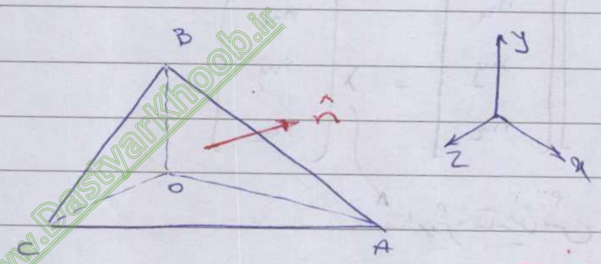
Year: Month: Day: Subject:



$\hat{n}$: بردار یکه عمود ABC

عمود بر ABC تنش

$$ABC: \quad \vec{F}_{ABC} = S_{ABC}\begin{bmatrix}\sigma_{xn}\\ \sigma_{yn}\\ \sigma_{zn}\end{bmatrix}$$

$$OBC: \quad \sigma_{xx} S_{OBC} = \sigma_{xx}(S_{ABC}\, n_x)$$

$$OAC: \quad \tau_{xy} S_{OAC} = \tau_{xy}(S_{ABC}\, n_y)$$

$$OAB: \quad \tau_{xz} S_{OAB} = \tau_{xz}(S_{ABC}\, n_z)$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_{xn}\cancel{S_{ABC}} = \sigma_{xx}\cancel{S_{ABC}}\, n_x + \tau_{xy}\cancel{S_{ABC}}\, n_y + \tau_{xz}\cancel{S_{ABC}}\, n_z$$

$$\Rightarrow \sigma_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xn}\\ \sigma_{yn}\\ \sigma_{zn}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس تنش}}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}$$

Year:……… Month:……… Day:……… Subject:………

جلسه دوم:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \cdots \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس تنش

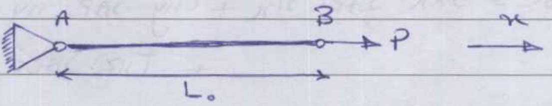
مقادیر ویژه های ماتریس تنش = تنش های اصلی

تنش نرمال روی صفحه n ← $\sigma_n = \sigma_{nn} = \hat{n} \cdot \left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \cdots \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \hat{n} \right)$

تنش برشی روی صفحه n ← $\tau_n = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} \sigma_{xn} \\ \sigma_{yn} \\ \sigma_{zn} \end{bmatrix} \right\|^2 - \sigma_n^2}$

refer to the pirate copies.

* انرژی کرنشی الاستیک : elastic (ارتجاعی)



$dW = P\,dx_B$

انرژی کرنشی ذخیره شده در میله الاستیک : U

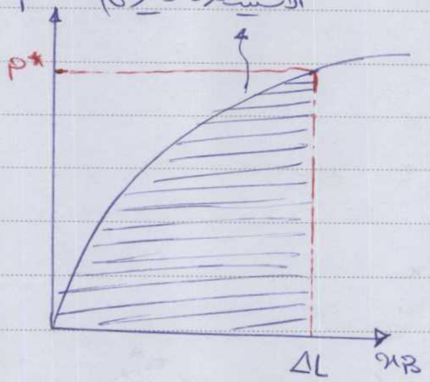
هر چه نیروی P روی میله کار انجام دهد به صورت انرژی کرنشی در میله ذخیره می‌شود $dU = dW$

$$U = W = \int dW = \int_{x_B=0}^{x_B=\Delta L} P\,dx_B$$

CACTUS

Subject:

Year. Month. Date. ( )



الاستیک { الاستیک خطی / " غیرخطی

بارگذاری شبه استاتیکی: یک دفعه بارگذاری نمی‌کنیم.

در محدوده الاستیک خطی $\Rightarrow P = k x_B \Rightarrow U = \int_0^{\Delta L} k x_B \, dx_B = \frac{1}{2} k \Delta L^2$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} k \Delta L (\Delta L) = \frac{1}{2} P^* \Delta L = \frac{1}{2} \frac{P^{*2}}{k}$$

$$x_B = \frac{P L_0}{E A_0} \xrightarrow{P = k x_B} \boxed{k = \frac{E A_0}{L_0}}$$

$$P = \sigma_x A \qquad \epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow d\epsilon_x = \frac{d(\Delta L)}{L_0} = \frac{dx_B}{L_0}$$

$$\Rightarrow dx_B = L_0 \, d\epsilon_x$$

$$U = \int (\sigma_x A)(L_0 \, d\epsilon_x)$$ با فرض تغییرشکل‌های کوچک ← A_0 ثابت

$$\Rightarrow U = A_0 L_0 \int \sigma_x \, d\epsilon_x = V \int \sigma_x \, d\epsilon_x$$

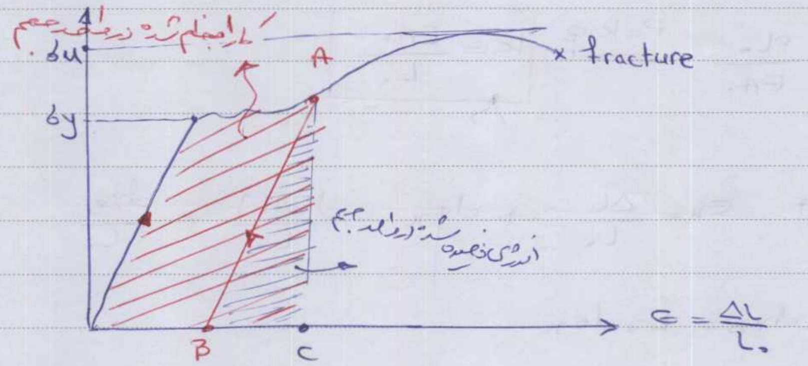
$$u = \frac{U}{V} = \int \sigma_x \, d\epsilon_x$$ ← انرژی کرنشی واحد حجم (چگالی انرژی کرنشی)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر ماده الاستیک خطی: $\sigma_x = E\epsilon_x \rightarrow U = \int \sigma_x d\epsilon_x = \int_0^{\epsilon_x^*} E\epsilon_x d\epsilon_x$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} E {\epsilon_x^*}^2 = \frac{1}{2}\frac{{\sigma_x^*}^2}{E} = \frac{1}{2}\sigma_x^* \epsilon_x^*$$

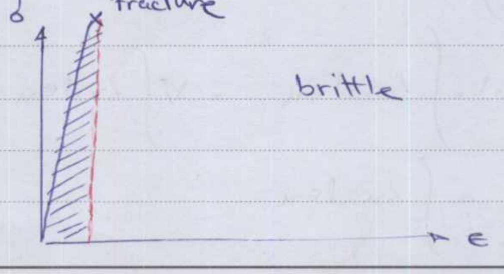
$\sigma = P/A_0$



مواد داکتیل ساده
ductile

toughness بالا

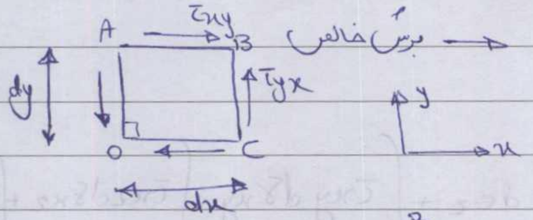
کار در واحد حجم $= \int \sigma_x d\epsilon_x$

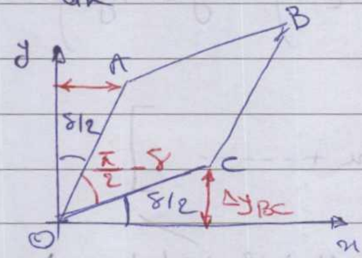


brittle

toughness کم

منظور این نیست که تنش نرمال نداریم آن را هم ایجاد کنیم ← برش خالص
(تنش نرمال هم داریم)





$$\Delta y_{BC} = dx \tan\frac{\delta}{2} \simeq dx\frac{\delta}{2}$$

$$\xrightarrow{*} W_{BC} = \tfrac{1}{2} F_{BC}\, \Delta y_{BC} \;\text{ل ل ل} \rightarrow$$

* با فرض الاستیک خطی بودن

$$\rightarrow\; = \tfrac{1}{2}(\tau_{yx}\, dy\, dz)(dx\, \delta/2) = \tfrac{1}{2}(\tau_{yx}\, \delta/2)\underbrace{(dx\, dy\, dz)}_{dV}$$

$$W_{AB} = \tfrac{1}{2}(\tau_{xy}\, \delta/2)\, dV$$

* جابجایی افقی زاویه OC و جابجایی قائم زاویه OA دیفرانسیل مرتبه دوم است پس آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم.

فرض بر الاستیک خطی بودن است پس تمام کار انجام شده روی المان به صورت انرژی در آن ذخیره می‌شود ← $U = W_{AB} + W_{BC} = \tfrac{1}{2}\left[\tau_{xy}\frac{\delta}{2} + \tau_{yx}\frac{\delta}{2}\right] dV$

$$\Rightarrow u = \frac{U}{dV} = \frac{1}{2}\left[\tau_{xy} + \tau_{yx}\right]\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\,\delta$$

در حالتی که الاستیک خطی نباشد $U = \int \tau_{xy}\, d\delta$

Year:........ Month:........ Day:........ Subject:........

← در حالتی که تنش زیاد هم بارگذاری وارد شود
(در حالت 3 بعدی)

$$U=\int \sigma_x d\varepsilon_x+\int \sigma_y d\varepsilon_y+\int \sigma_z d\varepsilon_z+\int \tau_{xy} d\gamma_{xy}+\int \tau_{xz} d\gamma_{xz}+\int \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

کار نیروهای داخلی بر ازای واحد حجم ← $W_i=-\left[\int \sigma_x d\varepsilon_x+\cdots\right]$

$W_i=-W_f$ برای این که $U=W_f$ باشد باید ماده الاستیک باشد.

در حالت الاستیک: $U=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}\right)$

اگر ماده همسان گرد باشد

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right)\qquad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right)\qquad \gamma_{xz}=\frac{\tau_{xz}}{G}$$
$$\varepsilon_z=\cdots\qquad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$U=\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right)+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

* چون U تحت اسکالر است بنابراین مهم نیست U در چه راستاهایی محاسبه شود (یعنی المان را هر چه قدر هم دوران دهیم انرژی آن ثابت است)

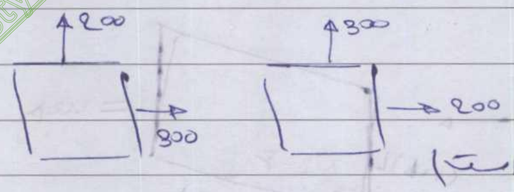
CACTUS

Year:......... Month:......... Day:......... Subject:.........

دستگاه را آن قدر دوران می‌دهیم تا به حالت اصلی برسیم $\sigma_a \quad \sigma_b \quad \sigma_c$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu\left(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_a\sigma_c\right)\right]$$

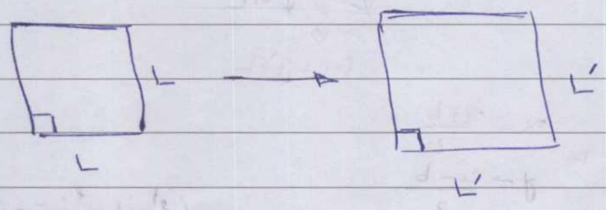
symmetric function



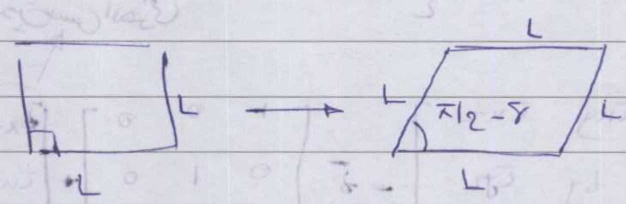
اثر یکسان دارند (دلیل آن هم اتساع‌پذیری مطلق است)

distortion.

تغییر حجم خالص (بدون تغییر زاویه بین صفحه دوبه‌دو عمود) + اعوجاج (بدون تغییر حجم) = تغییر شکل



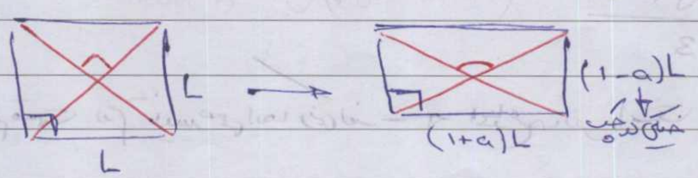
تغییر حجم خالص



اعوجاج

$A = L^2$

$$A = L^2 \sin(\pi/2 - \gamma) = L^2 \cos\gamma$$
$$= L^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \simeq L^2$$

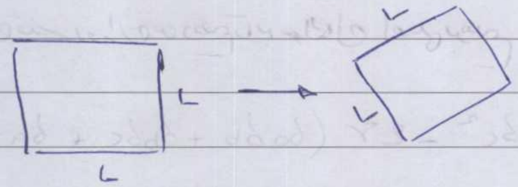


اعوجاج

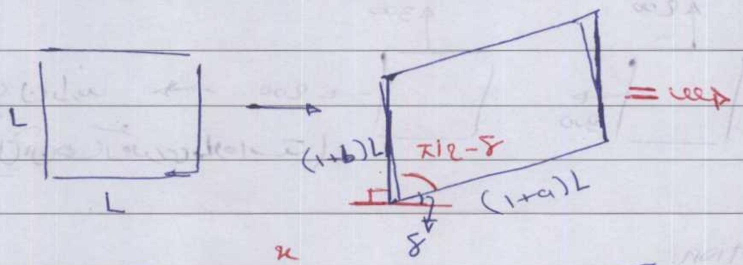
$$A = (1-a^2)L^2 \simeq L^2$$

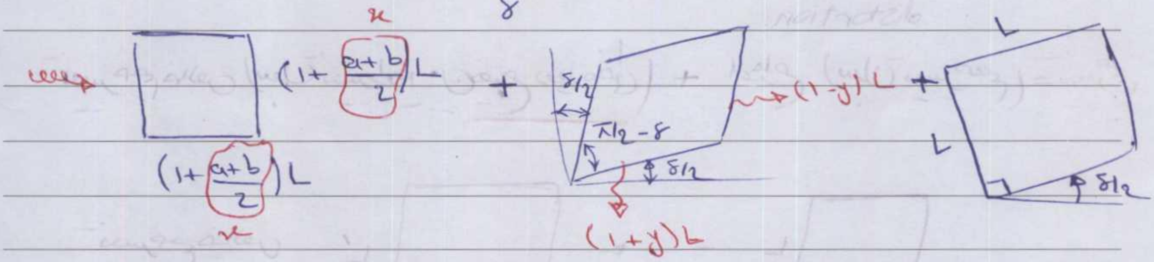
TA/ دوشنبه 12-1 5 (۴۱۱ آخر)

Year: .... Month: .... Day: .... Subject: ....



دوران صلب (هیچ نوع تغییر شکلی نداریم تنها تغییر وضعیت است.)





$$\left.\begin{aligned} x - y &= b \\ x + y &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2}$$

ماتریس تنش انحرافی

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \bar{\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

σ_x', σ_y', σ_z'

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

تغییر حجم خالص (وقتی ماده‌ی [illegible]) **

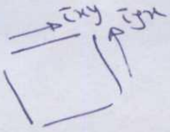
** اگر نشان دهیم قسمت دوم تغییر حجم ایجاد نمی‌کند ← اعوجاج خالص است.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

CACTUS

$\Delta V = 0$ برای این که داشته باشیم $\Leftarrow$ (جامد) $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$

هرچه τ_{yx} کار انجام دهد ، τ_{xy} قرینه آن را انجام می‌دهد.



در این کار انجام نمی‌دهد

Year:........ Month:........ Day:........ Subject:........

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\bar{\sigma} = 0$$

u چگالی انرژی کرنشی $u = u_v + u_d$

u_v: volumetric, u_d: distortion

$$u_v = \frac{1}{2E}\left[3\bar{\sigma}^2 - 2\nu(3\bar{\sigma}^2)\right] = \frac{3(1-2\nu)\bar{\sigma}^2}{2E}$$

$$\Rightarrow u_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

$$u_d = \frac{1}{6E}\Big[3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 6\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)$$
$$-(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2\Big] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

$$= \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right] + \frac{1}{2G}(\ldots)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow u_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

بر حسب تنش‌های اصلی :

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2$$

$$u_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2\right]$$

CACTUS

Year:........ Month:........ Day:........ Subject:........

