند

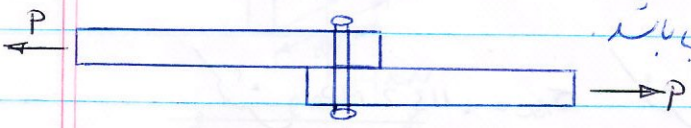


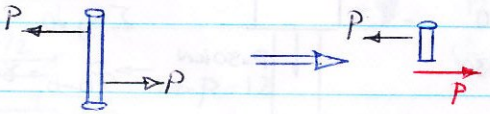
اگر بار وارده به صورت تابعی از مختصات سطح بیان شود می‌توان شدت تنش را به صورت متقابل نشان داد.




ولی در تنش متوسط نیروها به صورت متقابل فرض می‌شوند.
(هم‌گی هم اندازه‌اند)

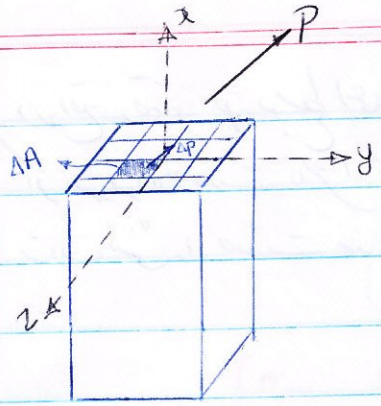
فرض کنیم عضو به صورت متقابل باشد.




$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{P}{A}$$

* اگر اندازه صفحه عضو از محل اعمال بار زیاد شود تنش یکنواخت می شود.




$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$

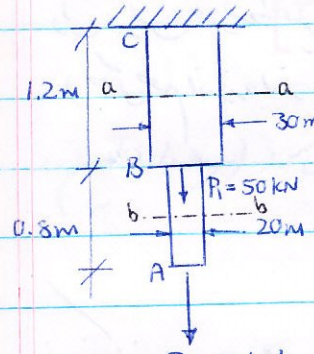
$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

مثال: معادلات تنش در یک نقطه.

حل: در یک نقطه معمولی هیچ توزیع تنش یکنواخت است.

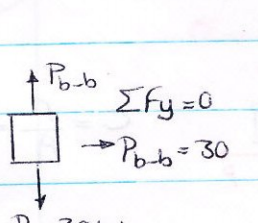
در اینجا از فرمول $\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$ استفاده می کنیم.

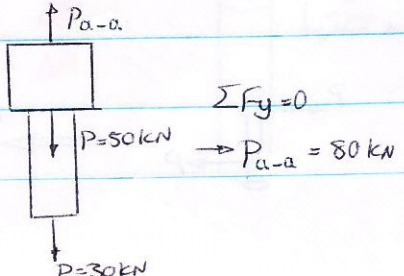


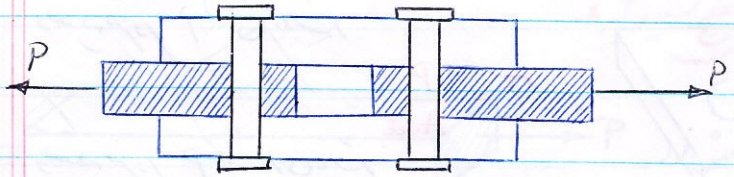

$$A_{a-a} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (30)^2}{4} \qquad P_{a-a} = 80\ kN$$

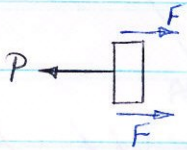
$$A_{b-b} = \frac{\pi (20)^2}{4} \qquad P_{b-b} = 30\ kN$$

$$\sigma_{AB} = +95.5\ MPa \text{ (فشاری)} \qquad \sigma_{BC} = +113.2\ MPa \text{ (کششی)}$$



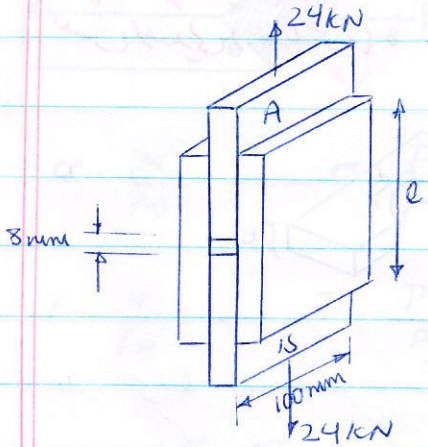



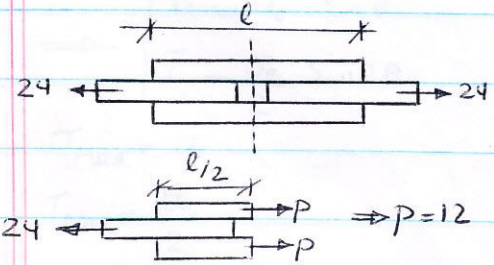



$2F = P \Rightarrow F = P/2 \Rightarrow \tau = \frac{P}{2A}$

مثال: اگر در اتصال زیر تنش برشی متوسط چسب مساوی 800 kpa باشد و فاصله دو قطعه A و B 8mm باشد، طول l چقدر باشد تا برای بار 24kN تنش برشی از 800kpa تجاوز نکند.



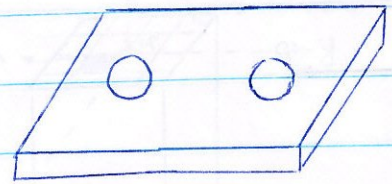




$\tau = \frac{12 \times 10^3}{(l/2 - 4)\,100} = 800 \times 10^{-3}$

$P = 12$

$\Rightarrow l = 308\ mm$

وقتی نیروی P کششی باشد



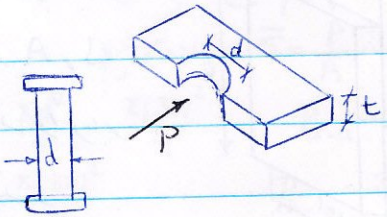
$$\sigma = \frac{P}{A_{net}}$$

وقتی نیروی P فشاری باشد

$$\sigma = \frac{P}{\text{کل } A}$$

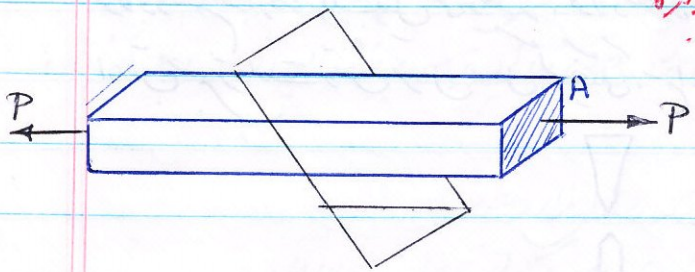
تنش لهیدگی (تنش فشاری) :

$$\sigma_b = \frac{P}{dt}$$

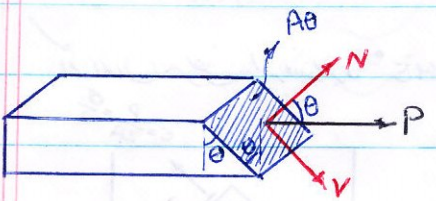


www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## تنش در روی سطح شیب‌دار




تنش اولیه $\sigma_0 = \frac{P}{A}$




$$\begin{cases} N = P\cos\theta \\ V = P\sin\theta \end{cases} \qquad A = A_\theta \cos\theta$$

$A =$

$$\sigma = \frac{N}{A_\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P\cos\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P\sin\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$$

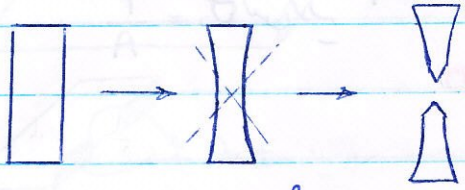
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_0 \cdot \cos^2\theta \\ \tau = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

$\sigma_{Max} = \sigma_0$

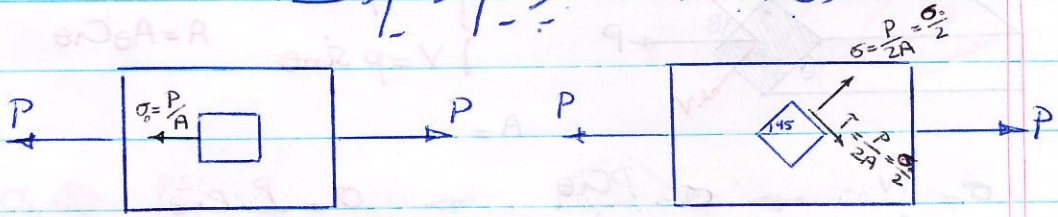
$\tau_{Max} = \frac{\sigma_0}{2}$

* اگر $\theta = 0$ باشد $\sigma$ ماکزیمم می‌شود.
* اگر $\theta = 45$ باشد $\tau$ ماکزیمم می‌شود.

فولاد و تنش سازه‌ای را تشکیل می‌دهند. فولاد معمولاً گسیختگی اش به صورت برشی است.
آلومینیوم جسم نرد است و تنش نرمال عامل گسیختگی آن است.



اگر المان مربعی را اندازه 45° بچرخانیم خواهیم دید:




بارهای ایستا: حداکثر باری که یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود. به عبارت دیگر باری که باعث گسیختگی را بارهای ایستا گویند.

تنش نهایی: حداکثر تنشی در یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود.

بارمجاز (بارطراحی) = Manufacturing

Transportation

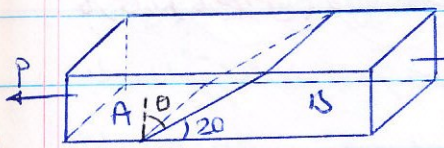
Instatation

Loading

Environment, Material

$$\text{ضریب اطمینان} = \frac{\text{بارنهایی}}{\text{بارمجاز}}$$

مثال: دو عضو محوری A و B دارای سطح مقطع یکنواخت $70 \times 110\ mm^2$ توسط چسب به هم متصل شده‌اند. اگر بدانیم تنش مجاز برشی برای چسب 500 kpa فرض شود حداکثر نیروی P که می‌توان به این عضو وارد نمود چقدر است؟

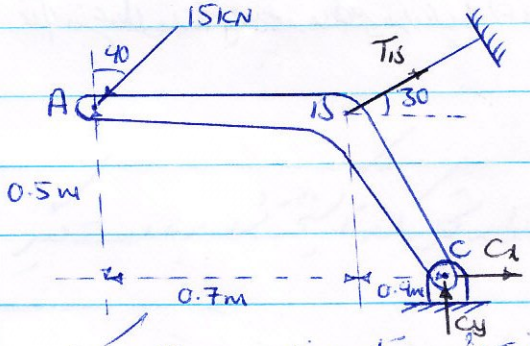


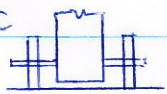

$\theta = 90 - 20 = 70$

$\tau = \frac{\sigma_0}{2} \sin 20 = 500 \times 10^{-3}\ (\tau \text{ MPa})$

$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{500 \times 10^{-3} \times 2 \times (70 \times 110)}{\sin(2 \times 70)} = 11979\ N = 12\ kN$

مثال: اگر محور نشان داده شده از فولاد باشد و فولاد دارای تنش برشی نهایی $\tau = 350\ MPa$ می‌باشد. این عدد برای پین فولادی نقطه C نیز صدق می‌کند. اگر ضریب اطمینان مورد نظر برابر مقدار 3.5 در نظر گرفته شود، قطر پین فولادی C را محاسبه کنید.




$\tau_{allowable} = \frac{350}{3.5} = 100\ MPa$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

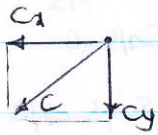
$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow T_{AB}(0.4 \sin 30 + 0.5 \cos 30) - 15(1.1 \times \cos 40) - 15(0.5 \sin 40) = 0 \Rightarrow T_{AB} = 27.58\ kN$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -15 \sin 40 + 27.58 \cos 30 + C_x = 0$

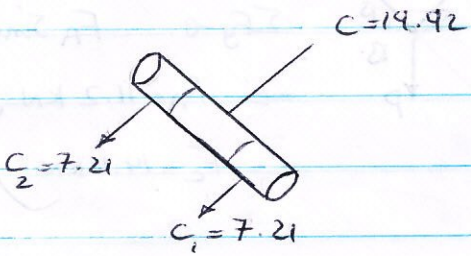
$\Rightarrow C_x = -14.24$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -15 \cos 40 + T_{AB} \sin 30 + C_y = 0$

$\Rightarrow C_y = -2.31\ kN$

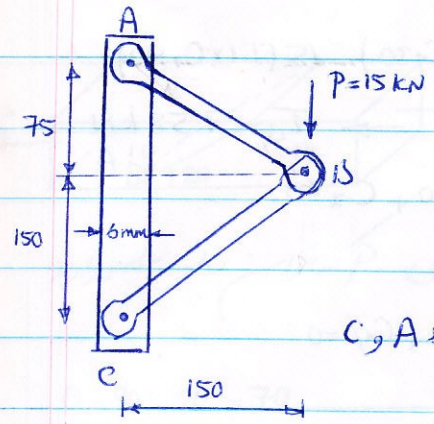



$C = 14.42\ kN$

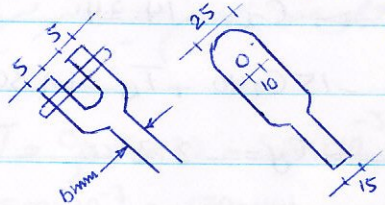



$\tau_{allowable} = \frac{C/2}{A} = \frac{14.42 \times 10^3}{2 \times \pi (d^2)/4} = 100 \Rightarrow d = 9.58\ mm$

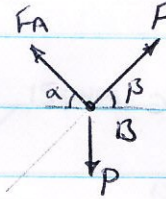
مثال: مطلوبست تعیین تنش‌های قائم در اعضای میله‌ای AB و ISC و تعیین تنش لهیدگی برای پین در C. (فرض کنید پین‌ها همگی به ضخامت 10mm فرض کنید)




C و A و B




$\alpha = 25.56$
$\beta = 45$




$\Sigma F_x = 0 \quad -F_A C_{1\alpha} + F_C C_{1\beta} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_A \sin\alpha + F_C \sin\beta = P$

$\Rightarrow F_A = 11.2\ kN$ (کششی)

$F_C = 14.1\ kN$ (فشاری)

محاسبه تنش‌های قائم:

میله $\sigma_{AB} = \frac{F_A}{A_A} = \frac{11.2 \times 10^3}{6 \times 15} = 124\ Mpa$ (کششی)

ورق‌های $\sigma_{AB} = \frac{F_A}{A_{net}} = \frac{11.2 \times 10^3}{2(25-10)5} = 74.7\ Mpa$ (کششی)

میله $\sigma_{ISC} = \frac{F_C}{A} = \frac{14.1 \times 10^3}{6 \times 15} = 156.67\ Mpa$ (فشاری)

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$\sigma_{sc} = \frac{F_c}{A} = \frac{14.1 \times 10^3}{2 \times 25 \times 5} = 56.4\ Mpa$ فشار

* چون فشاری است $A_{net}$ را خواهد

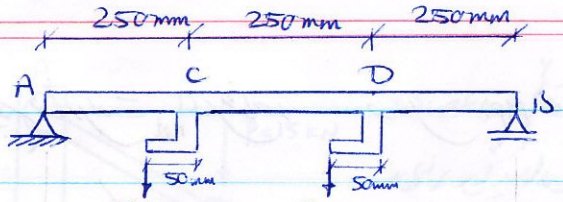
می‌توانیم کل سطح نیز بگیریم

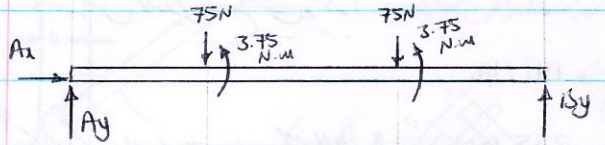
$\sigma_b = \frac{F_c}{A} = \frac{14.1 \times 10^3}{2 \times 10 \times 5} = 141\ Mpa$

$\sigma_b = \frac{F_c}{A_{net}} = \frac{14.1 \times 10^3}{10 \times 6} = 235\ Mpa$ می‌توانیم کل سطح نیز بگیریم و ضعف اصل ۵

$\tau = \frac{P}{2A} = \frac{14.1 \times 10^3}{2 \times \pi (10)^2/4} = 89.8\ Mpa$

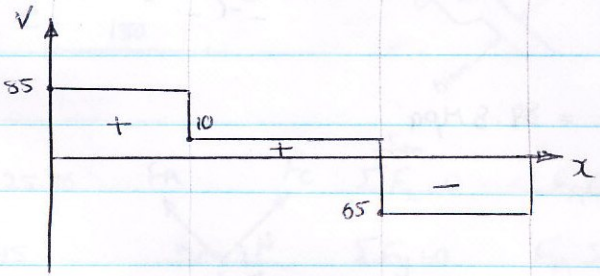
مثال: مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی



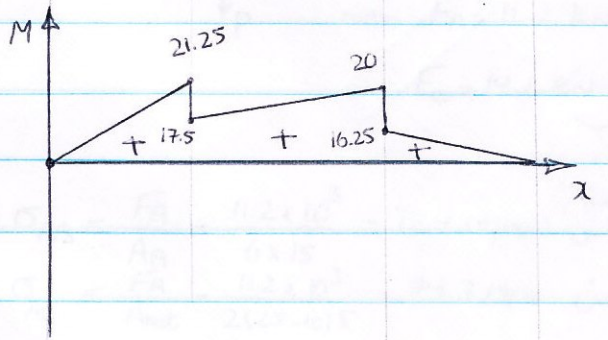




$\Sigma M_A = 0$ , $\Sigma F_y = 0$

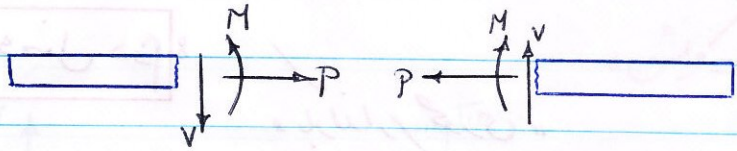
$B_y = 65N$ $\quad A_y = 55N$




$$\begin{cases} V_2 - V_1 = \int q\,dx \\ M_2 - M_1 = \int v\,dx \end{cases}$$



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




قرارداد:

سؤالات پیشنهادی Beer-Johnston:

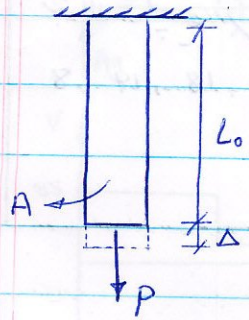
فصل 1: 8, 14, 18, 20, 24, 26, 36, 41, 49, 55

فصل 7: 19, 20, 30, 66

حمید کاظم

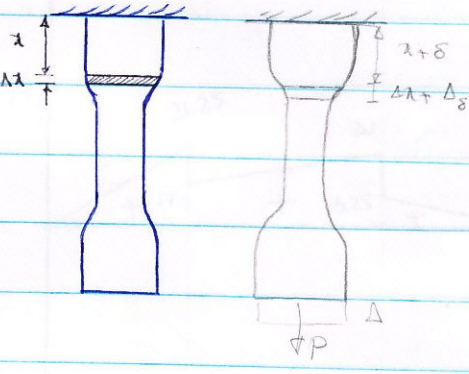
## فصل دوم:

### « بارگذاری محوری »




$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

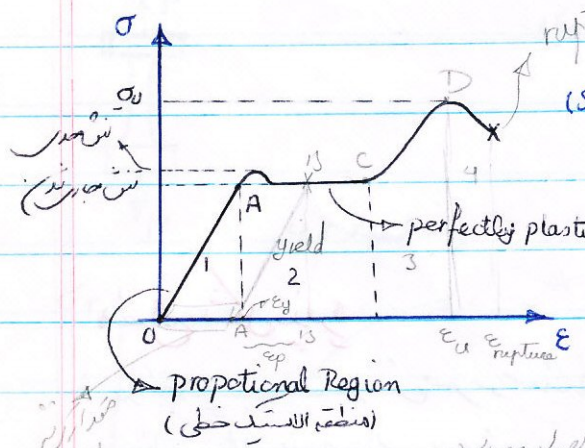
کرنش (Strain) است و بدون واحد است.



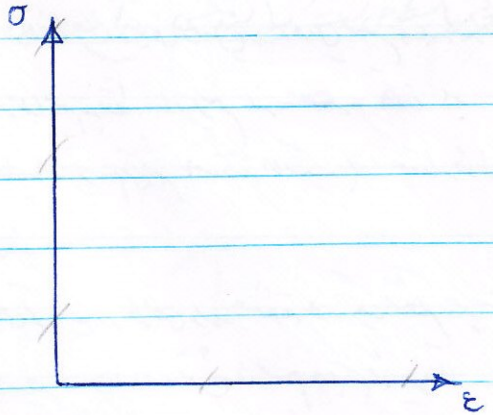

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

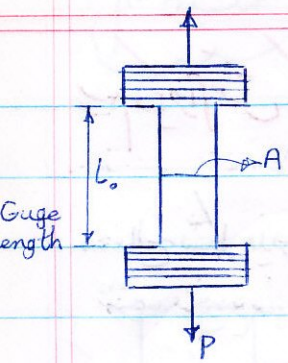
# رسم دیاگرام تنش - کرنش




مصالح شکل پذیر: فولاد ساختمانی (ST-37)




مصالح ترد:




## مصالح شکل پذیره

* در نقطه 1 یا حد تنش جزء خواص ماده و تغییر شکل خطی و الاستیک است 1 & Linear Elastic
* در نقطه yield مصالح دچار می‌شود و حتی با افزایش نیرو تغییر شکل کاملاً دائمی (پلاستیک) است 2 & yield

فولادهای ساختمانی دارای این ویژگی‌ها هستند.

اگر بخواهیم نقطه یا هر نقطه دلخواه از نقطه A مثلاً $\varepsilon_p$ باشد، از نقطه A خطی را موازی خط OA رسم می‌کنیم (منطقه الاستیک) حداکثر طول از ماده‌ای که می‌توان حداکثر کرنش پلاستیک را داشته باشد.

حال می‌خواهیم در طول مرحله پلاستیک تنش را چند برابر کنیم.

* در CD تنش را چند برابر کنیم 3 & strain hardening

منطقه کرنش سخت شونده. در هیچ کدام از نقاط داخل منطقه نمی‌شود.

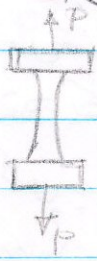
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

نسبت منفعه ۲ از منفعه ۱ بزرگتر است. نقطه D حداکثر بار را نشان میدهد که

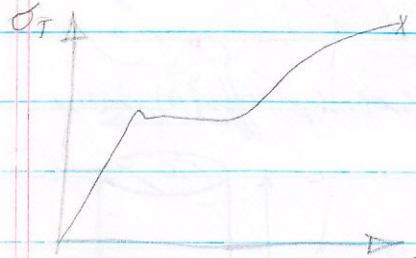
Ultimate stress ← تنش حداکثر

در نقطه D

نمونه شروع به گردنی شدن میکند




Ab necking

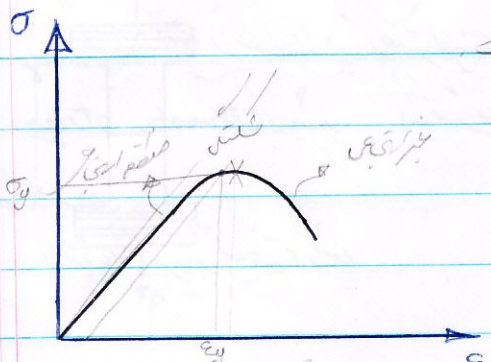



تنش واقعی: تنش حاصل از تقسیم نیرو بر سطح مقطع واقعی

$$\text{True stress } \sigma_T = \frac{P}{A_T}$$

تغییر شکل پلاستیک در بعضی مصالح برای توزیع یکنواخت تنش $\sigma_{Max}$ آخر دارد.

## مصالح ترد: مصالح هستند که رفتار تنش-کرنش آنها مجهول است.

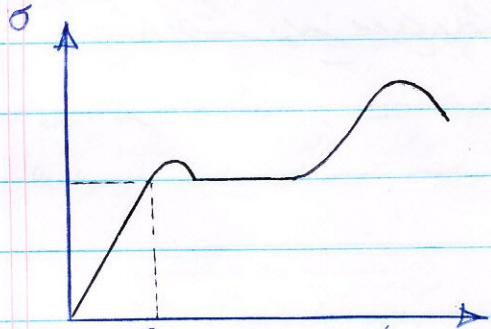



قبل تسلیم. $\varepsilon = 0.003$ تسلیم

سعی کنیم رفتار فولاد را مدل کنیم یعنی بتوانیم شکل منحنی را بیابیم. دقتی نقطه‌ای نداریم فقط y نداریم. فقط نقطه‌ای را مشخص کنیم.

برای همین منطقه‌ای که غیرارتجاعی از نقطه تسلیم مشخص می‌کنیم به اندازه 0.2٪ می‌آییم (offset می‌کنیم) و خط موازی با شیب اولیه رسم می‌کنیم. از نقطه تلاقی نقطه مشخص منطقه ارتجاعی نامیم

---




$\sigma = E\varepsilon$

این رابطه مربوط است به منطقه الاستیک

محلی. $\varepsilon$ برای تردد در جنس مصالح.

تعریف $\varepsilon$ و $\sigma$ مقدار تنشی در کرنش واحد را بوجود آورد. در یک مدول ارتجاعی یا مدول یانگ تعریف شد. ← مدول کشسانی دارد

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

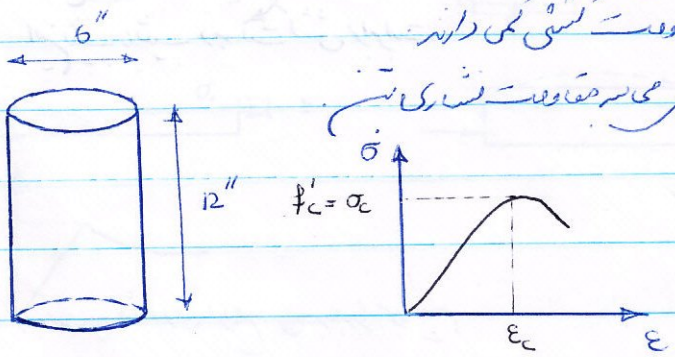
فولاد $E = 200\,Gpa = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$

بتن $E \cong 2\times10^{5}\ kg/cm^2$

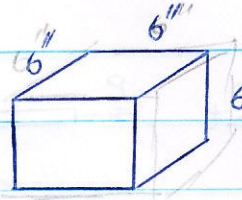
عمدهٔ مصالح در مقاومت کششی و فشاری تفاوتی ندارد. تنش مقاومت کششی آن برابر کمتر از فشاری است.

شیشه و سنگ هیچ مقاومت کششی ندارند.

استاندارد ACI برای محاسبه مقاومت فشاری بتن.



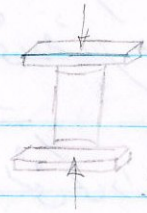

استاندارد انگلیس: در این حالت چون مقاومت فشاری بتن زیاد است آن را تقسیم بر 2 می‌کنند.

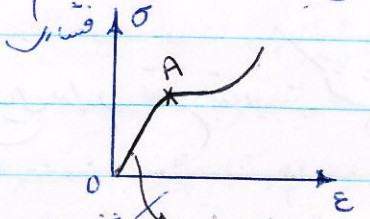


## تست فشار فولاد

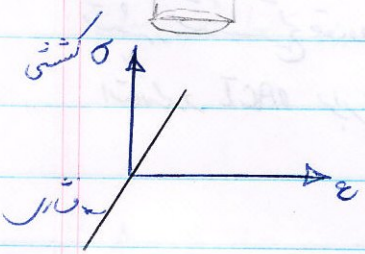
مقاومت فشاری و کششی اکثر مصالح شکل پذیر مانند فولاد در محدوده الاستیک خطی تقریبا برابر بوده و شیب منحنی ارتجاعی نیز با هم برابر است.

$E_{\text{کشش}} = E_{\text{فشار}}$

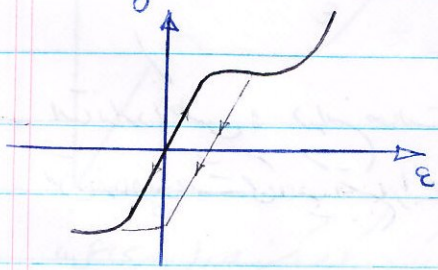


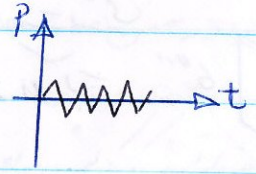



این شیب با شیب ناحیه کشش برابر است.



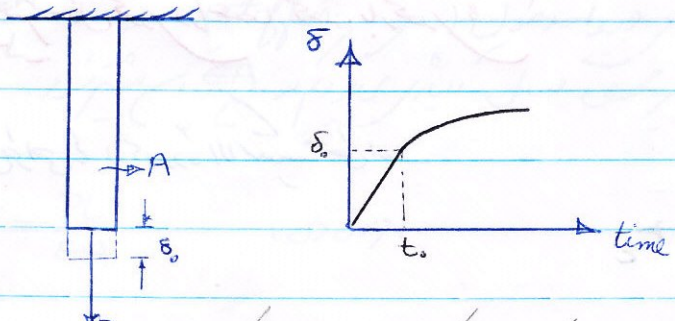

اگر به کشش فشاری کرم دهید برابرند



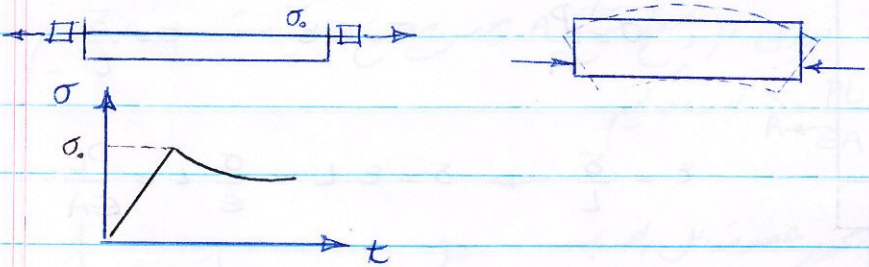



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## خزش

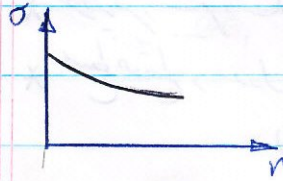



بعضی مصالح مثل بتن تحت بار ثابت با گذشت زمان تغییر شکل های بیشتری از خود نشان می دهند.

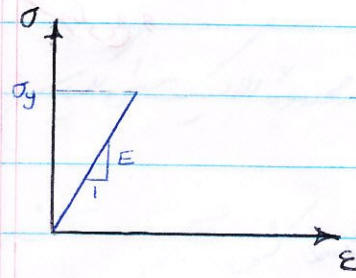



## خستگی

قطعاتی که تحت تنش های متناوب و تکرار شونده زمان خسته می شوند و در تنش کمتر از مقاومت

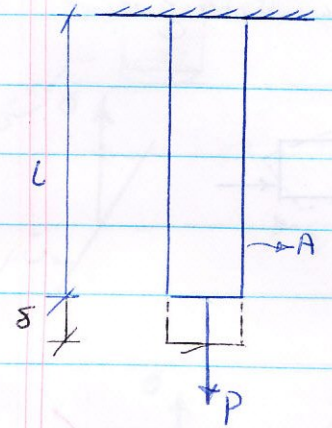


## تغییر شکل محوری در اعضا تحت بار محوری




کل رابطه ای در محدوده الاستیک خطی است.

عضو مقابل عضو با مقطع متغیر است.




$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon . L = \frac{\sigma}{E} . L = \frac{PL}{EA}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

* هرچه نیرو بیشتر باشد $\delta$ بیشتر است. هرچه طول عضو بیشتر شود $\delta$ بیشتر می‌شود.
* سطح مقطع و مدول الاستیک با $\delta$ رابطه عکس دارد.

۱) $\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow P = \frac{EA}{L}\delta$ (فرمول کمکی)

$\frac{EA}{L}$ ← (Stiffness) سختی محوری در واحد طول

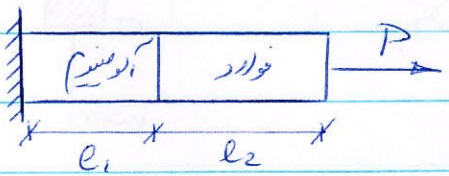
برای یافتن کوتاه شدن یا تغییر محوری عضو تحت کشش یا فشار در هر $\frac{EA}{L}$ ضرب می‌شود.

2) $\delta = \frac{PL}{EA}$ (فرمول بالا)

$\frac{L}{EA}$ ← (Compliance) نرمی محوری در واحد طول

نکته: در میله‌ای به طول $L$ با نیروی $P$ و سطح مقطع $A$ و جنس مصالح با مدول الاستیسیته $E$ می‌توانیم از فرمول $\delta = \frac{PL}{EA}$ استفاده کنیم.

مثال: تغییر طول محوری عضو مقابل را حساب کنید.

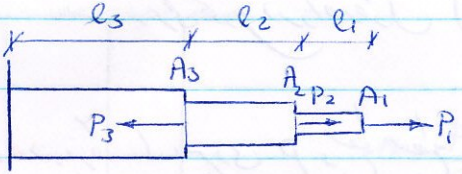



$$\delta = \frac{Pl_1}{AE_1} + \frac{Pl_2}{AE_2}$$

مثال: تغییر طول عضو مقابل را بدست آورید.

$$\delta = \int_0^l \frac{P(x)\,dx}{AE}$$

مثال: تغییر طول کل انتهای عضو را بدست آورید.




$$\delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i L_i}{E_i\, i}$$

← حرکه در مقاطع مختلف به طور یکسان تغییر کند از مقطع مانروی کمتری یا مقطع مصالح دانسته باشیم آنگاه:

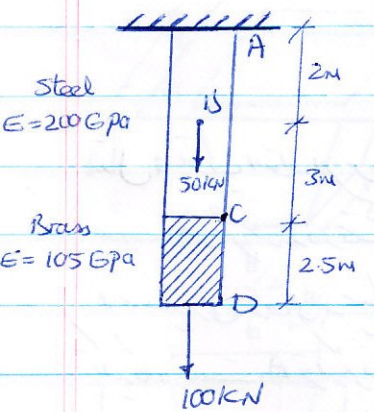
$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

هرگاه در مقطع های در طول عضو نیروی محوری مقطع متغیر باشد یا اینکه از چند قطعه با جنس مختلف تشکیل شده باشد توابع پیوسته تعریف نمی شوند به طوری که برای توابع نا پیوسته فرمول تغییرات طول الاستیک ذکر شده در طول عضو صادق نیست و فرمول تغییر شکل محوری از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\delta = \int_0^l \frac{P(x)\,dx}{E(x)\,A(x)}$$

مثال: قطر عضوی از کل میله ثابت و 36 mm است. اگر دو میله تحت بار مطابق شکل زیر باشد میزان تغییر شکل محوری در نقطه C و D را بیابید.




* هرگاه تغییرات بطور پیوسته صورت گیرد از انتگرال استفاده می کنیم ولی اگر به طور ناگهانی صورت پذیرد از ∑ استفاده می کنیم.