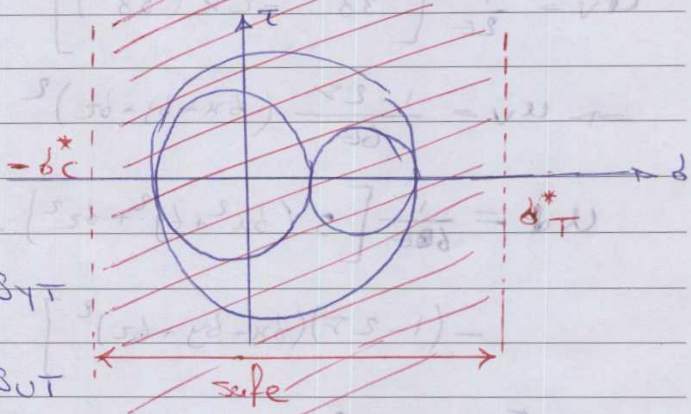
* معیارهای تسلیم و شکست:

مواد نرم هم تسلیم و هم شکست داریم اما در مواد ترد فقط شکست داریم.

$\sigma_{YT} = \sigma_{YC}$
$S_{YT} = S_{YC}$ مواد نرم

۱- معیار تنش عمودی حداکثر (معیار coulomb)

$\sigma_{UC} > \sigma_{UT}$
$S_{UC} > S_{UT}$ مواد ترد

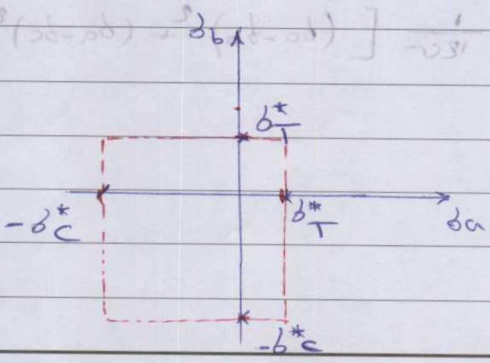


σ_T^* : $\sigma_{YT} = S_{YT}$ ، $\sigma_{UT} = S_{UT}$

σ_C^* : $\sigma_{YC} = S_{YC}$ ، $\sigma_{UC} = S_{UC}$

در تئوری coulomb مقدار تنش برشی مهم نیست ← ناحیه ایمن از بالا و پایین تا بی‌نهایت ادامه دارد

$\sigma_c = 0$ ، σ_a ، σ_b ($\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$) تنش صفحه‌ای

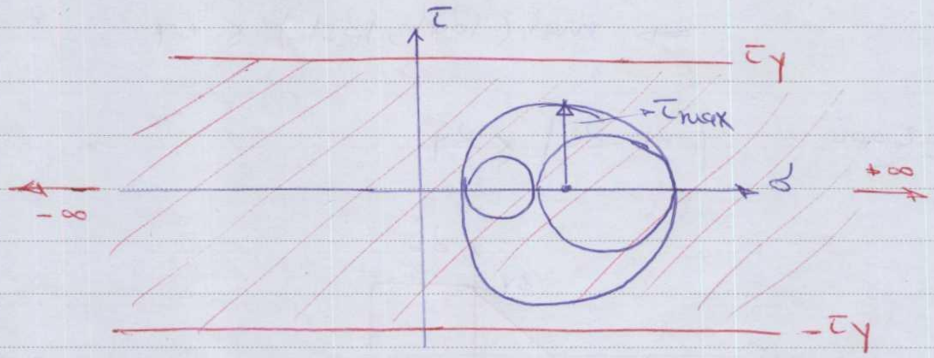


ماده ترد است ← $\sigma_C^* > \sigma_T^*$

CACTUS

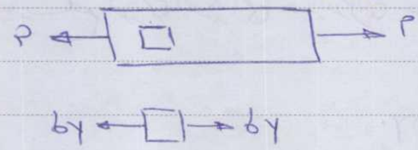
Subject:
Year. Month. Date. ( )

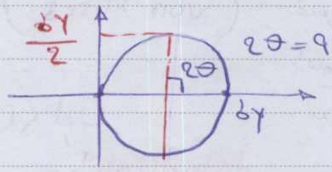
۲- معیار تسلیم تنش برشی حداکثر (برای مواد ductile) : معیار Tresca.



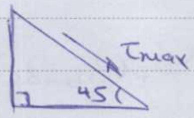
$\tau_{max} < \tau_y = S_{sy}$ (shear) $\qquad \tau_{max} = \dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

* آزمایش کشش تک محوره به مراتب راحت تر (دقیق تر) از تنش برشی است.





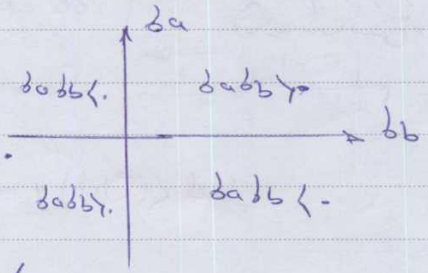
$2\theta = 90 \Rightarrow \theta = 45$



$$\left.\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{\sigma_y}{2} \\ \tau_{max} &= \tau_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$$

$\sigma_c = \sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$

$$\tau_{max} = \begin{cases} \dfrac{\max(|\sigma_a|, |\sigma_b|)}{2} \;, & \sigma_a\sigma_b > 0 \\[2mm] \dfrac{|\sigma_b - \sigma_a|}{2} \;; & \sigma_a\sigma_b < 0 \end{cases}$$



PAPCO

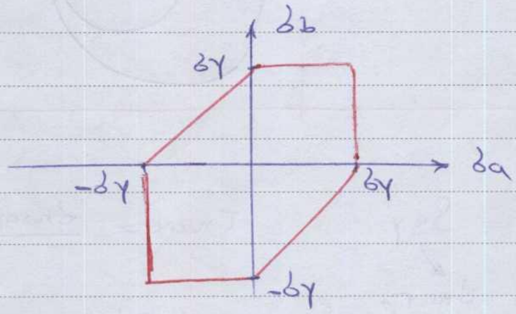
Subject:

Year. Month. Date. ( )

ناحیه ۱ و ۳ : $\tau_{max} = \frac{\max(|\sigma_a|,|\sigma_b|)}{2} < \tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$

$\Rightarrow \max(|\sigma_a|,|\sigma_b|) \le \sigma_y$

ناحیه ۲ و ۴ : $|\sigma_b - \sigma_a| \le \sigma_y$



3- معیار تسلیم انرژی اعوجاجی حداکثر برای مواد نرم (von Mises)

تطبیق بیشتر با واقعیت دارد نسبت به (Tresca

$U_d < (U_d)_y$

distortion

$$U_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a-\sigma_b)^2+(\sigma_a-\sigma_c)^2+(\sigma_b-\sigma_c)^2\right]$$

در آزمایش کشش تک محوری در لحظه تسلیم $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_a = \sigma_y \\ \sigma_b = \sigma_c = 0 \end{cases}$ $\quad (U_d)_y = \frac{1}{6G}\sigma_y^2$

$$U_d < (U_d)_y \Rightarrow \left[(\sigma_a-\sigma_b)^2+(\sigma_b-\sigma_c)^2+(\sigma_a-\sigma_c)^2\right] < 2\sigma_y^2$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

وضعیت برش خالص : $\tau_{xy} = \tau$ و تنش‌ها $= 0$ $\Longrightarrow \begin{cases} \sigma_a = -\tau \\ \sigma_b = \tau \\ \sigma_c = 0 \end{cases}$

در لحظه تسلیم : $\left[(-\tau_y - \tau_y)^2 + \tau_y^2 + (0 - (-\tau_y))^2\right] = 2\sigma_y^2$

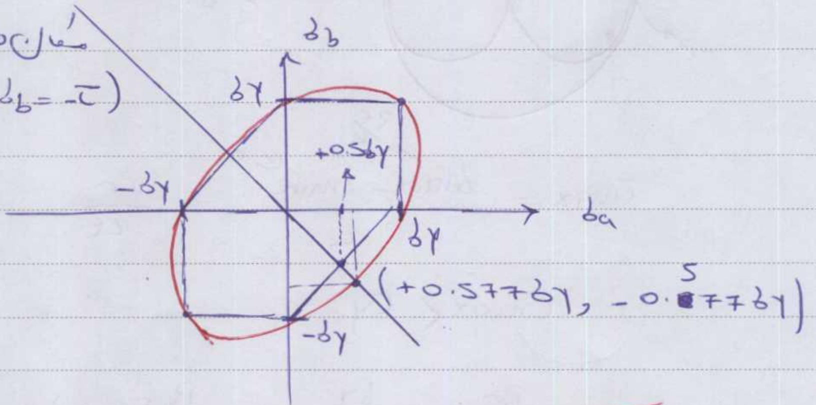
$$\Rightarrow 6\tau_y^2 = 2\sigma_y^2 \Rightarrow \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} = 0.577\sigma_y$$

در معیار Tresca : $\tau_y = \frac{\sigma_y}{2} = 0.5\sigma_y$ ⟵ محافظه‌کارانه‌تر از معیار von Mises

$$\sigma_c = 0 \Longrightarrow \sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_y^2 \quad \mathrm{I}$$

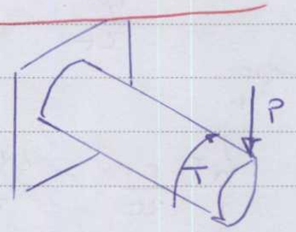
معادله خط وضعیت برش خالص

$(\sigma_a = -\sigma_b = -\tau)$



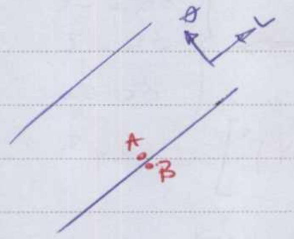
در تیر صفحه‌ای

در حالتی که پیچش و خمش داریم ⟶ $\begin{cases} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{cases}$



$$\begin{cases} \sigma_b = \dfrac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_a = \dfrac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\quad ''} \end{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}} \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 < \sigma_y^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



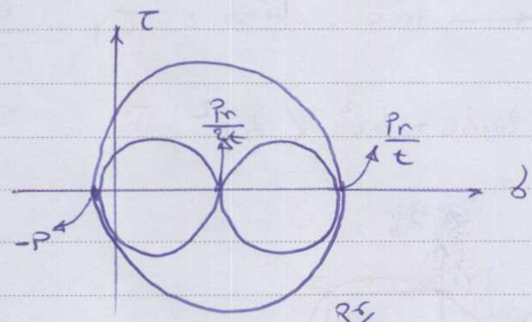
در نقطه A   در نقطه B

$$-P < \sigma_r < 0$$

شعاعی

مخزن جدار نازک است:
(از معیار Tresca استفاده می‌کنیم)

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{Pr}{t} \\ \sigma_L = \dfrac{Pr}{2t} \end{cases}$$



$$\tau_{max} = \frac{\overbrace{\sigma_{max}}^{=\frac{Pr}{t}} - \overbrace{\sigma_{min}}^{\simeq 0}}{2} = \frac{Pr}{2t}$$

$$\tau_{max} < \tau_Y$$

$$\frac{P_Y r}{2t} = \frac{\sigma_Y}{2} \Rightarrow \frac{P_Y r}{t} = \sigma_Y$$

ضریب اطمینان

$$nP\frac{r}{2t} = \frac{\sigma_Y}{2} \longrightarrow P\frac{r}{2t} = \frac{\sigma_Y/n}{2}$$

فشار بارگذاری n برابر مقدار نهایی شود تا وارد ناحیه غیرالاستیک شویم.

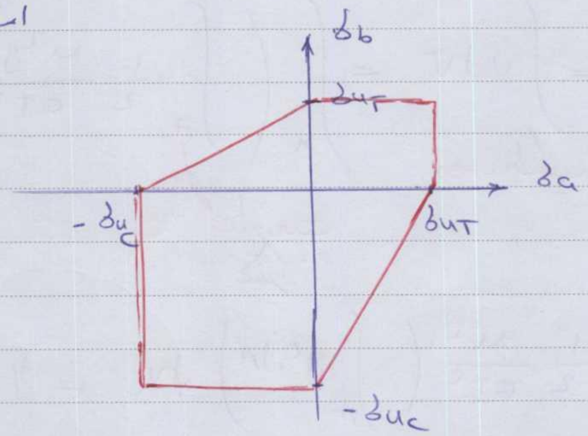
در این حالت اگر n را مقدار ضریب اطمینان ساده در نظر بگیریم هم حالت طراحی بدست آمد، اما همیشه این طور نیست. بنابراین n باید ضریب بارگذاری باشد.

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

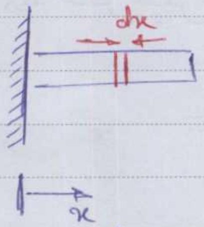
4- معیار شکست کولمب - موهر (موهر) برای مواد ترد: برای مواد نرم هم می‌توان بکار برد (چون در آن‌ها هم شکست وجود دارد) اما نتایج زیاد به واقعیت نزدیک نیست.



مواد بالا الاستیسیته خطی هستند

* انرژی کرنشی:

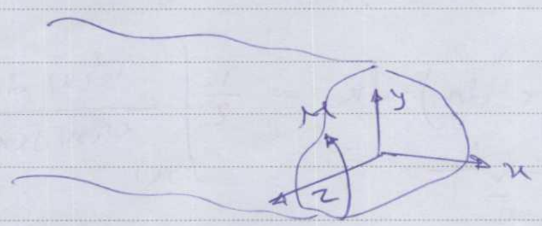
$$U = \tfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x = \tfrac{1}{2}\frac{P}{A}\left(\frac{P}{EA}\right) = \frac{1}{2}\frac{P^2}{EA^2}$$



$$U_{\text{میله}} = \int u\, dV = \int \frac{P^2_{(x)}}{2A_{(x)}E_{(x)}}\, dx$$

$A_{(x)}dx$ در هر سطح مقطع تنش یکنواخت توزیع شده.

* در حالت خمش:



محورها، محورهای اصلی هستند $\quad \sigma_x = \dfrac{-My}{I}$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

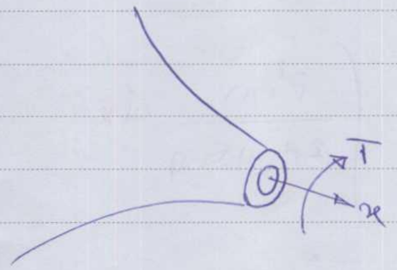
$$U = \frac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} \quad , \quad \sigma_x = \frac{-My}{I}$$

$$U_M = \int U\,dV = \int_x \left(\int_{\underset{\text{مقطع غیر ثابت}}{A}} \frac{1}{2}\frac{M^2 y^2}{EI^2}\,dA \right) dx$$

در هم نقاط یک مقطع تنش یکسان نیست

$$= \int_x \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI^2} \underbrace{\left(\int_A y^2\,dA \right)}_{I} dx = \frac{1}{2}\int \frac{M^2(x)}{E(x)\,I(x)}\,dx$$

* در حالت پیچش :



$$U = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

$$U_T = \int U\,dV = \int_x \int_A \frac{T^2 r^2}{2GJ^2}\,dA\,dx$$

$$\Rightarrow U_T = \int_x \frac{T^2}{2GJ^2} \underbrace{\left(\int r^2\,dA \right)}_{J} dx = \frac{1}{2}\int_x \frac{T^2(x)\,dx}{G(x)\,J(x)}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

چون $\tau_{yz}=\tau_{xz}$ ← z جهت اصلی است.