$\delta_{D/A}$ : تغییر شکل محوری D نسبت به A.

$$\delta_{D/A} = \delta_D - \delta_A^{0} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

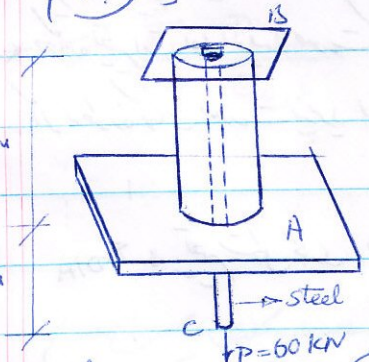
$$\delta_{C/A} = \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{100\times10^3\times3}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(0.036)^2} + \frac{150\times10^3\times2}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(0.036)^2} = 2.95\,mm$$

$$\delta_D = \delta_{D/C} + \delta_{C/A} = \delta_{D/C} + 2.95\,mm$$

$$= \frac{100\times10^3\times2.5}{105\times10^9\times\frac{\pi}{4}(36)^2\times10^{-6}} + 2.95\,mm = 2.34 + 2.95 = 5.29\,mm$$

مثال: تیوب استوانه‌ای برنزی تحت نیروی فشاری قرار دارد. تیوب مفتوح است. میله‌ای به جسم صلب جوش خورده و تحت نیروی P قرار می‌گیرد. استیلی توضیح بر سطح مقطع $1100\,mm^2$ برنزی تکیه‌گاه A قرار گرفته است. میله فولادی به قطر 15mm مطابق شکل از یک صفحه صلب که در بالای استوانه قرار گرفته است آویخته شده. اگر مدول الاستیسیته فولاد 200Gpa و آلومینیوم 70Gpa باشد، مطلوبست تغییر شکل نقطه C اگر بار 60 KNP وصل شود.

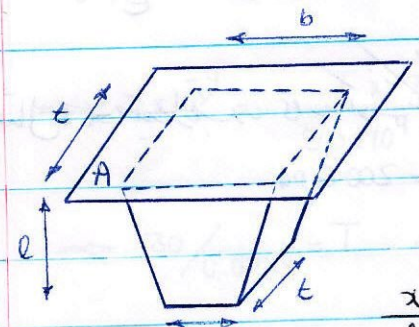


$$\delta_c = \overset{\text{میله}}{\delta_{c/s}} + |\overset{\text{تیوب}}{\delta_{s/A}}|$$

$$= \frac{60\times10^3\times 2.1}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(15)^2\times10^{-6}} + \frac{60\times10^3\times 1.2}{70\times10^9\times 1100\times10^{-6}} =$$

$$= 3.56\,mm + 0.935\,mm = 4.495\,mm$$

مثال: صفحه نوزنقه‌ای شکل با ضخامت ثابت t از بار A معلق می‌باشد. وزن مخصوص ماده $\gamma$ ($\frac{kg}{m^3}$) و حجم $V$ ($m^3$) می‌باشد. مطلوبست تغییر شکل صفحه توسط وزن آن.



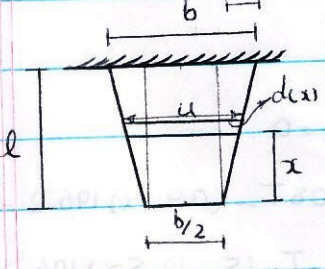

$$\frac{x}{l} = \frac{d(x)}{b/4} \Rightarrow d(x) = \frac{bx}{4l}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{b}{2} + 2d(x) = \frac{b}{2}(1 + x/l)$$

$$A(x) = u(x)\,t = \frac{bt}{2}(1 + x/l)$$

$$p(x) = m(x)\,g = \rho V(x)\,g = \rho g t\left(\frac{b/2 + u(x)}{2}\right)x$$

$$= \rho g t x\left(\frac{b/2\,(2 + x/l)}{2}\right)$$




$$\delta = \int_0^l \frac{p(x)\,dx}{E\,A(x)} = \int_0^l \rho g t x\left(\frac{b(2 + x/l)}{4}\right)\frac{dx}{E\,\frac{bt}{2}(1 + \frac{x}{l})} = \int_0^l$$

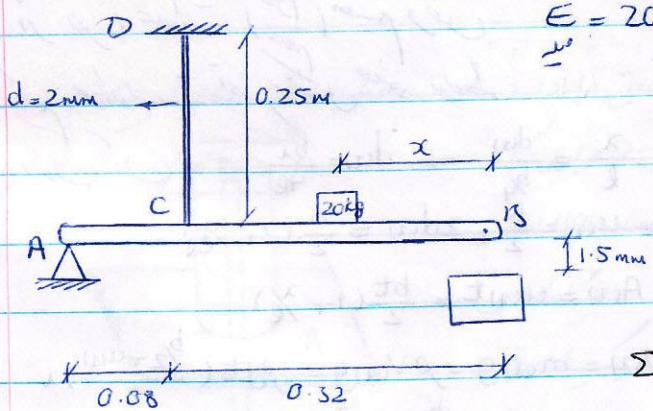
$$= \frac{\rho g}{2E}\int_0^{\ell} x\left(\frac{2+x/\ell}{1+x/\ell}\right)dx \qquad 1+x/\ell = v \Rightarrow dx = \ell\,dv$$

$$= \frac{\rho g}{2E}\int_1^2 \ell(v-1)\frac{v+1}{v}\ell\,dv = \frac{\rho g}{2E}\ell^2\int_1^2 \frac{v^2-1}{v}dv = \frac{\rho g}{2E}\ell^2\int_1^2 (v-\frac{1}{v})dv$$

$$= \frac{\rho g \ell^2}{2E}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \ln v\right)\Big]_1^2 = \frac{\rho g \ell^2}{2E}\left(\tfrac{3}{2} - \ln 2\right) = 0.403\,\frac{\rho g \ell^2}{E}$$

مثال: $x$ چقدر باشد تا در تکیه‌گاه نیرو نداشته باشیم

$E = 200\,GPa$



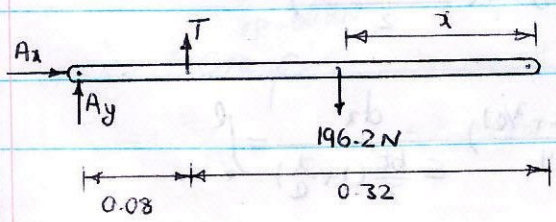




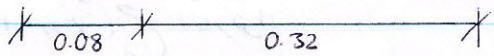
$\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow 0.08T - (0.4-x)196.2 = 0$

$\Rightarrow T = (5 - 12.5x)196.2$



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




$$\frac{1.5\times10^{-3}}{0.4} = \frac{\delta_c}{0.08} \Rightarrow \delta_c = 0.3\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow 3\times10^{-4} = \frac{T\times 25\times10^{-2}}{200\times10^{9}\times\frac{\pi}{4}(4)\times10^{-6}} \Rightarrow 3\times10^{-4} = T(0.0398)\times10^{-5}$$

$$\Rightarrow 30/0.0398 = T \Rightarrow T = 753.77\ N$$

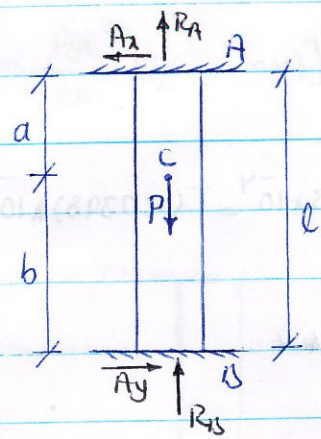
$$\rightarrow (5-12.5x)\,196.2 = 753.77 \Rightarrow x = 0.092\,m$$

# تحلیل سازه های نامعین استاتیکی بروش نیروها

۱) روش جمع آثار قوا  ۲) روش سازگاری تغییر شکل ها

روش

عکس العمل های تکیه گاهی در A و B را بدست آورید.

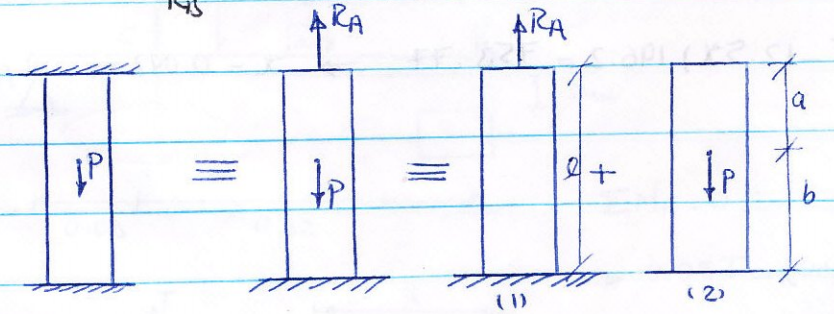



$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow A_x a + A_y b = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = A_y$$

$$\Rightarrow A_x(a+b) = 0 \Rightarrow A_x = A_y = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$




$$\delta_A = \underset{(1)}{\delta_A^{R_A}} + \underset{(2)}{\delta_A^{P}} = 0$$

← رابطه سازگاری تغییر شکل

$\Sigma_0$

$$\begin{cases} \delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \\ R_A + R_B = P \end{cases}$$

$$\delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \Longrightarrow \frac{R_A L}{E \cdot A} - \frac{P \cdot b}{EA} = 0$$

$$\Longrightarrow R_A = \frac{P \cdot b}{L}$$

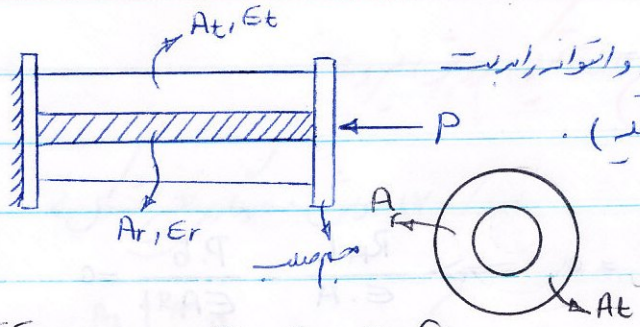
$$R_A + R_B = P \Longrightarrow \frac{P \cdot b}{L} + R_B = P \Longrightarrow R_B = P - \frac{P \cdot b}{L} = \frac{P \cdot a}{L}$$

$$\Longrightarrow R_A = \frac{P \cdot b}{L} \qquad R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

پس برای حل نامعین از روش جمع آثار قوا و روش سازی تغییر شکل استفاده کنیم.

اصل سوپرپوزیسیون (Super-position principal):

اصل سوپرپوزیسیون (اصل جمع آثار) می گوید: تنش ها و تغییر شکل های ناشی از یک مجموعه نیرو بر روی یک سیستم برابر است با جمع جبری تنش ها و تغییر شکل ها.



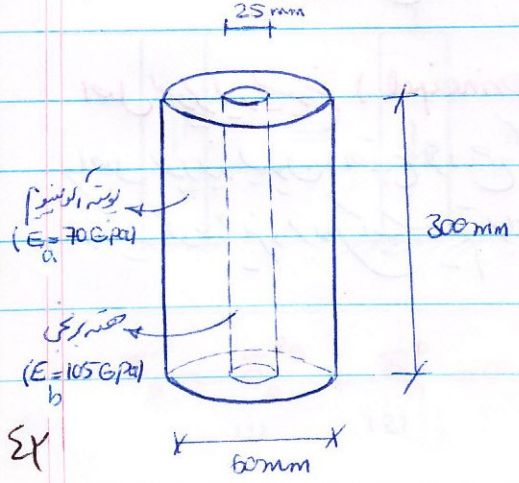

مثال: تنش های موجود در میله و استوانه را بدست آورید (تنش های پوسته و میله).
یک درجه نامعینی وجود دارد.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_t + P_r = P \quad (1)$$

$\delta_t = \delta_r$ فقط در سازه‌ای تغییر شکل ها برابرست حل است.

$$\Rightarrow \frac{P_t \cdot L}{E_t \cdot A_t} = \frac{P_r \cdot L}{E_r \cdot A_r} \Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_r \cdot A_r} P_r$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_t A_t + A_r E_r} P \quad , \quad P_r = \frac{E_r A_r}{E_t A_t + A_r E_r} P$$




مثال: اگر طول کل مجموعه به اندازه 0.6mm کوتاه گردد، این کوتاه شدگی توسط نیروی محوری بوجود آمده. مطلوبست نیروی وارده به این مجموعه و تنش بوجود آمده در هسته برنجی.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$P = P_a + P_b$$

$$\delta_a = \delta_b = -0.4\ mm = \delta$$

$$P = \left(\frac{E_a A_a + E_b A_b}{L}\right)\delta$$

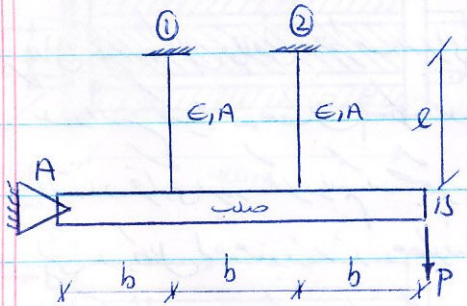
$$A_a = \frac{\pi}{4}(60^2 - 25^2) = 2336.6\ mm^2$$

$$L = 300\ mm$$

$$A_b = \frac{\pi}{4}(25)^2 = 490.9\ mm^2$$

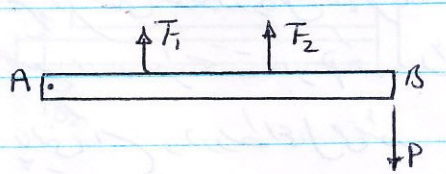
$$\Rightarrow P = -287\ kN$$

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{\frac{E_b \cdot A_b \cdot \delta}{L}}{A_b} = \frac{105 \times 10^3 \times (-0.04)}{300} = 0.14\ Gpa$$




مثال: از عضو اغتشاش AB را صلب فرض کنید تنش‌های بوجود آمده در کابل‌های ① و ② چقدر است

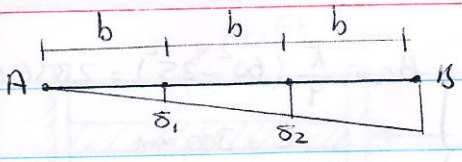
چون عضو صلب است پس تغییر شکل ندارد.




$$\overset{+}{\leftarrow} \quad \sum M_A = 0 \rightarrow$$

$$F_1 \times b + F_2(2b) - P(3b) = 0$$

$$\rightarrow F_1 + 2F_2 = 3P \quad (I)$$

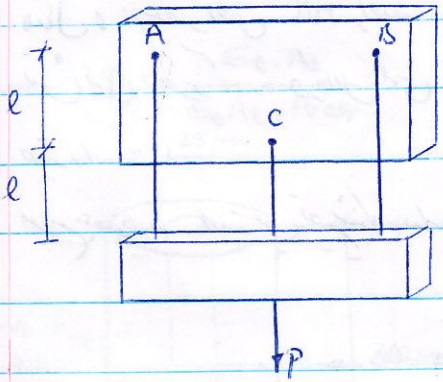



$$\delta_1 = \frac{1}{2}\delta_2$$

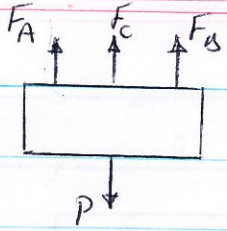
$$\Rightarrow \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_2 L}{2EA} \rightarrow F_2 = 2F_1 \quad (II)$$

$$I, II \Rightarrow 5F_1 = 3P \Rightarrow F_1 = \frac{3}{5}P \;,\; F_2 = \frac{6P}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{3P}{5A} \qquad \sigma_2 = \frac{6P}{5A}$$




مثال ۸ سه کابل فولادی با مقطع به برای نگه داشتن یک صفحه صلب شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر بدانیم که چگونه نیرو در کابل‌ها موجود شده، مقاومت نیروهای کششی موجود در کابل‌ها و هر گاه صفحه مورد نظر تحت بار P که به وسط آن وارد می‌شود.



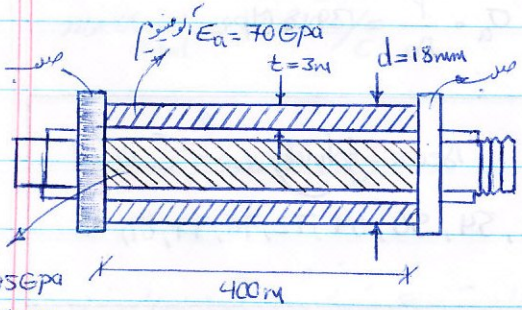

$$F_A + F_B + F_C = P \quad (\Sigma F_y = 0)$$

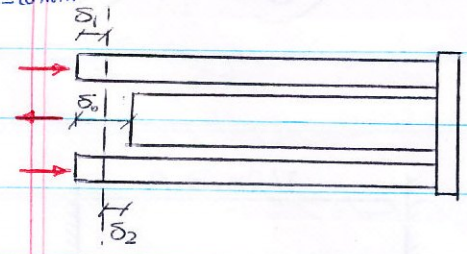
$$F_A = F_B \quad (\Sigma M = 0)$$

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C \Rightarrow \frac{F_A(2L)}{EA} = \frac{F_C \cdot L}{EA} \Rightarrow F_C = 2F_A = 2F_B$$

$$F_A + F_A + 2F_A = P \Rightarrow F_A = P/4 \;,\; F_B = P/4 \;,\; F_C = P/2$$

مثال 6: ارتفاع هر کدام از دو پله 2mm باشد و با استفاده از $\frac{1}{4}$ تعدیل را جبران نمایید. مصولات تنش نرمال ایجاد شده در bolt فولادی و لوله آلومینیومی. فرض کنید هم صلب هستند.




$$\delta_0 = \frac{1}{4}(2mm) = 0.5mm$$

$\delta_1$ ← فشرده شدن آلومینیوم (لوله)

$\delta_2$ ← کشیده شدن bolt فولادی

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_0 = 0.5mm$$

رابطه سازگاری تغییر شکل

$$P_a = P_b = P$$

$$\delta_1 = \frac{P_a \cdot L}{A_a E_a} = \frac{P_a \cdot L}{70\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(18^2 - 12^2)}$$

$$\Rightarrow P_a = P_b = 5.621\,kN$$

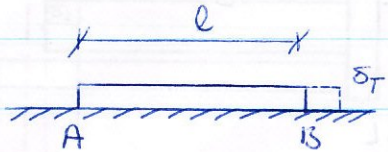
$$\delta_2 = \frac{P_b L}{A_b E_b} = \frac{P_b \cdot L}{105\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(10)^2}$$

$$\sigma_b = \frac{P}{A_b} = 71.6\,Mpa \qquad \sigma_a = \frac{P}{A_a} = 39.8\,Mpa$$

سوالات پیشنهادی Beer-Johnston

فصل ۲: 13, 14, 26, 30, 43, 52, 54, 56, 64, 72, 76, 77, 84, 88, 96, 102, 112, 118

## مسائل مربوط به بارگذاری حرارتی (انقباض)




$\alpha$ ضریب انبساط خطی

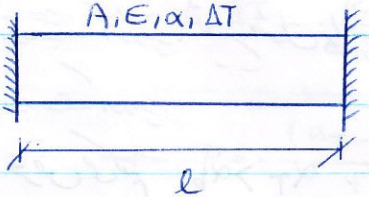
$\Delta T$ اختلاف دما

$$\delta_T = \alpha . L . \Delta T \quad \rightarrow \quad \delta_T = \int_0^L \alpha . T_{(x)} . dx$$

$\alpha_{Steel}$ فولاد $= 12 \times 10^{-6} \, 1/^{\circ}C$

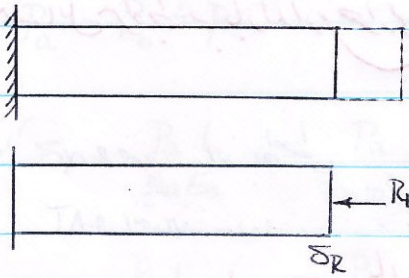
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha . \Delta T$$

✕ در مسائل نامعین استاتیکی افزایش یا کاهش حرارت باعث تنش می‌شود نیروهایی در مقاومت مصالح بررسی می‌شود.




مثال: عضو مثال دارای مشخصات مشخص می‌باشد. تعیین کنید تنش نرمال ایجاد شده در اثر افزایش $\Delta T$ دما.

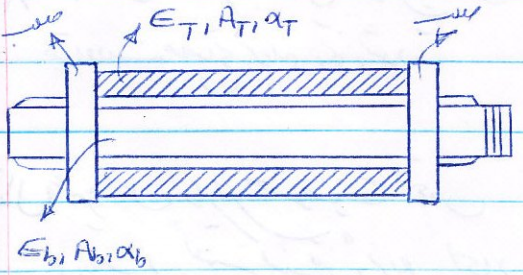
سازه تک درجه نامعین است.




$\delta_T = \delta_R \Rightarrow \alpha . L . \Delta T = \frac{R_B . L}{AE} \Rightarrow R_B = \alpha \Delta T AE$ رابطه بار تغییر شکل

$\Rightarrow \sigma_B = E \alpha \Delta T$

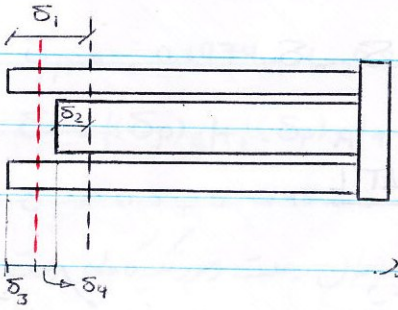
$\sigma = E . \varepsilon_T = E \alpha . \Delta T$ ← رابطه هوک




مثال: تنشی ایجاد شده در Bolt دو سر ثابت بر اثر اعمال حرارت $\Delta T$ را بدست آورید. تغییر طول را نیز بدست آورید.

فرض می‌کنیم $\alpha_T > \alpha_b$ * اگر $\alpha_T = \alpha_b$ باشد تنشی ایجاد نمی‌شود.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




هم صلب بست تحت را برای داریم.
موقعیت نهایی صفحه صلب در راستای
محاصین قرارات.
در این حالت نوشته فشرده می شود و Bolt کشیده می شود.

با استفاده از تغییر شکل $\delta_1 - \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ ①
(Bolt) نوشته

$$\begin{cases} \delta_1 = \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T \\ \delta_2 = \alpha_b \cdot L \Delta T \end{cases}$$

② $P_b = P_t = P$

برای $\delta_3$ ، $\delta_4$ ، تغیر طول را بعلت کوچک بودن در نظر نمی گیریم و طول را همان $l$ در نظر می گیریم. (یا $l + \delta_2$)

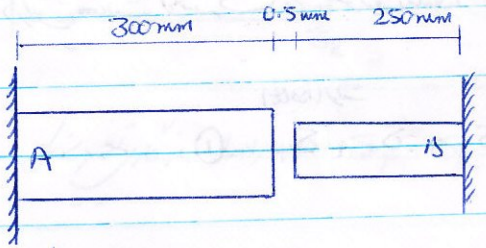
$$\delta_3 = \frac{P \cdot L}{E_T \cdot A_T} \qquad \delta_4 = \frac{P \cdot L}{E_b \cdot A_b}$$

$$①, ② \Rightarrow \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T - \frac{P \cdot L}{E_T A_T} = \alpha_b L \Delta T + \frac{PL}{E_b A_b}$$

$$\Rightarrow P = \frac{(\alpha_T - \alpha_b) \cdot \Delta T}{\frac{1}{E_T A_T} + \frac{1}{E_b A_b}}$$

تغییر شکل نهایی $\delta = \delta_1 - \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$

$$\Rightarrow \delta = \frac{(\alpha_T E_T A_T + \alpha_b E_b A_b)\,\Delta T \cdot L}{E_T A_T + E_b A_b}$$




مثال: اگر در مثال قبل در اثر دمای اولیه برابر $20^\circ C$ باشد، حساب کنید در چه دمایی تنش نرمال در عضو فولادی به قرار $\sigma = -150\,MPa$ خواهد رسید؟

آلومینیوم A: $A = 2000\,mm^2$, $E = 70\,GPa$, $\alpha = 23 \times 10^{-6}/C^\circ$

فولاد B: $A = 800\,mm^2$, $E = 190\,GPa$, $\alpha = 18 \times 10^{-6}/C^\circ$

برای محاسبه دقیق عضو فولادی را حساب کنید.

$P = \sigma A_B = -150(800) = -120\,KN$

$$(\delta_P)_B = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 250}{190 \times 10^3 \times 800} = -0.1974\,mm$$

$$(\delta_P)_A = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 300}{70 \times 10^3 \times 2000} = -0.2571\,mm$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$\delta_p = -0.1974 + (-0.2571) = -0.4545$ mm

$\delta_T = |(\delta_p)_{is}| + |(\delta_p)_A| + 0.5mm = |\delta_p| + 0.5mm$

$\delta_T = 0.5 + 0.4545 = 0.9545$ mm

تا 0.5mm کاملاً تغییر طول دیده می‌شود. از این جا به بعد تغییر طول به علت وجود تکیه‌گاه‌های راست، جهت خودش را به شکل تنش و تولید نیروشان می‌دهد.

$\delta_T = \sum \alpha_T . L . \Delta T = 18\times10^{-6} \times 250 \times \Delta T + 23\times10^{-6} \times 300 \times \Delta T = 0.9545$

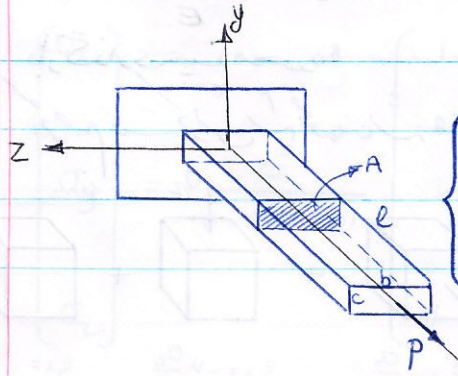
$\Rightarrow \Delta T = 83.7^\circ$

$\rightarrow T = 20 + 83.7 = 103.7^\circ$

مقدار طول واقعی فولاد $= 250 + 18\times10^{-6}(250\times83.7) - 0.1974 = 250.179$ m

---

ضریب پواسون




$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{P}{A} \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$

$\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} = \dfrac{P}{EA}$

اگر عضوی تحت کشش قرار گیرد اعداد جانبی آن کوچک می شوند (b, c)
ثابت می شود برای اصطلاح ایزوتروپ $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ است.
وقتی تنش (اعمال شود) در راستای محور x ها باشد:

$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|$$

$$\rightarrow \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

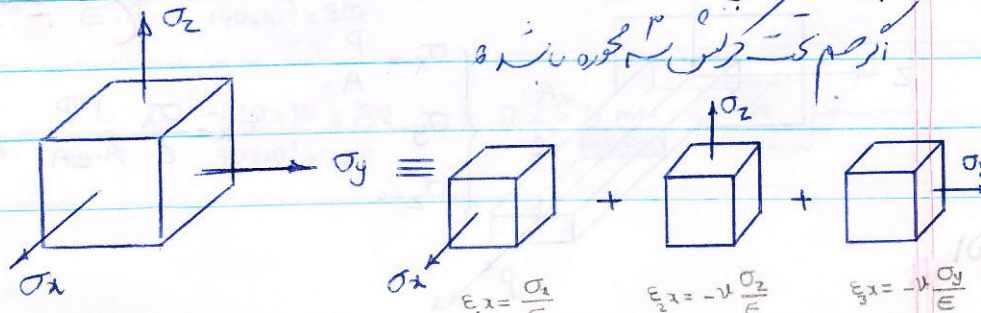
$\varepsilon_z$ ، $\varepsilon_y$ و $\varepsilon_x$ مختلف العلامه هستند.

$\nu$ فولاد $= 0.29 - 0.31$ $\nu$ سن $= 0.2 - 0.25$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

بارگذاری چند محوره:
اگر جسم تحت تنش سه محوره باشد:

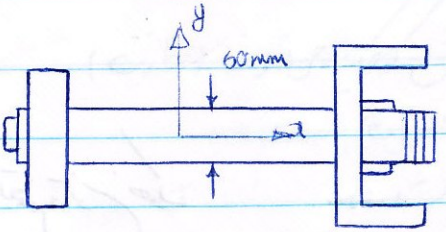



۵۲

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \nu\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases} \rightarrow$$ تعمیم قانون هوک

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$




مثال ۶: از دیاگرام کلمپ زیر که توسط یک Bolt با قطر 60.13μm محکم شده و نیروی کششی ایجاد شده در Bolt را محاسبه کنید.

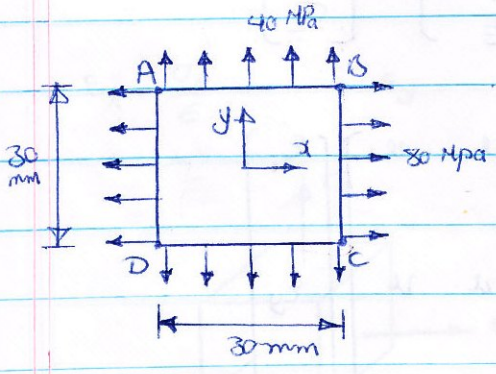
$E = 200\,GPa$ , $\nu = 0.29$

$$\varepsilon_y = \frac{-0.13 \times 10^{-3}}{60} = -2.167 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{216.7 \times 10^{-8}}{0.29} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{A \cdot E}$$

$$\Rightarrow P = 74.724 \times 10^{-8} \times 200 \times 10^{9} \times 2.826 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow P = 4.22\,kN$$




مثال ۶: صفحه مقابل تحت تنش دیگرده قرار دارد. مطلوب تغییر در اندازه ضلع AB , BC , قطر AC

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0.3$

$$\delta_x = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} \qquad \delta_y = \varepsilon_y \cdot \overline{BC}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{200\times10^3}(80 - 0.3\times 40) = 390\times10^{-6}$$

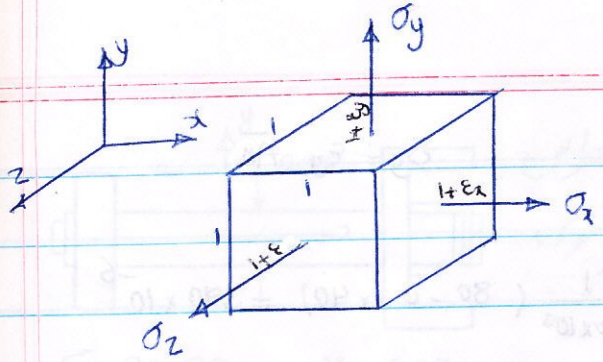
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{200\times10^3}(40 - 0.3\times 80) = 80\times10^{-6}$$

$$\begin{cases} \delta_{AB} = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} = 340\times10^{-6}\times 30 = +10.2\,\mu m \\ \delta_{BC} = \varepsilon_y \cdot \overline{BC} = 80\times10^{-6}\times 30 = 2.4\,\mu m \end{cases}$$

$$AC^2 = (\overline{AB} + \delta_{AB})^2 + (\overline{BC} + \delta_{BC})^2$$

$$\Rightarrow \delta_{AC} = 8.9\,\mu m$$

| | $\sigma_x$ ↙ | $\sigma_z$ ↑ | $\sigma_y$ → |
|---|---|---|---|
| $\varepsilon_x$ | $\frac{\sigma_x}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_z}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_y}{E}$ |
| $\varepsilon_y$ | $-\nu\frac{\sigma_x}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_z}{E}$ | $\frac{\sigma_y}{E}$ |
| $\varepsilon_z$ | $-\nu\frac{\sigma_x}{E}$ | $\frac{\sigma_z}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_y}{E}$ |




## کرنش حجمی

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \xrightarrow{L=1} \varepsilon = \delta$$

$$V_0 = 1 \times 1 \times 1$$

$$V = (1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z) =$$

$$\Rightarrow V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$$

$$\Rightarrow V \simeq 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$V_0 = abc \rightarrow \frac{V_0}{abc} = 1 \times 1 \times 1$

$V = (a+\delta_a)(b+\delta_b)(c+\delta_c) =$
$abc(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c)$

$e = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c$

## کرنش حجمی

$$e = \frac{V - V_0}{V_0}$$

کرنش حجمی در راستای محورهای مختصات برابر است با

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

می‌توان کرنش حجمی را بر حسب تنش نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$e = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{E}$$

$$\Rightarrow e = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{E}$$

حالت خاص: جرم تحت فشار هیدرواستاتیک (آب) قرار گیرد:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\Rightarrow e = \frac{-3(1-2\nu)p}{E}$$

ضریب $p$ را با $k$ نشان می‌دهند که به $k$ مدول بالک گویند.

مدول بالک ضریبی است که در استحکام حجمی جسم در مقابل فشارهای هیدرواستاتیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. این فرمول در علم مکانیک خاک مورد استفاده زیادی دارد.

$$e = \frac{-p}{k} \Rightarrow k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

با توجه به اینکه در انواع کرنش حجمی کشسانی، همیشه ثابت این کرنش باید مثبت باشد داریم:

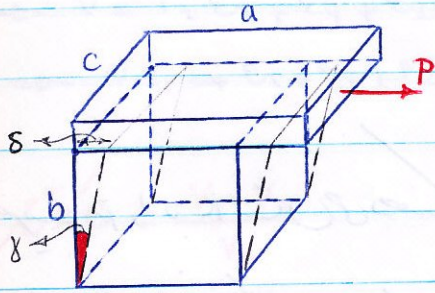
$$e<0 \rightarrow k>0 \Rightarrow 1-2\nu>0$$

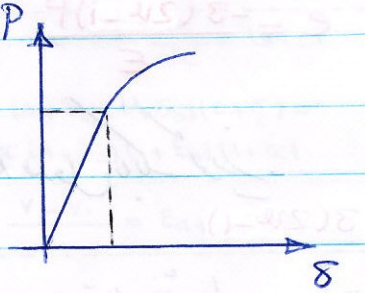
$$\Rightarrow 0<\nu<1/2 \Rightarrow \nu_{Max}=1/2$$

* بازه تغییرات $\nu$ همیشه $0<\nu<1/2$ است.

---

کرنش برشی $\delta$




$$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{\delta}{b}\right)$$

چون $\delta$ بسیار کوچک است پس:

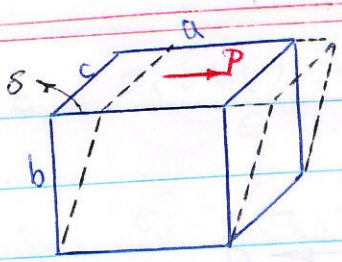
$$\gamma = \frac{\delta}{b}$$

$\delta$ یا کرنش برشی کمیتی بی‌واحد است. تنها کرنشی است که در خمش رابطه‌ای ندارد.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

G ✱ را مدول $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ صلبیت یا مدول برشی ماده نامند.

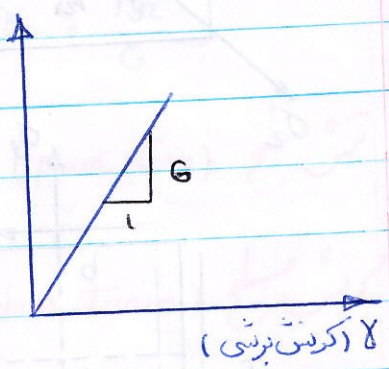
$\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E$




جسم مکعب مستطیل

δ را تغییر شکل برشی یا جابجایی برشی نامند.

$\tau$ تنش برشی $= \frac{P}{a \cdot c}$




G مدول ارتجاعی برشی

رابطه بین تنش برشی و کرنش برشی $\tau = G\gamma$

G: تنش برشی برای کرنش برشی واحد.

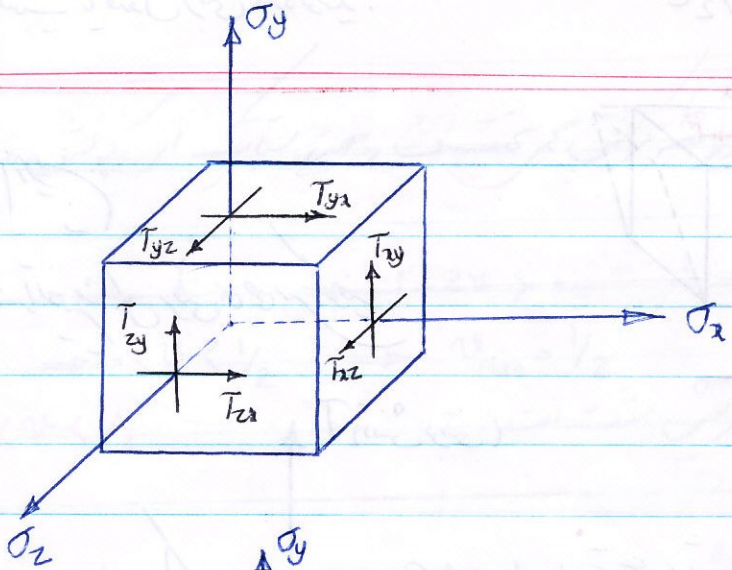
← مدول ارتجاعی در برشی یا مدول صلبیت

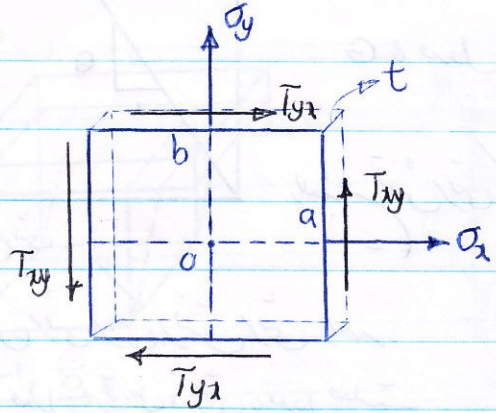
$G = \frac{\tau}{\gamma}$ $(\tau = G\gamma)$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

نکته ۱: از نظر شیمیایی فولاد $T_{(1)} > \gamma$ هر سه از مصالح بسیار شبیه بتنی $\sigma_{(2)} > E$ است ولی مقادیر فولاد (۱) از بتن (۲) کمتر است.

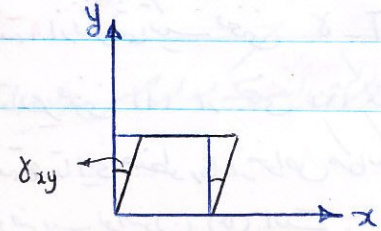
نکته ۲: تا اینجا ۵ نوع از خواص مکانیکی مصالح، مدول الاستیسیته (E)، مدول ارتجاعی (G) و ضریب پواسون ($\nu$) است.

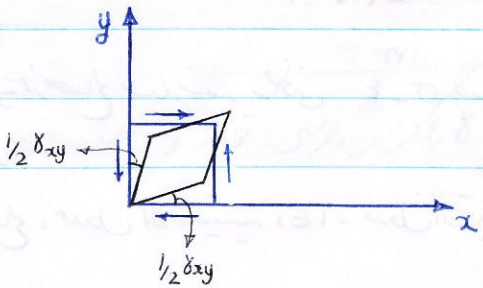



$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \tau_{yx}(b.t)\,a = \tau_{xy}(a.t)\,b$$

$$\Rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}$$




4/o

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

معادله‌های تعمیم‌یافته هوک:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

تنش مسطح (plane stress):

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

کرنش مسطح (plane strain):

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

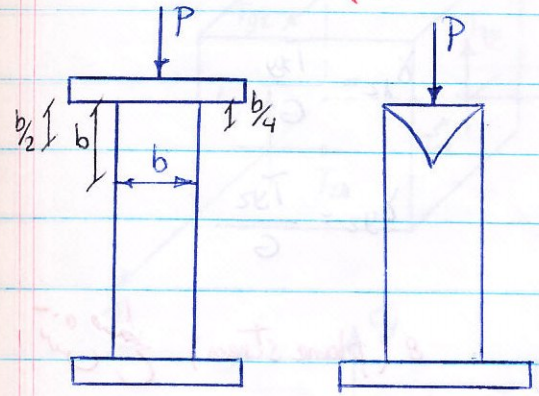
هر کرنش مسطح، تنش مسطح است و برعکس.

نکته: بررسی فرمول‌های بالا ما را راهنمایی می‌کند که اگر می‌خواهیم تغییرات در وجود آمده توسط ترکیبی دلخواه از تنش‌ها در یک ماده‌ی همسان پیش‌بینی کنیم، نخست باید سه ثابت متمایز $E$، $\nu$ و $G$ را به‌طور تجربی با آزمایش تعیین کنیم. (در عمل فقط تعیین دو تا از سه ثابت برای هر ماده‌ای لازم است، زیرا)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

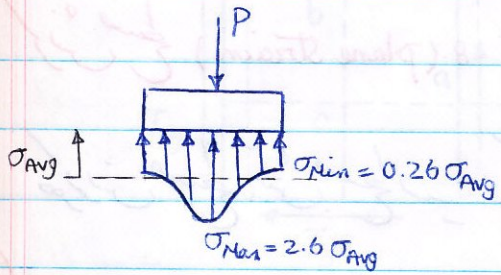
## تمرکز تنش

الف) اثر هوصحرسن ـ رسان در محل تماس با جسم

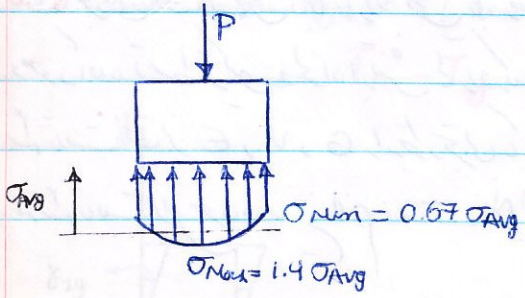



$b/4$ ، $b/2$ ، $b$ برش زده

$$\sigma_{Avg} = \frac{P}{A}$$

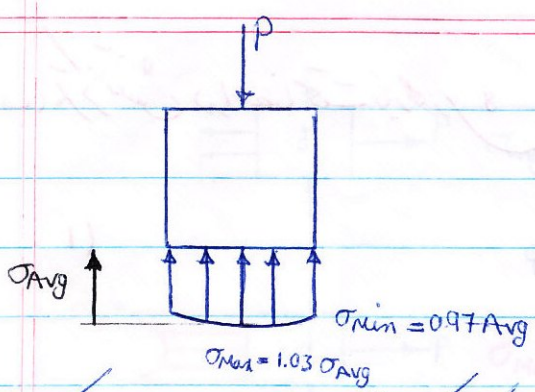



$b/4$




$b/2$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




8 b

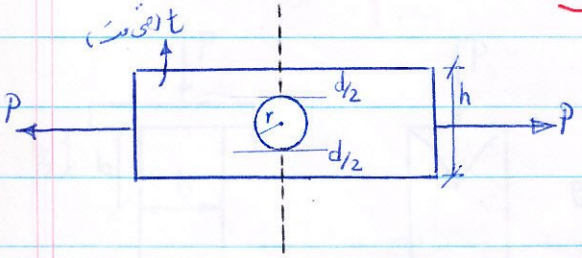
* بنابراین بهتر است از اعمال نیروی واحد صرفنظری کنیم و در عوض از اعمال نیروی P را اعمال کنیم تا تنش Avg برای کل سطح ایجاد شود.

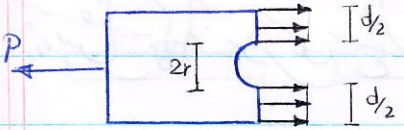
* در زندگی نکته تابع زاویه است. از جمله‌ای متوسط استفاده می‌کنیم. اغلب اوقات بهترین گزینه تصحیح می‌شود (سامپرس ونام)

← این اصل (اصل سن ونان) می‌گوید که در توزیع موضعی نیروی یک جسم در صورتیکه از نظر استاتیکی کاملاً یکسان باشند (برآیند این دو مجموعه نیرو یکسان باشد) در بخش‌هایی از جسم که به اندازه کافی از نقطه اثر نیروها دور هستند (تقریباً به اندازه عرض مقطع) دارای تأثیر یکسان هستند.

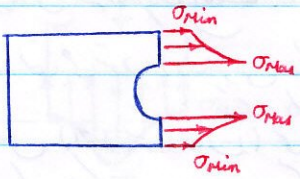
## ب) تمرکز تنش در اعضای تحت بارگذاری

(1)



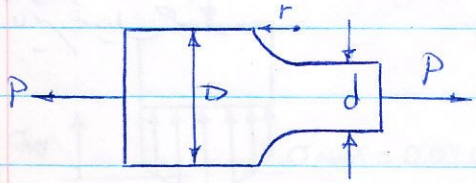

$$\sigma_{avg} = \frac{P}{d.t}$$

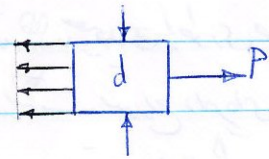



$$\sigma_{Max} = k\,\sigma_{avg}$$

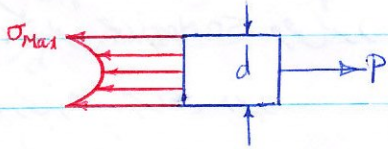
$k \rightarrow$ ضریب تمرکز تنش / ضریب زیادی تنش

(2)





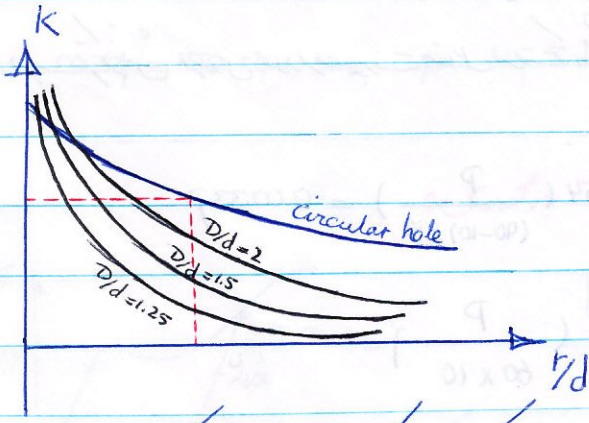

$$\sigma_{avg} = \frac{P}{dt}$$



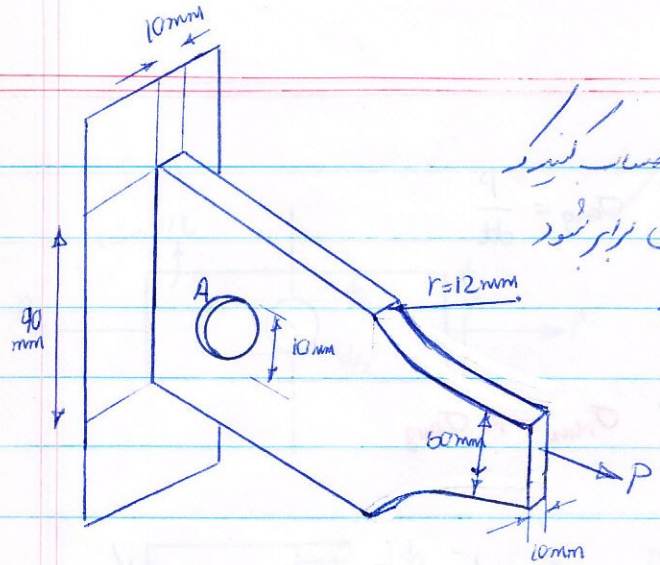

$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{Avg}$$

$$K = \frac{\sigma_{Max}}{\sigma_{Avg}}$$

* در اجزای $\sigma = \sigma_{Max}$ که، تراکم دارد.




* طراحان برای راحت‌تر بودن، سعی می‌کنند از تمرکز تنش اجتناب کنند و وجود آن نیز، می‌گویند تدریجی اتفاق بیفتد.




الف) مشخص کنید ماکزیمم تنش در کدام قسمت سوراخ دایره‌ای و در کدام قسمت Fillet ماکزیمم است.

ب) اگر تنش مجاز 150 Mpa فرض شود بارهای مجاز را محاسبه کنید.

الف) $d = 90 - 10 = 80 \quad r = 5mm$ قسمت سوراخ دایره‌ای A و B

$$\rightarrow \frac{r}{d} = \frac{5}{80} = 0.0625$$

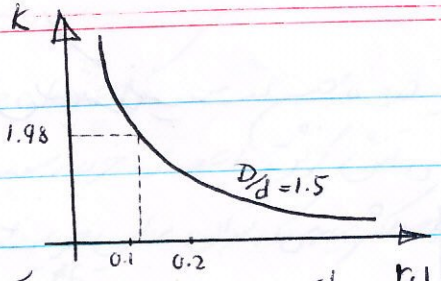
$K = 2.64$ با توجه به نمودار تنش اردی نمودار به صورت تقریبی مقدار ضریب تمرکز تنش است.

$$\sigma_{Max}^{hole} = K \cdot \sigma_{Avg} = 2.64 \left( \frac{P}{(90-10) \times 10} \right) = 0.0033P$$

$$\sigma_{Max}^{Fillet} = K \cdot \sigma_{Avg} = K \left( \frac{P}{60 \times 10} \right)$$

$$\sigma_{Max}^{f} = \sigma_{Max}^{h} \Rightarrow K \left( \frac{P}{600} \right) = 2.64 \left( \frac{P}{800} \right) \Rightarrow K = 1.98$$

$$\frac{D}{d} = \frac{90}{60} = 1.5$$




$\frac{r}{d} = 0.12$ طبق جدول $\frac{r}{d}$ بدست می آید.

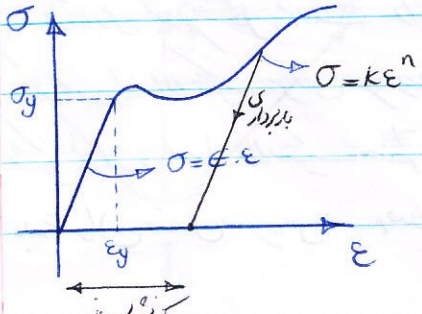
$$\frac{r}{d} = 0.12 \Rightarrow \frac{r}{60\,mm} = 0.12 \Rightarrow r = 7.2\,mm$$

ب)

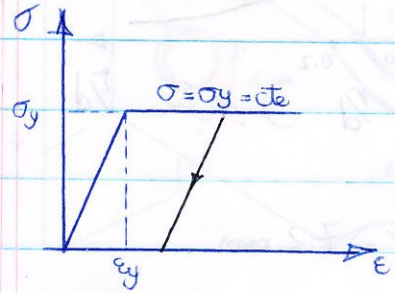
$$\sigma_{می} = \sigma_{Max} = 150\ Mpa$$

$$\Rightarrow 0.0033p = 150\ Mpa \Rightarrow p = 45.5\ kN$$

## تحلیل غیر ارتجاعی اعضا تحت بارگذاری



کرنش سیمان در حدی تنشی است که ترک سیمان شروع شود.



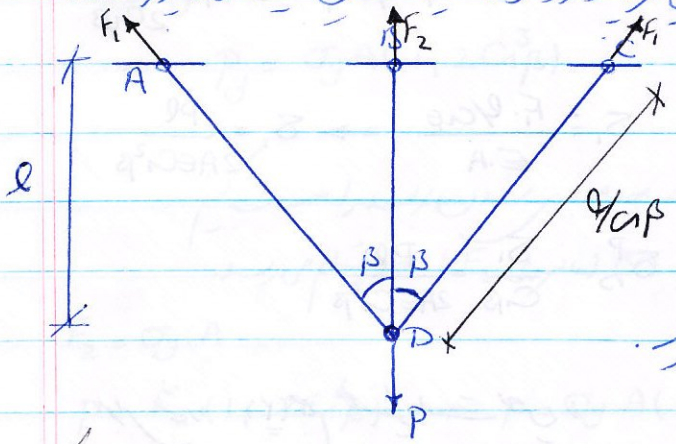

مدل مقابل اصلاح شده مدل صلب است.
این مدل elastic perfectly plactic نام دارد.

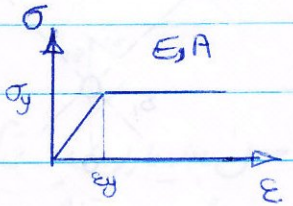
نکته ۵: آنالیز تحلیل غیرارتجاعی دیوارهای بتن آرمه استاتیکی بسیار ساده است، به این علت که دیوارهای بتن آرمه نیروهای داخل معلوم فلذا تنش های آنها را حدس می زنند. بنابراین با داشتن تنش ها می توان کنترل کرد که آیا وارد منطقه غیرارتجاعی شده ایم یا خیر. اصولاً وقتی مثلاً بصورت دیوار بتن آرمه استاتیکی طراحی می شود، در این نوع سازه ها نیازی به نوشتن معادلات حرکت نیست و لذا نوشتن نیروهای معادله اضافی تحمیل رابطه سازگاری تغییر شکل ها را داریم. در این صورت می توان سطح تنش ها در محدوده الاستیک برای هر مرحله رسم کرد. در این صورت می توان سطح های تغییر شکل ها از روابط الاستیک خطی نیروی متناظر را قرار داد و مسئله را حل نمود.

به عنوان مثال: خرپای سه میله ای زیر را در نظر می گیریم. این خرپا از نظر استاتیکی

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

یک دوره ناطقی است. اگر اعضای خرپا از یک جنس دارای E, A ثابت باشند و
رفتاری تنش کرنش اعضای خرپا Elasto plastic باشد، حداکثر باری که می‌توان بر این خرپا وارد نمود تا کلیه اعضای آن شروع به تسلیم شوند چقدر است.



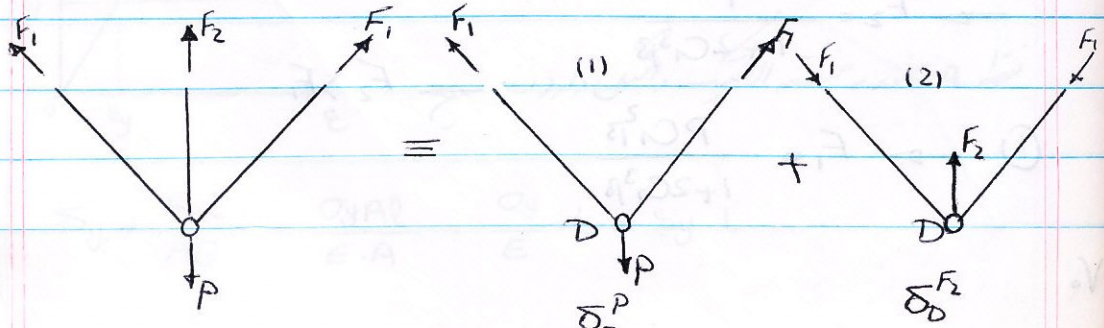

نحوی بارگذاری را نیز رسم کنید.

D نزدیک

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_A = F_C = F_1$$

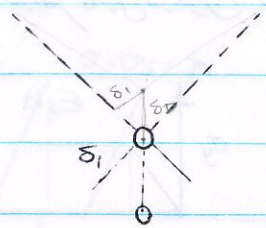
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2F_1 \cos\beta + F_2 = P \quad (1)$$

$F_2 = 2F_1 \cos\beta$



$$\delta_D^P - \delta_D^{F_2} = \frac{F_2 \cdot l}{EA} \qquad \delta_D = \frac{\delta_1}{C_{1\beta}}$$

(1)




$$2F_1 C_{1\beta} = P \Rightarrow F_1 = \frac{P}{2C_{1\beta}}$$

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot l / C_{1\beta}}{E \cdot A} \Rightarrow \delta_1 = \frac{Pl}{2AEC_1^2\beta}$$

$$\delta_{1D}^P = \frac{\delta_1}{C_{1\beta}} = \frac{Pl}{2AEC_1^3\beta}$$

$$\delta_{1D}^{F_2} = \frac{F_2 l}{2AEC_1^3\beta}$$

برای شماره (۲) هم همینطور است یعنی :

$$\Rightarrow \frac{P \cdot L}{2AEC_1^3\beta} - \frac{F_2 \cdot l}{2AEC_1^3\beta} = \frac{F_2 \cdot l}{A \cdot E}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{P}{1 + 2C_1^3\beta}$$

$$\Rightarrow F_2 > F_1$$

$$(1) \Rightarrow F_1 = \frac{PC_1^2\beta}{1 + 2C_1^3\beta}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

بنابراین اولین میله‌ای که در حد جاری شدن می‌رسد میله B است.

اولین جاری شدن ⇒

$$F_2 = \sigma_y A$$

$$\Rightarrow P_y = \sigma_y A(1+2C_1^3\beta)$$

حال باید بار نهایی که تمام اعضاء حد جاری شدن را برسد را حساب کنیم.

با افزایش بار P تنش اندازه میله BD (یا نیروی $F_2$) به حد تسلیم می‌رسد.

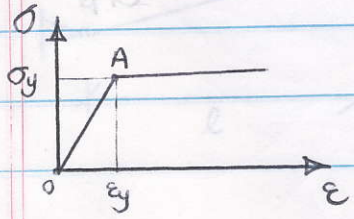
$$F_2 = \sigma_y \cdot A$$

$$P = F_2(1+2C_1^3\beta) \Rightarrow P = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$$

$$\Rightarrow P_y = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$$

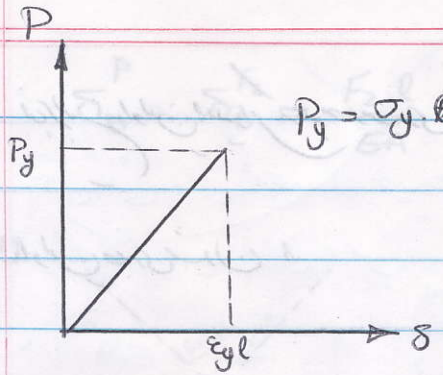
$P_y$ معادل نیرویی است که سازه باید تحمل کند تا اولین جاری شدن در سازه بوجود آید.

تغییر طولی که بوجودش آمد را $\varepsilon_y$ می‌نامیم.




نقطه A جزء منطقه الاستیک و الاستیک دارد بنابراین

$$\sigma_y = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{\sigma_y A l}{\epsilon \cdot A} = \frac{\sigma_y}{E} \cdot L = \varepsilon_y \cdot L$$




$$P_y = \sigma_y \cdot A(1 + 2C_1^3\beta)$$

حداکثر بار P هنگامی حاصل می‌شود که میله‌های AD و CD نیز جاری شوند. یعنی

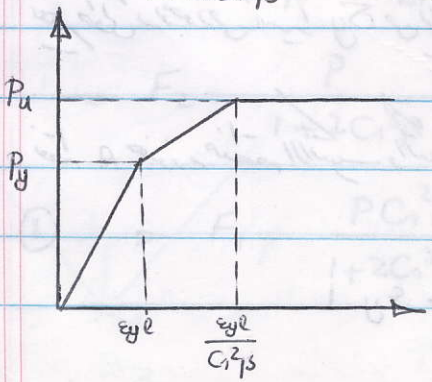
$$F_1 = F_2 = \sigma_y \cdot A$$

$$2F_1 C_1\beta + F_2 = P$$

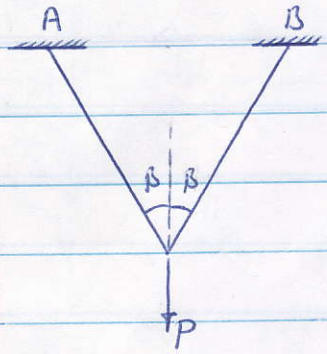
از رابطه ① داریم:

$$\Rightarrow P_u = 2\sigma_y A C_1\beta + \sigma_y \cdot A = \sigma_y \cdot A(2C_1\beta + 1)$$

$$\delta_u = \frac{P_u \cdot l}{2EAC_1^3\beta} - \frac{\sigma_y A l}{2EAC_1^3\beta} = \frac{\sigma_y \cdot l}{2EC_1^3\beta}(1 + 2C_1\beta - 1) = \frac{\varepsilon_y l}{C_1^2\beta}$$

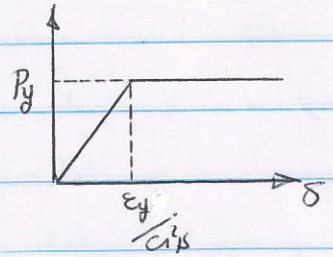


www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

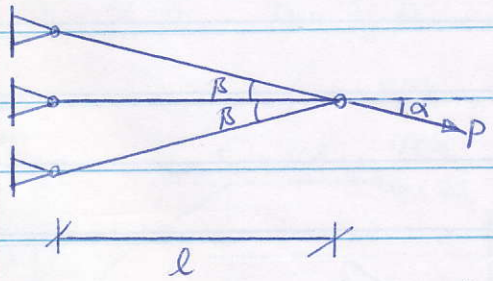


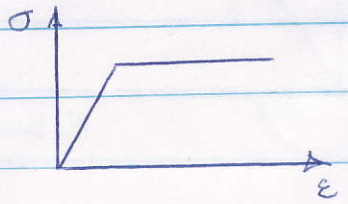

$$\Sigma F_y = 0$$

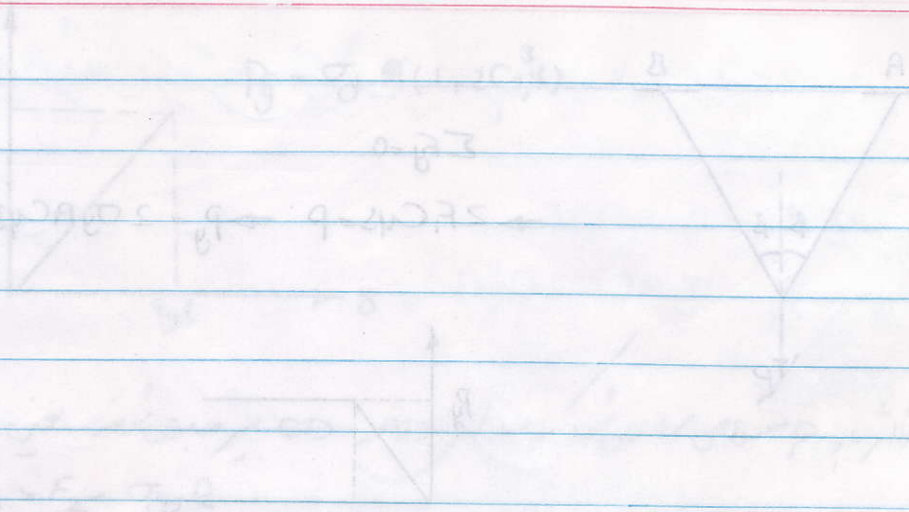
$$\Rightarrow 2F_1 C_{\alpha\beta} = P \Rightarrow P_y = 2\sigma_y A C_{\alpha\beta}$$



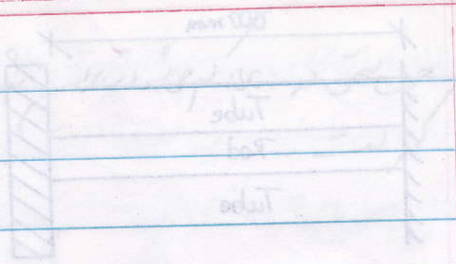

مثال: با فرض اینکه میله‌ها تنها در راستای خود تغییر شکل می‌دهند مطلوبست محاسبه $P_y$، $P_u$ و تغییر مکان $\delta$ در نقطه اعمال نیرو. (خواص میله‌ها $A$، $E$)

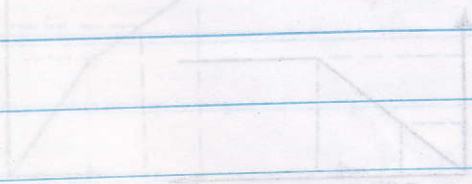


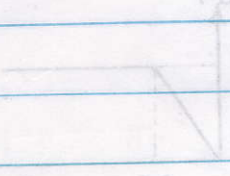





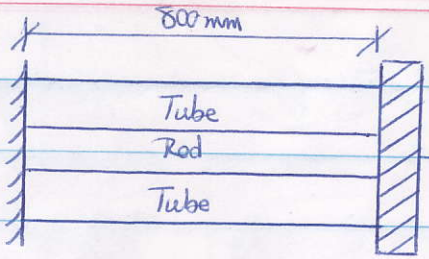
پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران www.icivil.ir







مثال: الف) مطلوب رسم دیاگرام نیرو-تغییر طول و محاسبه باری که توان به مجموعه اعمال کرد.




$E_T = 100\,Gpa$ $A_T = 60\,mm^2$ $(\sigma_T)_y = 250\,Mpa$

$E_R = 200\,Gpa$ $A_R = 45\,mm^2$ $(\sigma_R)_y = 200\,Mpa$

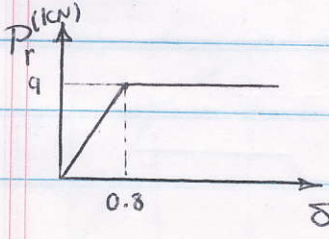
ب) ازدیاد $P$ تا $19.5\,(KN)$ افزایش و سپس برداشته شود. مطلوب محاسبه تغییر طول دائمی نیروی وزنه‌های باقیمانده.

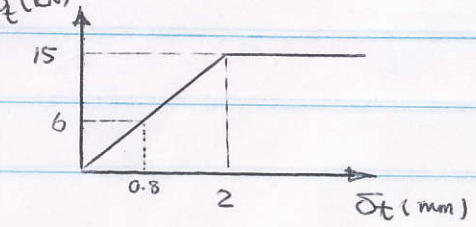
ج) روش اول

$$P = P_r + P_t$$

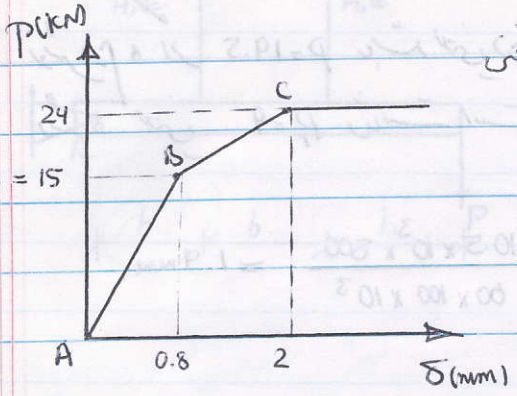
$$\begin{cases} (P_r)_y = (\sigma_r)_y \cdot A_r = 200 \times 45 = 9\,KN \\ (\delta_r)_y = \varepsilon_{ry} \cdot L = \dfrac{(\sigma_r)_y}{E} \cdot L = \dfrac{200}{200 \times 10^3} \times 800 = 0.8\,mm \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_t)_y = (\sigma_t)_y \cdot A_t = 250 \times 60 = 15\,KN \\ (\delta_t)_y = (\varepsilon_t)_y \cdot l = \dfrac{(\sigma_t)_y}{E} \cdot L = \dfrac{250}{100 \times 10^3} \times 800 = 2\,mm \end{cases}$$



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




چون سختی در BC کم می‌شود پس برابر شیب سختی کمتر است.

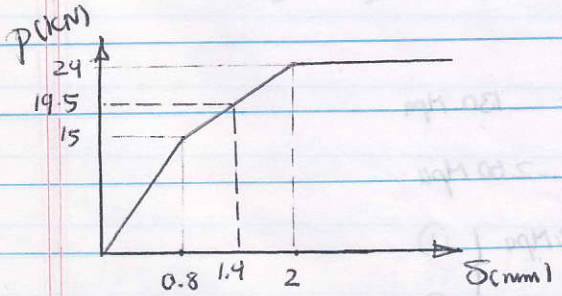
روش دوم:

$$\delta_r = \delta_t \quad , \quad P_r + P_t = P$$

$$\Rightarrow \frac{P_r l}{A_r E_r} = \frac{P_t l}{A_t E_t} \Rightarrow P_r = \frac{E_r \cdot A_r}{E_t \cdot A_t} P_t$$

$$P_t = \frac{2}{5} P \qquad P_r = \frac{3}{5} P$$

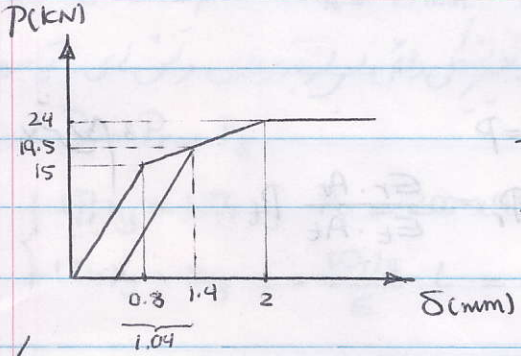
ب) روش اول:



بنابراین P=19.5 باشد یعنی در حدای هستیم که صفحه دوم صاف نشده
رسیده. یعنی $P_r = 9$ ثابت است. بنابراین

$P_t = 10.5$

$$\Rightarrow \delta_t = \frac{P_t}{A} \cdot \frac{L}{E_t} = \frac{10.5 \times 10^3 \times 800}{60 \times 100 \times 10^3} = 1.4 \text{ mm}$$




$$\frac{15}{0.8} = 18.75$$

$$\frac{19.5}{18.75} = 1.04$$

تغییر شکل دائم $\Rightarrow 1.4 - 1.04 = 0.36$

کرنش برگشت $\varepsilon' = \frac{-1.04}{800} = -1.3 \times 10^{-3}$

کرنش پرفاند $\varepsilon = \frac{\delta}{\ell} = \frac{0.36}{800} = 0.45 \times 10^{-3}$

تنش برگشت تیوب $\sigma_t' = -1.3 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^3 = -130 \text{ Mpa}$

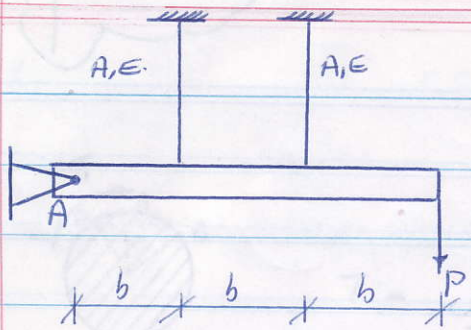
تنش برگشت تیوب $\sigma_r' = -1.3 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^3 = -260 \text{ Mpa}$

تنش باقی مانده صفحه $\sigma_r^R = \frac{9 \times 10^3}{45} - 260 = -60 \text{ Mpa}$ ①

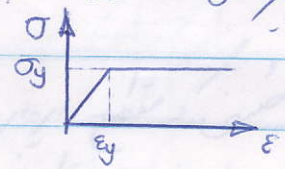
تنش باقی مانده تیوب $\sigma_t^R = \frac{10.5 \times 10^3}{60} - 130 = 45 \text{ Mpa}$ ②

در شماره (2) $\sigma_t^R$ را می‌توان از رابطه پرفاند $\sigma = E\varepsilon$ حساب کرد چون تیوب هنوز صاف نشده
اما در شماره (1) چون صفحه صاف شده پس دیگر قانون هوک صادق نیست و باید از تنش برگشت استفاده نمود.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




مثال: منحنی $P-\delta$ مصالح سیم نخی را در صورتی که $P=P_u$ باشد رسم کنید. بارگذاری نشود تنش های سیم ها در حد تسلیم و نحوه شکل ماندگار را مشخص کنید.

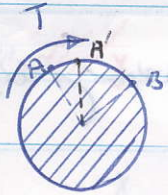


www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

فصل سوم:

## پیچش

### مقاطع دوار:

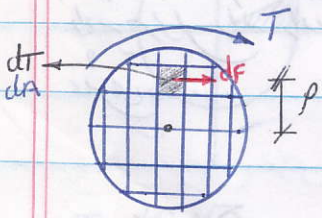



بردار پیچش بر سطحی که عمود است عمل می‌کند.

$T =$ گشتاور پیچشی $(N.mm)$

محوری که مقطع دایره‌ای دارد این است که تحت پیچش مقطعش عمل دایره می‌ماند و صفحه مقطع تغییر یافته از هرگونه تغییر می‌کند.

اما مقطع مربعی (یا هر کدام) تحت پیچش مقطع تغییر شکل می‌دهد.




این مقطع بخشی از $T$ که $dT$ می‌باشد را می‌برد.

$$dT = \rho . dF$$

تنش‌هایی که در مقطع وجود دارد عمود بر مقطع است.

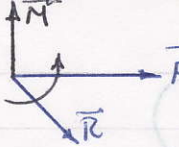
$$dF = \tau dA$$

* گشتاور پیچشی توسط تنش برشی می‌شود.

$$T = \int dT = \int \rho . dF = \int \rho \tau dA$$ تعادل مقطع

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

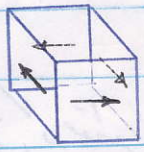
M: گشتاور نیروی F حول نقطه O



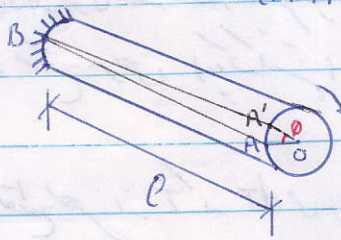

* از R به F حرکت می‌کنیم.

گشتاور پیچشی $T = \int_A \rho \tau dA$

اگر این سه بعدی را رسم کنیم برش خواهیم داشت.