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

برآیند و مؤلفه‌های نرمال و برشی آن روی صفحه

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

$$\vec{\sigma_n} = \sigma\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{\sigma_{nn}}| = \sigma_n \cdot n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} = 7/3$$

$$\vec{\sigma_{nn}} = |\vec{\sigma_{nn}}|\vec{n} = \frac{7}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau_n} = \vec{\sigma_n} - \vec{\sigma_{nn}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

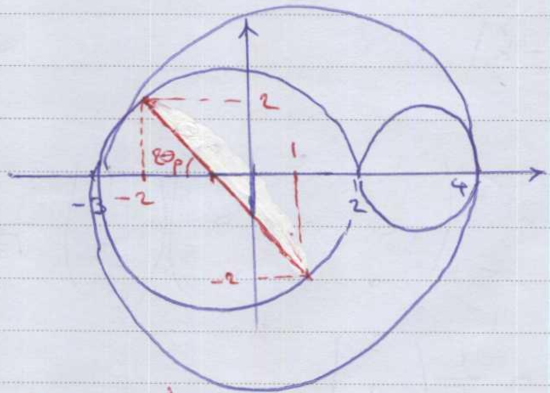
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=-3 \\ \lambda=2 \\ \lambda=4 \end{cases}$$ تنش های اصلی

$$\lambda=-3 \Rightarrow (\sigma-(-3)I)X_1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{X}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

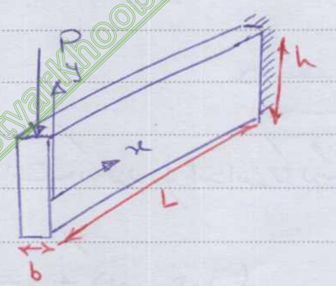
جهت اصلی مربوط به $\lambda=-3$



$$2\theta_p=\tan^{-1}\left(\frac{2}{1.5}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



$$U_V = \int u_\tau \, \underbrace{dV}_{b\,dy\,dx} \qquad u_\tau = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1 - \frac{y^2}{(h/2)^2}\right)$$

$$U_V = \frac{1}{2G}\left(\frac{3P}{2bh}\right)^2 \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 b\,dy\,dx = \frac{3P^2L}{5Gbh}$$

$$U_M = \int \frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$I = \frac{1}{12}bh^3$$

$$U = U_M + U_V = U_M\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \; ; \quad -1 < \nu < 1/2$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \qquad MAX\left(\frac{E}{G}\right) = 2(1+\nu=1/2) = 3$$

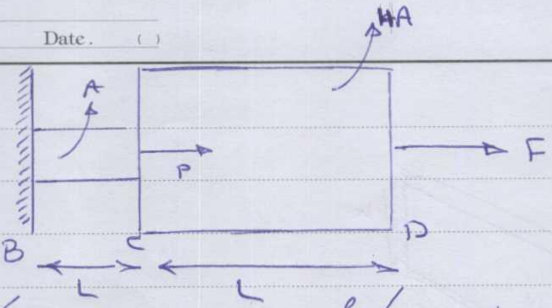
$$\Rightarrow \frac{E}{G} \leq 3 \qquad \frac{3Eh^2}{10GL^2} \leq 0.9\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

PAPCO

انرژی ناشی از برش قابل صرف‌نظر در مقابل انرژی ناشی از خمش [illegible]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 1:



از جمع آثار نمی توان استفاده کرد. (ابتدا انرژی کرنشی ناشی از F و سپس انرژی کرنشی ناشی P را در نظر گرفته و با هم جمع کنیم. i.e.)

σ_1 : تنش ناشی از F در BC

σ_2 : " " P " "

U چگالی انرژی کرنشی $= \dfrac{\sigma^2}{2E}$

$$U = \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2E} = \frac{\sigma_1^2}{2E} + \frac{\sigma_2^2}{2E} + \frac{2\sigma_1\sigma_2}{2E}$$

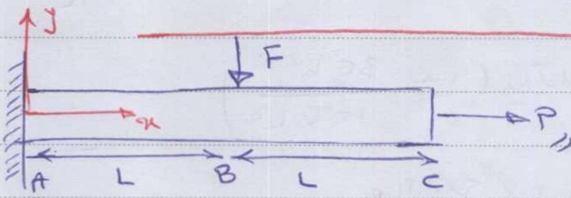
U نسبت به σ خطی نیست پس اگر از روش جمع آثار استفاده شود اگر جمله $\dfrac{2\sigma_1\sigma_2}{2E}$ در نظر گرفته نمی شود.

$$U_{BC} = \frac{(F+P)^2}{2EA^2}$$

$$U_{CD} = \frac{F^2}{2E(4A)^2}$$

$$U = U_{BC}(AL) + U_{CD}(4AL) = \frac{(F+P)^2L}{2EA} + \frac{1}{2}\frac{F^2L}{4EA}$$

مثال 2:



در این مثال می توان از روش جمع آثار استفاده کرد

در مثال 1 اگر یکی از نیروهای F یا P وجود داشته باشد و دیگری اضافه شود محل اثر نیروی اولیه جابه جا می شود اما در مثال اخیر اگر یکی وجود داشته باشد اضافه کردن دیگری محل اثر نیروی اولیه را جابه جا نمی کند اما این جابه جایی در تیر اسیلی مرتبه 2 است و از آن صرف نظر می شود

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش جمع آثار انرژی کرنشی

$$(\sigma_1+\sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2$$

برای یک تعداد از جسم √ نمی باشد

اما وقتی روی این سطح انتگرال می‌گیریم √ می‌شود.

σ_1: ناشی از F — σ_2: ناشی از P

$$\text{انرژی کرنشی یک مقطع} = \frac{1}{2E}\int_A (\sigma_1+\sigma_2)^2\, dA$$

$$= \frac{1}{2E}\int \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2 + \frac{2F(L-x)y}{I}\,\frac{P}{A}\right) dA$$

$$= \frac{1}{2E}\int (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\, dA + \frac{F(L-x)P}{2EIA}\underbrace{\cancel{\int y\, dA}}_{\bar{y}A}$$

$\bar{y}A \rightarrow$ صفر

مثال 3: $E = 200\ GPa$ ، $L = 2m$ ، $d = 2cm$ ، P

انرژی $= 80\ j$

با ضریب اطمینان 3، حد تسلیم لازم برای جذب این انرژی تغییر شکل پلاستیک.

$$U = uV = \frac{\pi}{2}\sigma^2 \times 10^{-15}$$

$u \rightarrow \frac{\sigma^2}{2E}$ ، $V \rightarrow AL$

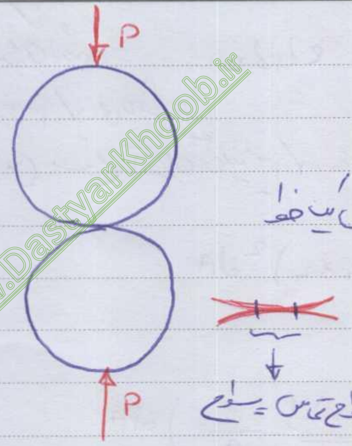
انرژی باید 3 برابر شود ← $[U \rightarrow 3U]$

$$\frac{\pi}{2}\sigma_y^2 \times 10^{-15} = 3\times 80 \Rightarrow \sigma_y = 390\times 10^{9}\ kPa$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sigma_y}{3}\right)^2 \times 10^{-15} = 80 \quad X$$ غلط

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

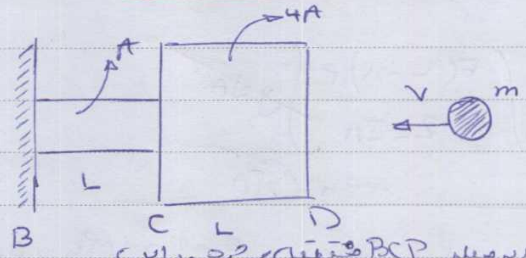


- تنش ∞ ← سطح تماس صفر

اما سطح تماس نیرو نشان می‌دهد.

سطح تماس = سطح

مثال 4: $\sigma_{max} = ?$



$$\begin{cases} |\sigma| = E\sqrt{|\epsilon|} \\ \sigma\epsilon \geq 0 \end{cases}$$

در لحظه‌ای که SYS متوقف شود همه انرژی گلوله به میله BCP منتقل شده و در این لحظه بیشترین نیرو را داریم.

F نیروی لحظه‌ای که SYS ساکن شده

$$\sigma_{CD} = \frac{F}{4A} \quad , \quad \sigma_{BC} = \frac{F}{A}$$

$$U_{BC} = (AL)\int \sigma d\epsilon = AL\int E\sqrt{\epsilon}\, d\epsilon = AL\, 2/3\, \sqrt{\epsilon^3} \Big|_{\epsilon=0}^{\epsilon=\left(\frac{\sigma_{BC}}{E}\right)^2}$$

$$= AL\, 2/3\, E\left(\frac{\sigma_{BC}}{E}\right)^3 = 2/3\, \frac{F^3 L}{E^2 A^2}$$

$$U_{CD} = (4AL)\int \sigma d\epsilon = \frac{2}{3\times 16}\, \frac{F^3 L}{E^2 A^2}$$

$$1/2\, mV^2 = 2/3\, \frac{F^3 L}{E^2 A^2} \times \frac{17}{16} \Rightarrow F = \sqrt[3]{\frac{\frac{12}{17} mV^2 E^2 A^2}{L}}$$

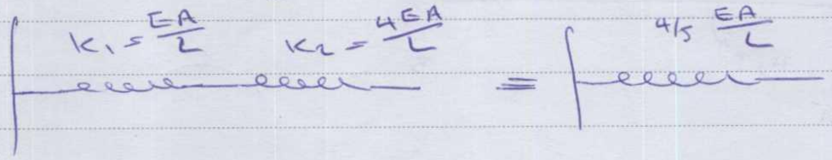
$$\sigma_{max} = \sigma_{BC} = \frac{F}{A} = \sqrt[3]{\frac{\frac{12}{17} mV^2 E^2}{LA}}$$

PAPCO

$$\delta = \frac{FL}{AE} \Rightarrow k = \frac{F}{\delta} = \frac{EA}{L}$$

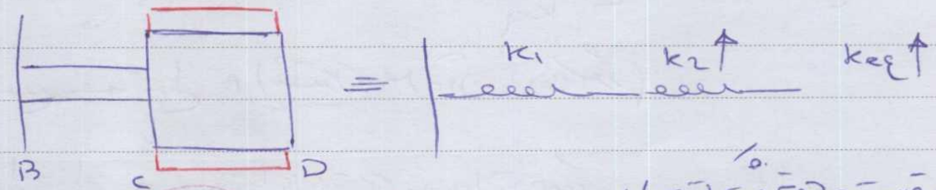
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\sigma = E\epsilon$ اگر ابتدا تنش و کرنش خطی بود میله‌ها را با فنر شبیه‌سازی می‌کردیم.



$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k_{eq}} \Rightarrow F = \sqrt{\frac{4}{5} \frac{EA}{L} m V^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} = \sqrt{\frac{4}{5} \frac{m V^2 E}{AL}}$$

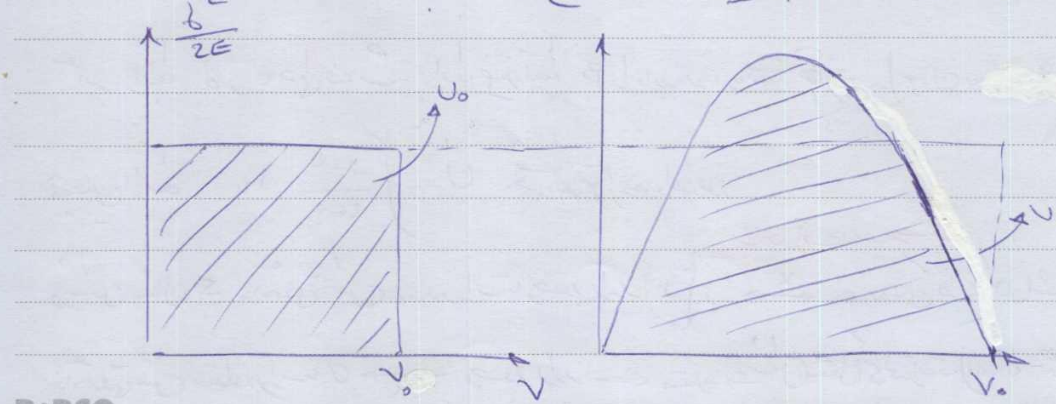


به قسمت CD تنش کمتری وارد
می‌شه چون حالا قطر بزرگ‌تر داره
اگر توزیع تنش غیر یکنواخت فرض شود

اگر BC تقویت شود $\quad \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2 \uparrow}{k_{eq} \uparrow}$

$\downarrow \sigma_{max} = \frac{F \uparrow}{A \uparrow} \qquad \uparrow \sigma_{max} = \frac{F \uparrow}{A} \rightarrow A_{BC}$

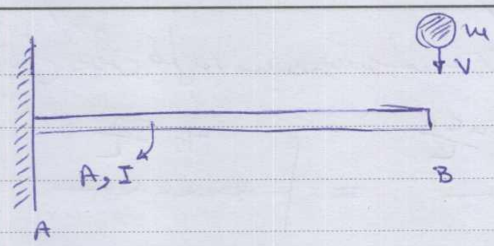
هر چه تنش وارده به حجم یکنواخت‌تر توزیع شود، بهتر است

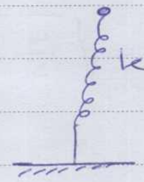


PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۵: $\delta_{max} = ?$





$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} \qquad \delta_B = \frac{FL^3}{3EI} \Rightarrow \frac{F}{\delta_B} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k_{eq}} \Rightarrow F = \sqrt{\frac{3mV^2EI}{L^3}}$$

بدترین مقطع ← مقطع A (بیشترین M به آن وارد می‌شود)

بدترین نقطه مقطع A ← نقطه با بیشترین فاصله از تار خنثی ← تار دورتر به مقطع A

$$\delta_{max} = \frac{(FL)c}{I}$$ بیشترین فاصله از تار خنثی

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{3mV^2E}{L\left(\frac{I}{c^2}\right)}}$$

اگر رابطه σ و ε خطی نباشد رابطه خیز نقطه B را باید دوباره بدست آورد (چون تنش بستگی خواهد داشت)

همچنین رابطه $U = \int \frac{M^2}{2EI}dx$ هم دیگر برقرار نخواهد بود.

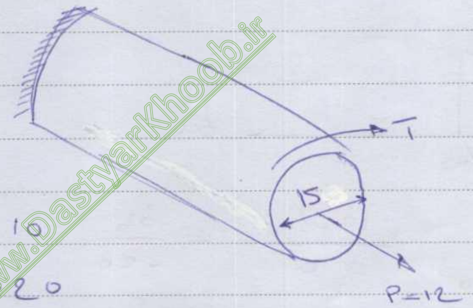
تغییرات شدت زیاد

در این مثال که خمش تنش در دو راستا وجود دارد (y و x) در حالی که در مثال ۴

خمش تنش فقط در راستای σ_x وجود دارد ⟸ مقاومت شکل مثال ۵ کمتر است (δ_{max} به وجود آمده در آن بیشتر است.)

Subject: هفته بعد تمرینشد quiz – تنش‌ها و مبحث‌ها و معیارهای شکست.

Year. Month. Date. ( )

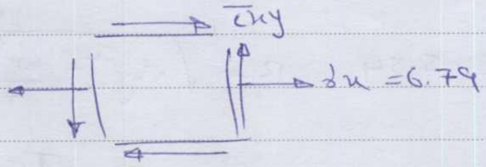


$\sigma_{UT} = 10$

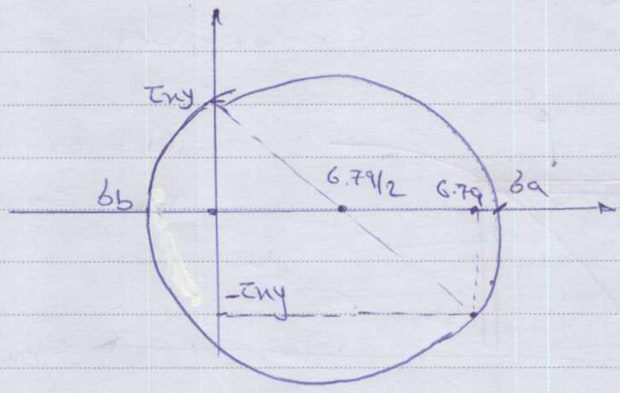
$\sigma_{UC} = 20$

$\tau_{max} = ?$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12}{\frac{\pi^2}{4} 15^2} = 6.79$$



$$\sigma_{ave} = \frac{0 + 6.79}{2} = \frac{6.79}{2}$$

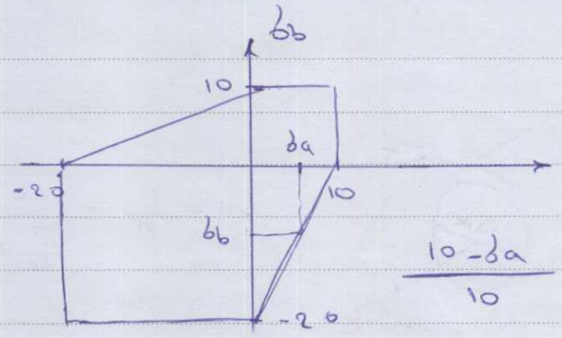


$\sigma_a = \sigma_{ave} + R = 3.395 + R$

$\sigma_b = \sigma_{ave} - R = 3.395 - R$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\frac{10-\sigma_a}{10} = \frac{\sigma_b}{-20}$$

$$\Rightarrow \frac{10-(3.395+R)}{10} = \frac{3.395-R}{-20}$$

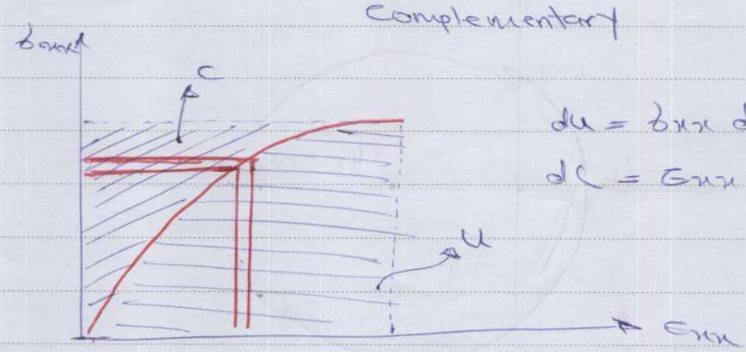
$$\Rightarrow R = 5.54 \qquad R = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{\sigma_x^2}{4}}$$

$$\tau_{xy} = \dots \Rightarrow \tau = \frac{Tc}{J}$$

مکمل انرژی کرنشی واحد حجم = c

C = مکمل انرژی کرنشی

Complementary



$$du = \sigma_{xx}\, d\varepsilon_{xx}$$

$$dc = \varepsilon_{xx}\, d\sigma_{xx}$$

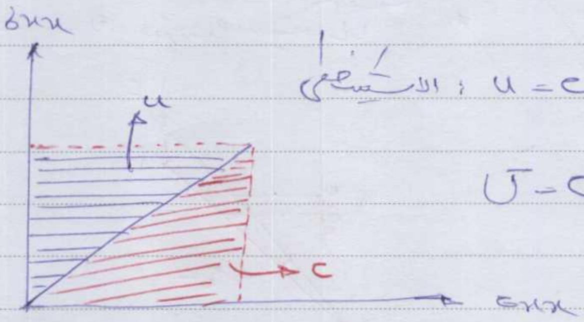
$$du = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

$$dc = \varepsilon_{xx} d\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} d\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} d\sigma_{zz} + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{xz} d\tau_{xz} + \gamma_{yz} d\tau_{yz}$$

$$C = \int c\, dV$$

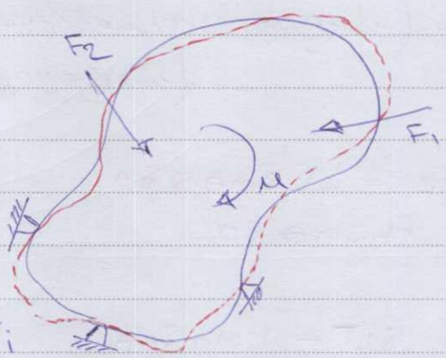
Subject:

Year. Month. Date. ( )



الاستیک : $u = c$

$\bar{U} = \bar{C}$



*اصل کار مجازی :

(جابجایی مجازی)

external

$\delta W_e \quad \delta W_i$

$$W_i = -\left(\int \sigma_x d\varepsilon_x + \int \sigma_y d\varepsilon_y + \dots + \int \tau_{yz}\, d\gamma_{yz}\right)$$

internal

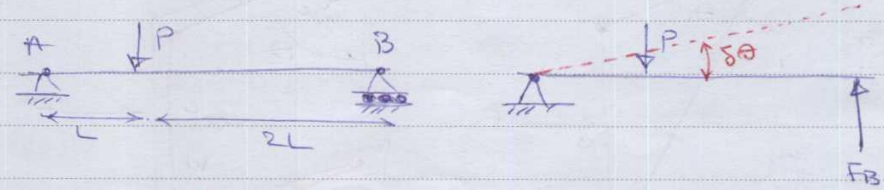
شرط لازم برای تعادل جسم $\longrightarrow \delta W_e + \delta W_i = 0$

اگر سیستم الاستیک باشد $W_i = -U_i$

$\delta W_e - \delta U_i = 0$

$\delta(W_e - U_i) = 0$

مثال:



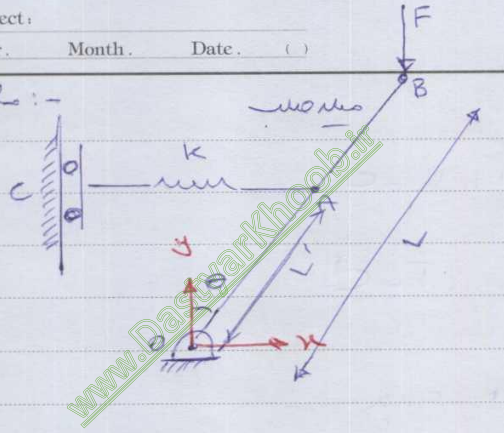
$\delta W_e - \cancel{\delta U} = 0 \Rightarrow \delta W_e = 0 \quad \delta W_e = F_B(3L\delta\theta) - P(L\delta\theta) = 0$

$\Rightarrow F_B = P/3$

در تمام طول جابجایی که جسم مقدار ثابت دارد. اگر F_B از صفر به مقدار نهایی خود رسیده بود در طول جابجایی باید ضریب ½ به آن می دادیم

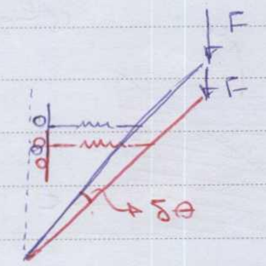
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:-



در حالت θ=0 فنر در وضعیت آزاد است

θ=? تعادل



نیروهای تکیه‌گاهی O کاری انجام نمی‌دهند (چون جابجایی ندارند) نیروی تکیه‌گاهی C نیز کار انجام نمی‌دهد (چون در راستای افقی جابجایی ندارد).

$y_B = L\cos\theta \Rightarrow \delta y_B = -L\sin\theta \times \delta\theta$

$\delta W_e = -F\delta y_B = FL\sin\theta\,\delta\theta$

$U = 1/2\, k x_A^2 \rightarrow \delta U = k x_A \delta x_A$

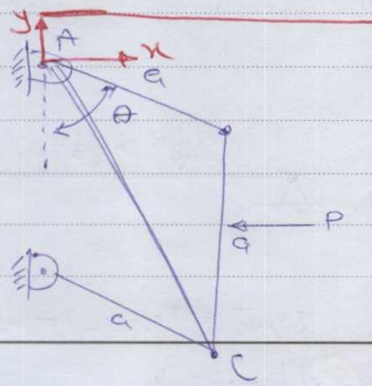
$x_A = L'\sin\theta \rightarrow \delta x_A = L'\cos\theta\,\delta\theta \rightarrow \delta U = kL'^2\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta$

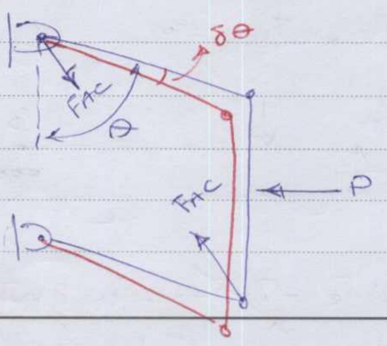
$\delta U - \delta W = 0 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{FL}{kL'^2} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{FL}{kL'^2}$

$\left|\dfrac{FL}{kL'^2}\right| < 1 \leftarrow$ شرط داشتن θ تعادل

مثال:-

$F_{AC} = ?$





Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x_B = x_C = 2a\sin\theta$

$y_C = -a\cos\theta - a$

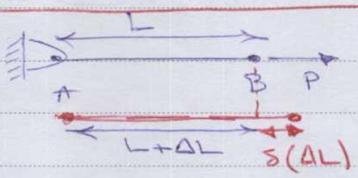
$|AC| = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta} = 2a\cos\theta/2$

$\delta|AC| = -a\sin\theta/2\ \delta\theta$

$\delta W_e = (-F_{AC}\,\delta|AC|) + (-P\delta x_B) = F_{AC}(-a\sin\theta/2\ \delta\theta)$
$+P(a\cos\theta\ \delta\theta) = 0$

$\Rightarrow F_{AC} = \dfrac{P\cos\theta}{\sin\theta/2}$

مثال: —



$\begin{cases} |\sigma| = E\sqrt{|\epsilon|} \\ \delta\epsilon \geq 0 \end{cases}$

$U = \int u\,dV = u(AL)$

$u = \int \sigma\,d\epsilon = 2/3\,E\sqrt{|\epsilon|^3}$

راه حل ۲: $\dfrac{P}{A} = E\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}$
$\Downarrow$
$\Delta L = \left(\dfrac{P}{EA}\right)^2 L$

$U = 2/3\,EAL\sqrt{\left(\dfrac{\Delta L}{L}\right)^3}$

$\Delta L > 0 \leftarrow$ چون کششی

$\delta U = EA\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}\ \delta(\Delta L)$

$\Delta L = \left(\dfrac{P}{EA}\right)^2 L$

$\delta W_e = P(\delta\Delta L)$

$P = EA\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}$

PAPCO

$\delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow EA\sqrt{\dfrac{\Delta L}{L}}\ \delta(\Delta L) - P\delta(\Delta L) = 0$

24.01.90 Quiz : energy

Subject :
Year. Month. Date. ( )

Castigliano Theorem:

x_i : درجه آزادی iام : جابجایی نقطه‌ای از سیستم و یک راستای خاص یا دوران ماده در نقطه‌ای از جسم حول راستای خاص

F_i : بار متناظر با درجه آزادی x_i :

بسته به نوع درجه آزادی x_i (جابجایی یا دوران) نیروی وارد بر نقطه مورد نظر در راستای مفروض، یا گشتاور وارد بر نقطه مورد نظر حول راستای مفروض x_i می‌باشد

یک سیستم می‌تواند بینهایت درجه آزادی داشته باشد $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$U = U(x_1, x_2, \ldots)$$

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i$$

$$\delta W_e = \sum_i F_i \delta x_i$$

$$\delta U - \delta W_e = 0 \xrightarrow[\delta x_i \text{ ها}]{\text{به شرط استقلال}} \boxed{\forall i \rightarrow F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}}$$

قضیه اول کاستیلیانو

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$U = \int \sigma \, d\epsilon \longrightarrow C = \int \epsilon \, d\sigma$$

$$\delta W_e = \sum_i F_i \, \delta x_i \longrightarrow \delta C'_{we} = \sum_i x_i \, \delta F_i$$

$$C' = C'(F_1, F_2, \dots) \longrightarrow \delta C' = \sum \frac{\partial C'}{\partial F_i} \delta F_i$$

C' را به صورت تابعی از F_i ها یا x_i ها می‌توان نوشت

$$\delta U = \delta W_e \longrightarrow \delta C' = \delta C'_{we} \Longrightarrow \boxed{x_i = \frac{\partial C'}{\partial F_i}}$$

Crotti – Engesser theorem

و قضیه زمانی برقرار است که جسم الاستیک باشد

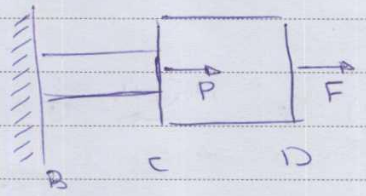
هم ارز = در هر حال با هم برابر هستند

اگر جسم الاستیک خطی $\longrightarrow U \equiv C' \Longrightarrow$

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial C'}{\partial x_i}$$

$$x_i = \frac{\partial C'}{\partial F_i} = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}}$$ قضیه دوم کاستیلیانو



$\alpha_{ij} =$ مقدار تغییر درجه آزادی i در اثر اعمال بار واحد
متناظر با درجه آزادی j

سیستم خطی $\longrightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

PAPCO

$$x_i = \sum_m \alpha_{im} F_m$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\sum_i x_i F_i \\ (1)\; x_i &= \sum_m \alpha_{im} F_m \end{aligned}\right\} \Longrightarrow U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_m (\alpha_{im} F_m) F_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = x_j \Longrightarrow \frac{1}{2}\sum_i \sum_m \alpha_{im}\frac{\partial F_m}{\partial F_j} F_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_m \alpha_{im} F_m \frac{\partial F_i}{\partial F_j} = x_j$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial F_j} = \begin{cases} +1 & m = j \\ 0 & m \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial F_i}{\partial F_j} = \begin{cases} +1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Longrightarrow x_j = \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ij} F_i + \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{jm} F_m \\ &(1)\; x_j = \sum_m \alpha_{jm} F_m \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum_i \alpha_{ij} F_i = \sum_m \alpha_{jm} F_m$$

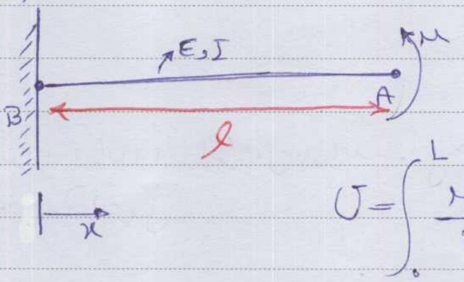
$$\Longrightarrow \sum_i \alpha_{ij} F_i = \sum_i \alpha_{ji} F_i \Longrightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

reciprocal theorem

Maxwell's Law

مثال ۱:

دوران A را بدست آورید، الاستیک خطی است.

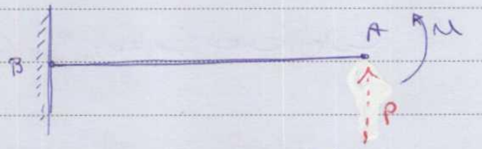


$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}\,dx \xrightarrow{M(x)=M} U = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^L \frac{2M\frac{\partial M}{\partial M}}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\,dx = \frac{ML}{EI}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 2: همان مثال قبل خیز A را بدست آورید



$$\frac{\partial U}{\partial P} \qquad M(x) = M + PL - Px$$

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial P}}{EI}\,dx$$

معمولا اگر مشتق را وارد انتگرال کنیم و بعد انتگرال بگیریم راحت‌تر است.

$$= \frac{1}{EI}\int_0^L (M + PL - Px)(L - x)\,dx$$

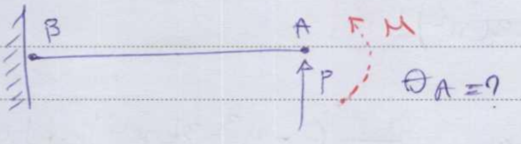
حال برای یافتن y_A در شکل اصلی (1) باید $P=0$ قرار دهیم.

$$\xrightarrow{P=0} \quad y_A = \frac{ML^2}{2EI}$$

تنها با داشتن بار می‌توان P را به صورت صفر قرار داد

* Sup *

مثال 3:



$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M}\int \frac{M^2(x)}{2EI}\,dx \qquad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

بارگذاری i = شیب A

بارگذاری j = خیز A

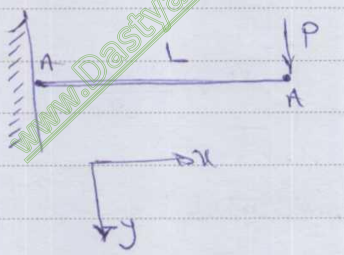
$$\alpha_{ji} = \frac{ML^2}{2EI}\Big/M = \frac{L^2}{2EI} = \alpha_{ij}$$

$$\theta_A = P\alpha_{ij} = \frac{PL^2}{2EI}$$

PAPCO

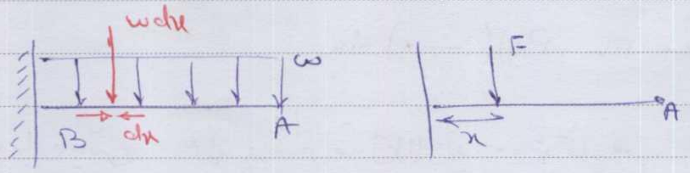
Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر درجه آزادی بدست آمده از قضیه کاستیگلیانو (+) باشد پس درجه آزادی در جهت بار منظور آن است و اگر (−) باشد در خلاف جهت آن است



$$y = \frac{P}{6EI}\left(-x^3 + 3Lx^2\right)$$

مثال 4:



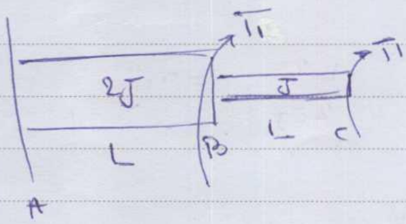
$$y_{A,F} = \alpha_{Ax} F \qquad \alpha_{Ax} = \alpha_{xA} \qquad \alpha_{xA} = \frac{1}{6EI}\left(-x^3+3Lx^2\right)$$

$$y_{A,F} = \frac{F}{6EI}\left(-x^3+3Lx^2\right)$$

$$F \to w\,dx \qquad dy_{A,w} = \frac{1}{6EI}\left(-x^3+3Lx^2\right) w\,dx$$

$$\Rightarrow y_{A,w} = \int_0^L \frac{w\left(-x^3+3Lx^2\right)}{6EI}\,dx = \frac{wL^4}{8EI}$$

مثال 5:



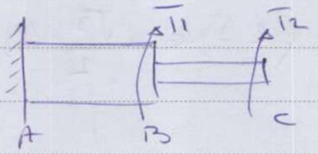
$$\phi_C = ?$$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$U = U(T_1)$ $\quad \dfrac{\partial U}{\partial T_1}$ → غلط — در حالت پیچش با مشتق گرفتن آن موقع T1 را می تغییر می‌کرد، در حالی که اینجا هر دو بار T1 تغییر می‌کند.