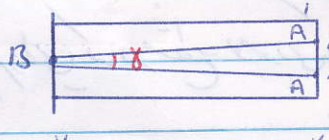


* شرایط این تغییر شکل در پیچش روی محیط دایره است (AA')




زاویه‌ای که زاویه پیچش است با $\rho$ نشان می‌دهند.

$OA = C$ نوع




$\delta/\ell = \frac{AA'}{e} \rightarrow \delta/\ell = \gamma$

چون شرایط این تغییر شکل در محیط است بنابراین $\gamma$ در این حالت $\gamma_{Max}$ خواهد بود که همان کرنش برشی ماکزیمم می‌باشد.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## ج ← پس پرسی

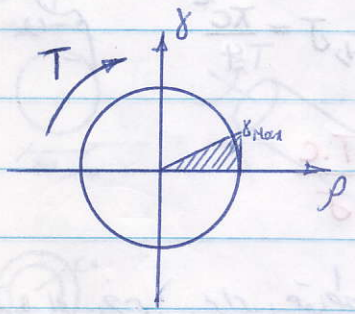
$$\gamma_{Max} = \frac{\overline{AA'}}{L} \qquad \overline{AA'} = c\phi \Rightarrow \boxed{\gamma_{Max} = \frac{c\phi}{\ell}}$$

(زاویه برش) ← برش برشی (زاویه) $\gamma = \frac{\rho\phi}{\ell}$ $\quad 0 \leq \rho \leq c$

$\rho$ : فاصله محوری از مرکز

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_{Max}} = \frac{\rho}{c}$$

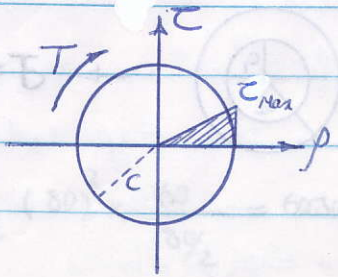
* بنابراین می‌فهمیم توزیع برشی در مقطع خطی است.




در کلیل ارتجاعی داریم:

$$\tau = G\gamma \rightarrow \tau = G\frac{\rho\phi}{\ell}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\rho}{c}\tau_{Max}$$




$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

حال می‌خواهیم ببینیم چه رابطه‌ای بین $\tau$ و $T$ در مقطع دایره‌ای وجود دارد.

$$T = \int_A \rho \tau dA \rightarrow T = \int_A \rho \cdot \frac{\rho}{c} \tau_{Max} dA$$

$$\Rightarrow T = \frac{\tau_{Max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

دایره $I_x = I_y = \frac{\pi c^4}{4}$

$$J = \int_A \rho^2 dA \quad (J = I_x + I_y) \xrightarrow{\text{دایره}} J = \frac{\pi c^4}{2}$$

دایره توپر

$$\Rightarrow T = \frac{\tau_{Max}}{c} J \Rightarrow \tau_{Max} = \frac{T.c}{J}$$

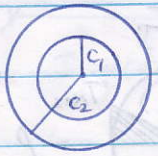
کولیمبی

$$\tau = \frac{T.\rho}{J}$$

فرمول برشی

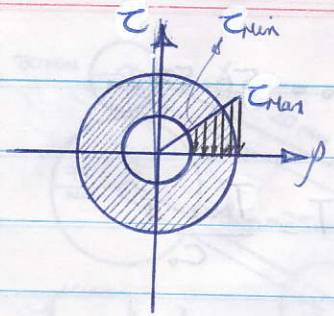
نکته: این فرمول برای مقاطع توپر است.

اگر مقطع توپر نباشد:



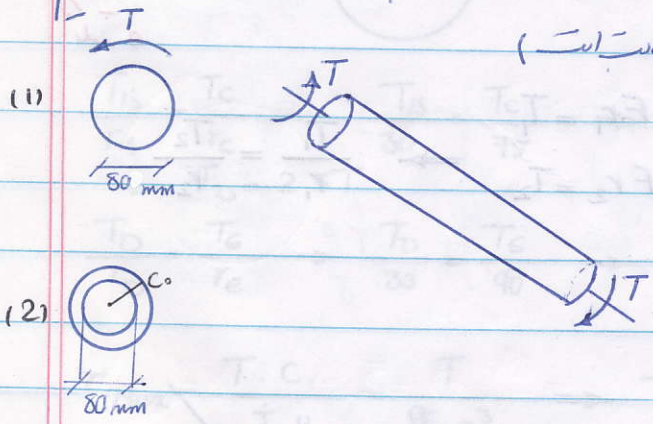

$$\Rightarrow J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




$$\tau_{Min} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{Max}$$

مثال: محدودکردن پولی که در دو حالت می‌توان وارد کرد در شرطی که تنش برشی مازیمم از 60 MPa بیشتر نشود. (مصالح شافت است)



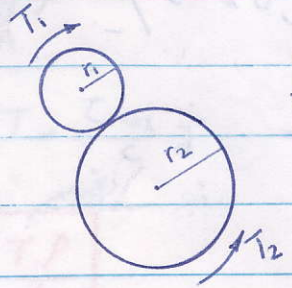

1) $$J = \frac{\pi}{2}c^4 = \frac{\pi}{32}d^4 = \frac{\pi}{32}(80)^4$$

$$\tau_{Max} = \frac{T.c}{J} \Rightarrow T = J\frac{\tau_{Max}}{c} = \frac{\pi}{32}(80)^2 \times \frac{60}{80/2} = 6030\ N.m$$

2) $\frac{\pi(80)^2}{4} = \frac{\pi}{4}(d_o^2 - 80^2) \Rightarrow C_o = 56.57\ mm$

$\Rightarrow J = \frac{\pi}{2}\left[(56.57) - (40)^4\right] \Rightarrow T = \frac{\tau_{Nal} \cdot J}{C_o}$

$= \frac{60 \times 12.065 \times 10^6}{56.57} = 12800\ kN.mm$




$\begin{cases} Fr_1 = T_1 \\ Fr_2 = T_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$

$50^4 = x$

$\Rightarrow \ln 50^4 = \ln x \Rightarrow 4\ln 50 = \ln x \Rightarrow x = e^{4\ln 50}$

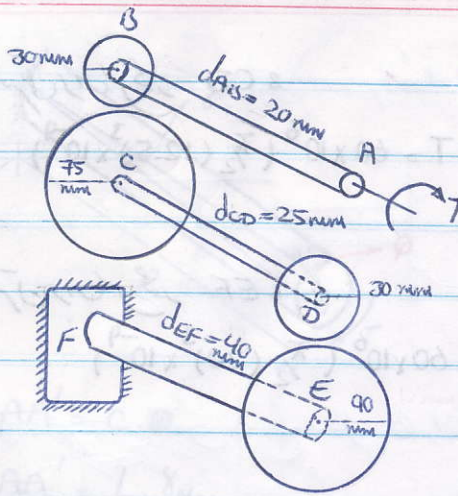
$\Rightarrow x = Exp(4 * Ln50)$

$C^3 = x \Rightarrow 3\ln c = \ln x \Rightarrow \ln c = \frac{1}{3}\ln x \Rightarrow c = e^{\frac{1}{3}\ln x}$

$C = Exp(\frac{1}{3} * \ln x)$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

مثال: حداکثر گشتاور T را که میله توپر AB می‌تواند بدون ایجاد تنش برشی بیشتر از 60 MPa تحمل کند محاسبه کنید.




$$T = T_{AB}$$

$$\begin{cases} T = T_{AB} = T_B \\ T_C = T_{CD} = T_D \\ T_E = T_{EF} \end{cases}$$

$$\frac{T_B}{r_B} = \frac{T_C}{r_C} \Rightarrow \frac{T_B}{30} = \frac{T_C}{75} \Rightarrow T_C = 2.5\,T_B = 2.5T$$

$$\Rightarrow T_D = 2.5T$$

$$\frac{T_D}{r_D} = \frac{T_E}{r_E} \Rightarrow \frac{T_D}{30} = \frac{T_E}{90} \Rightarrow T_E = 3T_D \Rightarrow T_E = 7.5T$$

$$\tau_{Max} = \frac{T \cdot C}{J} = \frac{T}{\frac{\pi}{2}C^3} \Rightarrow T = \tau_{Max}\left(\frac{\pi}{2}C^3\right)$$

کنترل براساس محور AB:

$$T = 60\times10^{6}\left(\frac{\pi}{2}(10)^3\times10^{-9}\right) = 94.2\ N.m$$

کنترل برای سر محور B CD

$$T_{CD} = \tau_{Max}\left(\frac{\pi}{2}(C)^3\right) \Rightarrow 2.5T = 60\times10^6\left(\frac{\pi}{2}(12.5)^3\times10^{-9}\right)$$

$$\Rightarrow T = 73.593\ N.m$$

کنترل برای سر محور B EF

$$T_{EF} = \tau_{Max}\left(\frac{\pi}{2}C^3\right) \Rightarrow 7.5T = 60\times10^6\left(\frac{\pi}{2}(20)^3\times10^{-9}\right)$$

$$\Rightarrow T = 100.48\ N.m$$

$$\Rightarrow T_{Max} = Min(94.2, 73.593, 100.48) = 73.593\ N.m$$

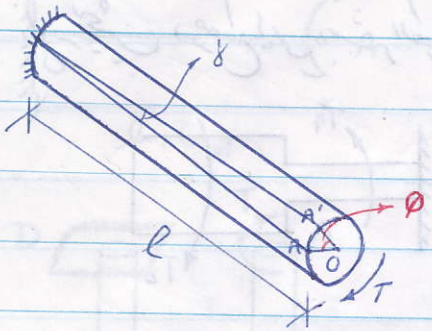
کنترل پیچشی — تنش برشی — زاویه پیچشی — کرنش برشی (زاویه)

1) $\gamma = \frac{\Delta\phi}{\ell}$

2) $\tau = \frac{T\rho}{J}$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## زاویه پیچش



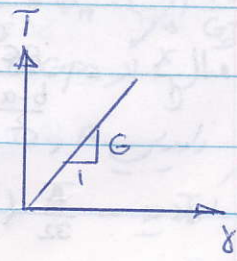

اگر یک میله به طول $l$ با مقطع دایره‌ای شکل به شعاع $c$ و مدول برشی $G$ تحت اثر گشتاور $T$ قرار گیرد، میزان چرخش دورانی انتهای میله یا زاویه پیچش $\phi$ عبارتست از:

$$\begin{cases} AA' = c.\phi \\ AA' = L.\gamma_{Max} \end{cases} \Rightarrow \gamma_{Max} = \frac{c.\phi}{l}$$

$$\tau_{Max} = G\gamma_{Max}$$

$$\tau_{Max} = \frac{T.c}{J}$$

$$\begin{cases} \tau_{Max} = \frac{T.c}{J} \\ \gamma_{Max} = \frac{\tau_{Max}}{G} = \frac{T.c}{G.J} \\ \gamma_{Max} = \frac{c.\phi}{l} \end{cases}$$



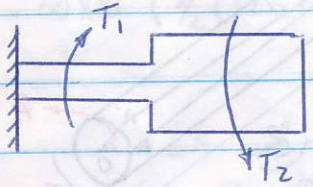

$$\phi = \frac{T.L}{GJ}$$

در فصل میله داشتیم $\delta = \frac{PL}{EA}$

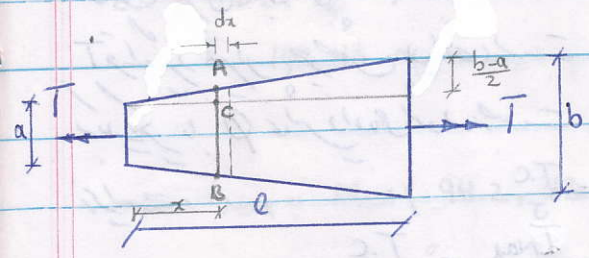
$\frac{GJ}{l}$ سختی پیچشی و $\frac{L}{GJ}$ نرمی پیچشی است.

زاویه پیچش در مقطع کلی با شرط الاستیسیته به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$




مثال: برای زاویه پیچش مقطع مقابل $\phi$ را بدست آورید.



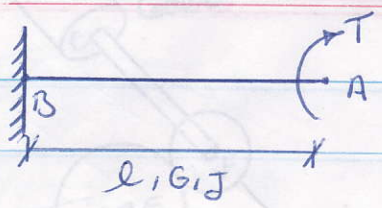

$$\phi = \int_0^{\ell} \frac{T\,dx}{G\,J(x)}$$

$$\frac{x}{\ell} = \frac{AC}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow AC = \frac{x(b-a)}{2\ell} \Rightarrow AB = a + \frac{x(b-a)}{\ell}$$

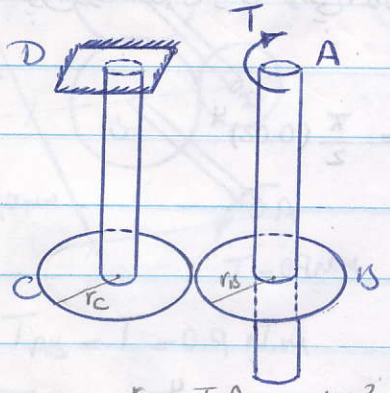
$$J(x) = \frac{\pi}{32}\left(AB^4 - a^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(\left(a + \frac{x}{\ell}(b-a)\right)^4 - a^4\right)$$

$$\Rightarrow \phi = \int_0^{\ell} \frac{T\,dx}{G} \times \frac{32}{\pi\left[\left(a+\frac{x}{\ell}(b-a)\right)^4 - a^4\right]}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




$$\phi = \phi_{A/B} = \phi_A - \phi_B$$




مثال: با استفاده از $T$ ← $\phi_A = ?$

$$\frac{T}{r_{AB}} = \frac{T_C}{r_C}$$

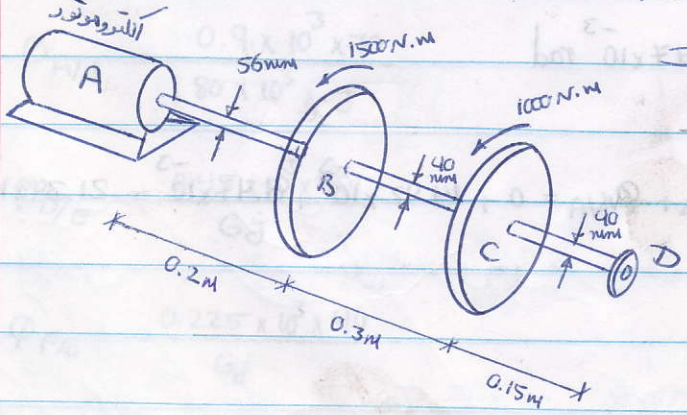
$$\phi_C = \phi_{C/D} + \phi_D \qquad T_C = \frac{r_C T}{r_{AB}}$$

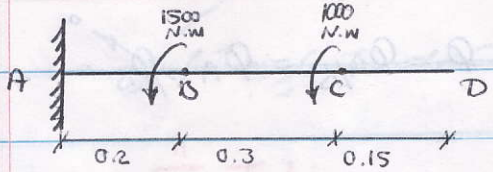
$$\phi_A = \phi_{A/B} + \phi_B \qquad \phi_C = \frac{T_C \ell}{GJ}$$

$$\phi_B r_{AB} = \phi_C r_C \qquad r_C \phi_C = r_{AB} \phi_B$$

$$\phi_B = \frac{r_C}{r_{AB}} \frac{T_C \ell}{GJ} = \left(\frac{r_C}{r_{AB}}\right)^2 \frac{T\ell}{GJ} \qquad \phi_{A/B} = \frac{T\ell}{GJ} \rightarrow \frac{T\ell}{GJ} = \phi_A - \left(\frac{r_C}{r_{AB}}\right)^2 \frac{T\ell}{GJ}$$

مثال: از $G = 80\,Gpa$ با






چون در فاصله C و D لولی نداریم $\varphi_{D/C} = 0$

$$\varphi_{C/B} = \frac{1000 \times 0.3}{80 \times 10^9 \times J} \qquad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.02)^4$$

$$\Rightarrow \varphi_{C/B} = 14.92 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

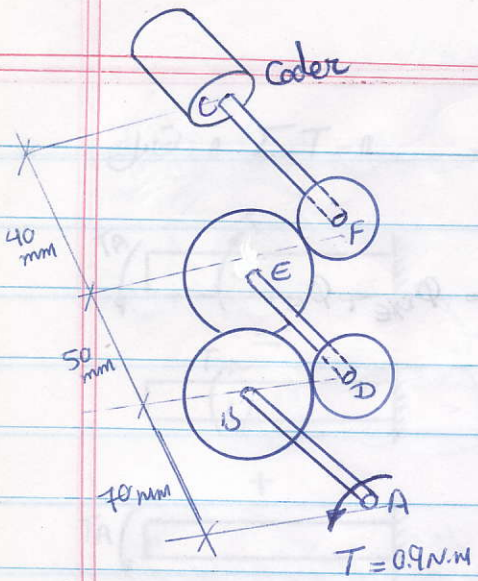
$$\varphi_{B/A} = \frac{(1500 + 1000) \times 0.2}{80 \times 10^9 \times J} \qquad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.028)^4$$

$$\Rightarrow \varphi_{B/A} = 6.47 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{D/A} = \varphi_{D/C} + \varphi_{C/B} + \varphi_{B/A} = 0 + 14.92 \times 10^{-3} + 6.47 \times 10^{-3} = 21.39 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{D/A} = 1.226^{\circ}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




مثال: اگر از چرخش نقطه C جلوگیری شود، زمان چرخش A را بدست آورید. C تحت گشتاور $T=0.9^{N.M}$ می باشد. (شعاع دایره‌ای شکل ۲ و دارای $G=80\,Gpa$ و زاویه ۲ رادیان است) قطر تمام محورها 4mm است.

$$J=\frac{\pi}{2}(2)^{2\times 2}=8\pi$$

$$T_{AB}=T=0.9\ N.M \qquad T_{DE}=\tfrac{1}{2}T_{AB}=0.45\ N.M$$

$$T_{FC}=\tfrac{1}{2}T_{DE}=\tfrac{1}{4}T=0.225\ N.M$$

$$\varphi_{A/B}=\frac{0.9\times 10^{3}\times 70}{80\times 10^{3}\times J}$$

$$\varphi_{D/E}=\frac{0.45\times 10^{3}\times 50}{GJ}$$

$$\varphi_{F/C}=\frac{0.225\times 10^{3}\times 40}{GJ}$$

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2$$

$$\varphi_F = \varphi_{F/C} + \varphi_C = \frac{0.9\ \text{N.mm} \times 10^4}{GJ}$$

$$\varphi_E = \tfrac{1}{2}\varphi_F = 0.45/GJ \times 10^4 \longrightarrow \varphi_D = \varphi_{D/E} + \varphi_E$$

$$\varphi_D = \frac{(2.25+0.45)\times 10^4}{GJ}$$

$$\varphi_B = \frac{r_D}{r_B}\varphi_D = \frac{1}{2}\varphi_D = \frac{1.35\times 10^4}{GJ}$$

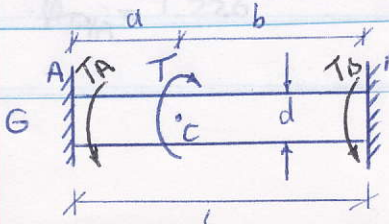
$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B = \frac{6.3\times 10^4}{GJ} + \frac{1.35\times 10^4}{GJ} = \frac{7.65\times 10^4}{GJ} = 3805\times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$= 2.18^\circ$$

## نامحس در اعضای نامعین

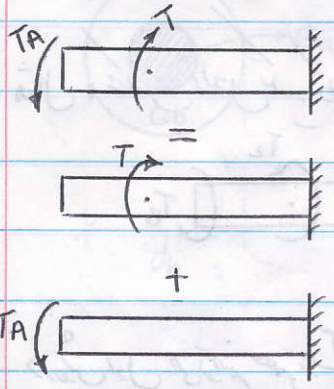
از روش سازگاری تغییر شکل که برای حل نامحس استفاده می‌شود. روش دیگر با روش جمع آثار قوا است.

مثال: عکس العمل تکیه‌گاهی $T_A$، $T_B$ محاسبه است.



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

تعادل: $\sum T = 0 \rightarrow T_A + T_B = T$




روش اول: (جمع آثار قوا)

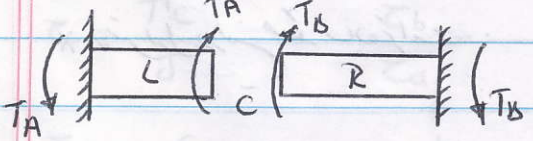
$$\varphi_A^T = \frac{Tb}{GJ}$$

$$\varphi_A^{T_A} = \frac{T_A \cdot L}{GJ}$$

چون نقطه A گیردار است، زاویه دوران ندارد.

$$\varphi_A^T = \varphi_A^{T_A} \Rightarrow \frac{Tb}{GJ} = \frac{T_A L}{GJ} \Rightarrow T_A = \frac{b}{L}T \qquad T_B = \frac{a}{L}T$$

روش دوم: (سازگاری تغییر شکل)



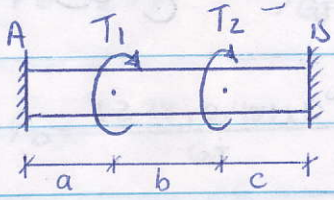

$$\varphi_C^L = \frac{T_A \cdot a}{GJ} \qquad \varphi_C^R = \frac{T_B \cdot b}{GJ}$$

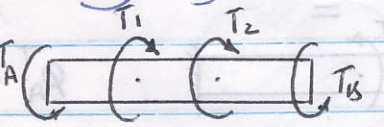
چون چرخش در دو طرف برابر است:

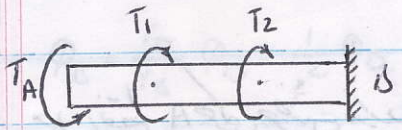
$$\varphi_C^L = \varphi_C^R \rightarrow T_A \cdot a = T_B \cdot b \rightarrow T_A = \frac{b}{a}T_B$$

$$T_A + T_B = T \Rightarrow \left(\frac{b}{a}+1\right) T_B = T \Rightarrow T_B = \frac{a}{L}T,\quad T_A = \frac{b}{L}T$$

مثال: عکس العمل تکیه‌های A و B را بدست آورید.




در روش اول می‌توانیم هم را به شکل تبدیل کنیم و جداگانه حل کنیم. یا می‌توانیم مربوط همین شکل از طریق $\sum$ جمع $\Phi_i$ها را برابر صفر بگذاریم.

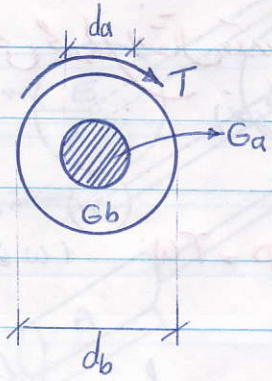
از روش دوم می‌توان استفاده کرد به شرطی که یک نقطه را انتخاب کرده $\Phi$ها را مساوی می‌گذاریم.

* روش اول در اینجا مشکل ساده‌تر است.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

بسیار مهم است که بدانیم در این شکل زاویه پیچش کل با هم برابرند.

مثال: شفت کامپوزیتی برنجی Ma را در پوسته و هسته در نظر بگیرید. هسته فولادی و پوسته مسی است.




$$T = T_a + T_b \qquad \varphi_a = \varphi_b$$

$$\rightarrow \frac{T_a \cdot L}{G_a \cdot J_a} = \frac{T_b \cdot L}{G_b \cdot J_b}$$

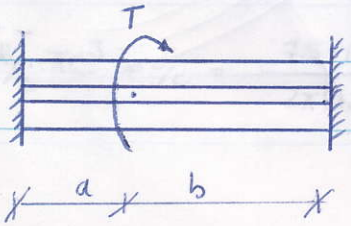
$$\Rightarrow T_a = \frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} T_b$$

$$T = \left( \frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} + 1 \right) T_b \Rightarrow \begin{cases} T_b = \dfrac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \\ T_a = \dfrac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{T \cdot c}{J} \qquad \frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{\frac{T_b \cdot d_b/2}{J_b}}{\frac{T_a \cdot d_a/2}{J_a}} = \frac{T_b}{T_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a}$$

$$\frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{G_b \cdot J_b}{G_a \cdot J_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a} = \frac{G_b \cdot d_b}{G_a \cdot d_a}$$

مثال: اگر $\tau_b$ معلوم باشد $\tau_a$ را بیابید.




این مثله ترکیب دو شفت است.

## طراحی محورهای انتقال قدرت:

$W = T \cdot \phi$ (تغییر شکل $\phi$ ، گشتاور $T$ ، کار $W$)

$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = T\frac{d\phi}{dt} \rightarrow P = T\omega$ (سرعت زاویه‌ای $\omega$)

$\omega = 2\pi f \rightarrow P = 2\pi f T$ $f \rightarrow$ فرکانس $(1/s)$ ← تعداد دور بر ثانیه

$\Rightarrow$ گشتاور پیچشی $T = \frac{P}{2\pi f}$

* در صنعت توان را بر حسب اسب بخار می‌گیریم.

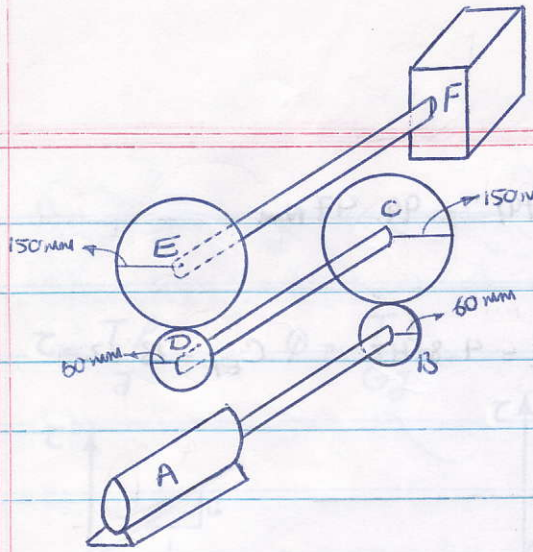
$\tau = \frac{T.c}{J} \Rightarrow T = \frac{\tau . J}{c} \Rightarrow \frac{J}{c}\tau = \frac{P}{2\pi f}$

$\Rightarrow$ تنش برشی مجاز $\tau = \frac{Pc}{2\pi f J}$

$P = 2\pi f T \rightarrow$ واحد توان $(W) = \frac{N.m}{s}$

نکته

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




مثال: سه چرخدنده مطابق شکل زیر توان منتقل می‌کند. اگر توان منتقل شده $P=7.5\,kW$ و فرکانس چرخش شفت A برابر $30\,Hz$ باشد و تنش برشی مجاز $60\,MPa$ باشد، قطر هر شفت را تعیین کنید.

$$T_{AB} = \frac{P}{2\pi f} = \frac{7.5\times10^{3}}{2\pi \times 30} = 39.79\ N.m$$

$$\frac{J}{c} = \frac{1}{2}\pi c^{3} = \frac{T}{\tau} = \frac{39.79\times10^{3}}{60} \Rightarrow c = 7.5\,mm$$

$$\Rightarrow d_{AB} = 15\,mm$$

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2 \Rightarrow r_1\frac{d\varphi_1}{dt} = r_2\frac{d\varphi_2}{dt} \Rightarrow r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

$$\Rightarrow r_1 f_1 = r_2 f_2$$

$$f_{CD} = \frac{30\times60}{150} = 12\,Hz$$

$$\frac{1}{2}\pi c^{3} = J/c = \frac{7.5\times10^{3}\times10^{3}}{2\pi(12)\times60} \Rightarrow c = 20.4\,mm$$

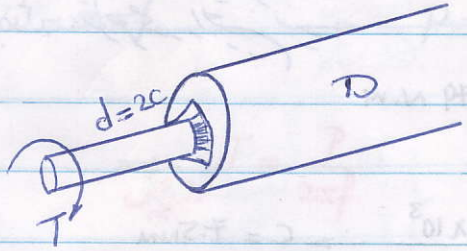
$$\Rightarrow d_{CD} = 40.8\,mm$$

$$T_{CD} = \frac{r_C}{r_B} T_B = \frac{150}{60} (39.79) = 99.47 \text{ N.m}$$

$T_{EF} = 248.7$ N.m  $f_{EF} = 4.8$ Hz  $C_{EF} = 13.82$

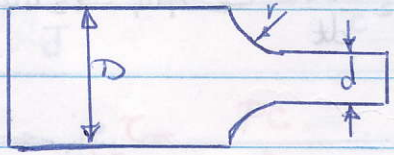
$d_{EF} = 27.64$ mm

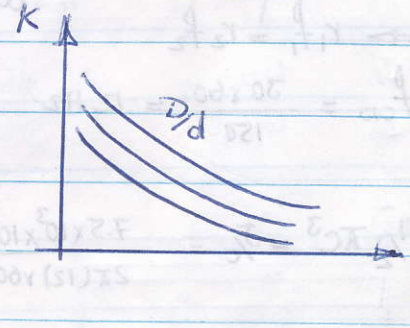
---




$$\tau_{Max} = k \frac{T.C}{J}$$

$$\tau_{avg} = \frac{T.C}{J}$$

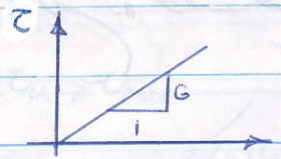


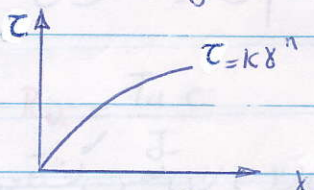
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

# تغییر شکل غیر ارتجاعی در پیچش

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J} \quad , \quad \varphi = \frac{T \cdot L}{GJ} \quad , \quad \tau_{Max} = \frac{T \cdot c}{J}$$




الاستیک خطی




الاستیک غیرخطی

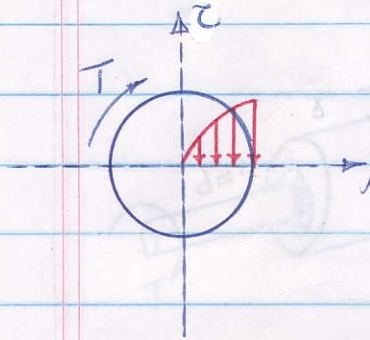
$$T = \int_A \rho \cdot \tau \, dA$$

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{\rho}{L}\varphi \\ \gamma_{Max} = \dfrac{c}{L}\varphi \end{cases} \longrightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{Max}$$

وقتی صحبت از غیر ارتجاعی بودن تغییر شکل می کنیم یعنی $\tau = f(\gamma)$

از طرفی $\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{Max}$ و $c$، $\gamma_{Max}$ ثابت هستند بنابراین $\gamma = g(\rho)$

بنابراین $\tau$ حالت غیر ارتجاعی ← $\tau = h(\rho)$



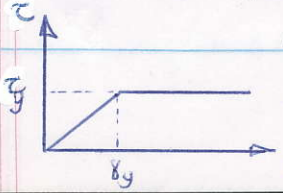

در مقطع دایره‌ای داریم:

$$dA = 2\pi\rho\, d\rho \qquad 0 \le \rho \le c$$

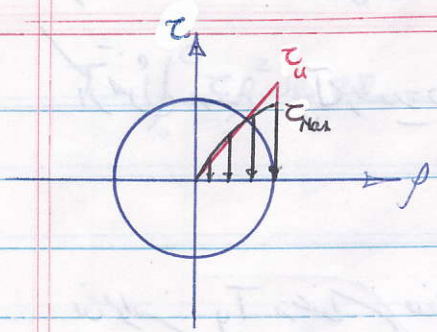
$$T = \int_0^c \rho.\tau\, 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^c \tau\rho^2 d\rho$$

$\tau$ برحسب $\rho$ می‌باشد پس باید تابع $\tau$ برحسب $\rho$ را پیدا کرد.

در اینجا مدل Elasto plastic را بررسی می‌کنیم.



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



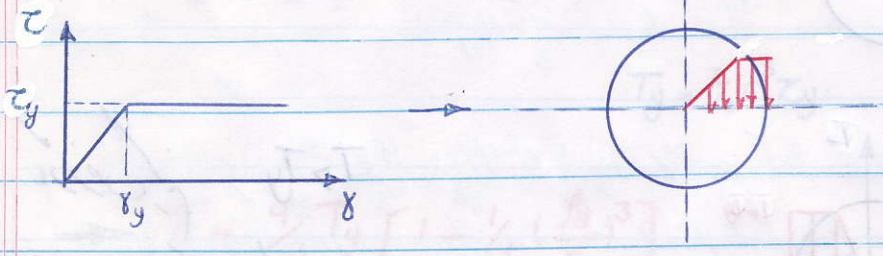

## مدول گسیختگی در پیچش

$\tau_u$ را در بحران رسم می‌کنیم سطح زیر نمودار برابر سطح زیر نمودار $\tau_{Max}$ برابر باشد.

$$\tau_u > \tau_{Max} \longrightarrow \tau_u = R_u = \frac{T_u \cdot c}{J}$$

از $R_u$ (یا $R_T$) می‌توان برای تعیین گشتاور پیچشی $T_u$ استفاده کرد.

برای مدل Elastoplastic نمودار $\rho$-$\tau$ به شکل زیر است.

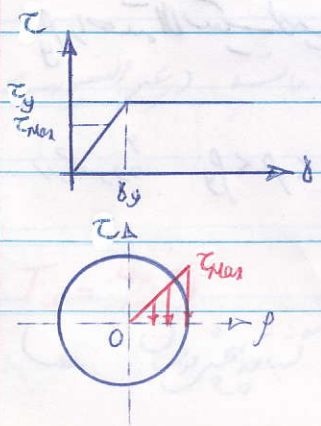



---

فرض می‌کنیم $\tau_{Max} < \tau_y$ و

در این حالت توزیع تنش خطی است

پس از آنجا $\tau_{Max} = \frac{T \cdot c}{J}$

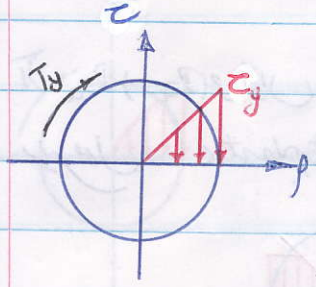


اگر تنش به حد $\tau_y$ رسیده داریم:

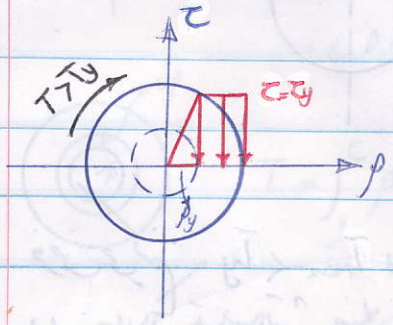
$$T_y = \frac{J}{c}\tau_y \qquad J = \frac{\pi}{2}c^4$$

$$\Rightarrow T_y = \frac{\pi}{2}c^3\tau_y$$

این گشتاور $T_y$ به عنوان حد الاستیک شناخته می‌شود.




حال فرض می‌کنیم $T = T_y$ :




اگر فرض کنیم $T > T_y$

$\rho_y$ را حد الاستیک گوییم.

در محدوده $\rho_y > \rho > 0$ داریم:

$$\frac{\tau}{\tau_y} = \frac{\rho}{\rho_y}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$\begin{cases} T<T_y \\ T=T_y \longrightarrow T=T_y=\pi/2\, c^3 \tau_y \\ T>T_y \longrightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right) \end{cases}$$

$$T=\left(\int_0^c \tau \rho^2 d\rho\right) 2\pi = 2\pi\left(\int_0^{\rho_y} \rho^2\left(\frac{\rho}{\rho_y}\tau_y\right) d\rho + \int_{\rho_y}^{c} \rho^2 \tau_y\, d\rho\right)$$

$\rho_y$ شعاع هسته الاستیک است که نامعلوم می‌باشد.

$$\Rightarrow T=\pi/2\,\rho_y^3\tau_y + 2/3\,\pi c^3\tau_y - 2/3\,\pi\rho_y^3\tau_y$$

$$\Rightarrow T=2/3\,\pi c^3\tau_y\left(1-\frac{\rho_y^3}{4c^3}\right)$$

از رابطه: $T_y=\pi/2\, c^3\tau_y$

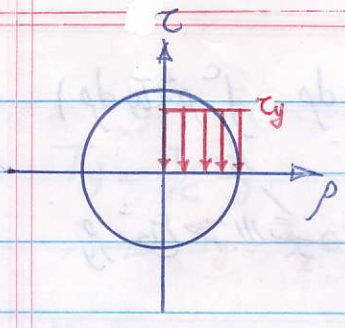
$$\Rightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right]$$

این فرمول تنها وقتی قابل استفاده است که $T>T_y$ باشد. در غیر اینصورت با تناقض می‌رسیم.

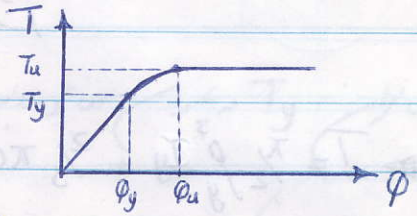
از $\rho_y$ به ازای $T=T_u$ نتیجه:

$T_u=\frac{4}{3}T_y$ ← گشتاور تسلیم مقطع

$$T = \begin{cases} \frac{GJ}{L}\phi & \phi \le \phi_y \\ \frac{4}{3}T_y\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{\phi_y}{\phi}\right)^3\right) & \phi \ge \phi_y \end{cases}$$



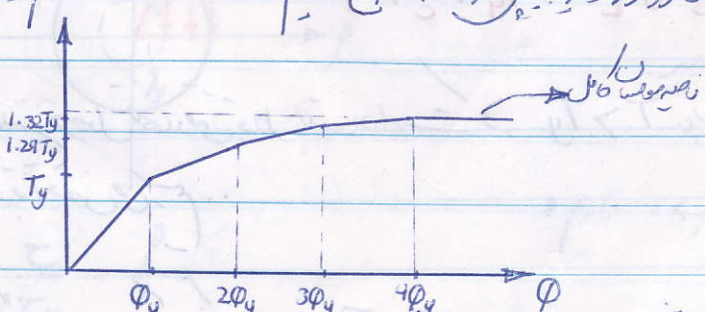

* همانطور که $\rho_y = c$ باشد $\phi_y = \phi$ می‌باشد.




$$\begin{cases} \gamma = \frac{\rho}{L}\phi \longrightarrow \gamma_y = \frac{\rho_y}{L}\phi \\ \rho_y = c \quad T=T_y \longrightarrow \gamma_y = \frac{c}{L}\phi_y \end{cases} \longrightarrow \boxed{\frac{\rho_y}{c} = \frac{\phi_y}{\phi}}$$

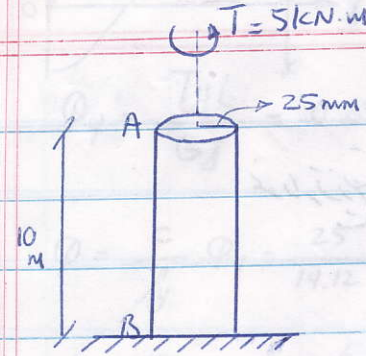
$$\Longrightarrow T = \frac{4}{3}T_y\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\phi_y}{\phi}\right)^3\right] \qquad \phi_y < \phi$$

* $T_y$ و $\phi_y$ در تیرهای فشار و راه‌های بتنی در لحظه شروع تسلیم هستند.




نکته: توجه شود رابطه بالا تنها برای $\phi > \phi_y$ به کار می‌رود. برای $\phi < \phi_y$ رابطه بین $T$ و $\phi$ خطی و بصورت $\phi = \frac{TL}{GJ}$ می‌باشد.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




مثال: کوپلی به اندازه 5kN.m در قطعه A وارد می شود و سپس برداشته می شود. مطلوبست حداکثر تنش باقی مانده در مقطع و مقدار تغییر شکل ماندگار در آن. (مصالح از جنس Elasto plastic می باشد)

$T_y = 160\ Mpa$

$G = 75\ Gpa$

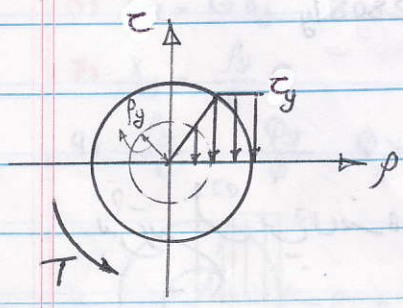
$T_y = \frac{\pi}{2} c^3 \tau_y = \frac{\pi}{2} (25)^3 \times 160 \times 10^{-6} = 3.297\ kN.m$

$T_y < T \Rightarrow$ مقطع وارد پلاستیک شده است.

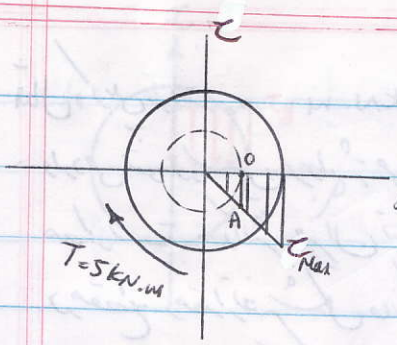
تعیین شعاع هسته الاستیک:

$5 = \frac{4}{3}(3.207)\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{25}\right)^3\right)$

$\rightarrow \rho_y = 12\ mm$




نمودار توزیع تنش در مقطع

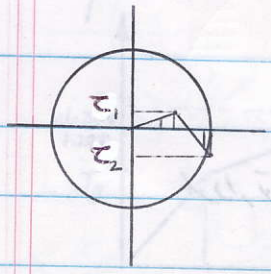



نمودار توزیع تنش برشی به صورت زیر است:

$$\tau_{Max} = \frac{T}{T_y}\tau_y = \frac{5}{3.297}(\tau_y) = 1.2732\tau_y$$

حال با توجه به نمودار، شعاع دایره‌ای که ماده پلاستیک شده است:

$$OA = \frac{f_y}{\tau}\tau = \frac{14.12}{25} \times 1.2732\tau_y = 0.7192\tau_y$$

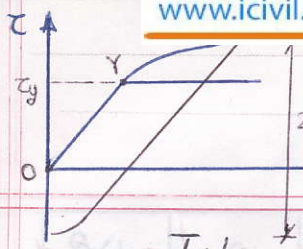



$$\tau_1 = (1 - 0.7192\tau_y) = 0.2808\tau_y$$

$$\tau_2 = 0.2732\tau_y$$

بنابراین تنش برشی ماندگار $0.2808\tau_y$ است.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




نکته مهم: می‌توان حتی در رشته‌ای از سؤالات استحکام تسلیم $\tau_y$ تجاوز کند، فرض توزیع خطی این تنش‌ها درست است، زیرا آن‌ها از $2\tau_y$ تجاوز نمی‌کند.

$$\varphi_y = \frac{T_y L}{GJ} = 0.85 \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{c}{\rho_y}\varphi_y = \frac{25}{14.12}(0.85) = 1.5 \text{ rad}$$

$$\varphi' = \frac{T.L}{GJ} = \frac{5\times10^6 \times 10\times10^3}{GJ} = 1.086 \text{ rad}$$

$$\varphi^R = \varphi - \varphi' = 1.5 - 1.086 = 0.41 \text{ rad}$$

---

1) $T_y = \frac{1}{2}\pi c^3 \tau_y$

2) $T = \frac{4}{3}T_y\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right)$ $T > T_y$

3) $T_u = \frac{4}{3}T_y$

4) $$T = \begin{cases} \frac{GJ}{\ell}\varphi & \varphi \le \varphi_y \\ \frac{4}{3}T_y\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right) & \varphi \ge \varphi_y \end{cases}$$

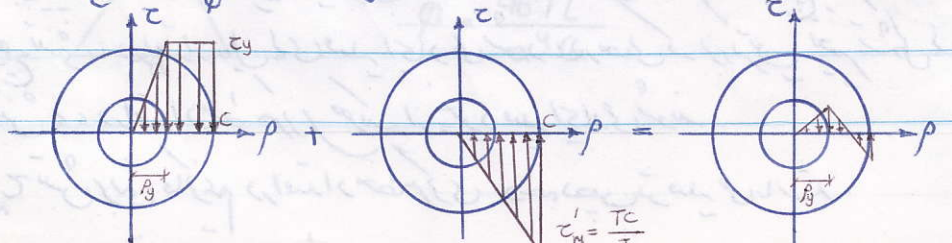
5) $\varphi_y = \frac{T_y \ell}{GJ}$

6) $\tau_y = G\gamma_y$

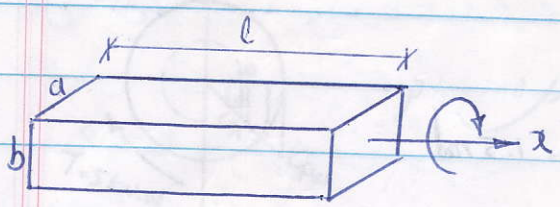
7) $\gamma_y = \frac{\rho_y}{\ell}\varphi$

8) $\gamma_y = \frac{c}{\ell}\varphi_y$

9) $\frac{\rho_y}{c} = \frac{\varphi_y}{\varphi}$ $\varphi > \varphi_y$



## پیچش مقاطع غیر دوار

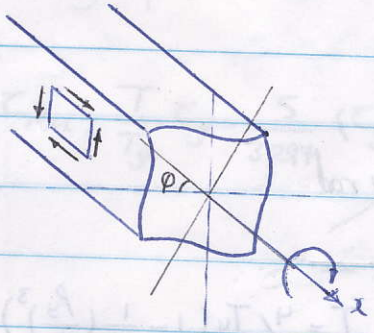


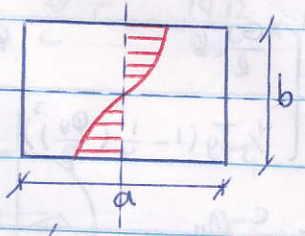

Twist + Warping

تابیدگی + جرمی

تنش در لبه ها Max است.

افتش برای برشی در گوشه های مقطع صفر است.




$$\tau_{Max} = \frac{T}{C_1 a b^2} \qquad \left(\tau = \frac{TP}{J}\right)$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{C_2 a b^3 G} \qquad \left(\phi = \frac{TL}{GJ}\right)$$

* با یکی دانستن مدل الاستیکی ماده برای بعضی مقاطع راحت می توان ثابت کرد که هیچ تغییر شکلی و بنابراین هیچ تنشی در امتداد دایره ای ماده ایجاد نمی شود، در حالی که بزرگترین تغییر شکل ها و بزرگترین تنش ها در امتداد محور مرکزی هر یک از وجوه ماده ایجاد می شوند.

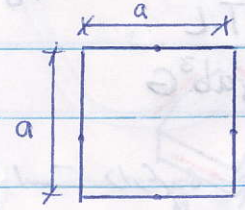
ح تنش برشی ماکزیمم در امتداد محور مرکزی وجه بیشتر ماده می باشد. $\tau_{Max}$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

* $C_1$ و $C_2$ به نسبت $a/b$ شکل دارند.

| $a/b$ | $C_1$ | $C_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.208 | 0.1406 |
| 1.2 | 0.219 | 0.1661 |
| 1.5 | 0.231 | 0.1958 |
| 2 | 0.246 | 0.229 |
| 2.5 | 0.258 | 0.249 |
| 3 | 0.267 | 0.263 |
| 4 | 0.282 | 0.281 |
| 5 | 0.291 | 0.291 |
| 10 | 0.312 | 0.312 |
| $\infty$ | 0.333 | 0.333 |

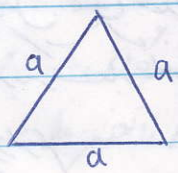
$\frac{a}{b} \geq 5 \rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{3}(1 - 0.63\frac{b}{a})$




$$\tau_{Max} = \frac{4.81T}{a^3}$$

$$\phi = \frac{71\,T.L}{Ga^4}$$

* دو فرمول $\tau_{Max}$ و $\phi$ تنها در محدوده کشان مستطیل تکنواخت می باشند. فقط مخصوص میله‌ای راست با سطح مقطع




$$\tau_{Max} = \frac{20T}{a^3}$$

$$\phi = \frac{46TL}{a^4 G}$$

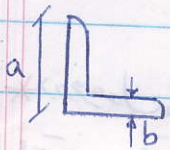
## ✕ روابط مقاطع جدارنازک باز و مستطیلی

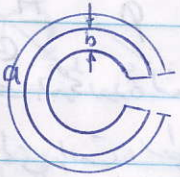
$$\begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{T}{\frac{1}{3}ab^2} \\ \phi = \dfrac{T.L}{\frac{1}{3}ab^3G} \end{cases} \qquad a/b > 10$$

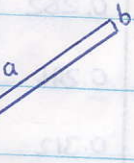
در پروفیل که همچین است $a/b$ بزرگتر از 10 است داریم:

$$C_1 = C_2 \cong \frac{1}{3}$$

پروفیل L جدارنازک دارای نسبت $a/b$ بزرگتر از 10 است.



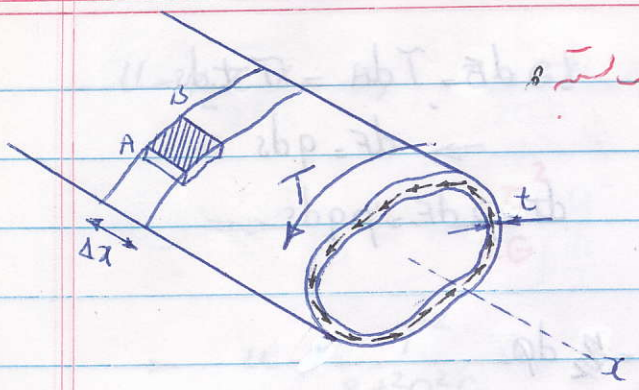



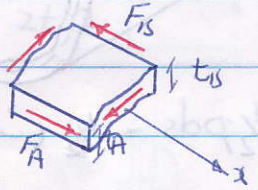

نسبت برای پروفیل L جدارنازک $C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$ می‌باشد.

پروفیل L جدارنازک به دو دسته باز و بسته تقسیم می‌شوند. روابط پروفیل جدارنازک باز گفته شد. حال به بیان روابط موجود در پروفیل L بسته می‌پردازیم.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

بحث در محدوده‌ی توخالی جدار نازک بسته




t متغیر است.

$$\begin{cases} F_{A_x} = \tau_A \, t_A \, \Delta x \\ F_{AB_x} = \tau_{AB} \, t_{AB} \, \Delta x \end{cases}$$

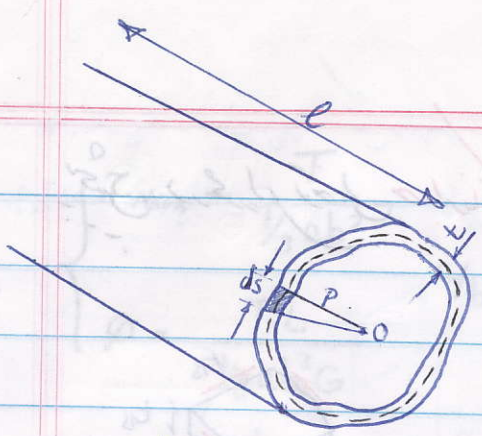
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_A - F_{AB} = 0 \Rightarrow \tau_A \cdot t_A = \tau_B \cdot t_B$$

$$\tau . t = q = cte$$

q را جریان برشی نامند (shear flow)

این q در مکانیک سیالات نیز وجود دارد و نشان دهنده‌ی آن می‌باشد.

$q = vb$ (v سرعت، b عرض) . q ثابت باشد با تغییر b سرعت تغییر می‌کند.




$$dF = \tau dA = \tau t ds$$

$$\Rightarrow dF = q ds$$

$$dT = p.dF = pq ds$$

$\frac{1}{2} p ds =$ ( ) $= dQ$ (مساحت مثلث)

$$\Rightarrow dT = 2q.dQ \quad \Rightarrow \oint dT = 2\oint q.dQ$$

$$\Rightarrow T = 2q \oint dQ$$

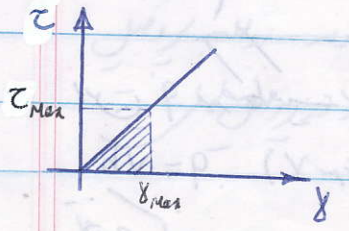
$$\Rightarrow T = 2qQ \qquad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$T = 2qQ \rightarrow T = \tau t(2Q)$

Q مساحت شکل محاصره است . $\tau$ مقدار میانگین تنش برشی در کل

دیواره است.

محاسبه زاویه پیچش $\theta$




انرژی کرنشی $U = \frac{1}{2} \tau . \gamma$

$$U = \int \tau d\gamma$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$U = \frac{1}{2}\tau.\gamma \quad , \quad \tau = G\gamma$$

$$\Rightarrow U = \frac{\tau^2}{2G} \quad , \quad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$$\rightarrow u = \frac{T^2}{8t^2Q^2G}$$

$$\rightarrow U = \int_V u.dv \qquad dv = t.\ell.ds$$

$$\Rightarrow U = \oint_S \frac{T^2}{8t^2Q^2G}\, t.\ell ds = \frac{T^2\ell}{8Q^2G} \oint_S \frac{ds}{t}$$

کار خارجی $W = \frac{1}{2}T\phi$

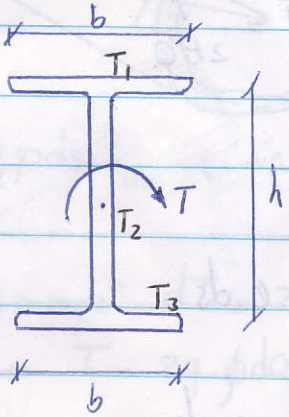
برای سیستم پایستار (Conservative)

$$W = U \rightarrow \frac{1}{2}T.\phi = \frac{T^2L}{8GQ^2} \oint \frac{ds}{t}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{T.L}{G\,\frac{4Q^2}{\oint ds/t}}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \qquad J = \frac{4Q^2}{\oint ds/t}$$

بحثی درمورد مقطع I شکل:




$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\Rightarrow T = 2T_1 + T_2$$

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\frac{T_1 L}{GJ_1} = \frac{T_2 L}{GJ_2} \qquad J_i = \tfrac{1}{3} b_i t_i^3$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

مقاطع بسته:

1) $\tau = \frac{T}{2tQ}$ 2) $q = \frac{T}{2Q}$ 3) $q = \tau t$

4) $\varphi = \frac{TL}{GJ}$ 5) $J = \frac{4Q^2}{\oint \frac{ds}{t}}$

مقاطع باز:

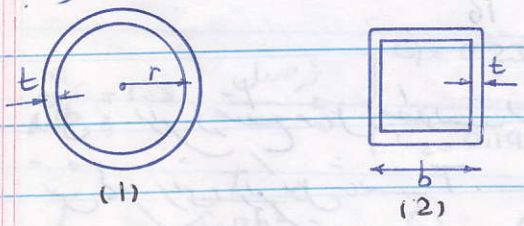
1) $\tau = \frac{T}{C_1 ab^2}$

2) $\varphi = \frac{T.L}{C_2 ab^3 G}$

مثال: دو مقطع جدار نازک لوله مربع و دایره را که تحت پیچش با ضخامت ثابت t هستند مقایسه کنید. (به شرطی که طول دو عضو یکسان باشد نسبت تنش برشی دایره به مربع چقدر است. زاویه پیچش در دایره و مربع چیست؟)

(سطح مقطع (حجم مصالح) مربع و دایره را یکسان در نظر گرفته)

$(A_1 = A_2)$




$Q_1 = \pi r^2$ $Q_2 = b^2$ $T_1 = T_2 = T$

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{T}{2tQ} = \dfrac{T}{2t\,2\pi r^2} \\ \tau_2 = \dfrac{T}{2tQ_2} = \dfrac{T}{2tb^2} \end{cases}$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow 2\pi r t = 4bt$$

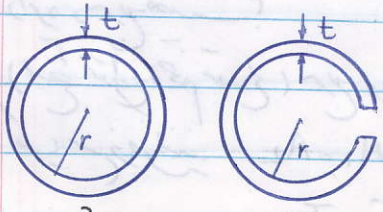
$$\Rightarrow r = \frac{2b}{\pi} \quad \text{یا} \quad b = \frac{\pi r}{2}$$

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{4Q_1^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4\pi^2 r^4}{\frac{2\pi r}{t}} = 2\pi r^3 t \\ J_2 = \dfrac{4Q_2^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4b^4}{4b/t} = b^3 t = \dfrac{\pi^3 r^3}{8} t \end{cases}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{b^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\frac{\pi^3 r^3 t}{8}}{2\pi r^3 t} = \frac{\pi^2}{16} = 0.617$$

مثال ۶: برای دو مقطع مقابل مطلوب است تنش برشی برای گشتاور $T$.



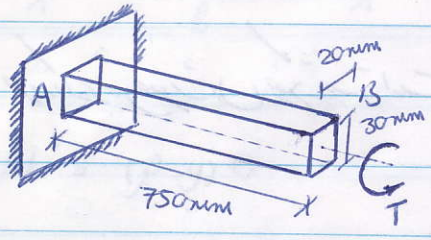

(1) (2)

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$\tau_1 = \frac{T}{2tQ} = \frac{T}{2t\pi r^2} \qquad \tau_2 = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{T}{\frac{1}{3}2\pi r t^2}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{T}{2\pi t r^2}}{\frac{3T}{2\pi r t^2}} = \frac{t}{3r}$$

مثال: کوپل آبا عث چرخش $\varphi_{AB} = 2^\circ$ در AB می شود. اگر $G = 80Gpa$ فرض شود حداکثر تنش برشی در میله را محاسبه کنید.




$$\tau = \frac{T}{c_1 ab^2} \qquad \varphi = \frac{T.L}{c_2 ab^3 G}$$

$$a = 30\,mm \qquad b = 20\,mm \qquad \varphi_{AB} = 2^\circ = 2 \times \frac{\pi}{180} = 34.9 \times 10^{-3}\ rad$$

$$\frac{a}{b} = 1.5 \xrightarrow{\text{از جدول}} \begin{cases} c_1 = 0.231 \\ c_2 = 0.1958 \end{cases}$$

$$\frac{\tau}{\varphi} = \frac{\frac{T}{c_1 ab^2}}{\frac{T.L}{c_2 ab^3 G}} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{Gb}{L} = \frac{0.1958}{0.231} \times \frac{80 \times 10^3 \times 20}{750}$$

$$\Rightarrow \tau_{Max} = 63.1\ Mpa$$

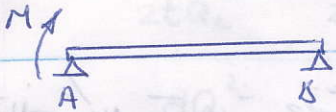
حمید کاظم

فصل چهارم:

# "خمش"

خمش خالص: در طول عضو مقدار لنگر ثابت می‌شود.

در خمش خالص برش صفر است.




هرجا برش صفر شد، لنگر ماکزیمم است.

$$Ay = By = 0$$

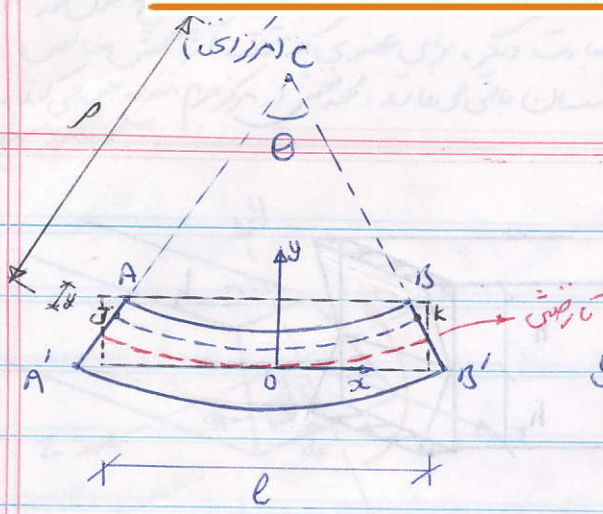
$$M = \int V dx = 0 + C = C$$

خمش انحنا تولید می‌کند.

انحنای مثبت: تارهای فوقانی فشرده شده و تارهای تحتانی کشیده می‌شود. ← خمش مثبت

انحنای منفی: تارهای فوقانی کشیده شده و تارهای تحتانی فشرده می‌شود. ← خمش منفی

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




تار خنثی تاری است که طولش در اثر خمش ثابت می‌ماند.

فاصله تار JK را از تار خنثی y فرض می‌کنیم.

y = فاصله از تار خنثی

ρ = شعاع انحنای تار خنثی

طول تار JK، $L' = (\rho - y)\theta$

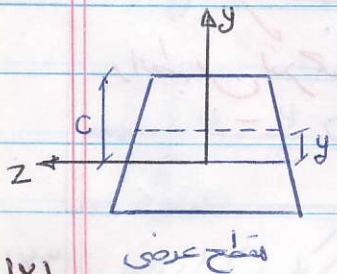
$$\delta = L - L' = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

برای y های مثبت (بالای تار خنثی) $\delta$ و $\varepsilon$ فشاری است.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} = \frac{-y}{\rho} = \frac{-1}{\rho}y$$

$\varepsilon_x$ (توزیع کرنش در مقطع)

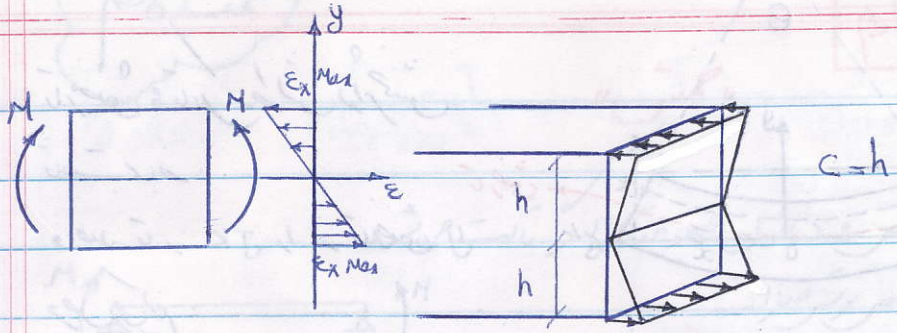
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$




مقطع عرضی

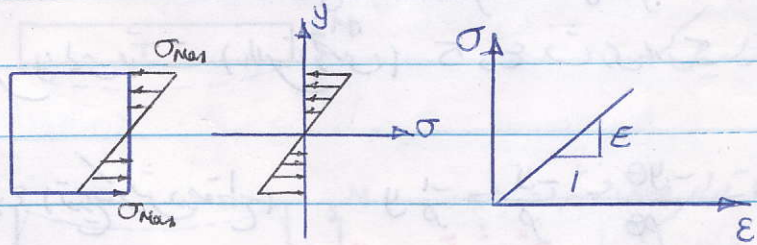
$$\varepsilon_x^{Max} = \frac{-c}{\rho}$$

بنابراین توزیع کرنش در مقطع خطی است.




$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \longrightarrow \sigma_x = \frac{-y}{\rho} E$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c} \varepsilon_x^{Max} \longrightarrow \sigma_x = \frac{y}{c} \sigma_x^{Max}$$



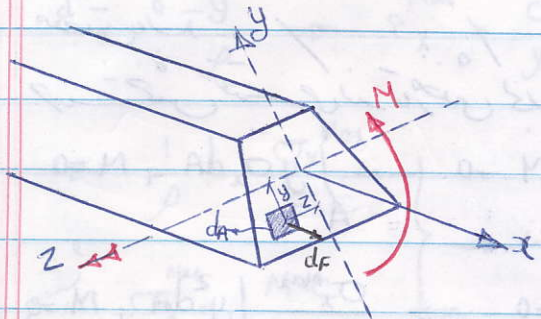

رابطه بین لنگر خمشی و رویس نرمال ، محل تار خنثی ،

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$\int_A dA = 0$ (1

... محور خنثی ... محل محور خنثی آن باید برای ماده صفر باشد. به عبارت دیگر، برای عضوی که تحت اثر خمش خالص قرار دارد و مادامی که تنش ها در ناحیه کششی باقی می مانند، محور خنثی از مرکز جرم مقطع عبور می کند.

مرکز سطح مقطع




$dF = \sigma_x dA$ (کشش)

چون برآیند نیروی کششی است.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A dF = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \int_A \frac{y}{c} \sigma_x^{Max} dA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A y\, dA = 0 \Rightarrow \int_A y\, dA = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \qquad S_x = \sum y_i A_i = \int y dA = 0$$

برای یافتن نیروی برآیند کششی:

* محل نیروی برآیند کششی از مرکز سطح عبور می کند.

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \int_A dM_y = 0 \Rightarrow \int_A z\, dF = 0 \rightarrow \int_A z.\sigma_x.dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A z.\frac{y}{c}\sigma_x^{Max} dA = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A z.y\, dA = 0 \Rightarrow I_{zy} = 0$$

* بنابراین z و y محورهای اصلی می باشند. بنابراین نیروی برآیند کششی باید بر یکی از محورهای اصلی

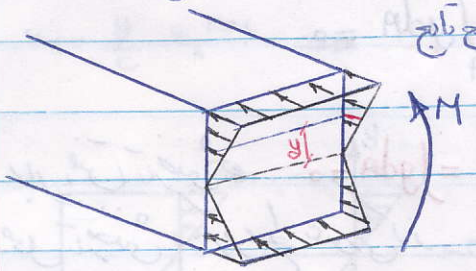
منظور شد. / / ۰۰ /
جهت خمش تغییری نداد تا خمش کلت.

$$\Sigma M_z = 0 \rightarrow \int_A y\,dF + M = 0 \rightarrow \int_A y\,\sigma_x\,dA + M = 0$$

$$\rightarrow \int_A y \frac{y}{c}\sigma_x^{Max}\,dA + M = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c}\int y^2\,dA + M = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} I_z + M = 0 \Rightarrow \sigma_x^{Max} = \frac{-M.c}{I_z}$$

* این رابطه فقط در حالتی صادق است که مصالح تابع قانون هوک باشد. در غیر اینصورت باید از رابطه بالا به نحو دیگری استفاده کنند.




$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z}$$

مدول مقطع $S = \frac{I}{c} \Rightarrow \sigma^{Max} = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{Max}}{\sigma_{مجاز}}$

← رابطه طراحی برش خمش

$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z} \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

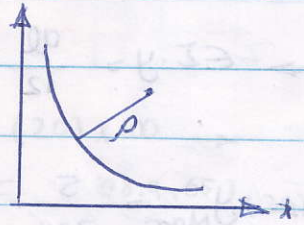
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_x^{Max} = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_x^{Max}}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x^{Max}}{E.c}$$

$$\sigma_x^{Max} = \frac{M.c}{I}$$

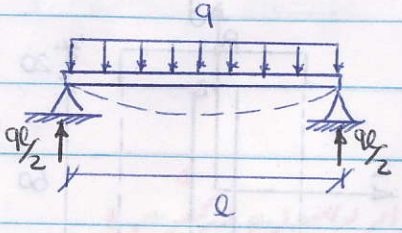
$$\rightarrow \text{یا } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (k = 1/\rho)$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$




$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \sim \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2y}{dx^2}$$




$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow EI\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI\,y = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + C_1 x + C_2$$

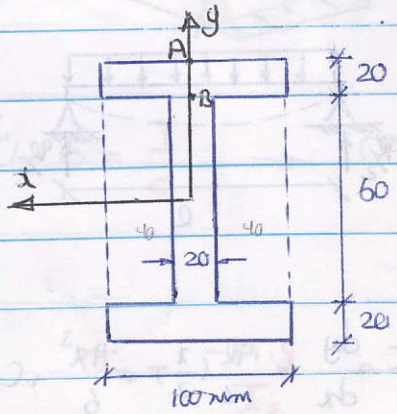
$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow C_2=0$

$x=l \rightarrow y=0 \rightarrow 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{-ql^3}{24}$

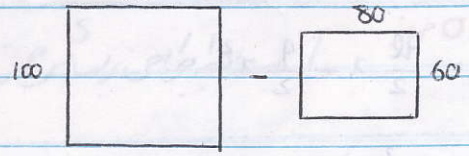
$$\rightarrow EI\,y = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{24}x$$

$$\rightarrow y_{Max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \quad at\ x = l/2$$

مثال: مقطع تیر آ شکل مطابق زیر تحت لنگر خمشی $15\,KN.m$ + قرار گیرد محاسبه کنید جمع تنش‌های عمودی قسمت فوقانی تیر وارد می‌شود حقیقت است.




$$\sigma = -\frac{M.y}{I}$$

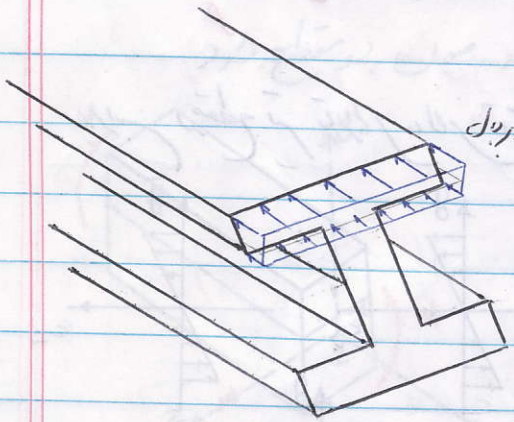


www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$I = \frac{100^4}{12} - \frac{80 \times 60^3}{12} = 6.89 \times 10^6 \ mm^4$$

$$\sigma_A = \frac{-M y_A}{I} = -\frac{15 \times 10^6 \times 50}{6.89 \times 10^6} = -108.9 \ Mpa$$

$$\sigma_B = \frac{3}{5} \sigma_A = -65.3 \ Mpa$$

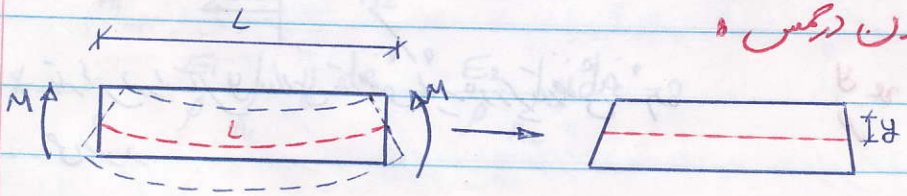


$$\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} (20) \times 100 \rightarrow$$

نیروی فشاری در هر بال $F = -\frac{108.9 + 65.3}{2}(20)(100)$

$$= 174.2 \ kN$$

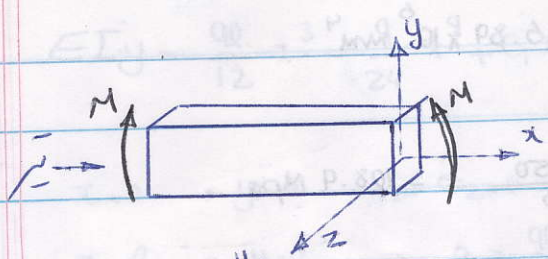
اثر نیروی اسون در خمش



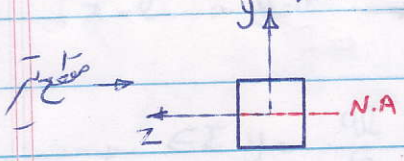

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

نکته 8: روابط $\varepsilon_z = \varepsilon_y = \nu \frac{y}{\rho}$ نشان می‌دهند که اجزای واقع در بالای سطح خنثی ($y>0$) در هر دو جهت $y$ و $z$ انبساط پیدا می‌کنند. (کشش). در صورتیکه اجزای زیر تار خنثی ($y<0$) منقبض می‌گردند.

مقطع تیر به صورت مقابل است.



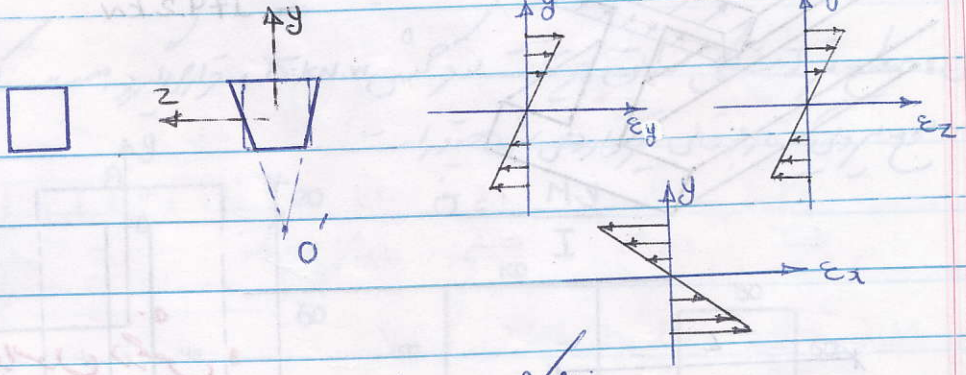

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| \longrightarrow \varepsilon_y = -\nu . \varepsilon_x$$




$$\varepsilon_z = -\nu . \varepsilon_x$$

$$\longrightarrow \varepsilon_z = \nu \frac{y}{\rho}$$

بنابراین در مقطع تیر تارهای بالای تار خنثی کشش و در زیر تار خنثی فشاری است.