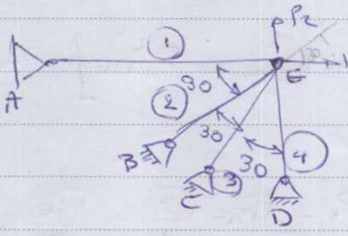


$$\phi_C = \frac{\partial U(T_1, T_2)}{\partial T_2} \qquad U = \int_0^{2L} \frac{T^2(x)}{2J(x)G(x)}\,dx$$

$$= \int_0^{L} \frac{(T_1+T_2)^2\,dx}{2\underbrace{J(x)}_{J}\underbrace{G(x)}_{G}} + \int_L^{2L} \frac{T_2^2\,dx}{2\underbrace{J(x)}_{J}\underbrace{G(x)}_{G}}$$

$$\phi_C = \frac{\partial U}{\partial T_2} = \int_0^{L} \frac{T_2+T_1}{2JG}\,dx + \int_L^{2L} \frac{T_2}{JG}\,dx = \frac{L}{GJ}\left(\frac{T_2+T_1}{2} + T_2\right)$$

مثال 6:



Sys : 2 نامعین مرتبه

2 رابطه تعادل افقی و عمودی برای مفصل E

$F_1, F_2, F_3, F_4, \Delta x_E, \Delta y_E$

روش سازگاری ؟ !

$$\Delta L_i(\Delta x_E, \Delta y_E) = \frac{F_i L}{EA}$$ ← قبلاً این گونه داشتیم

روش انرژی → $U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \quad (1)$

$U_i = \frac{1}{2} k (\Delta L_i)^2 \quad (2)$, $\quad k = \frac{EA}{L}$ $\qquad \Delta L_1 = \Delta x_E$ $\qquad \Delta y_E$ سبب دوران

میله ① می‌شود (راستای عمود بر میله ①)

$\Delta L_2 = (\cos 30)\,\Delta x_E + \sin(30)\,\Delta y_E$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Delta L_3 = \frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\Delta y_E}{2} \quad , \quad \Delta L_4 = \Delta y_E \quad (3)$$

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial(\Delta x_E)} \xrightarrow{(1),(2),(3)} P_1 = \frac{EA}{L}\left(2\Delta x_E + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta y_E\right) \quad (4)$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial(\Delta y_E)} \longrightarrow P_2 = \frac{EA}{L}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x_E + 2\Delta y_E\right) \quad (5)$$

(4), (5) ⟶ دو معادله دو مجهول

$$\begin{cases} \Delta x_E = \dfrac{2L}{13EA}\left(4P_1 - \sqrt{3}P_2\right) & (6) \\ \Delta y_E = \dfrac{2L}{13EA}\left(4P_2 - \sqrt{3}P_1\right) & (7) \end{cases}$$

$$F_B = F_{BE} = \frac{EA}{L}(\Delta L_2) \xrightarrow{(3)_2,(6),(7)} F_B = \frac{2}{13}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2\right]$$

$$U = \frac{1}{2K}\sum F_i^2$$

$U = U(F_1, F_2, \dots)$ حال برحسب نیروها

$$U = \frac{1}{2}\frac{L}{EA}\left[F_{AE}^2 + F_{BE}^2 + F_{CE}^2 + F_{DE}^2\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_{x_E} = 0 \\ \sum F_{y_E} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} F_{AE} &= P_1 - F_{BE}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{F_{CE}}{2} \\ F_{DE} &= P_2 - \frac{F_{BE}}{2} - F_{CE}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EA}\left[\left(P_1 - F_{BE}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{F_{CE}}{2}\right)^2 + \left(P_2 - \frac{F_{BE}}{2} - F_{CE}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + F_{BE}^2 + F_{CE}^2\right]$$

جابجایی تکیه B $= \cancel{\delta_B} = \dfrac{\partial U}{\partial F_{BE}}$ حل

0

$F_{BE} \to F_B$

Subject: دو روش حل
Year. Month. Date.

$$\begin{cases} U = U(F_1 \dots) \xrightarrow{castig} F_1 \dots \checkmark \longrightarrow x_1 \dots \checkmark \\ U = U(x_1, \dots) \xrightarrow{castig} x_1 \dots \checkmark \longrightarrow F_1 \dots \checkmark \end{cases}$$

طبق $-\sqrt{3}/2\left(P_1 - F_{BE}\sqrt{3}/2 - F_{CE}/2\right) - 1/2\left(P_2 - F_{BE}/2 - F_{CE}\sqrt{3}/2\right) + F_{BE} = 0$

$\delta_C = \dfrac{\partial U}{\partial F_{CE}} = 0$ طبق $-1/2(\quad " \quad) - 1/2(\quad " \quad) + F_{CE} = 0$

$\Rightarrow F_{BE}, F_{CE} \checkmark \Rightarrow F_{AE}, F_{DE} \checkmark \Rightarrow$ جابجایی‌ها

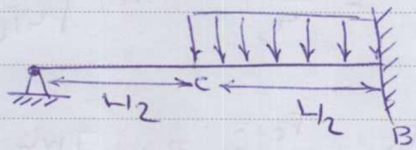
$$F_{BE} = \frac{2}{13}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}P_1 - 1/2\,P_2\right]$$

$$F_{CE} = \,"\,\left[\,"\,P_2 - \,"\,P_1\right]$$

* اگر جابجایی وسط میله ② را بخواهیم: از وسط میله دو قطع زده و سیستم را میله ① و ③ و ④ و نصف ② در نظر می‌گیریم و معادله انرژی را می‌نویسیم یا حل میله ② و سپس میله‌ها را از هم جدا کرده و یک

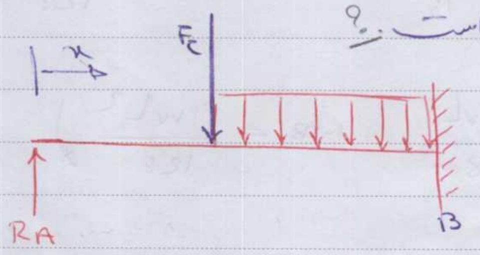
جابجایی در نقطه وسط میله ② در نظر می‌گیریم. try solving this Q.

مثال:



Sys $\longrightarrow$ نامعین مرتبه یک

نوشتن U برحسب جابجایی سخت است ؟



PAPCO

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$\longrightarrow M(x) = R_A x - \frac{w}{2}\langle x - L/2 \rangle^2 - F_c \langle x - L/2 \rangle$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial R_A}}{EI} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left(R_A x - \frac{w}{2}\langle x - L/2 \rangle^2 - F_c \langle x - L/2 \rangle \right) x \, dx = 0$$

(*)

$$\underline{\langle x - L/2 \rangle^m x = \langle x - L/2 \rangle^{m+1} + L/2 \langle x - L/2 \rangle^m}$$

$$R_A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L - \frac{w(x - L/2)^4}{8}\Big|_{L/2}^L - \frac{w(x - L/2)^3 L}{12}\Big|_{L/2}^L$$

$$- F_c/_2 (x - L/2)^3 \Big|_{L/2}^L - \frac{F_c}{4} L (x - L/2)^2 \Big|_{L/2}^L$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{7wL}{128} + \frac{5F_c}{16} \xrightarrow{F_c = 0} R_A = \frac{7wL}{128}$$

$$\xrightarrow{\text{تعادل}} R_B = \frac{57wL}{128}, \quad M_B = \frac{9wL^2}{128}$$

PAPCO

$$y_c = \frac{\partial U}{\partial F_c} = \frac{1}{EI}\int_0^L M(x)\,\frac{\partial M(x)}{\partial F_c}\,dx$$

$$M(x) = \underbrace{\frac{7wL}{128}x + \frac{5F_c}{16}x}_{R_A x} - F_c\langle x - L/2\rangle - \frac{w}{2}\langle x - L/2\rangle^2$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F_c} = \frac{5x}{16} - \langle x - L/2\rangle$$

$$EI y_c = \int_0^L M(x)\Big|_{F=0}\,\frac{\partial M(x)}{\partial F_c}\,dx = \int_0^L \left(\frac{7wLx}{128} - \frac{w\langle x-L/2\rangle^2}{2}\right)\left(\frac{5x}{16} - \langle x-L/2\rangle\right)dx$$

$$= \frac{5}{16}\int_0^L\left(\frac{7wLx}{128} - \frac{w\langle x-L/2\rangle^2}{2}\right)x\,dx \xrightarrow{*} 0$$

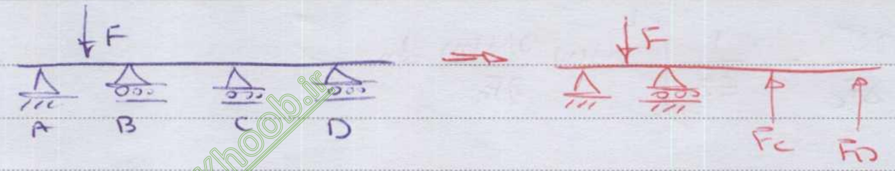
$$\underbrace{+\,w\int_0^L\left(\frac{-7Lx\langle x-L/2\rangle}{128} + \frac{w\langle x-L/2\rangle^3}{2}\right)dx}_{\frac{13wL^4}{258\times 24}\ (1)}$$

چون F_c را به سمت پایین فرض کردیم و (1) مثبت است پس به سمت پایین جابجا می‌شود.

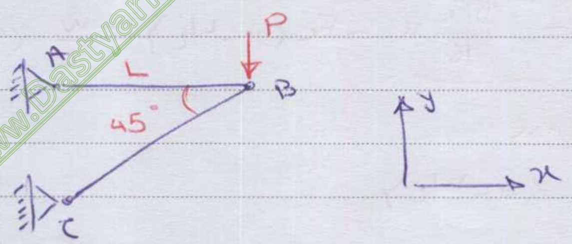
می‌توانستیم B را به لولا تبدیل کرده و یک لنگر M_B در نقطه B قرار دهیم ?

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



syp
مثال:



sys → مصن

$|\sigma| = E\sqrt{|\epsilon|}$

$\sigma\epsilon > 0$

اوایل — تبدیل → نیروهای میله‌ها → σ → ϵ → ΔL

$F_{BC} = -P\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{BC} \Rightarrow \epsilon_{BC} \Rightarrow \Delta L_{BC} = \Delta x_B \cos 45 + \Delta y_B \sin 45$

$F_{AB} = P \Rightarrow \sigma_{AB} \Rightarrow \epsilon_{AB} \Rightarrow \Delta L_{AB} = \Delta x_B$

$\Rightarrow \Delta x_B , \Delta y_B$ ✓

$$\Delta y_B = \frac{-5P^2L}{E^2A^2} \rightarrow$$ رو به پایین (خلاف جهت y)

روش انرژی، sys $\xrightarrow{\text{مکمل}}$ $\Delta y_B = \dfrac{\partial C}{\partial P}$

$$C = \int \epsilon \, d\sigma = \int \frac{\sigma^2}{E^2} d\sigma = \frac{1}{3}\frac{|\sigma^3|}{E^2}$$

برای یک میله → $C = \dfrac{1}{3}\dfrac{|\sigma^3|}{E^2} AL \xrightarrow{|\sigma| = \frac{|F|}{A}} C = \dfrac{|F^3|L}{3E^2A^2}$

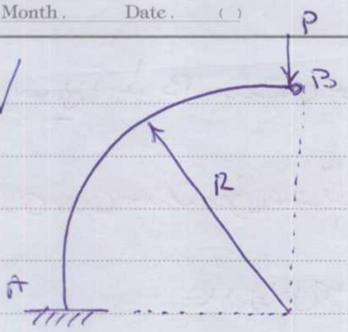
$$C_{AB} + C_{BC} = C_{sys} = \frac{P^3L}{3E^2A^2}\left(1 + |-\sqrt{2}|^3\sqrt{2}\right) = \frac{5P^3L}{3E^2A^2}$$

$$\Delta y_B = \frac{\partial C}{\partial P} = \frac{5P^2L}{E^2A^2}$$ رو به پایین (در جهت P)

PAPCO

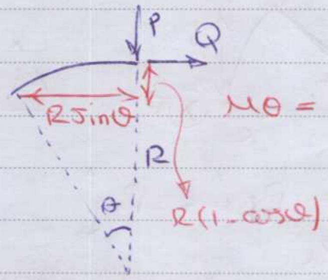
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



روش مقاومت ۱ برای خمیز فقط برای تیرهای غیرخمیده است.