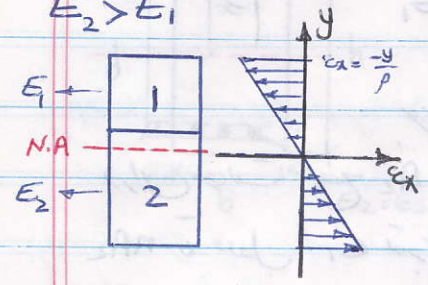

* تارهای دوراستای $y$ بالای تار خنثی کشیده و زیر تار خنثی فشرده می‌شود.

$$\varepsilon_y = \nu \frac{y}{\rho}$$

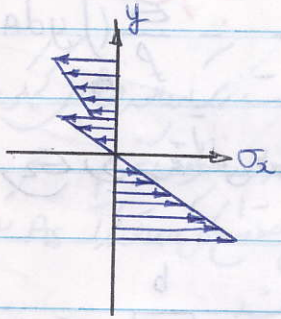
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## خمش مقاطع مرکب

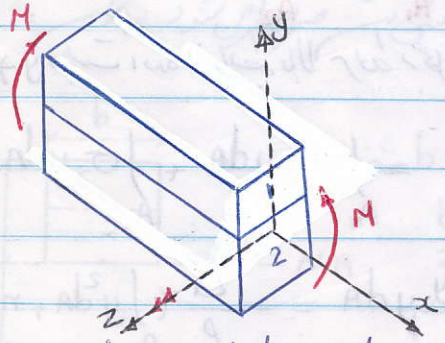
$E_2 > E_1$




$\sigma_x = E\varepsilon_x$




در اینجا $\sigma_x = \frac{y}{c}\sigma_{max}$ صادق نیست. چون دو مقطع دارد.




$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow \int \sigma_x dA = 0$$

$$\rightarrow \int_{A_1} \sigma_x dA + \int_{A_2} \sigma_x dA = 0$$

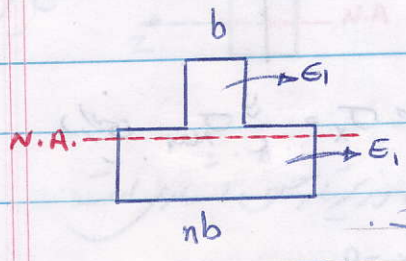
$$\rightarrow \int_{A_1} -E_1 \frac{y}{\rho} dA + \int_{A_2} -E_2 \frac{y}{\rho} dA = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{E_1}{\rho}\int_{A_1} y\, dA - \frac{E_2}{\rho}\int_{A_2} y\, dA = 0$$

فرض می‌کنیم $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = n$

$$\Rightarrow -\frac{\epsilon_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} ny\,dA\right) = 0$$

در این حالت مقطع $A_2$ را که دارای مدول ارتجاعی $\epsilon_2$ بود به مقطعی معادل با $nA_2$ با مدول $\epsilon_1$ تبدیل کردیم.




$$-\frac{\epsilon_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} y\,d(nA_1)\right) = 0$$

* $y$ بدست آمده از رابطه بالا مربوط به محل تار خنثی است.

$$\Sigma M_z = 0 \rightarrow M = \int \sigma_x y\,dA = \int_{A_1} \sigma_x y\,dA + \int_{A_2} \sigma_x y\,dA$$

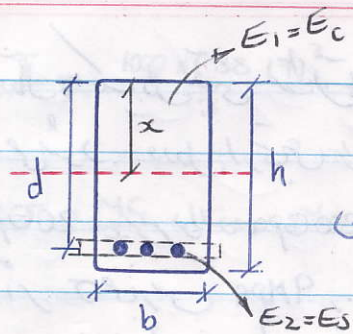
$$\rightarrow M = \int_{A_1} \frac{\epsilon_1 y}{\rho} y\,dA + \int_{A_2} \frac{\epsilon_2 y}{\rho} y\,dA = -\frac{\epsilon_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y^2 dA + n\int_{A_2} y^2 dA\right)$$

$$= -\frac{\epsilon_1}{\rho}(I_1 + nI_2) \qquad M = -\frac{\epsilon_1}{\rho}\underbrace{(I_1 + nI_2)}_{I_{کل}}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $y$ بنده $n$ برابر شود و $b$ بنده $n$ برابر شود.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## تیر بتن مسلح

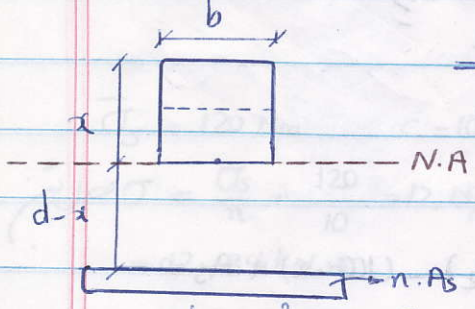



قسمت زیر آرماتور فولادی کمکی از لحاظ سازه‌ای ندارد. بنابراین آن را در نظر نمی‌گیریم.

از سطح مقطع کل آرماتور را $A_s$ تبدیل مقطع معادل $n.A_s$ می‌باشد.

$$\frac{E_s}{E_c}=10=n$$

در حالت تعادل مقطع بتن مسلح از قسمت کششی بتن صرفنظر می‌شود بنابراین:




$$S_x=\sum y_i A_i=0$$

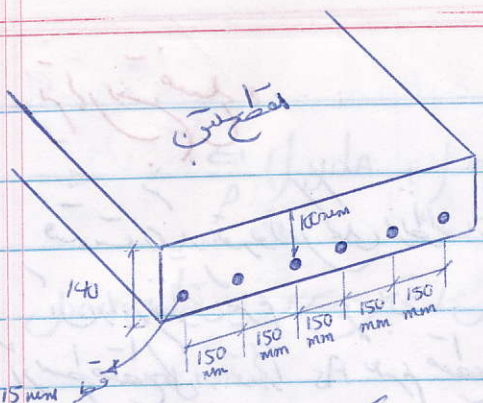
$$\Rightarrow b.x.\frac{x}{2}-n.A_s(d-x)=0$$

$$\frac{b}{2}x^2+nA_s x-nA_s d=0$$

* چون بتن کشش را تحمل نمی‌کند، قسمت کششی آرماتور فولادی قرار می‌دهند.

نکته: اگر مقطع مرکب از دو مقطع 1 و 2 تشکیل شده باشد که $\frac{E_2}{E_1}$ برابر n شود، مقطع 2 را در جهت عمود بر محور y ها n برابر می‌کنیم تا سطح 2، n برابر شود. حال فرض می‌کنیم کل مقطع دارای مدول ارتجاعی $E_1$ است. در این حالت برای مقطع جدید $\sigma_1$ را بدست می‌آوریم. چون طبق رابطه $\sigma=E\varepsilon$ می‌

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{E_2}{E_1}=n$$



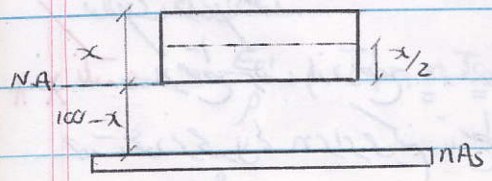

مثال: یک دال بتنی مطابق شکل مسلح می‌شود. مدول ارتجاعی برای بتن 20Gpa و برای فولاد 200Gpa می‌باشد. اگر $\sigma$ مجاز بتن 9Mpa و $\sigma$ مجاز فولاد 120Mpa فرض شود، مطلوبست حداکثر گشتاور خمشی که بتواند به ۱m عرض این دال اعمال کرد.

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{20} = 10$$

تعداد میل گردهای هر متر عرض دال $= \frac{1}{0.15} = 6.667$ عدد

$$A_s = 6.667 \times \pi \times \frac{15^2}{4} = 1.178 \times 10^3 \ mm^2$$

$$nA_s = 10\,(1.178 \times 10^3) = 1.178 \times 10^4 \ mm^2$$




$$1000x\,(x/2) - (100-x)\,n.A_s = 0$$

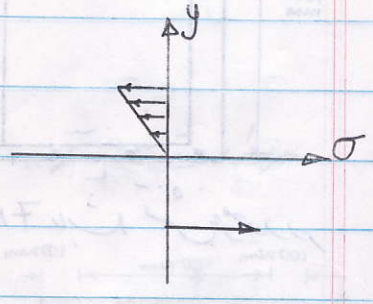
$$\rightarrow x = 38.17 mm$$

$$\rightarrow 100 - x = 61.83 mm$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$I = \frac{1000 \times (38.17)^3}{3} + 1.178 \times 10^4 \times (61.83)^2 + I_{0,\text{فولاد}} = 63.57 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{MC}{I} \rightarrow M = \sigma \cdot \frac{I}{C}$$




۱) کنترل مقطع برای تنش فشاری مجاز بتن:

$$M_{Max} = \bar{\sigma}_c \cdot \frac{I}{c} = 9 \times \frac{63.57 \times 10^6}{38.17} \times 10^{-6} = 14.99 \text{ KN.m}$$

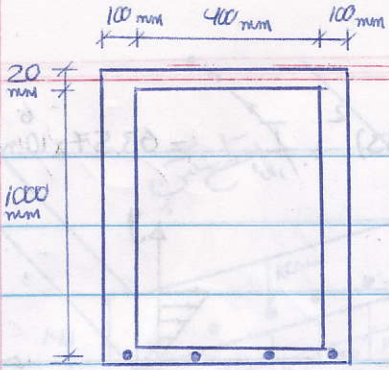
۲) کنترل مقطع برای تنش مجاز فولاد:

$\bar{\sigma}_s = 120$ Mpa  $C = 100 - x = 61.83$ mm

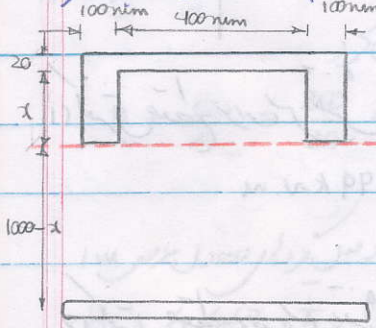
$$\sigma = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{120}{10} = 12 \text{ Mpa} \rightarrow M_{Max} = \bar{\sigma} \cdot \frac{I}{c} = 12 \times \frac{63.57 \times 10^6}{61.83} \times 10^{-6} =$$

$$= 12.34 \text{ KN.m}$$

$$M_{Max} = \text{Min}(14.99, 12.34) = 12.34$$




مثال: مقطع کامپوزیت مسلح حمام مستطیل به صورت متقارن می باشد. سطح مقطع مجموع میل گردهای کششی برابر $3600\,mm^2$ و $n=10$ فرض می گردد. حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی $7\,N/mm^2$ باشد تنش مجاز در میل گردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع را محاسبه کنید.




$A_s = 3600\,mm^2 \rightarrow nA_s = 36000\,mm^2$

$S_x = 0 \rightarrow \sum y_i A_i = 0$

$-(x+10)(20\times600) + x/2\,(100x)\times2 - (1000-x)(36000) = 0 \rightarrow x = 405.29\,mm$

$\rightarrow I = \frac{600(20)^3}{12} + (415.29)^2(20\times600) + 2\left(\frac{100(405.29)^3}{3}\right) + (594.71)^2(36000)$

$\rightarrow I = 4\times10^5 + 20695.89\times10^5 + 44381.95\times10^5 + 127324.79\times10^5$

$\rightarrow I = 192406.63\times10^5\,mm^4$

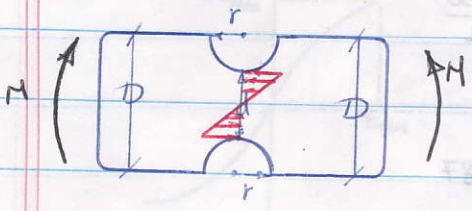
$(\sigma_{all})_c = 7\,N/mm^2 \rightarrow \sigma_s = 70\,N/mm^2$

بتن: $7\,\frac{N}{mm^2} = \frac{M(425.29)\,mm}{192406.63\times10^5\,mm^4} \Rightarrow M = 316.69\,kN.m$

فولاد: $70\,\frac{N}{mm^2} = \frac{M(594.71)\,mm}{192406.63\times10^5\,mm^4} \Rightarrow M = 2264.7\,kN.m$

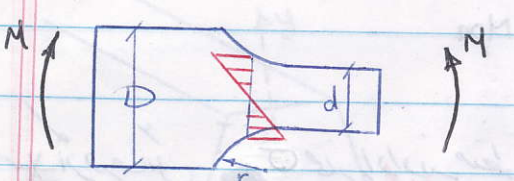
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## تمرکز تنش در المان‌ها

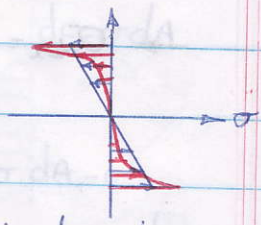



$\sigma_{Max} = k\,\sigma_{avg}$

$\sigma_{avg} = \frac{Mc}{I}$ → مربوط به تنش متوسط تیر

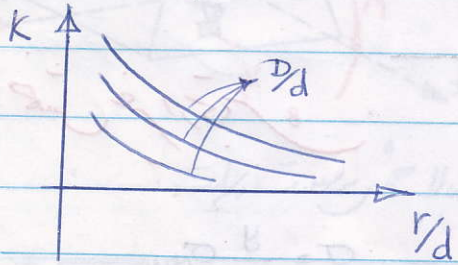



$\sigma_{Max} = k\,\sigma_{avg}$

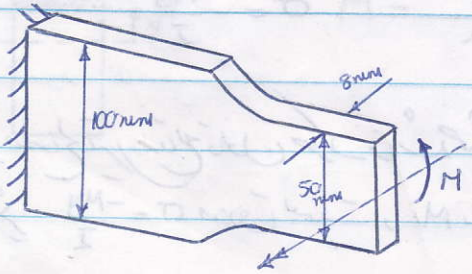


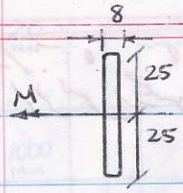

در سطح دو نمودار باید برابر باشد

شکستگی فقط توزیع تنش را تحت تاثیر قرار می‌دهد.




مثال ۶ اگر $M = 350\,N.m$ باشد مطلوبست حداکثر تنش وارد شده روی المان اگر $r = 5\,mm$ باشد.






$$\sigma_{avg} = \frac{MC}{I} = \frac{350 \times 10^3 \times 25}{\frac{8 \times 50^3}{12}} = 105 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{Max} = k\,\sigma_{avg}$$

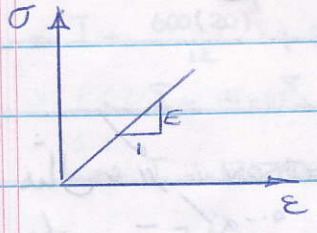
$$\frac{D}{d} = 2 \quad \frac{r}{d} = 0.1 \longrightarrow k = 1.87$$

$$\longrightarrow \sigma_{Max} = 1.87 \times 105 = 196 \text{ Mpa}$$

* اگر در صورت سئوال تنش مجاز را ندهد منظور $\sigma_{Max}$ است

---

## تمرکز تنش غیر ارتجاعی

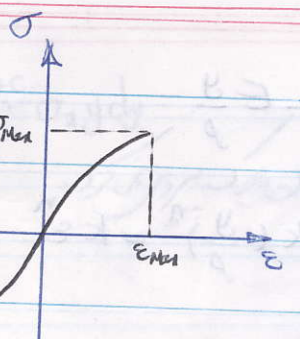


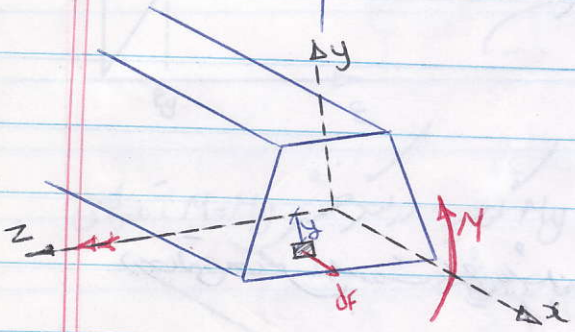

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad \sigma = \frac{y}{c}\,\sigma_{Max}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

اگر مصالح تیر تابع قانون هوک نباشد تمرکز ایجاد شده غیر ارتجاعی است.
و دیگر $\sigma = \frac{-My}{I}$ صادق نیست، M به صورت زیر بدست می آید.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران



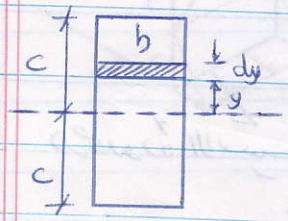

$$\Sigma M_z = 0 \qquad dF = \sigma dA$$

$$M + \int y\,dF = 0$$

$$\rightarrow M + \int y\sigma . dA = 0$$

$$\rightarrow M = -\int y\sigma . dA$$

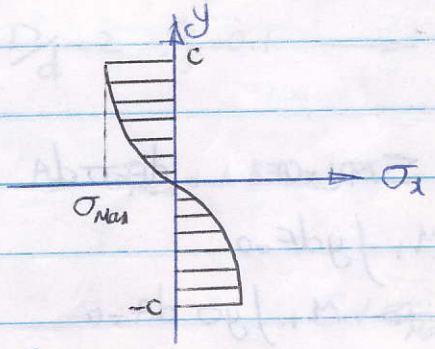
برای مقطع زیر با توجه به نمودار $\sigma - \varepsilon$ داده شده رابطه لنگر به صورت زیر است.



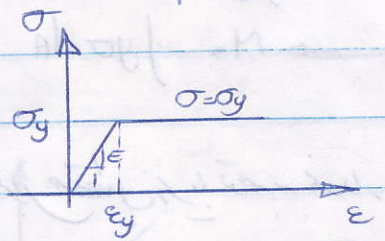

$$M = -\int y\sigma dA = -b\int_{-c}^{+c} \sigma . y . dy$$

برای الاستیک خطی ← $\sigma_x = -E\frac{y}{\rho}$

در حالت کلی ← $\sigma_x = k\left(\frac{y}{\rho}\right)^n = k\varepsilon^n$




در حالتی خاص به صورت زیر می باشد.




---

در محدوده الاستیک خطی

$$\sigma_{Max} = \frac{-MC}{I}$$

$$\sigma = \frac{-My}{I}$$

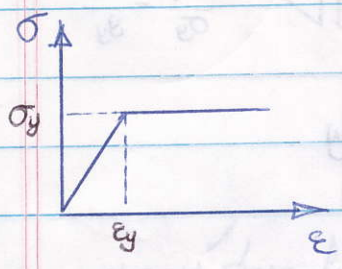
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

در جلسه قبل برای مقطع گفتیم:

$$M = -b\int_{-c}^{+c} \sigma_x y\, dy$$

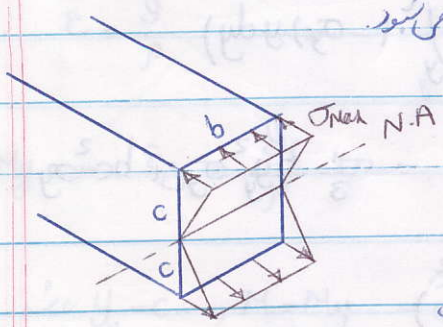
که از قانون هوک پیروی می‌کرد.

رفتار الاستو - پلاستیک (دوگسش):




همین تنش در دورترین تارها بیشتر است نسبت به بقیه این تارها زودتر جاری می‌شوند.

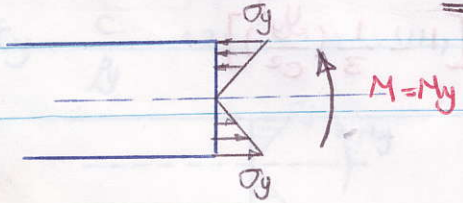
گیریم که اولین جاری شدن را دارد $M_y$ گویند. در لنگر خمشی $M=M_y$ تارهای فوقانی (دورترین تار نسبت به تار خنثی) جاری می‌شود.

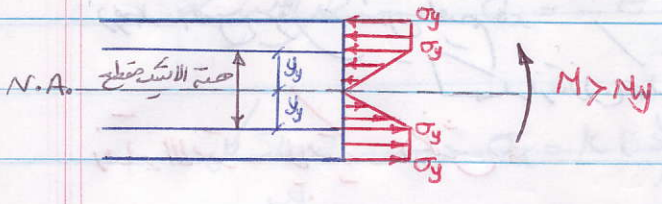



$$\sigma_{Max} = \sigma_y = \frac{M_y \cdot c}{I} \quad ; M=M_y \quad (1$$

که $I = \frac{b(2c)^3}{12} = \frac{2}{3}bc^3$

$$\Rightarrow M_y = \frac{2}{3} bc^2 \sigma_y$$






$$M = -b\int_{-c}^{c} \sigma_x y\,dy = -2b\int_{0}^{c} \sigma_x y\,dy$$

$$= -2b\left(\int_{0}^{y_y} \sigma_x y\,dy + \int_{y_y}^{c} \sigma_x \cdot y\,dy\right)$$

$$= -2b\left(\int_{0}^{y_y} \left(\frac{-y}{y_y}\cdot\sigma_y\right) y\,dy + \int_{y_y}^{c} (-\sigma_y)\, y\,dy\right)$$

$$= \frac{2}{3} b y_y^2 \sigma_y + bc^2\sigma_y - by_y^2\sigma_y = \frac{-1}{3} by_y^2\sigma_y + bc^2\sigma_y$$

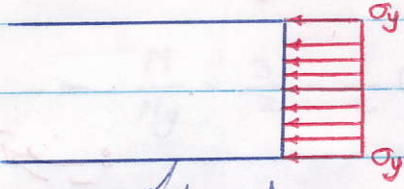
$$\Rightarrow M = bc^2\sigma_y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_y^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{3}{2} My\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y^2}{c^2}\right)\right]$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

3) $M = M_p$

$M_p$ حداکثر لنگری که تیر می‌تواند در مقطع وارد کرده و در این صورت مقطع دچار تسلیم می‌گردد.

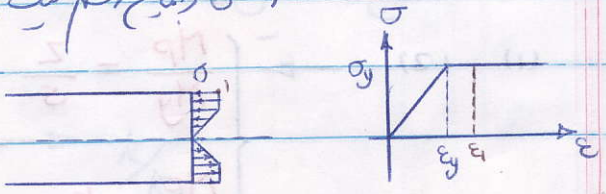



$y_y = 0$

$M_p = \frac{3}{2} M_y$

* رابطه کلی $M_p = k M_y$ است که $k$ را shape factor نیز برای مستطیل $\frac{3}{2}$ است.

$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ ← (منفی برایش مهم نیست)

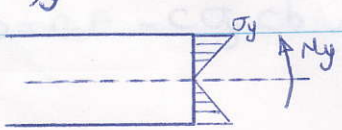



$M > M_y \rightarrow \varepsilon_y = \frac{y_y}{\rho}$ (1)

$\rho_y$ شعاع انحنای تغییر شکل مقطع هنگامی که $M = M_y$ و $y_y = c$ باشد.

$M = M_y$ & $\varepsilon_y = \frac{c}{\rho_y}$ (2)

(1), (2) $\rightarrow \frac{y_y}{\rho} = \frac{c}{\rho_y} \rightarrow \frac{y_y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y}$



$\rho < \rho_y$ می‌باشد.

$$\frac{y_y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y} \longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_y}\right)^2\right]$$

تعریف:

(1) $\frac{M_p}{\sigma_y} = Z$ مدول پلاستیک مقطع

$\frac{M}{\sigma} = S$ مدول الاستیک مقطع $\longrightarrow \frac{M_y}{\sigma_y} = S$ (2) $\left(\frac{I}{c} = \frac{M}{\sigma} = S\right)$

(1) , (2) $\longrightarrow \begin{cases} \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{S} \\ \frac{M_p}{M_y} = k \end{cases} \longrightarrow \frac{Z}{S} = k \longrightarrow$ ضریب شکل سطح مقطع

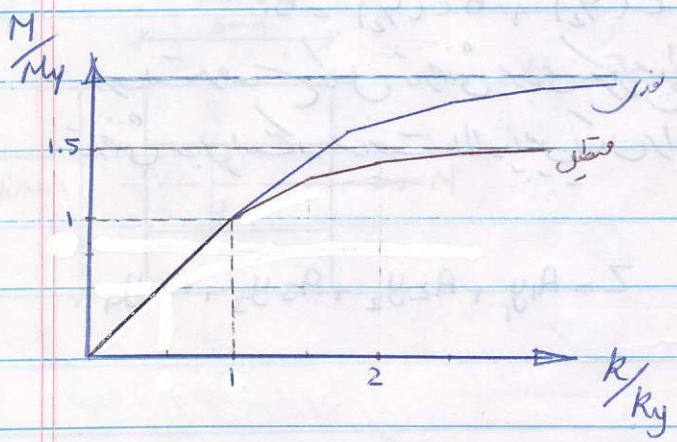
k برای مقطع I شکل 1.15 و برای دایره 1.7 می‌باشد.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$\frac{1}{\rho} = k \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\rho_y} = k_y$$

$$\rightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{k_y}{k}\right)^2\right]$$

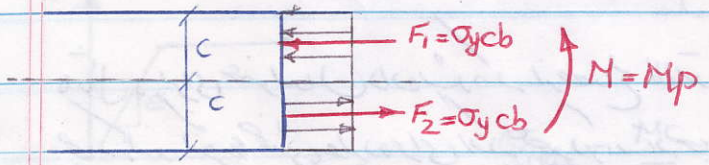
$$\rightarrow \frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k_y}{k}\right)^2$$




مقطع مستطیل:

---

روش حدی یا کامل:




$F_1 = F_2 = F$

$$M_p = c.F = c\sigma_y cb = bc^2\sigma_y$$

حالت کلی:

$F_1 = b_1 c_1 \sigma_y \quad F_2 = b_2 c_2 \sigma_y \quad (F_1 = A_1 \sigma_y \; ; \; F_2 = A_2 \sigma_y)$

$\rightarrow M_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = b_1 c_1 y_1 \sigma_y + b_2 c_2 y_2 \sigma_y = A_1 y_1 \sigma_y + A_2 y_2 \sigma_y$

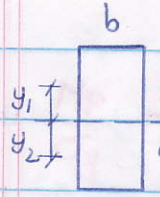
$\rightarrow M_p = \sigma_y (A_1 y_1 + A_2 y_2) \rightarrow Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$

$M_p = Z \sigma_y \Rightarrow Z = bc^2$

روابط کلی:

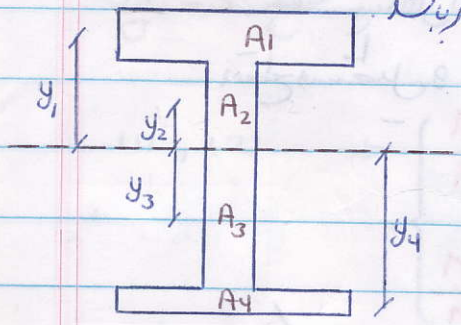
$Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$

$\rightarrow M_p = (A_1 y_1 + A_2 y_2) \sigma_y$




$Z = b.c(c/2) + b.c(c/2) = bc^2$

روابط موجود کامل نادرستی نیروی مرکز سطح است بلکه نادرستی جایی است که مساحت بالا و پایین آن برابر باشد.




$Z = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4$

مثال: برای عضو نشان داده شده که از مصالح الاستو-پلاستیک تشکیل شده است می‌خواهیم لنگر خمشی وارده را برای اینکه عضو کرنش خمیری شدن قرار گیرد. مطلوب است لنگر هسته الاستیکی، اگر ضخامت عضو 6mm باشد.

$\sigma_y = 300 Mpa \quad E = 200 Gpa$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

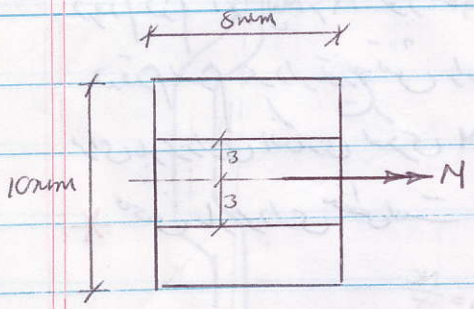
$\sigma_y = 300\,Mpa \qquad E = 200\,Gpa$

$M \geq M_y \rightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$

$b = 8\,mm \qquad c = 5\,mm$

$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y = \frac{2}{3} \times 8 \times (5)^2 \times 300 = 40\,N.m$

$2y_y = 6\,mm \rightarrow y_y = 3\,mm$

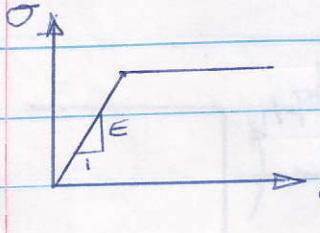



$M = \frac{3}{2} \times 40 \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^2\right] = 52.8\,N.m$

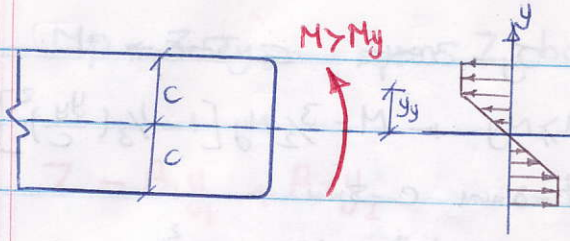
---

تنش پسماند در جسم

مدل ماده به صورت زیر می باشد.




$\sigma_{Max} = \frac{Mc}{I} \qquad \sigma_y = \frac{M_y c}{I}$




نمودار توزیع تنش در بارگذاری

$$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y$$

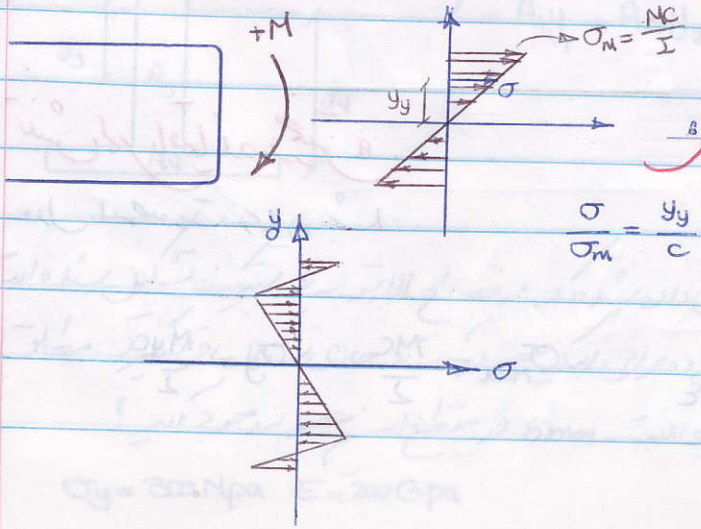
در قدم اول $M_y$ را حساب می‌کنیم.

در قدم دوم اگر $M > M_y$ بود حتماً الاستیک را رسم می‌کنیم. $M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$

در قدم سوم نمودار توزیع تنش را رسم می‌کنیم.

برای باربرداری انگاری لنگری $M$ به مقطع وارد می‌کنیم.

* یعنی باربرداری خطی است. پس توزیع تنش در باربرداری خطی است.



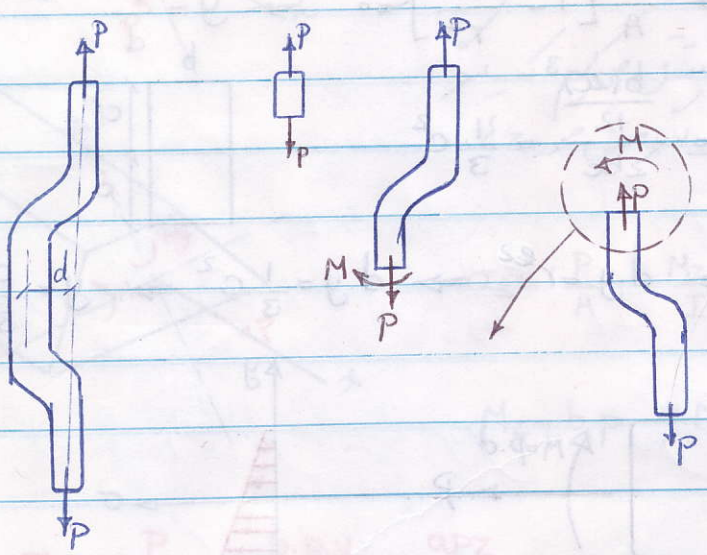

نمودار توزیع تنش در باربرداری

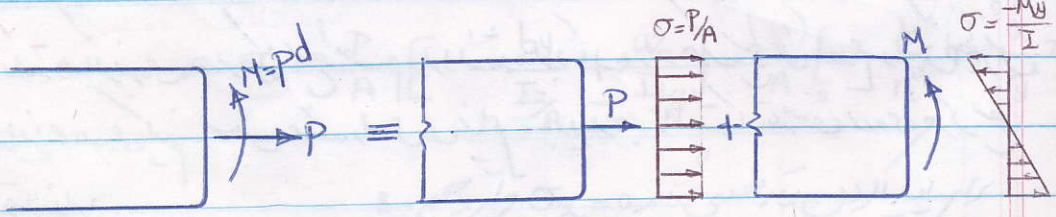
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## بارگذاری خارج از محور

در عمل بار هیچگاه در مرکز مقطع وارد نمی شود.

دو نوع خروج از مرکزیت داریم. ۱) خروج از مرکزیت بار ۲) خروج از مرکزیت تغذیه.

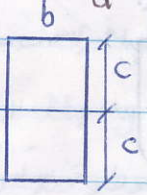


$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{I/A}\right] \qquad I/A = r^2$$

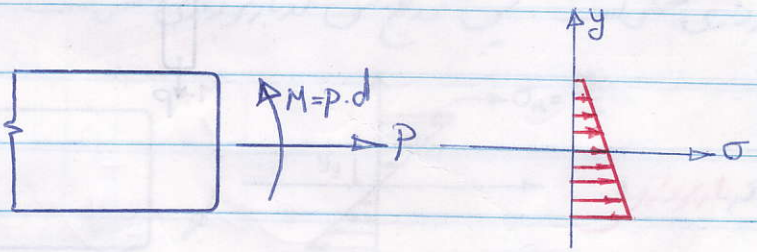
برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma = 0$ باشد.

$$\sigma = 0 \rightarrow \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{r^2}\right] = 0 \Rightarrow y = \frac{r^2}{d}$$




$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{b(2c)^3}{12}}{2bc} = \frac{1}{3}c^2$$

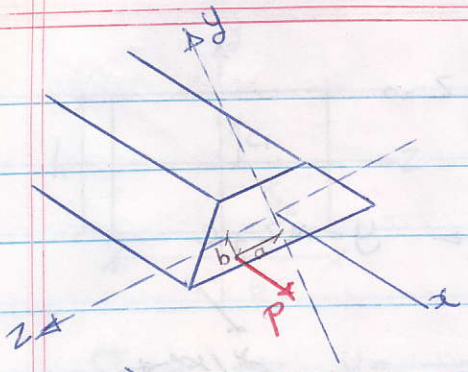
$$\sigma = 0 \Rightarrow d.y = r^2 \Rightarrow d.y = \frac{1}{3}c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{3d}$$




نکته ۸ اگر نیروی P بر مرکز سطح جسم وارد نشده بود آن را به مرکز سطح می آوریم و لنگر تغییر را نیز محاسبه می کنیم. سپس مسئله را حل می نمائیم. باید توجه داشت که تار خنثی بر روی مرکز سطح قرار ندارد.

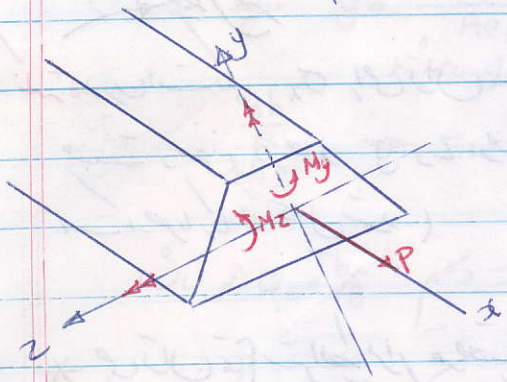
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## بارگذاری خارج از محور :




می خواهیم معادله تنش را برای مقطع مقابل بنویسیم.

بار را در مرکز ثقل منتقل می کنیم. یک لنگر حول محور y و یک لنگر حول محور z خواهیم داشت.




$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

$$M_z = b.p \qquad M_y = a.p$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{b.p.y}{I_z} + \frac{apz}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{by}{I_z/A} + \frac{az}{I_y/A}\right] = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{b}{r_z^2}y + \frac{a}{r_y^2}z\right]$$

برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma_x = 0$ قرار دهیم.

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow r - \frac{b}{r_z^2} y + \frac{a}{r_y^2} z = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{b} \frac{I_z}{I_y} z + \frac{r_z^2}{b} \rightarrow y = mz + c$$

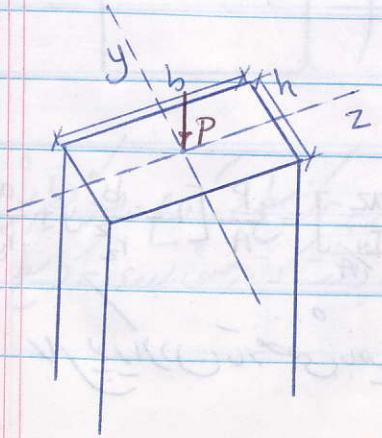
معادله خط خنثی

نکته: در حالت کلی $\sigma_x$ را می‌توان به صورت زیر نوشت. در این حالت علامت‌ها مهم است و منفی در خود $y$ و $z$ وجود دارد و باید لحاظ شود (اما بهترین راه این است که هر بار کاملاً تحلیل شود.)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

* می‌توان تمام شرایط برای موقعیت نیروی $P$ را بررسی نمود.

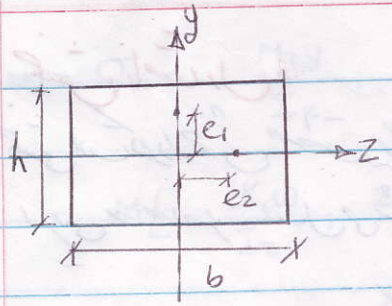
مثال: فرار خروج از مرکزیت $P$ چقدر باشد که ستون به کشش نیفتد؟




در این حالت تار خنثی روی لبه قرار دارد. یعنی صفحه تنش با صفحه مقطع ستون روی لبه گیردار قطع می‌کند. حال $P$ را به صورتی می‌یابیم تا لبه تار باشد.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

مرکز کشش سقف:




$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh$$

$$\sigma_x = \frac{-P}{A} - \frac{P e_1 y}{I}$$

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow y = -\frac{I}{A e_1}$$

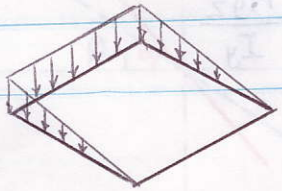
برای آنکه تاریخ‌ترین نقطه کشش باشد $y = -h/2$ باشد.

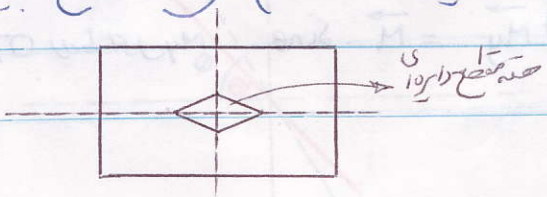
$$-\frac{h}{2} = -\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh e_1} \Rightarrow e_1 = \frac{h}{6}$$

به همین ترتیب اگر P را روی محور z حرکت دهیم $e_2 = b/6$ می‌شود.

بنابراین محل حضور نقاطی که بار محوری فشاری در آن نقاط خارج گردد تا مقطع دچار کشش نشود لوزی با قطر $\frac{b}{3}$ و $\frac{h}{3}$ است.

* این مسئله در ستون‌های بتنی مسلح بسیار مهم است که ستون به کشش نیفتد.

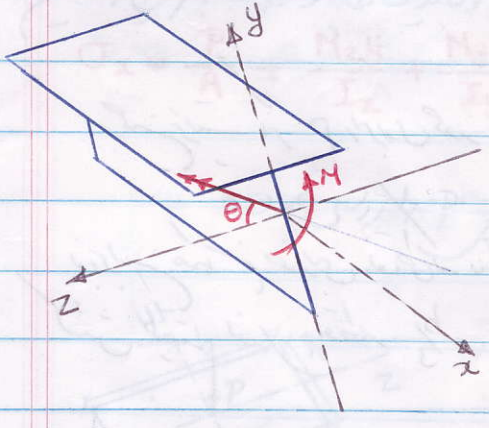


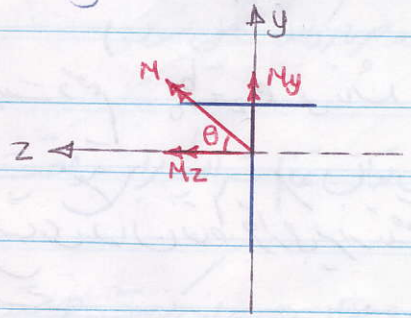


## خمش نامتقارن:

خمشی است که در آن لنگر خمشی منطبق بر محورهای اصلی مقطع نباشد. در این حالت تمام المان‌های مقطع تحت تنش قرار می‌گیرند.

۱) محورهای اصلی مقطع را پیدا می‌کنیم. ۲) بردار لنگر را بر این محورها تجزیه می‌کنیم.
۳) از فرمول $\sigma = \frac{My}{I}$ برای هر مولفه لنگر تنش را حساب می‌کنیم. ۴) با استفاده از روش جمع آثار تنش‌ها را با هم جمع می‌کنیم.




$$\begin{cases} \vec{M_z} = \vec{M}\cdot\cos\theta \\ \vec{M_y} = \vec{M}\cdot\sin\theta \end{cases}$$

$M_z$ توانست ایجاد $\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$

$M_y$ توانست ایجاد $\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y}$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = -\frac{M\cos\theta\, y}{I_z} + \frac{M\sin\theta\, z}{I_y}$$

$$= M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] \qquad \sigma_x = M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right]$$

معادله تار خنثی مقطع با توجه به $\sigma_x = 0$ بدست می‌آید.

$$\sigma_x = 0$$

$$\Rightarrow M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] = 0 \Rightarrow y = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \cdot z$$

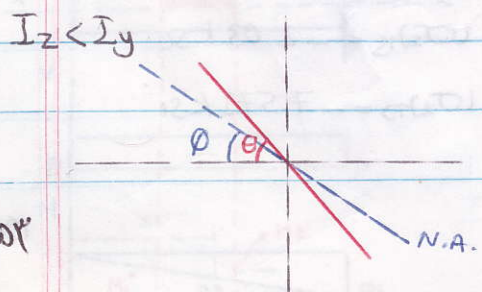
معادله تار خنثی

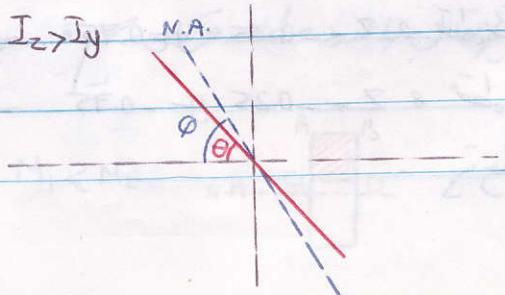
$$y = mz \qquad \leftarrow \qquad \frac{I_z}{I_y}\tan\theta = m$$

در رابطه $m = \tan\phi$ قرار داده است. ($\phi$ زاویه بین محور خنثی و محور z می‌باشد)

$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right) \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right)$$

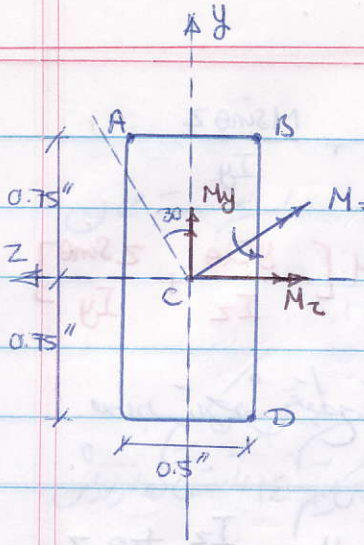
اگر $I_z = I_y$ باشد نقطه خاصی در مقطع بردار نخواهد.



10, 16, 24, 28, 42, 49, 50, 56, 58, 60, 68, 72, 84, 88, 106, 110, 116, 123, 130
148, 159, 168, 204

مثال: معادلات مقادیر تنش در نقاط A و B، و نیز نقاط C و D در تیر زیر را محاسبه کنید.




$$M_z = M\cos 30 = 600 \times \cos 30 = 520 \text{ lb.in}$$

$$M_y = M\sin 30 = 600 \times \sin 30 = 300 \text{ lb.in}$$

$$I_z = \frac{0.5 \times 1.5^3}{12} = 0.1406 \text{ in}^4$$

$$I_y = \frac{1.5 \times 0.5^3}{12} = 0.01563 \text{ in}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{520\,y}{0.1406} + \frac{300\,z}{0.01563}$$

A نقطه ی $Z = 0.25 \quad y = 0.75 \Rightarrow (\sigma_x)_A = 7573 \text{ psi} = 7.573 \text{ ksi}$

$\text{psi} = \text{lb/in}^2$

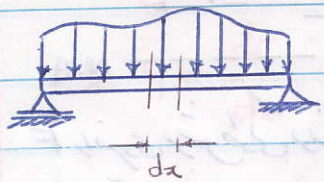
B نقطه ی $Z = -0.25 \quad y = 0.75 \Rightarrow (\sigma_x)_B = -2.03 \text{ ksi}$

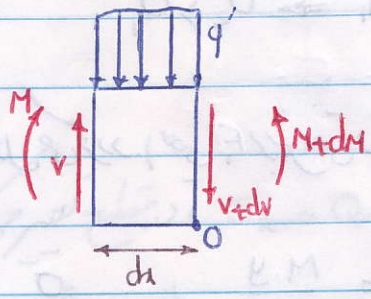
D نقطه ی $Z = -0.25 \quad y = -0.75 \Rightarrow (\sigma_x)_D = -7.573 \text{ ksi}$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

فصل پنجم

## بارگذاری جانبی (برش)




$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow -M - V dx + q' dx\left(\frac{dx}{2}\right) + (M + dM) = 0$$

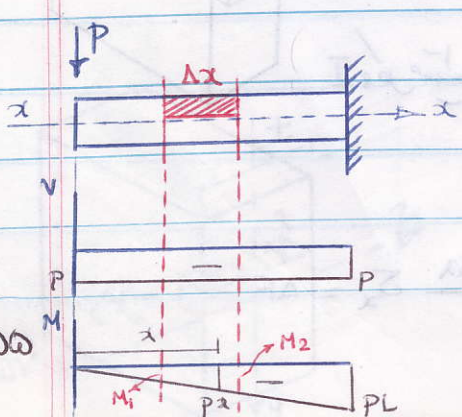
$$\Rightarrow -V dx + \frac{q'}{2} dx^2 + dM = 0$$

$$\Rightarrow -V dx = dM \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

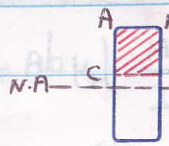
$$M = \int V dx \rightarrow M_2 - M_1 = \int_{(1)}^{(2)} V dx$$

برش وقتی وجود دارد که خمش تغییر باشد

تیر مقابل را تحت حرکت دهید



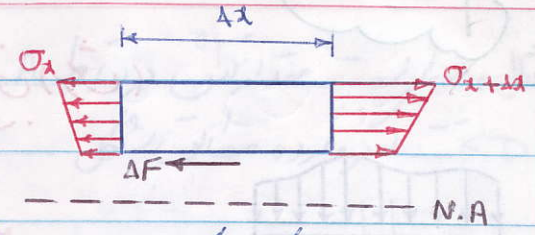

$M_1 < M_2$




مقطع تیر

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

$M_2 > M_1 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$



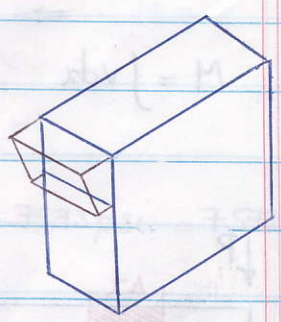

F برآیندی برشی طولی تولید کرده باعث تعادل می‌گردد. (یعنی Q برشی یعنی در واقع طول است)

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} \qquad \sigma_{x+\Delta x} = \frac{(M+\Delta M) \cdot y}{I}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \int_{AKCO} \sigma_x \, dA + \Delta F - \int_{AKCO} \sigma_{x+\Delta x} \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{AKCO} (\sigma_x - \sigma_{x+\Delta x}) \, dA + \Delta F = 0$$

$$\Rightarrow \int_{AKCO} \frac{(M - M - \Delta M) y}{I} \, dA = -\Delta F$$



I ثابت مقطع

$$\Rightarrow \frac{-\Delta M}{I} \int y \, dA = -\Delta F$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{I} \int y \, dA = \Delta F \rightarrow \frac{V \Delta x}{I} S_x = \Delta F$$

$(S_x = Q)$

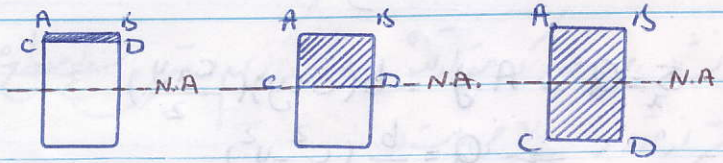
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

Q لنگر استاتیک سطح واقع در بالا یا پایین تراز محور خنثی برای هر نقطه Q است که در حول محور خنثی کل مقطع محاسبه می شود.

$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{V S_1}{I} \Rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{V S_1}{I}$$

$$\Rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$$

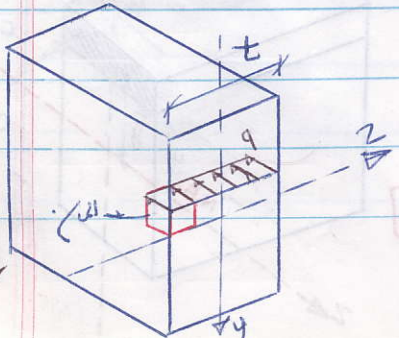
$S_1 = Q = \int y\,dA$ ، در مقطع تغییر می کند.



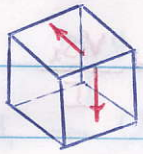

$Q_{Min}$ $Q_{Max}$ $Q=0$

در طول $\frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$ ، V نیروی برشی مقطع ثابت است و I نیز ثابت می باشد.

q ، F نیز نیروی برشی در طول می باشد.



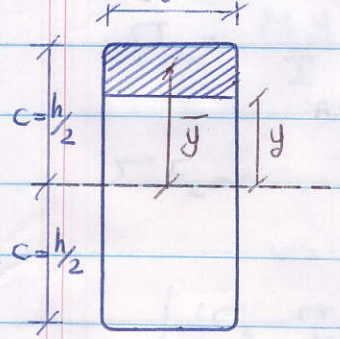

$$\tau = \frac{dF}{dx.t} \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$



تنش برشی عرضی مقطع با تنش برشی طول برابر است.

$$\tau_{\text{تنش برشی مقطع}} = \tau_{\text{تنش برشی طول}} = \frac{VQ}{It}$$

مقطع مستطیلی را در نظر می‌گیریم:




$$S_x = Q = A.y = b(c-y)\left(\frac{c+y}{2}\right)$$

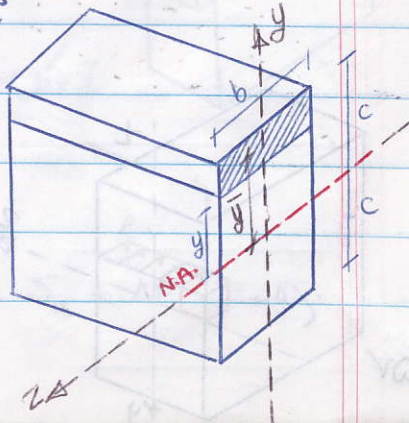
$$\Rightarrow Q = \frac{b}{2}(c^2-y^2)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{bc^2}{2}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3}bc^3$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{V\frac{bc^2}{2}}{\frac{2}{3}bc^3 b}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3V}{4cb}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$



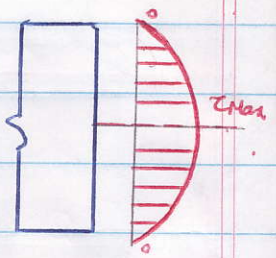

۱۵۸

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

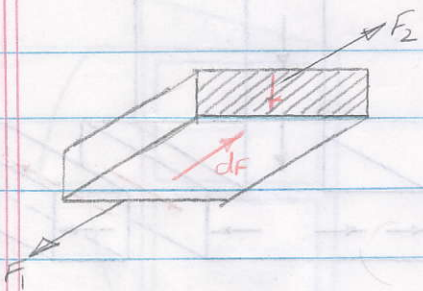
$0 \leq y \leq c$

$y = 0 \longrightarrow \tau_{Max} = \frac{3V}{4bc} = \frac{3V}{2A}$

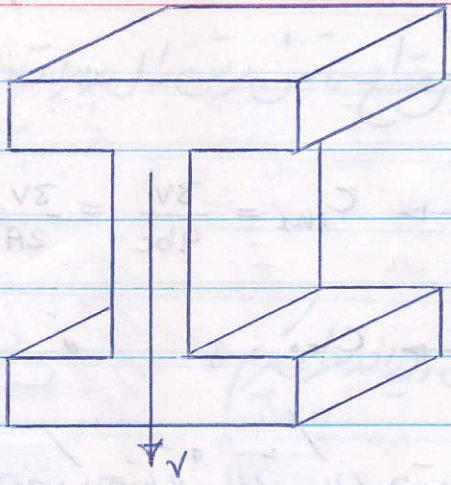
$y = c \longrightarrow \tau = 0$

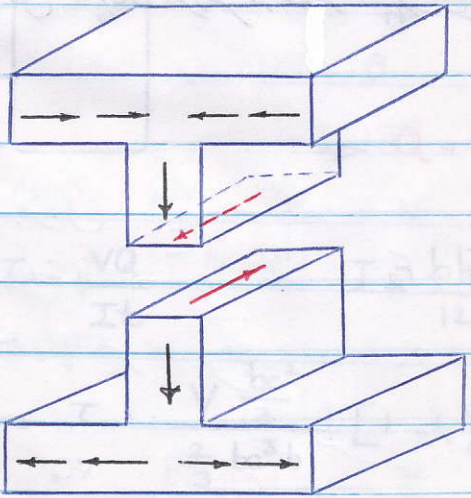


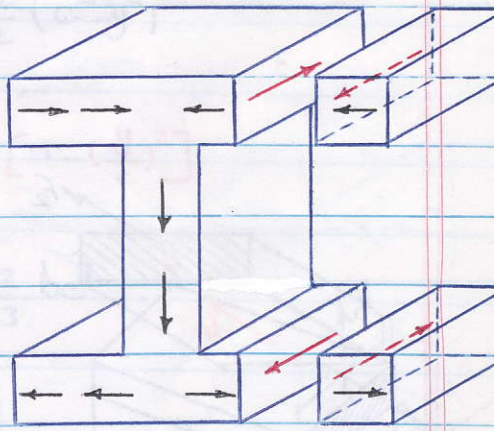

رابطه بدست آمده نشان می دهد که مقدار تنش برشی ماکزیمم در تیر با سطح مقطع مستطیل شکل 50% بزرگتر از مقدار $V/A$ می باشد.



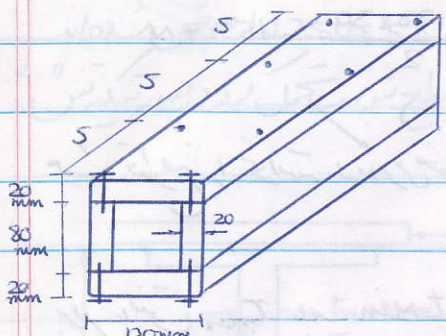

$F_1 > F_2$


V



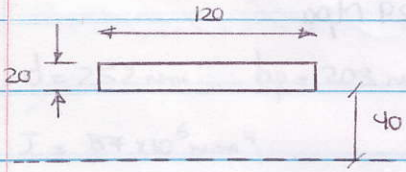


www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




مثال: مقطع تیر مطابق شکل بصورت قوطی حریتی از دو قطعه چوب به ابعاد $20 \times 80\ mm^2$ بصورت قائم و دو قطعه $6$ تکه به ابعاد $20 \times 120\ mm^2$ بصورت افقی که به یکدیگر میخ شده اند تشکیل شده است. اگر بدانیم که فاصله میخ ها از یکدیگر $S = 30mm$ باشد و نیروی برشی مقطع بصورت قائم و برابر $1200\ N$ در نظر گرفته شود، مطلوب است نیروی برشی ایجاد شده در هر میخ و حداکثر تنش برشی در تیر مورد نظر.

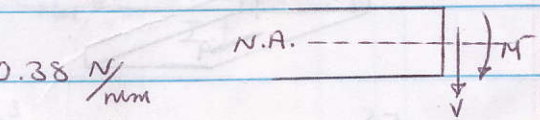
$S = 30\ mm \qquad V = 1200\ N$

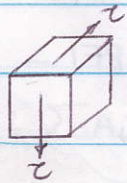


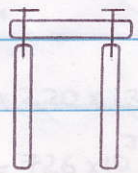

$$Q = A.\bar{y} = 20 \times 120 \times 50 = 120000\ mm^3$$

$$I = \frac{120^4 - 80^4}{12} = 13.87 \times 10^6\ mm^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{1200 \times 120000}{13.87 \times 10^6} = 10.38\ N/mm$$



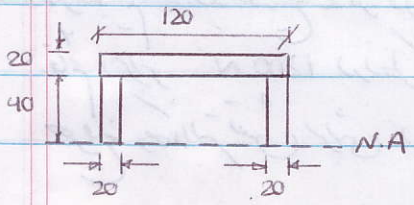



نیروی برشی وارد بر هر میخ $= \frac{9.5}{2} = \frac{10.38 \times 30}{2} = 155.7N$

مشخصات میخ را کارخانه سازنده می‌خواست باید $\tau_{all}$ را می‌داد.

برای یافتن $\tau_{Max}$ باید $Q_{Max}$ ، $t_{Min}$ را پیدا کنیم. این دو مقدار در محل تار خنثی تأمین می‌شوند.

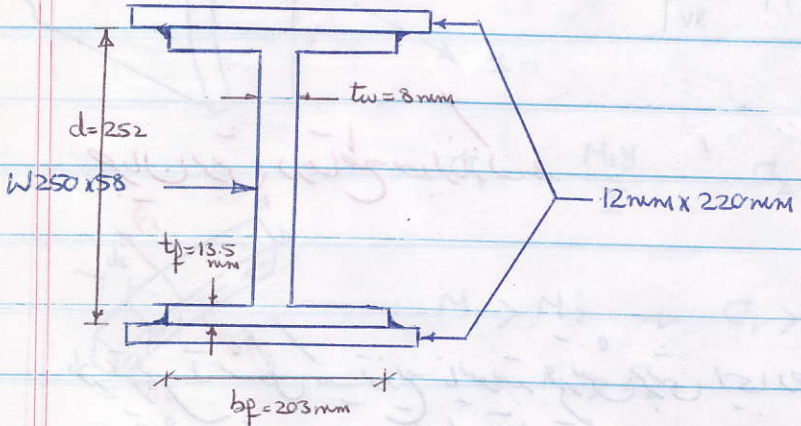



$$Q_{Max} = 120000 + 2 \times 40 \times 20 \times 20$$
$$= 152000 \ mm^3$$

$$\Rightarrow \tau_{Max} = \frac{1200 \times 152000}{13.87 \times 10^6 \times 40} = 0.329 \ Mpa$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

مثال: دو صفحه مستطیلی به دوبال تیر بال پهن W250x58 جوش شده اند
مطلوبست حداکثر نیروی برشی مجاز که این مقطع تواند تحمل کند در صورتیکه تنش
برشی Max تیر از مقدار 90 Mpa فراتر نرود.




$d = 252\,mm \quad b_f = 203\,mm \quad t_f = 13.5\,mm \quad t_w = 8\,mm$

$I = 87 \times 10^6\ mm^4$

$$\tau_{Max} = \frac{V_{Max}\, Q_{Max}}{I.t}$$

$$I_{\text{مقطع}} = 87\times10^6 + 2\times\left[\frac{220\times12^3}{12} + 12\times220\times\left(\frac{252}{2}+6\right)^2\right]$$

$$= 179.1\times10^6\ mm^4$$

$$Q_{Max} = \sum A_i \bar{y}_i = 12\times220\times132 + 203\times13.5\times\left(126-\frac{13.5}{2}\right)$$

$$+ 112.5\times8\times\frac{112.5}{2} = 726\times10^3\ mm^3$$

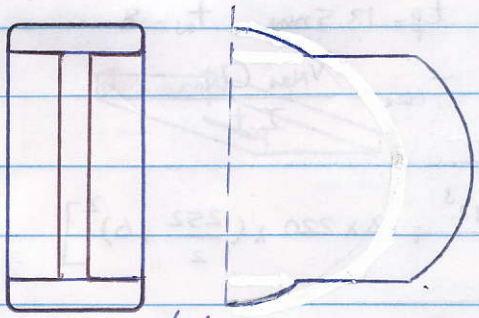
$$\tau_{Max} = \frac{V_{Max} Q_{Max}}{I \cdot t} \Rightarrow 90 = \frac{V \cdot (726 \times 10^3)}{179.1 \times 10^6 \times 8}$$

$$\Rightarrow V_{Max} = 177.6 \times 10^3 \, N$$

## جریان برش در مقاطع جدار نازک

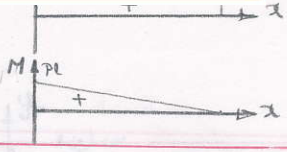
$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I t}$$

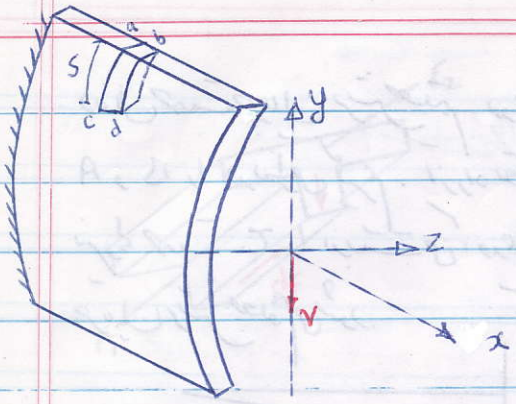
در تیرهای I شکل که توزیع ناپیوسته در تنش برشی ایجاد می‌شود. این دسته را برای تنش برشی برابر سطح مقطع تیر گویند.

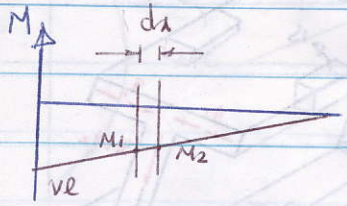


دسته دیگری نیز وجود دارد که جریان برش در مقطع جدار نازک گویند.

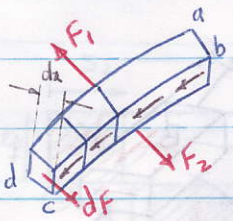
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




$$\sigma_1 = + \frac{M_1 y}{I} \qquad \sigma_2 = + \frac{M_2 y}{I}$$

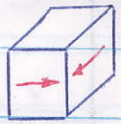



$$M_1 > M_2 \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$$

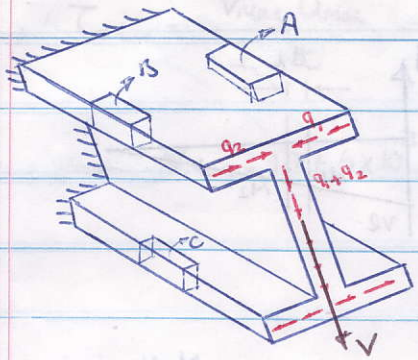
$$\Rightarrow F_1 > F_2$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 + dF = F_1$$

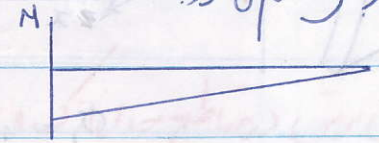
از طرفی $dF = t \cdot dx \cdot \tau = q\,dx$

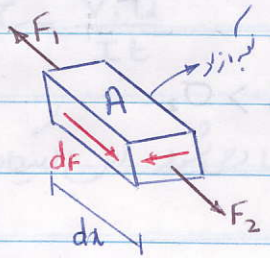


حال این بحث را برای مقطع I شکل ادامه می‌دهیم.




دنبال جهت جریان برشی هستیم. دو مقطع A و B را در نظر می گیریم. از راه تعادل نیروها جهت q را بدست می آوریم و جریان برشی معلوم می شود.

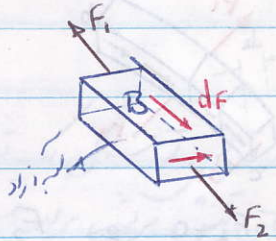


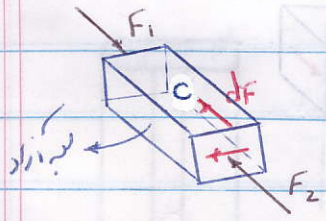




$$dF + F_2 = F_1$$

$$F_1 > F_2$$

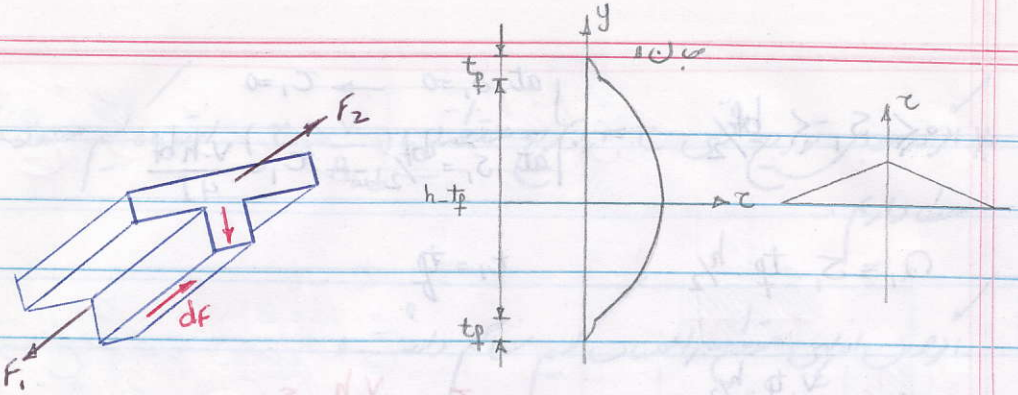
$$dF = q \cdot dx$$



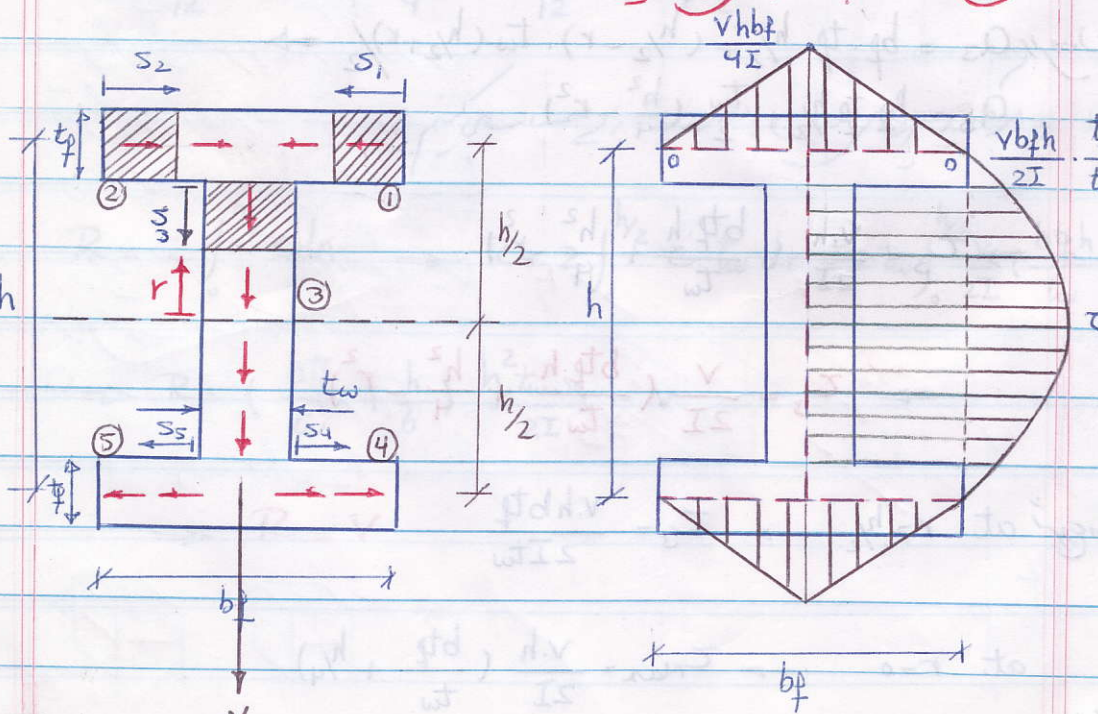




$$F_1 > F_2$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




## توزیع تنش برشی برروی پروفیل باز I شکل



$$0 \leq s_1 \leq b_f/2 \rightarrow \begin{cases} \text{at } s_1 = 0 \rightarrow \tau_1 = 0 \\ \text{at } s_1 = b_f/2 \rightarrow \tau_1 = \dfrac{V.h.b_f}{4I} \end{cases}$$

$$Q_1 = s_1 . t_f . h/2 \qquad t_1 = t_f$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{V . t_f . h/2}{I\, t_f} . s_1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{V.h}{2I} s_1$$

$$Q_3 = b_f . t_f . h/2 + (h/2 - r) . t_w (h/2 + r)/2 \Rightarrow$$

$$Q_3 = b_f t_f h/2 + \frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f . h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f . h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

at $r = h/2 \rightarrow \tau_3 = \dfrac{V.h.b t_f}{2I t_w}$

at $r = 0 \rightarrow \tau_{Max} = \dfrac{V.h}{2I}\left(\dfrac{b t_f}{t_w} + h/4\right)$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

* از دو مدل توزیع تنش $\tau$ از توزیع متصلی ($\tau = \frac{V}{A_{web}}$) استفاده نیم محدود 12% خطا داریم.