از اثرات نیروهای برشی و محوری صرف‌نظر می‌شود



$$M_\theta = PR\sin\theta + QR(1-\cos\theta)$$

ds dl

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\theta)\, R\,d\theta}{2EI}$$

$$\Delta y_B = \frac{\partial U}{\partial P}\bigg|_{Q=0} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} (PR\sin\theta)\underbrace{(R\sin\theta)}_{\frac{\partial M_\theta}{\partial P}\big|_{Q=0}} R\,d\theta$$

$$= \frac{\pi P R^3}{4EI}$$

$$\Delta x_B = \frac{\partial U}{\partial Q}\bigg|_{Q=0} = \int_0^{\pi/2} (PR\sin\theta)\big(R(1-\cos\theta)\big) R\,d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

مثال:

PAPCO

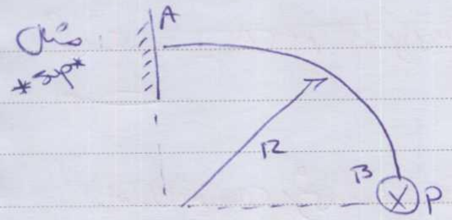
عمود بر صفحه ← Torsion

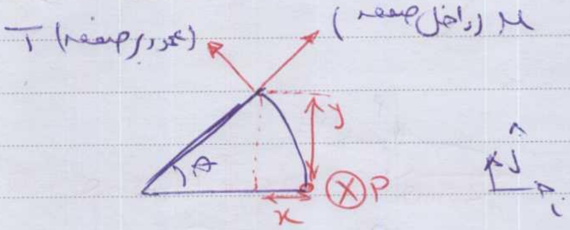
داخل صفحه ← Bending

مثال *مهم*

جابجایی نقطه B در راستای عمود بر صفحه P

از اثر نیروهای محوری و برشی صرف نظر می کنیم





$$\vec{L}(\theta) = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} = P_y \hat{i} + P_x \hat{j}$$

$$M(\theta) = \underbrace{L_x}_{P_y} \cos\theta + \underbrace{L_y}_{P_x} \sin\theta \quad \xrightarrow[y = R\sin\theta]{x = R(1-\cos\theta)} M(\theta) = PR\left[(1-\cos\theta)\sin\theta + \sin\theta\cos\theta\right] = PR\sin\theta$$

$$T(\theta) = -L_x \sin\theta + L_y \cos\theta \rightarrow PR(\cos\theta - 1)$$

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^{\pi/2} M^2 R\, d\theta + \frac{1}{2GJ}\int_0^{\pi/2} T^2 R\, d\theta$$

جابجایی عمود بر صفحه

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} (PR\sin\theta)(R\sin\theta) R\, d\theta$$

$$+ \frac{1}{GJ}\int_0^{\pi/2} (PR)(1-\cos\theta) R(1-\cos\theta) R\, d\theta$$

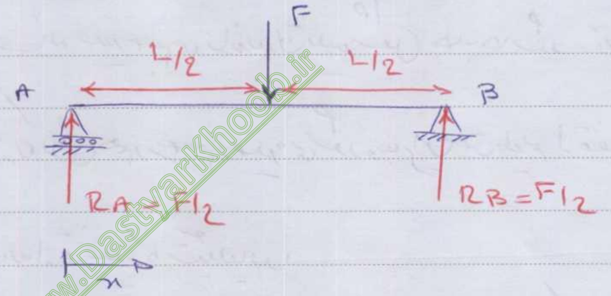
$$= \frac{\pi}{4}\frac{PR^3}{EI} + \frac{3\pi - 8}{4}\frac{PR^3}{GJ}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال :



$$\frac{\partial U}{\partial R_A} \overset{?}{=} 0 \qquad M(x) = R_A x - F\langle x - L/2 \rangle$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{\partial M}{\partial R_A} M\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L x\left(R_A x - F\langle x - L/2\rangle\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left(R_A \frac{L^3}{3} - \frac{5}{48} F L^3\right) = 0 \implies R_A = \frac{5}{16} F \neq F/2$$

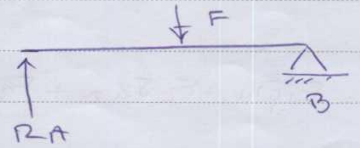
$$\frac{\partial F}{\partial R_A} \neq 0 \longleftarrow F = 2R_A$$ RA, F مستقل نیستند

$$M(x) = R_A x - 2R_A \langle x - L/2 \rangle$$

$$\implies \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(x - 2\langle x - l/2\rangle\right)\left(R_A x - F\langle x - L/2\rangle\right)dx$$

$$= \frac{R_A L^3}{24 EI} \neq 0$$ هی وای من! باز هم صفر نشد، تناقض دارد

این که تکیه‌گاه را برداریم و به جای آن نیرو بگذاریم، یک سیستم جدید ساختیم.



PAPCO

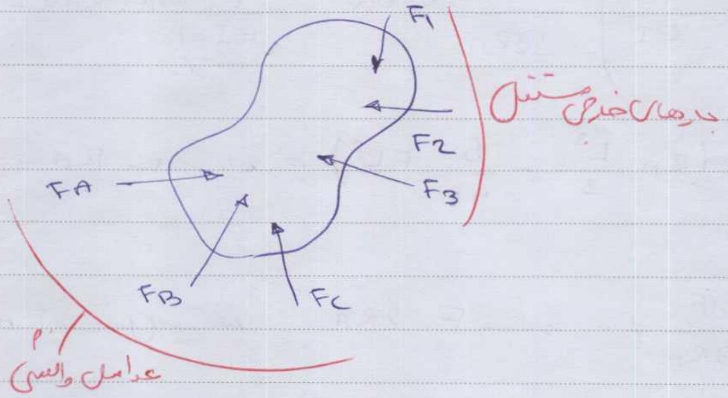
Subject:

Year. Month. Date. ( )

در این مسئله چون جسم می‌تواند بدون تغییر شکل جابجا شود، وقتی تغییر شکلی نداشته باشیم پس هیچ انرژی کرنشی هم در جسم ذخیره نمی‌شود و بنابراین حق نداریم از قضیه کاستیلیانو استفاده کنیم:

* استفاده از قضیه کاستیلیانو:

شرط (I): جسم به اندازه‌ی کافی دارای بارهای عکس‌العملی و واکنشی باشد که به بارهای خارجی مستقل اعمال شده بسوی کنند و خود را طوری تنظیم کنند که تعادل برقرار باشد



$$C' = C'(F_1, F_2, F_3, \dots)$$

بدون F_A , F_B , F_C

$$\delta C' = \frac{\partial C'}{\partial F_1}\delta F_1 + \frac{\partial C'}{\partial F_2}\delta F_2 + \dots$$

$$\delta C'_{We} = x_1 \delta F_1 + x_2 \delta F_2 + \dots x_A \delta F_A + x_B \delta F_B + x_C \delta F_C$$

$$\delta W_e = F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + F_3 \delta x_3 + \dots + F_A \delta x_A + F_B \delta x_B + F_C \delta x_C$$

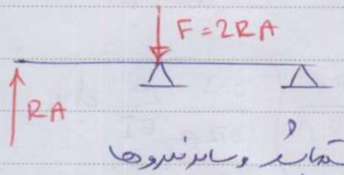
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

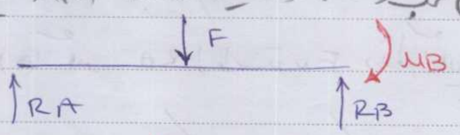
$\delta U = \delta U_{we} \Rightarrow x_A = x_B = x_C = 0$

شرط (II) - تکیه‌گاه‌ها باید صلب باشند تا نیروهای تکیه‌گاهی دارای درجه آزادی متناظر با خود نباشند

در حالتی که $F = 2R_A$ گرفتیم خیز انتهای سمت چپ ما شکل زیر را بدست آوردیم.

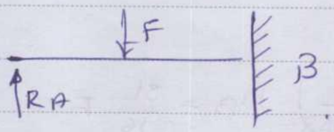


وقتی می‌گوییم $x_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$ جابجایی فقط F_i تغییر جزئی داشته باشد (در راستای) و سایر نیروها (مستقل‌ها) تغییر نکنند (نیروهای تکیه‌گاهی صلب می‌توانند تغییر کنند چون ضرب x_A و x_B و x_C و ... آنها صفر است) چرا که این باید در انتهای سمت راست صورت بگیرد تا راستای $M(x)$ آن تغییر نکند



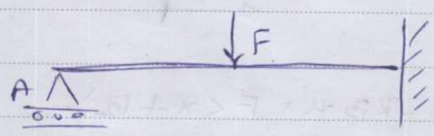
نگذاشتن M_B : برقراری شرط (I)

تولید M_B و R_B توسط تکیه‌گاه صلب (cantilever): برقراری شرط (II)



خیز $\frac{1}{EI}\left(R_A\frac{L^3}{3} - \frac{5}{48}FL^3\right)$ مربوط به حالت روبرو است.

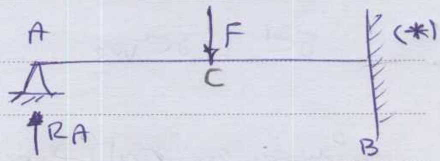
وقتی خیز انتهای سمت چپ تیر را صفر کرده‌ایم ($R_A = \frac{5}{16}F$) در واقع نیروی تکیه‌گاهی را رسانده زیر را بدست آورده‌ایم.



PAPCO

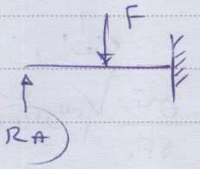
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$M(x) = R_A x - F\langle x - L/2 \rangle$ صفر؟ $\langle$



$$\frac{\partial U}{\partial F} = \underbrace{\frac{\partial R_A}{\partial F}}_{\frac{5}{16}} \int \underbrace{\frac{\partial M}{\partial R_A}}_{x} \frac{M(x)}{EI}\,dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial F}}_{1} \int \underbrace{\frac{\partial M}{\partial F}}_{-\langle x - L/2 \rangle} \frac{M(x)}{EI}\,dx$$

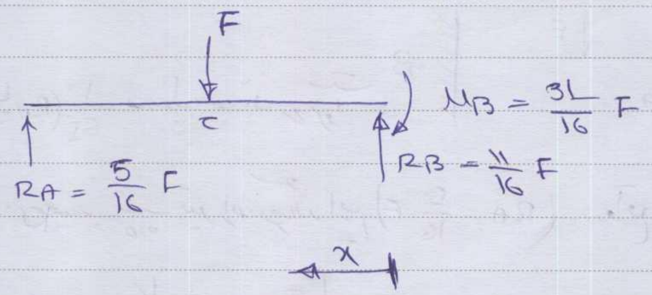
مخالف صفر



مستقل از F

$$\delta_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial R_A}{\partial R_A} \int \underbrace{\frac{\partial M}{\partial R_A}}_{x} \frac{M}{EI}\,dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial R_A}}_{0} \int \frac{\partial M}{\partial F} M \frac{dx}{EI}$$

در مسأله (*) اگر R_A را وابسته به F در نظر بگیریم هم مشکلی پیش نمی‌آید چون مسأله نامعین مرتبه اول است و می‌توان یکی از نیروهای تکیه‌گاهی را مستقل در نظر گرفت.



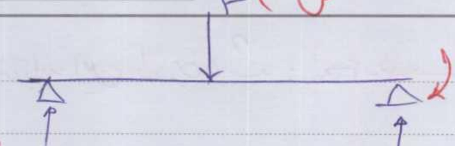
$$M(x) = M_B - R_B x + F\langle x - L/2 \rangle$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{3LF}{16} - \frac{11F}{16}x + F\langle x - L/2 \rangle\right)\left(\underbrace{\frac{3L}{16}}_{\frac{\partial M_B}{\partial F}} - \underbrace{\frac{11}{16}}_{\frac{\partial R_B}{\partial F}} x + \langle x - L/2 \rangle\right) dx$$

PAPCO

$$= \frac{7FL^3}{48 \times 16 EI}$$

اگر sys معین باشد، وقتی بجای یک تکیه گاه، نیروی تکیه گاهی قرار دهیم شرط (I) نقض میشود.
(آخر مسأله معین که زدید که استاتیک نمی خواهد، تعادل بنویس)



F (مستقل)

M_B مستقل (در تقارن فرض کنیم)

$R_A = F/2 - \frac{M_B}{L}$ واکنش

$R_B = \frac{F}{2} + \frac{M_B}{L}$ واکنش

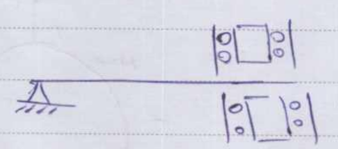
$\frac{\partial M_B}{\partial F}$ $\quad \frac{\partial R_B}{\partial F}$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{3LF}{16} - \frac{11Fx}{16} + F\langle x - L/2\rangle\right)\left(\frac{3L}{16} - \frac{11}{16}x + \langle x - 1/2\rangle\right)dx$$

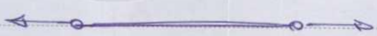
قال هادی: این پرانتز باید عوض شود.

اگر M_B مستقل باشد: $(0 - 1/2\,x + \langle x - L/2\rangle)$

اگر R_B مستقل باشد: $(-L/2 + 0 + \langle x - L/2\rangle)$



در نقطه B جابجایی داریم اما شیب نداریم



$F_A = P$ $\quad P = F_B$

قرار داریم به صورت نمادین $\frac{\partial U}{\partial P}$

شرط (I): یکی از P ها باید مستقل و دیگری واکنش باشد)

مثلاً F_A واکنش باشد. شرط (II): در نقطه A تکیه گاه صلب باشد

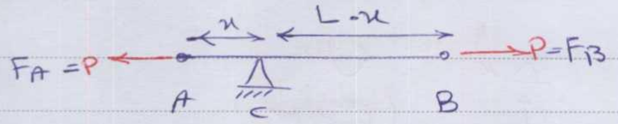
$F_B = P$

$$\frac{\partial U}{\partial F_B} = \frac{F_B L}{EA} = \frac{PL}{EA} =$$ جابجایی B رسم شد

در این مسئله جدید جابجایی B همان تغییر طول میله است. و تغییر طول میله در مسئله جدید همان تغییر مسئله اول است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سازه جدید می‌تواند این طور باشد:

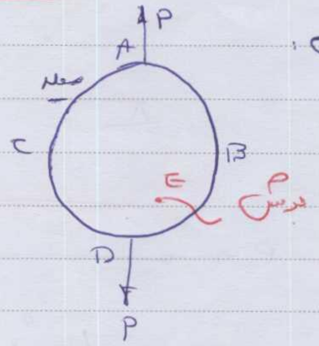


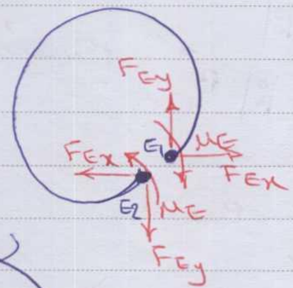
$\delta A = \delta A|_C$ در سازه فوق ← در سازه اصلی $= \left.\dfrac{\partial U}{\partial F_A}\right|_{F_A=P} = \dfrac{Px}{EA}$ (+) جهت δA ← F_A است (به سمت چپ) (I)

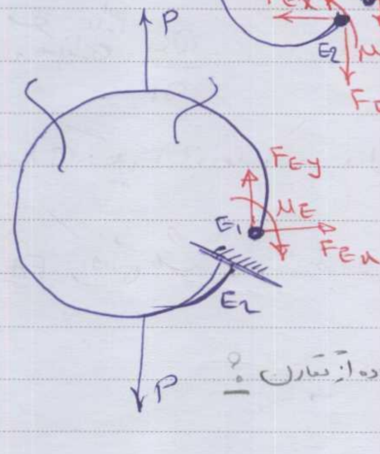
$\delta B = \delta B|_C$ در سازه فوق ← در سازه اصلی $= \left.\dfrac{\partial U}{\partial F_B}\right|_{F_B=P} = \dfrac{P(L-x)}{EA}$ (+) (به سمت راست) (II)

$(I) + (II) = \delta B|_A$ (هم در این سازه هم در سازه اصلی) $= \dfrac{PL}{EA}$

مثال:







استفاده از تقارن؟

با گذاشتن تکیه‌گاه مناسب در E_2، سه نیروی
مجهول کم می‌خواهیم داشت که دو جزء را طوری تنظیم
کرده که تعادل برقرار شود و تکیه‌گاه هم که مطلب
است ← شرط (I) و (II) ✓

جابه‌جایی E باید صفر باشد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

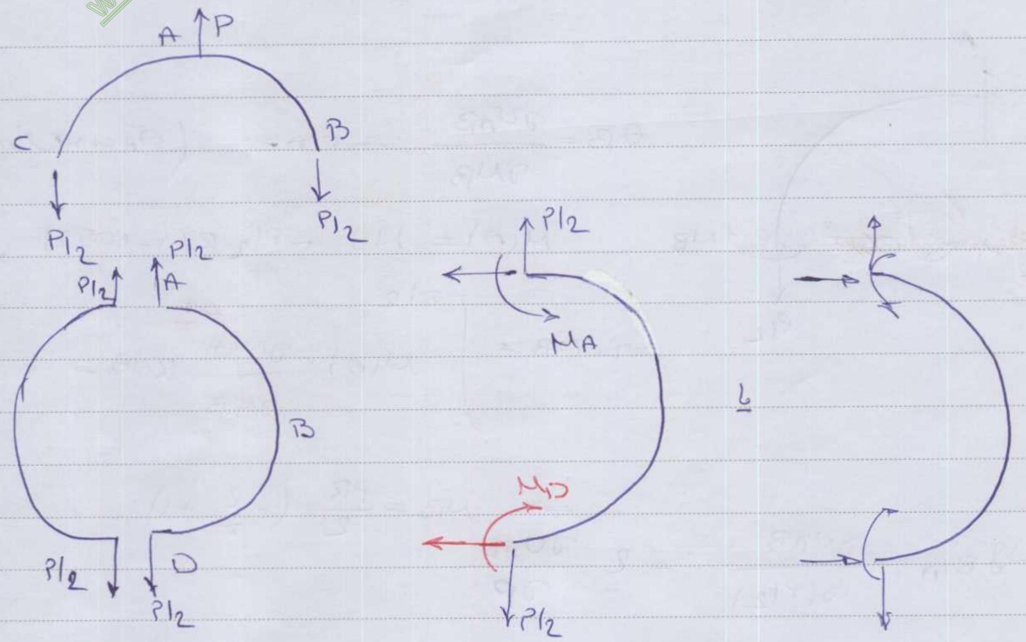
$$\delta y_{E_1} = \frac{\partial U}{\partial F_{E_y}} = 0$$

$$\delta x_{E_1} = \frac{\partial U}{\partial F_{E_x}} = 0$$

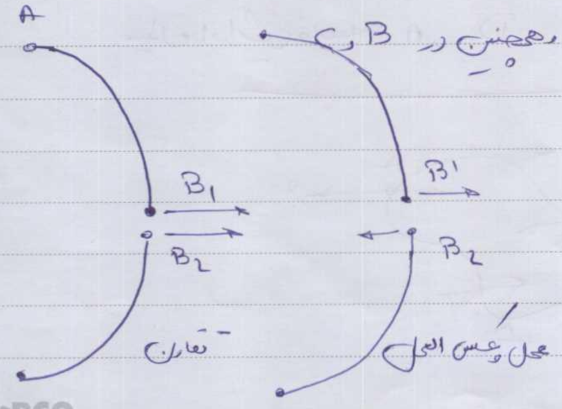
$$\theta_{E_1} = \frac{\partial U}{\partial M_E} = 0$$

پس پاسخ مسئله جدید با P و M_E ، F_{E_x} و F_{E_y} دلخواه نوشتیم

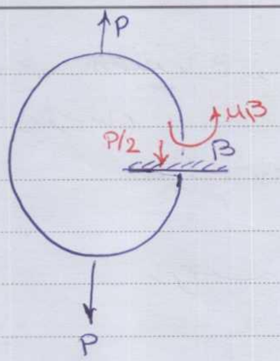
$\rightarrow F_{E_y}, F_{E_x}, M_E$ برحسب P



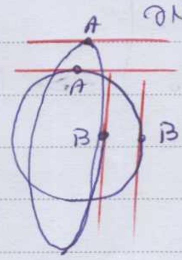
نیروی افقی در A و D صفر است و همچنین در B و C



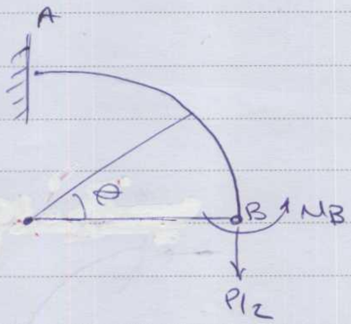
Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\theta_B = \frac{\partial U(M_B, P)}{\partial M_B} = 0 \Rightarrow M_B \text{ برحسب } P$$



میزان دوران A و B یکسان است
یعنی تا آن نقطه صفر است چون جسم
می‌تواند بچرخد.



$$\theta_B = \frac{\partial U_{AB}}{\partial M_B} = \theta_A = 0 \quad (\theta_A = 0 \text{ در اینجا}$$

$$M(\theta) = M_B - P/2\, R(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \theta_B = \int_0^{\pi/2} M(\theta) \times \frac{\partial M(\theta)}{\partial M_B} R\,d\theta = 0$$

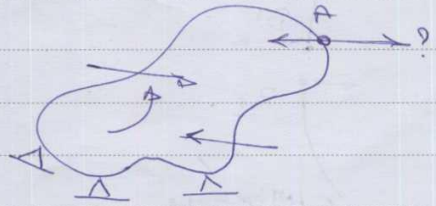
$$\frac{\partial M(\theta)}{\partial M_B} = 1$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{PR}{2}\left(-\frac{2}{\pi}+1\right)$$

$$\Delta y_{B/A} = \frac{\partial U_{AB}}{\partial (P/2)} = 2\frac{\partial U_{AB}}{\partial P}$$

$$\Delta y_{D/A} = 2\,\Delta y_{B/A} = \text{میزان افزایش فاصله } A \text{ و } D$$

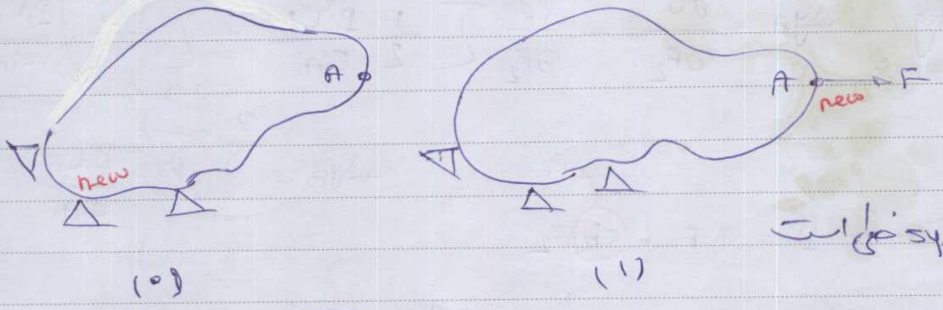
Unit Dummy Load:



Subject:
Year. Month. Date. ( )

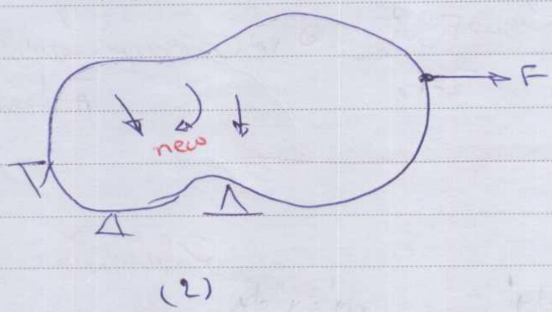
۱۰ / /

روابط ما وقتی اعتبار دارد که تغییر شکل‌ها کوچک باشد.



فرض: sys خطی است

$$\Delta x_A = \Delta x_{A(2)} - \Delta x_{A(1)}$$



ناشی از dummy load

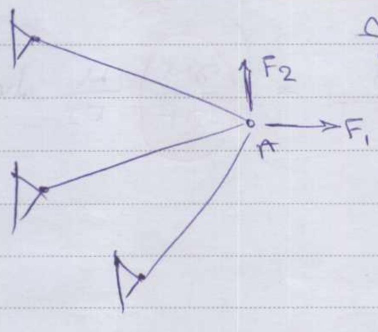
$$\delta W_e + \delta W_i = 0 \implies F \times \Delta + \sum_i (\bar P_i \Delta_i) = 0$$

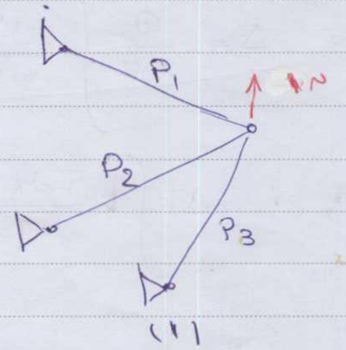
ناشی از بارگذاری

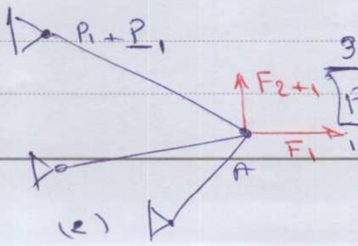
$$P_i = -\bar P_i \xrightarrow{\text{اگر تعریف کنیم}} F \times \Delta = \sum_i P_i \Delta_i \xrightarrow{F=1} \Delta = \sum_i P_{i,1} \Delta_i$$

مثال:

$\Delta y_A = ?$







$$\sum_{i=1}^{3} \bar P_i \frac{P_i L_i}{E_i A_i} = \Delta y_A$$

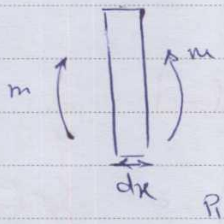
PAPCO

Castig : $\Delta y_A = \dfrac{\partial U}{\partial F_2} = \dfrac{\partial}{\partial F_2} \sum \dfrac{1}{2} \dfrac{P_i^2 L_i}{E_i A_i} = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial P_i}{\partial F_2} \dfrac{P_i L_i}{E_i A_i}$

$\Delta y_B = \sum_{i=1}^{3} p_i \dfrac{P_i L_i}{E_i A_i}$

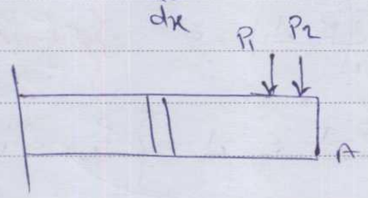
خطی sys $\longrightarrow P_i = C_{i1} F_1 + \overset{p_i}{C_{i2}} F_2$

$\longrightarrow \dfrac{\partial P_i}{\partial F_2} = C_{i2}$ $\xrightarrow[F_2=1 \text{ و}]{\text{اگر } F_1 \text{ صفر شود}}$ مقدار داخلی یک نیروی محوری 1N در نقطه $\bar{A}$



$\Delta i = dy'$ $\quad dy' = y'' dx$

$dy' = \dfrac{M}{EI} dx$ حاصل از بارگذاری



$\Delta = \int m \dfrac{M}{EI} dx$

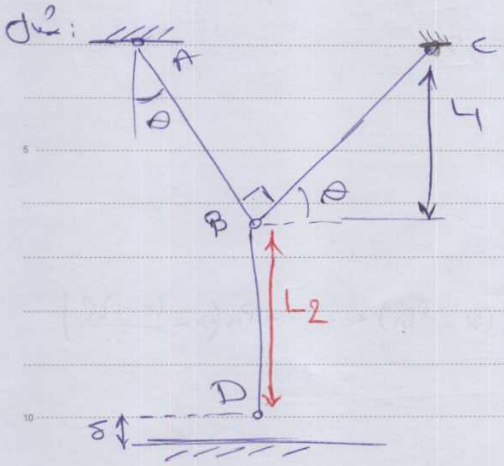
castig : $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial F} \int \dfrac{M^2 dx}{2EI} = \int \overset{m}{\dfrac{\partial M}{\partial F}} \dfrac{M}{EI} dx$

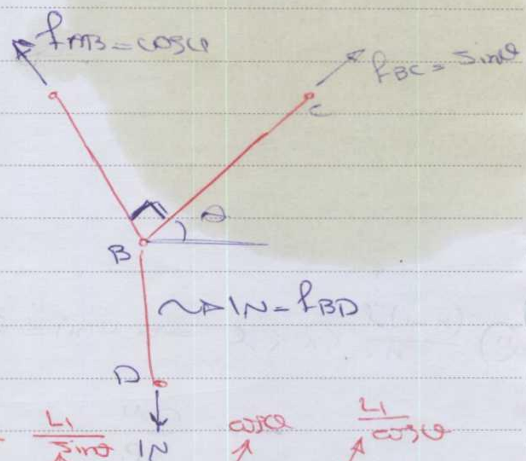
پیچش : $\Delta = \int t \dfrac{T dx}{GJ}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دای ماتیک در اثر تغییرات ناشی از تغییرات دما شکست می‌کند.

شکل:



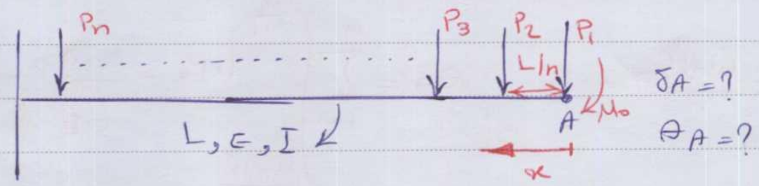


$\sin\theta$ $\quad \frac{L_1}{\sin\theta}$ $\quad \cos\theta$ $\quad \frac{L_1}{\cos\theta}$

$$\Delta D = f_{BC}(\alpha L_{BC} \Delta T) + f_{AB}(\alpha L_{AB} \Delta T) + f_{BD}(\alpha L_{BD} \Delta T)$$

$f_{BD} \to 1$, $\quad L_{BD} \to L_2$

$$\Rightarrow \Delta D = \alpha \Delta T (2L_1 + L_2) \qquad \Delta D = \delta \Rightarrow \Delta T = \frac{\delta}{\alpha(2L_1 + L_2)}$$



n نیرو P

$\delta_A = ?$

$\theta_A = ?$

$P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$ $\qquad$ نکته: Pها مستقل هستند.

① $0 < x < \frac{l}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x + M_0 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$

② $\frac{l}{n} < x < \frac{2l}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x + P_2(x - l/n) + M_0 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

③ $\frac{2l}{n} < x < \frac{3l}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x + P_2(x - l/n) + P_3(x - \frac{2l}{n})$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x$

ⓝ $\frac{(n-1)l}{n} < x < l \Rightarrow M(x) = P_1 x + P_2(x - l/n) + \cdots + P_n(x - \frac{(n-1)l}{n})$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P_1} = x$

$\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_i = x$

$(M)_i = iPx - \frac{(i-1)l}{n}P \Rightarrow \delta_A = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{(i-1)l}{n}}^{\frac{il}{n}} \frac{Px\left(ix - \frac{(i-1)l}{n}\right)dx}{EI}$

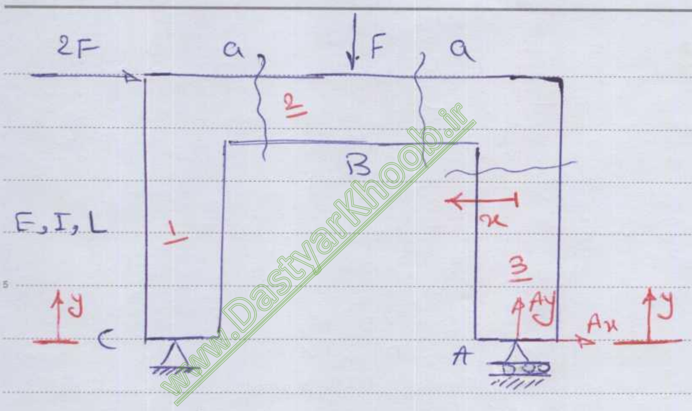
?
=

$\left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right)_i = 1$

$(M)_i = iPx - \frac{(i-1)l}{n}P + M_0 \quad \theta_A = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{(i-1)l}{n}}^{\frac{il}{n}} \frac{\left(iPx - \frac{(i-1)}{n}P + M_0\right)dx}{EI}$

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )



3 $\quad 0<y<L \quad : \quad M = A_x y \longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial A_x} = y$

2 $\quad 0<x<a \quad ; \quad M = A_y x + A_x L \longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial A_x} = L$

$\quad a<x<2a \quad ; \quad M = A_y x + A_x L - F(x-a) \longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial A_x} = L$

1 $\quad 0<y<L \quad : \quad M = (-2F - A_x) y \qquad \dfrac{\partial M}{\partial A_x} = -y$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_y = \frac{FL}{a} + F/2$$

$$C_x = -2F - A_x$$

$$A_x = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^L \frac{(-2F)(-y)}{EI}\, dy + \int_0^a \frac{F(\frac{L}{a}+\frac{1}{2})L}{EI}\, x\, dx$$

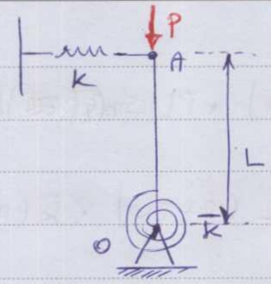
$$+ \int_a^{2a} \left[F\left(\frac{L}{a} + 1/2\right)x - F(x-a) \right] \frac{L}{EI}\, dx + \int_0^L 0$$

PAPCO

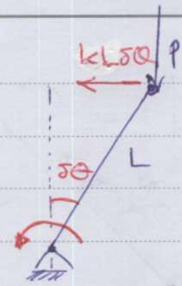
Subject:
Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:



تغییر وضعیت مجازی



برای نیفتادن میله

$$PL\,\delta\theta < \bar{k}\,\delta\theta + (kL\,\delta\theta)L$$

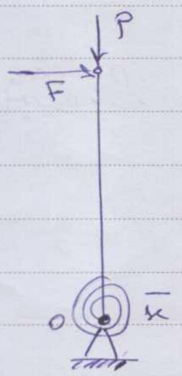
وضعیت قائم، وضعیت تعادل است.