از مدل الاستیک مقطع را مطابق شکل زیر در نظر گرفته‌ایم:

$$I = \frac{t_w h^3}{12} + 2 b t_f \frac{h^2}{4} = \frac{t_w h^3}{12} + b t_f \frac{h^2}{2}$$

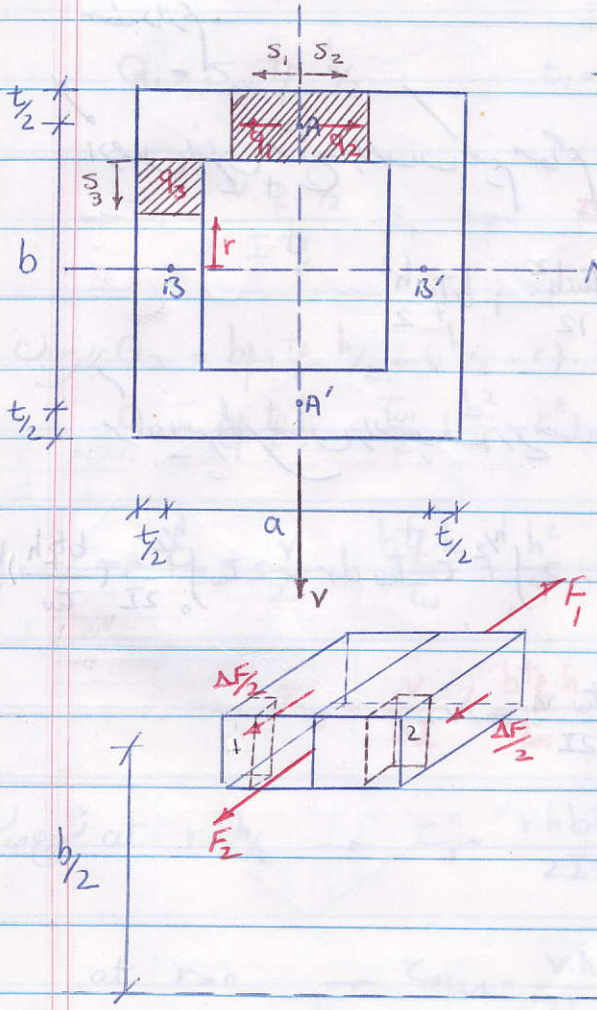
برآیند نیروهای مدل را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$R = 2\int_0^{h/2} \tau \, dA \quad \Rightarrow \quad R = 2\int_0^{h/2} \tau \, t_w \, dr = 2 t_w \int_0^{h/2} \frac{V}{2I} \left( \frac{b t_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} \right)$$

$$\Rightarrow R = \left( \frac{b t_f}{t_w} + \frac{h}{6} \right) \frac{h^2 t_w \cdot V}{2I} = V$$

$$\Rightarrow R = V$$

# توزیع تنش برشی برروی پروفیل نسبه قوطی شکل



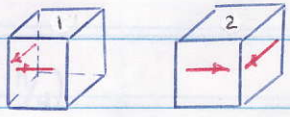

$t_f = t_w = t$

* در مقاطع لبه محور اصلی عمود بر محور خنثی مقدار تنش برشی صفر است. مثلا" در مقطع نقاط A, A' دارای تنش برشی صفر و B, B' دارای تنش برشی ماکزیمم است. (علت Max بودن $\tau$، Max بودن Q است.)

الحاق بصورت بالا در نظر می گیریم برای قسمت افقی داریم:

$F_1 > F_2$

$\rightarrow F_2 + \Delta F = F_1$



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$q = \frac{VQ}{I} \longrightarrow \begin{cases} Q_1 = s_1 t b/2 \\ Q_2 = s_2 t b/2 \end{cases}$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t} = \frac{V(s_1 t b)}{I 2t} \Rightarrow \tau_1 = \frac{Vb}{2I} s_1$$

$$\tau_2 = \frac{q_2}{t} = \frac{V(s_2 t b)}{I 2t} \qquad \tau_2 = \frac{Vb}{2I} s_2$$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \longrightarrow \tau_1 = 0 \\ s_1 = a/2 \longrightarrow \tau_1 = \frac{Vab}{4I} \end{cases}$$

برای قسمت قائم داریم:

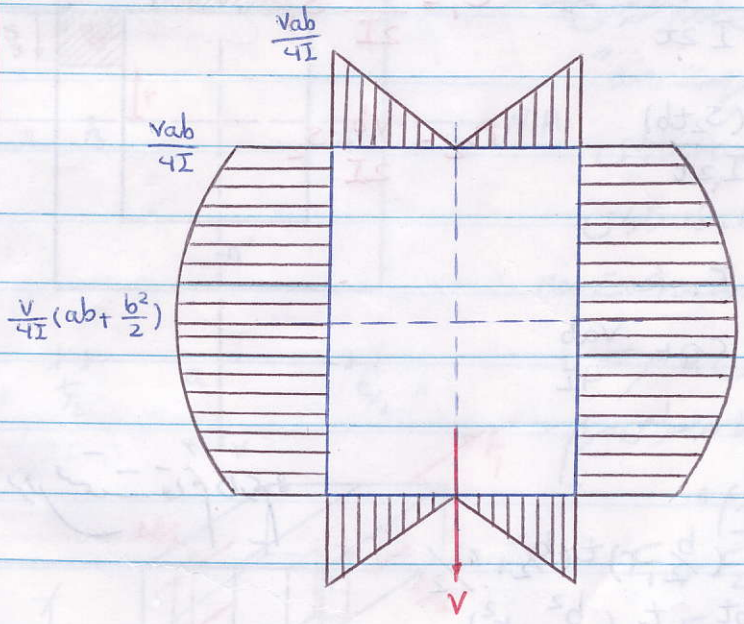
$$Q_3 = t\,a/2\,b/2 + (b/2 - r)\,t\,(b/2 + r)/2$$

$$\longrightarrow Q_3 = \frac{abt}{4} + t/2\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)$$

$$\tau_3 = \frac{V}{It}\left[\left(\frac{abt}{4} + t/2\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)\right]\right.$$

$$r=0 \qquad \tau_{Max}=\frac{V}{4I}\left(ab+\frac{b^2}{2}\right)$$

$$r=b/2 \qquad \tau_{min}=\frac{Vab}{4I}$$

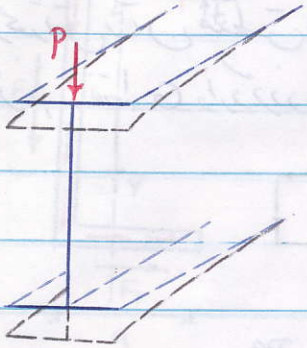


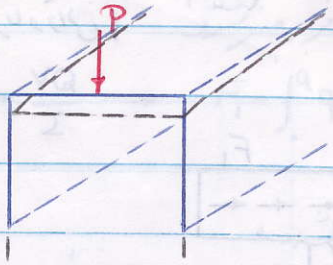

معمولاً نظوری که صفحه‌ی برش مقطع هست یعنی تنش برشی نسبت به ۲ سطوح عمود بر نیروی برشی مقطع

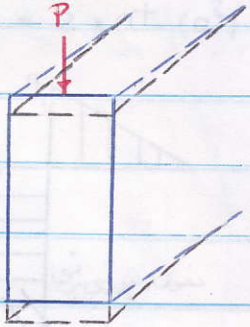
صفر است.

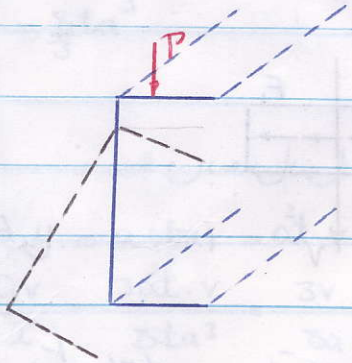
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

مرکز برش S



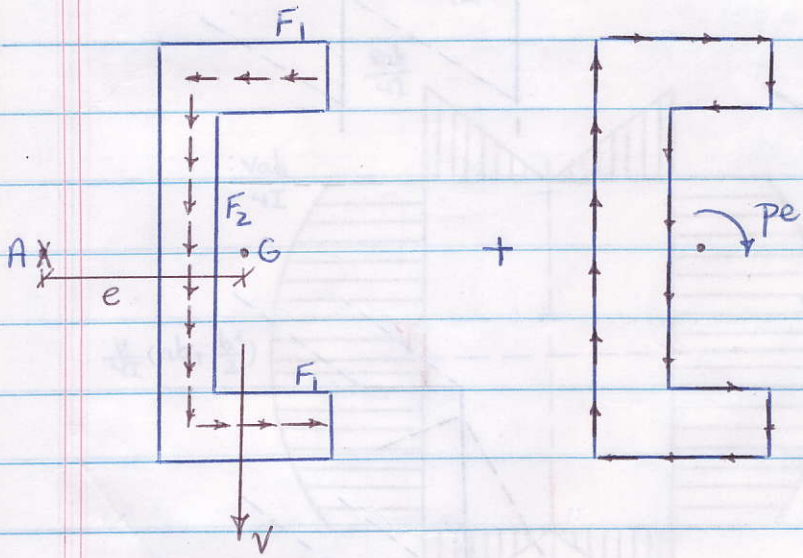




پروفیل کانالی شکل (1)، (2) و (3) وقتی بار در راستای محور تقارن اعمال شود فقط خم می‌شوند و تغییر شکل در راستای قائم می‌دهند.

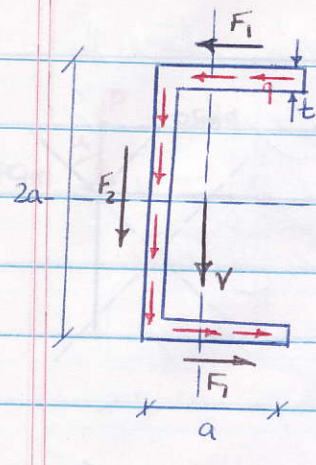
ولی در پروفیل ناودونی (4) که بار در امتداد محور تقارن وارد نشده می‌چرخد

اگر مرکز ثقل یک مقطع دارای دو محور تقارن نباشد (مانند نیمی محور خنثی بار بر محور تقل منطبق است. (در غیر از نامتوانی)
اگر P در نقطه G وارد گردد




نکته: اگر سطح مقطع دایره و دیاگرام برش دو سطح را خواستند، در ابتدا جریان برش را تعیین می کنیم و سپس به کمک فرض های ک، به راحتی حساب کردن Q و t می رسیم.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




* مثال: قطعه‌ای همچون شکل زیر تحت اثر $F_2$ و $F_1$ قرار می‌گیرد.

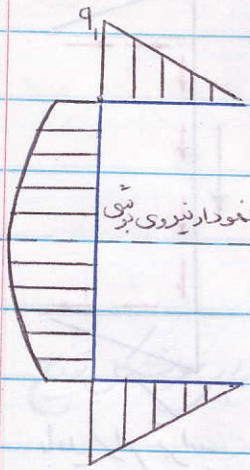
$$q = \frac{VQ}{I} \rightarrow F_1 = \int_0^a q\,ds$$

ثابت شده:

$$F_2 = V$$

$$F_1(2a) = F_2 \cdot e \rightarrow e = \frac{2aF_1}{V} \quad (1)$$

$$I = 2 \times at\,(a^2) + \frac{t(2a)^3}{12} = \frac{8}{3}ta^3$$




در محل اتصال بال به جان:

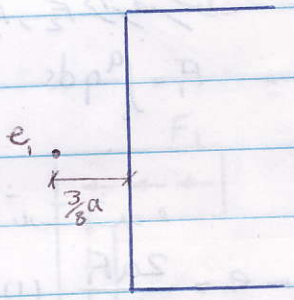
$$Q = A \cdot y = a(ta) = a^2t$$

$$q_1 = \frac{Qv}{I} = \frac{3a^2t \cdot v}{8ta^3} = \frac{3v}{8a}$$

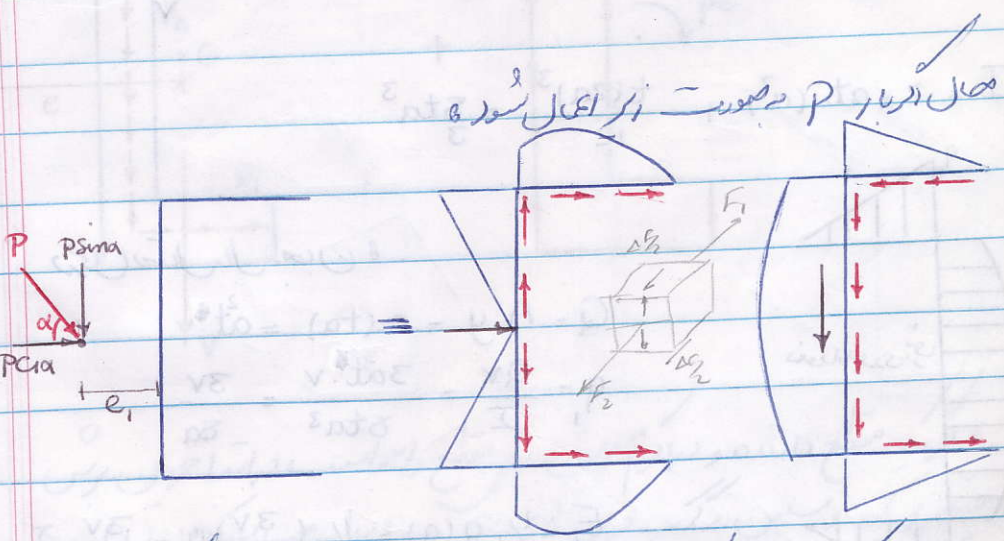
$$F_1 = \tfrac{1}{2}q(a) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{3v}{8a}\right)a = \frac{3v}{16}$$

حال از رابطه (1) داریم:

$$e = \frac{2aF_1}{V} = \frac{2a\left(\frac{3}{16}\right)V}{V} = \frac{3}{8}a$$



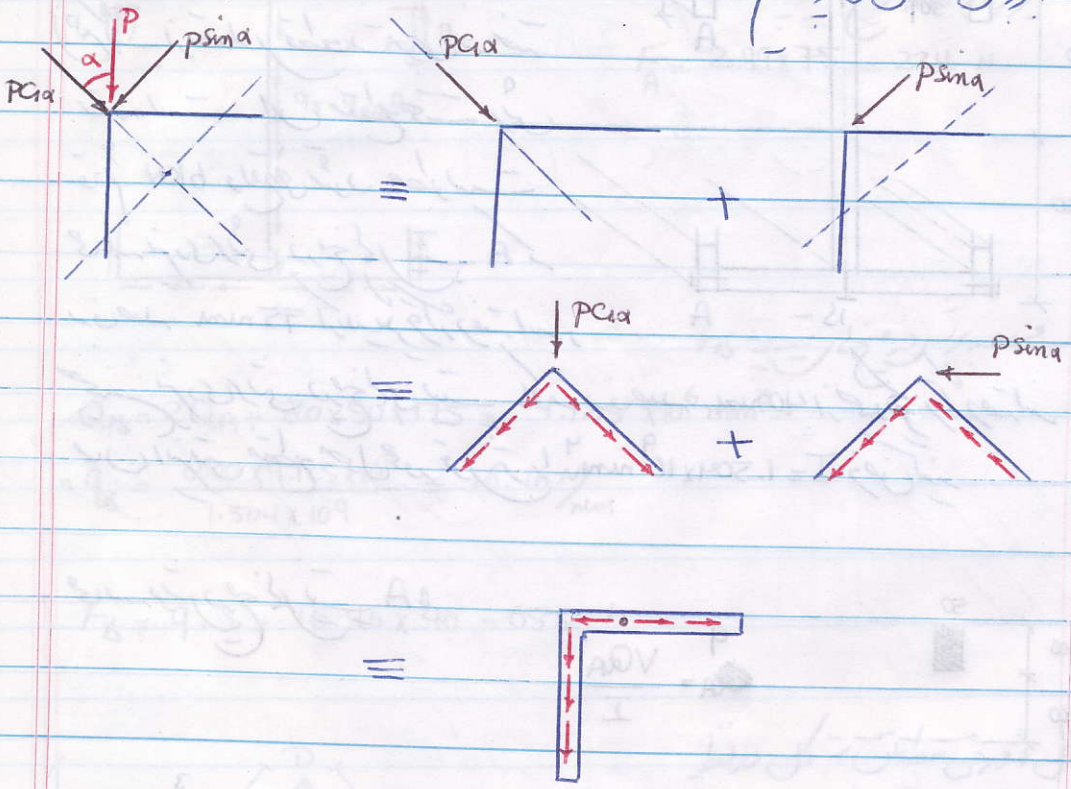

حال اگر بار P به صورت زیر اعمال شود



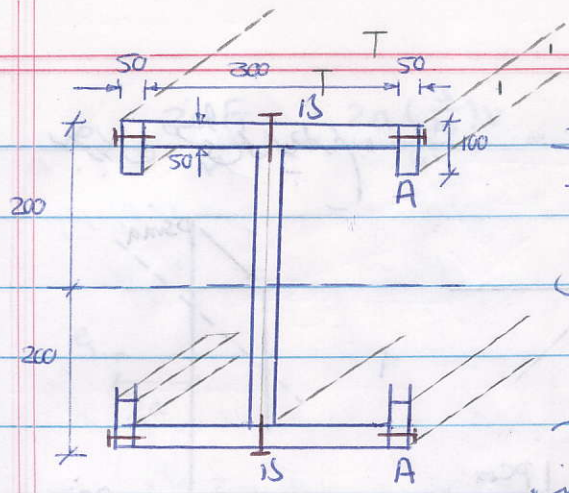

باید برای ترکیب دو شکل با تقریب خوبی برش نمودار را خطی در نظر گیریم.

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

بررسی تنشی را داریم.

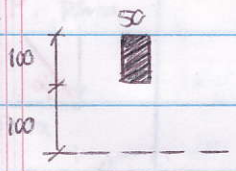



نکته: اگر بار کرنش با صفر مساوی باشد بار صفر را تجزیه می‌کنیم و برای هر شکل توزیع تنش برشی را محاسبه می‌کنیم و شکل‌ها را با هم جمع جبری می‌کنیم.




مثال: مقطعی مطابق شکل به صورت مرکب از تعدادی قطعات چوبی ساخته شده است. این مقطع یک برش قائم 6kN را تحمل می‌کند. مطلوبست محاسبه تنش برشی در نقطه A که در فاصله 75mm از لبه بالا قرار گرفته است و محاسبه تنش برشی در نقطه B که در فاصله 140mm از همین لبه قرار گرفته است. همان تنش برشی مقطع حول محور خنثی را $I = 1.504 \times 10^9 \, mm^4$ فرض کنید.

محاسبه برش در نقطه A

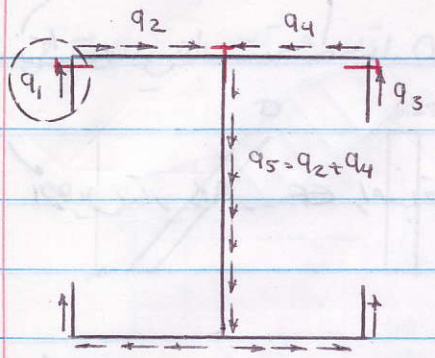



$$q_A = \frac{VQ_A}{I}$$

$$Q_A = A\bar{y} = 50 \times 100 \times 150 = 750000 \, mm^3$$

$$\rightarrow q_A = \frac{6 \times 10^3 \times 750000}{1.504 \times 10^9} = 2.99 \, kN/m = 2.99 \, N/mm$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران




نیروی وارد بر هر میخ تسمه A

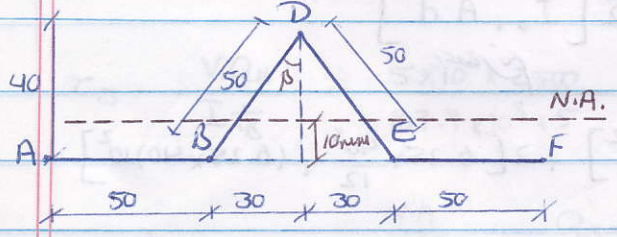
$$F_A = 2.99 \times 75 = 224 \text{ N}$$

می تسمه برش در میخ های تسمه B

$$Q_{AS} = 2\bar{Q}_A + 300 \times 50 \times 175 = 4.125 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$q_{AS} = \frac{6000 \times 4.125 \times 10^6}{1.504 \times 10^9} = 16.46 \text{ N/mm}$$

$$F_{AS} = q \cdot s = 16.46 \times 40 = 658 \text{ N}$$




مثال: ورق مطابق شکل در نظر گرفته می شود ضخامت ورق مقدار ثابت 5mm است. در صورتیکه برش وارد در مقطع برابر $V = 51 \text{ kN}$ باشد مطلوبست الف) مقدار تنش برشی در مقطع ب) تنش برشی در

$$S_x = \sum A_i y_i \qquad \bar{y} = \frac{S_x}{\sum A_i}$$

نقطه A

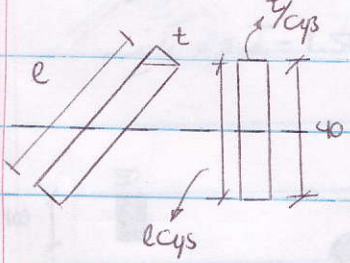
اگر بیل تار AB، EF را صفر قرار دهیم می‌توانیم یک تونل مصنوعی بسازیم

فاصله مرکز ثقل از محور

$$S_x = (50 \times t \times 20)\,2$$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{50 \times t \times 20 \times 2}{4 \times 50\,t} = 10\ mm$$

فاصله مرکز ثقل تا محور x




برای محاسبه ممان اینرسی

$$C_{y/s} = 4/5$$

$$t' = \frac{t}{C_{y/s}} = \frac{5}{4/5} = \frac{25}{4} = 6.25\ mm$$

$$I = 2\left[I_o + A.d^2\right] + 2\left[I'_o + A'.d^2\right]$$

اعضای افقی — اعضای قائم

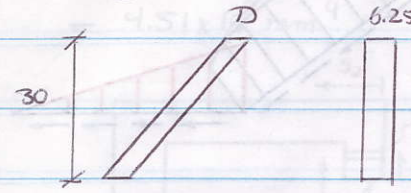
$$= 2\left[50 \times \frac{5^3}{12} + 50 \times 5 \times 10^2\right] + 2\left[6.25 \times \frac{40^3}{12} + (6.25 \times 40)10^2\right]$$

$$= 167.7 \times 10^3\ mm^4$$

۱۸۰

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

بیشترین تنش برشی در محل تار خنثی است. Q را توسط قسمت بالایی بدست می آوریم.




$$Q = A\bar{y} = 30 \times 6.25 \times 15$$

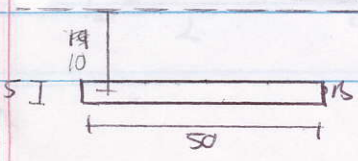
$$= 5625$$

از قسمت پایینی هم می توان استفاده کرد.

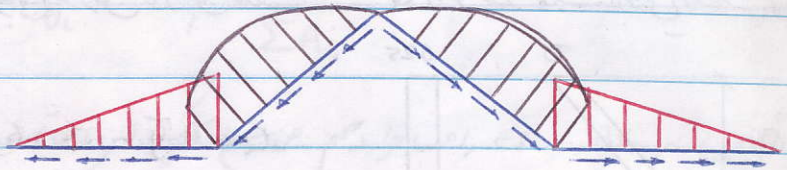
$$Q = 50 \times 5 \times 10 + 10 \times 6.25 \times 5 = 5625$$

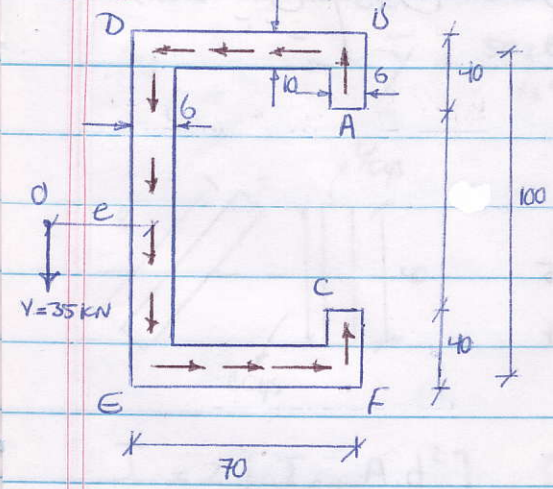
$$\tau_{max} = \frac{5000 \times 5625}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 16.77 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{15} = \frac{V Q_{15}}{I t_{15}} = \frac{5 \times 10^3 \times 2500}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 14.91 \text{ Mpa}$$




$$Q_{15} = 50 \times 5 \times 10 = 2500$$

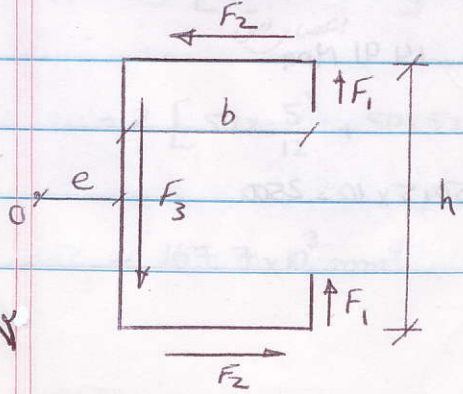





... مرکز برش را تعیین کنید. توزیع تنش برشی ایجاد شده (برشی) توسط نیروی قائم برشی 35kN که در محل مرکز برش O مطابق شکل وارد می‌شود.

$$F_2 \cdot h + 2F_1(b+e) - F_3 e = 0$$

$$e = \frac{F_2 \cdot h + 2F_1 b}{F_3 - 2F_1} \qquad F_3 - 2F_1 = V$$



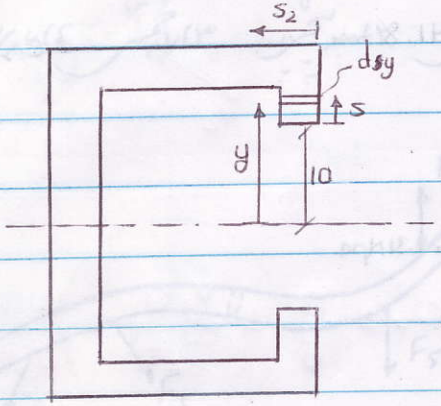

$$\Rightarrow e = \frac{F_2 h + 2F_1 b}{V}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$I = 2\left[\frac{6(100)^3}{12}\right] - \left(\frac{1}{12}\,6\times(20)^3\right) + 2\left[\frac{1}{12}\,70(10)^3 + (70\times10)\,50^2\right]$$

$$= 4.51\times10^6\ mm^4$$

محاسبه $\tau_1, F_1$ :




$$Q_1 = (y-10)\times 6\times \tfrac{1}{2}(y+10)$$

$$= 3(y^2-100) \qquad 10 < y < 50$$

$$F_1 = \int_{10}^{5} q\,ds$$

$$F_1 = \frac{35000}{4.51\times10^6}\int_{10}^{50} 3(y^2-100)\,dy = 869\ N$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t_1} = \frac{VQ_1}{\Sigma t_1} = \frac{35000\times3(y^2-100)}{6\times4.51\times10^6}$$

at $y = 50mm \rightarrow \tau_1 = 9.31\ Mpa$

at $y = 10mm \rightarrow \tau_1 = 0\ Mpa$

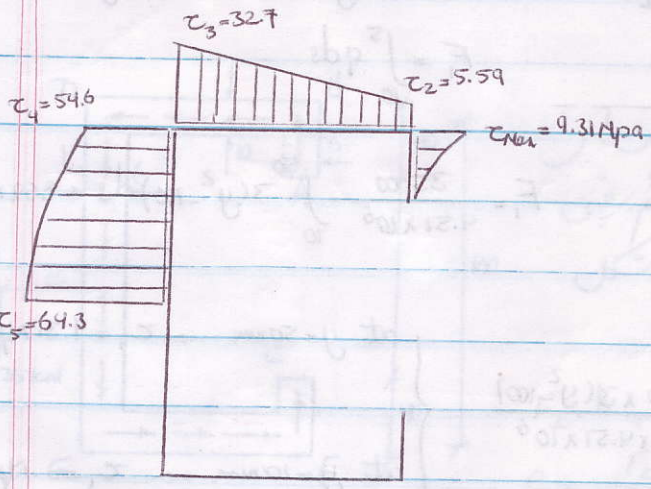
محاسبه $F_2, \tau_2$ در کل اتصال نسبت به بال فوقانی ← $Q_{1Max} = 7200$

$$Q_2 = Q_{1Max} + A\bar{y} = 7200 + 50\times10\,S_2 \qquad 0 < S_2 < 70$$

$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{35000(7200+500\,S_2)}{4.51\times10^6}$$

$$F_2 = \int_0^{70} q_2 \, ds_2 = 13.4 \text{ kN}$$

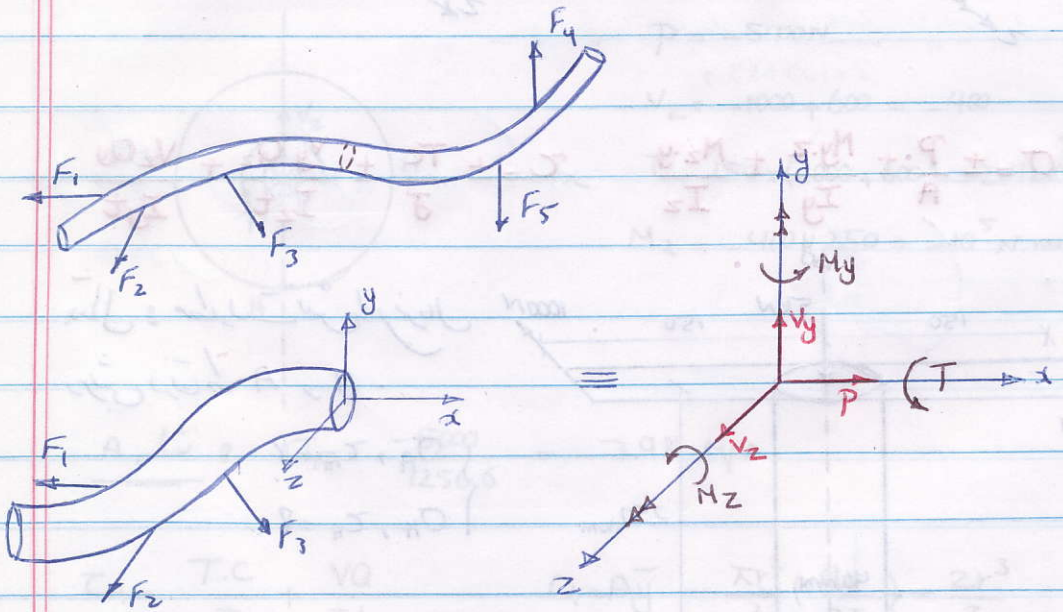
$$e = \frac{13400(100) + 2(869)70}{35000} = 41.8 \text{ mm}$$



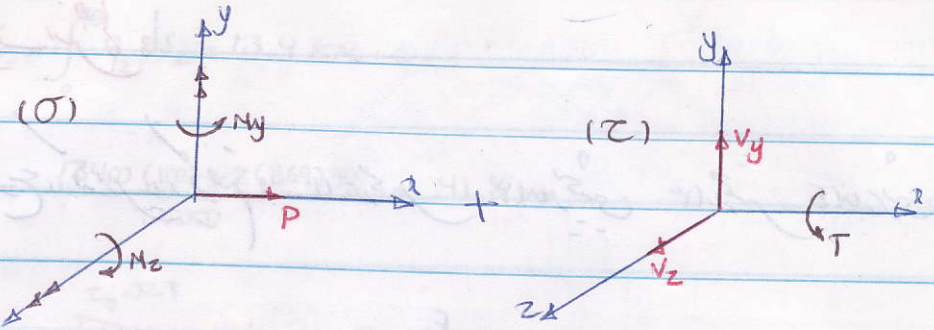
www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

## ترکیب تنش‌ها

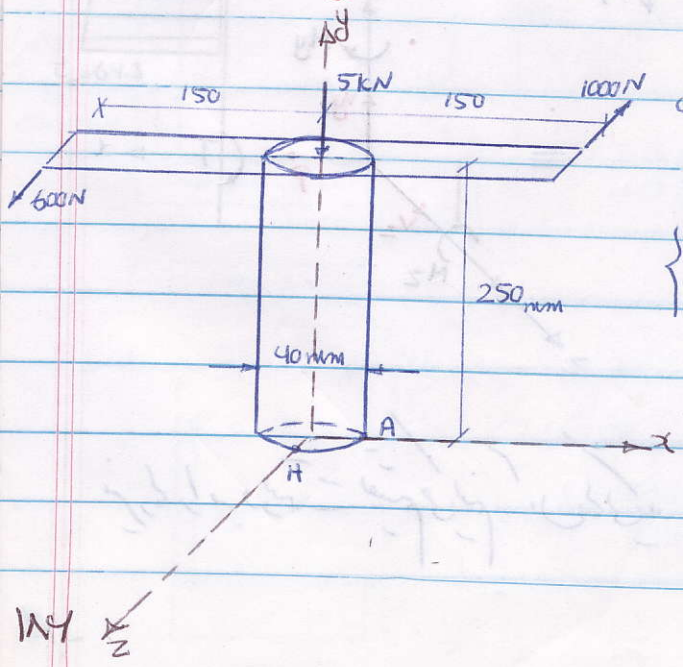
چهار نوع بارگذاری را در نظر گرفتیم: ۱) بار محوری ۲) بار برشی ۳) بار خمشی ۴) بار پیچشی




نیروها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. آن‌هایی که عمود بر سطح مقطع هستند و آن‌هایی که در سطح مقطع قرار دارند.




$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{My \cdot z}{Iy} \pm \frac{Mz \cdot y}{Iz} \qquad \tau = \pm \frac{Tc}{J} \pm \frac{Vy\,Qz}{Iz\,t} \pm \frac{Vz\,Qy}{Iy\,t}$$



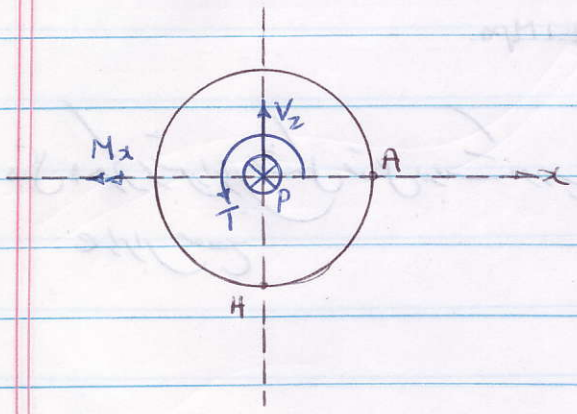

مثال: مطلوبست تنش های نرمال و برشی در نقاط A و H.

$$\begin{cases} \sigma_A, \tau_A = ? \\ \sigma_H, \tau_H = ? \end{cases}$$

www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(40)^2 = 1256.6\ mm^2$$

$$I = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{4}(\pi \times 20^4) = 125663.7\ mm^4$$




$P = -5000N$

$V_z = -1000 + 600 = -400$

$T = 150 \times (1000 + 600) = 2.4 \times 10^5\ N.mm$

$M_x = -400 \times 250 = -10^5\ N.mm$

نقطه A

$$\sigma_A = \frac{-5000}{1256.6} = -3.98\ Mpa$$

$$\tau_A = \frac{T.C}{J} + \frac{VQ}{It} \qquad Q = A\bar{y} = \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3}$$

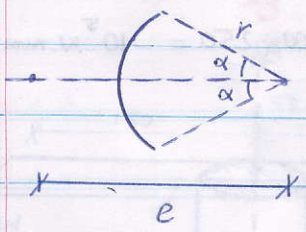
$$\tau_A = \frac{2.4 \times 10^5 \times 20}{2 \times 125663.7} + \frac{400\left(\frac{2 \times 20^3}{3}\right)}{125663.7 \times 40} = 19.51\ Mpa$$

نقطه H : $\sigma_H = -3.98 + \frac{1 \times 10^5 \times 20}{125663.7} = +11.93 \text{ Mpa}$

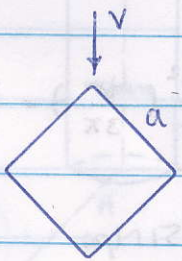
$$\tau_H = \frac{TC}{J} + \frac{VQ_H}{It} \longrightarrow Q_H = 0 \longrightarrow \tau_H = \frac{TC}{J}$$

$$\Rightarrow \tau_H = \frac{2.4 \times 10^5 \times 20}{2 \times 125663.7} = 19.1 \text{ Mpa}$$

مثال: مرکز برش برای شکل مقابل بدست آورید.




e: برای مجمع



www.icivil.ir پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

تمرین ۵

5, 12, 16, 23, 36, 49, 62, 72, 87, 79, 94, 109
114, 120, 127, 138

**تشکر :**

در انتها لازم میدانم از آقای نوید ذوالقدری (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف ) و آقای مسعود قهرمان نژاد (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی تبریز- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیر کبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .

در صورت لزوم می توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر انتقادات و پیشنهادات خود را ارائه فرمائید .

**hamid_kazem041@yahoo.com**