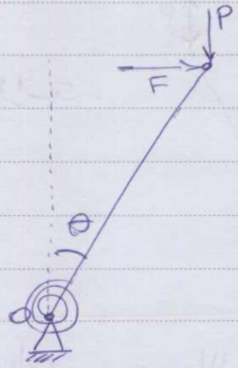
تعادل پایدار $\Longrightarrow P < \frac{\bar{k}}{L} + kL$

$P > \frac{\bar{k}}{L} + kL$ تعادل ناپایدار

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\bar{k}}{L} + kL}$$

مثال:



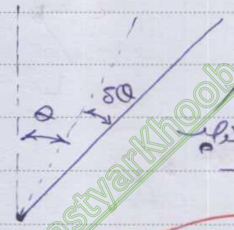


F نسبتاً کوچک است.

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow FL\cos\theta + PL\sin\theta = \bar{k}\theta$$

θ کوچک (لازمه آن این است که F کوچک باشد) $\Rightarrow (\bar{k} - PL)\,\theta = FL \xRightarrow{\text{تعادل}} \theta = \frac{FL}{\bar{k} - PL}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$\theta \longrightarrow \theta + \delta\theta$

$\longrightarrow FL\cos(\theta+\delta\theta) + PL\sin(\theta+\delta\theta) < \bar{k}(\theta+\delta\theta)$

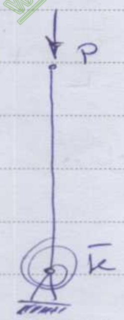
$\xrightarrow{\theta,\ \delta\theta\ \text{کوچک}} FL + PL(\theta+\delta\theta) < \bar{k}(\theta+\delta\theta)$

$\Rightarrow FL + PL\theta - \bar{k}\theta + PL\,\delta\theta < \bar{k}\,\delta\theta \Rightarrow PL < \bar{k}$

$0 \quad \left(\theta = \dfrac{FL}{\bar{k}-PL}\right)$

$\Rightarrow P_{cr} = \dfrac{\bar{k}}{L}$

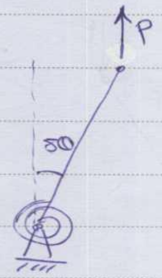
مثال:



$P_{cr} = \dfrac{\bar{k}}{L}$

وجود F در واقع نوعی اغتشاش است
که به دلیل قدرت غیر مخرب این ناپایداری
کوچک به راحتی به حالت تعادل برمی‌گردد

مثال:



به ازای P هرچقدر که باشد sys پایدار است.

اگر $\delta U - \delta W_e = 0 \ (1) \Longrightarrow$ تعادل داریم

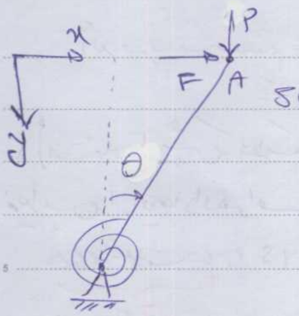
اگر رابطه (1) برقرار باشد و همواره داشته باشیم $\delta(\delta U - \delta W_e) > 0 \Rightarrow$ تعادل پایدار

به ازای همه انحراف‌ها باید $\delta(\delta U - \delta W_e) > 0$ برقرار باشد تا تعادل پایدار باشد

اگر به ازای یکی از انحراف‌ها $\delta(\delta U - \delta W_e) < 0$ باشد این انحراف رشد کرده و تعادل ناپایدار است

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$$\delta U = \delta W_e = 0 \qquad U = \tfrac{1}{2}\bar{k}\theta^2 \Rightarrow \delta U = \bar{k}\theta\,\delta\theta$$

$$\delta W_e = F\,\underbrace{\delta x_A}_{L\sin\theta} + P\,\underbrace{\delta y_A}_{L(1-\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow \delta W_e = FL\cos\theta\,\delta\theta + PL\sin\theta\,\delta\theta \xrightarrow{\theta \text{ کوچک}} FL\,\delta\theta + PL\theta\,\delta\theta$$

$$\delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow \underbrace{(\bar{k}\theta - PL\theta - FL)}_{0 \ \text{(به ازای هر } \delta\theta)}\delta\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{FL}{\bar{k} - PL}$$

$$\delta^2 U = \delta(\delta U) = \bar{k}(\delta\theta)^2 + \bar{k}\theta\,\delta^2\theta$$

$$\delta^2 W_e = PL(\delta\theta)^2 + (PL\theta + FL)\,\delta^2\theta$$

در این شکل فقط یک راه برای ایجاد انحراف وجود اگر $\delta(\delta U - \delta W_e)$ (+) باشد پایدار، اگر (−) باشد ناپایدار است

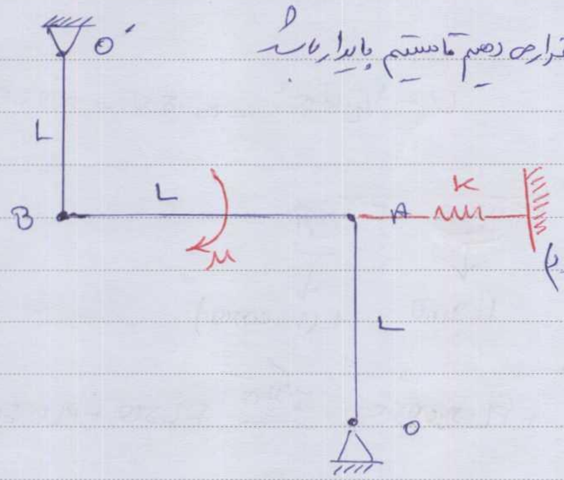
$$\delta^2 U - \delta^2 W_e = 0 \Rightarrow (\bar{k} - PL)(\delta\theta)^2 + \underbrace{(\bar{k}\theta - PL\theta - FL)}_{0}\,\delta^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\bar{k}}{L}$$

PAPCO

Subject:

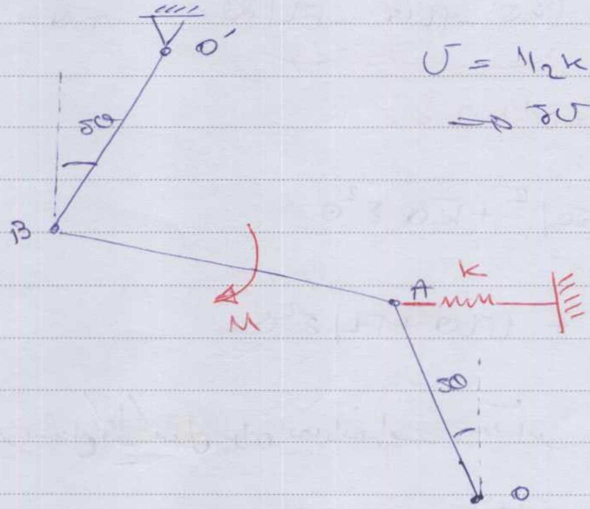
Year. Month. Date. ( )



اگر فنر نباشد سیستم ناپایدار است. فنر را قرار دهیم تا سیستم پایدار باشد.

(استفاده از روش کلاسیک مثل ۱۵ است.

زیرا پس از ایجاد انحراف باید تعادل همه‌ی $\underbrace{\text{قسمت‌های}}_{\text{3 قسمت}}$ sys در نظر گرفته شود)

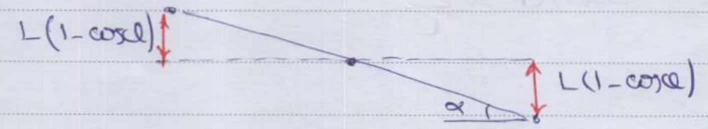


$$U = \tfrac{1}{2}k(L\theta)^2 = \tfrac{1}{2}kL^2\theta^2$$

$$\Rightarrow \delta U = kL^2\theta\,\delta\theta$$

نیروهای تکیه‌گاهی در O و O' و نیروی وارده صفر از طرف دیوار جابجایی ندارند پس کاری

انجام نمی‌دهند. نیروها در A و B هم داخلی است نه خارجی.



$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2L(1-\cos\theta)}{L}\right) = \sin^{-1}\left(2(1-\cos\theta)\right)$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(برای دوشنبه) #7

$$\delta\alpha = \delta\left[\sin^{-1}(2(1-\cos\theta))\right] \simeq \delta\left[2(1-\cos\theta)\right] = 2\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\simeq 2\theta\,\delta\theta$$

$$\delta W_e = M\delta\alpha = 2M\theta\,\delta\theta$$

برای تعادل $\Rightarrow \delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow \left[kL^2\theta - 2M\theta\right]\delta\theta = 0$

$\delta\theta$ که دلخواه است، [ ] باید صفر باشد $\Leftarrow$ $\theta = 0$ تعادل

از همان اول هم چون داشتیم $\theta = 0$ ، θ تعادل است اما برای $\delta(\delta U - \delta W_e)$ فرض باید

δU و δW را می‌نوشتیم

$$\delta^2 U = kL^2(\delta\theta)^2 + kL^2\theta\,\delta^2\theta$$

$$\delta^2 W_e = 2M(\delta\theta)^2 + 2M\theta\,\delta^2\theta$$

M_{cr} یافتن $\Rightarrow$ $\delta(\delta U - \delta W_e) = 0 \Rightarrow \left[kL^2 - 2M_{cr}\right](\delta\theta)^2$

$$+\underbrace{\left[kL^2\theta - 2M_{cr}\theta\right]}_{=0\ (\theta=0)}\delta^2\theta = 0$$

$\delta\theta$ مقدار دلخواه دارد $\Rightarrow$ $\boxed{M_{cr} = \dfrac{kL^2}{2}}$

PAPCO

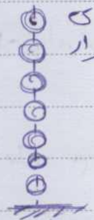
Subject:
Year. Month. Date. ( )

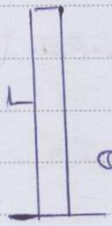
$P_{cr} = 0$

اگر میله کاملا صلب باشد

$P_{cr} = \infty$

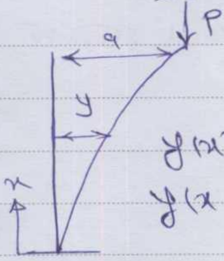
در واقعیت ستون کاملا صلب نیست





ستون در واقعیت این طور شبیه سازی می‌شود:

ستون از میله های کوچکی تشکیل شده که با فنر پیچشی به هم وصل هستند



دیدگاه کلاسیک

دیدگاه اندرسی درست نیست. برای انحراف ها که در شکل می‌بینیم تا شکسته شود. مثلاً y در واقع همان δy است.

$y(x)$

$y(x=L) = a \quad (1)$

$M(x) = EIy''(x) \quad (2)$

$M(x) = P(a-y) \quad (3)$

$(2),(3) \rightarrow EIy'' = P(a-y) \xrightarrow{\frac{P}{EI}=q^2} y'' + q^2 y = \frac{Pa}{EI}$

$\Rightarrow y = A\sin(qx) + B\cos(qx) + a \quad (4)$

$y(x=0) = 0 \Rightarrow 0 + B + a = 0 \quad (5)$

$y'(x=0) = 0 \Rightarrow Aq\cos(0) - Bq\sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (6)$

$(4),(5),(6) \rightarrow y = a\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) \quad (7)$

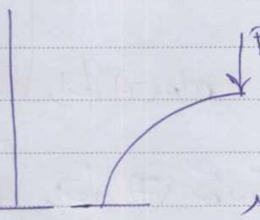
$$(1), (7) \Rightarrow a = a\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) \begin{cases} a = 0 \\ \underline{b}\ \ \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = 0 \end{cases}$$

اگر a=0 باشد جواب بدیهی است که ستون در حالت قائم در تعادل است (we already know that.)

$$\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = 0 \Rightarrow P = \frac{(2k+1)^2 \pi^2 EI}{4L^2} \quad (8) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_{cr} = P\Big|_{k=0} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

جواب به ازای $k \geq 1$ بی‌معناست.



۱- میله ارتجاعی بوده و پس از برداشتن P به حالت اولیه برمی‌گردد

۲- ستون پس از buckling (کمانش) تغییر شکل پلاستیک نمی‌دهد

۳- شکست ستون

رابطه (7) به هیچ عنوان شکل تیر پس از buckling را به ما نمی‌دهد. (7) چه می‌شود؟

۱- کاملاً مستقیم نبودن ستون

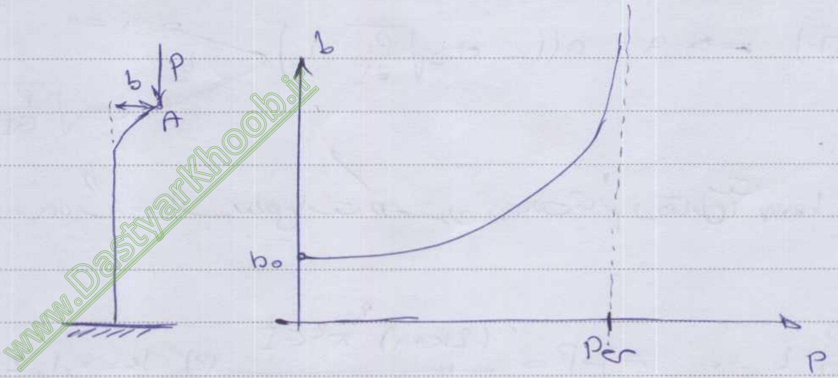
۲- کاملاً محوری نبودن بار P

۳- نیروی P کاملاً از مرکز هندسی ستون عبور نمی‌کند

فقط تغییرهای ایجاد شده اغتشاشی هستند و در P_{cr} تأثیری ندارند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



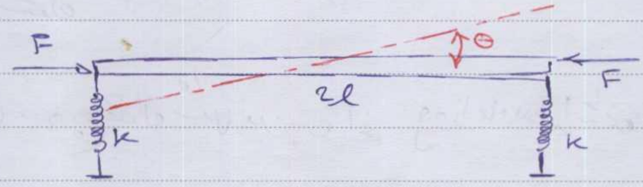
این P_{cr} متفاوت با $\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ است که بدست آوردیم.

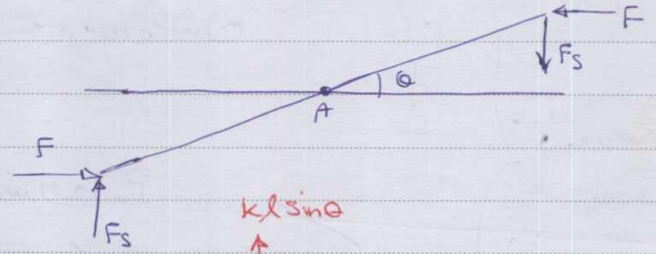
اگر $P_{cr}(k=0)$ باشد ستون تغییر شکل کوچکی می‌دهد

رابطه (7) برای $P<P_{cr}$ جواب دارد برای Buckling

رابطه (7) می‌گوید اگر $P=P_{cr}$ باشد آنگاه رابطه (7) شکل تغییر را نشان می‌دهد.

مربوط به صفحه قبل





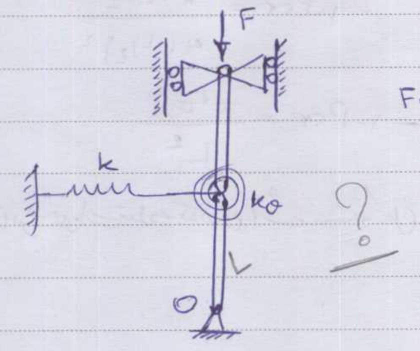
$kl\sin\theta$

$$\sum M_A = F(2l\sin\theta) - F_s\, 2l(\cos\theta) = 2l\left[F\sin\theta - kl\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$F_{cr} = kl \leftarrow \quad = 2l\left[F - kl\right]\theta = 0$$

PAPCO

اگر $F > F_{cr}$ باشد کوچکترین θ ای که به سیستم وارد شود سیستم از حالت تعادل خارج شده و به تعادل θ=0 برنمی‌گردد



$F_{cr} = ?$

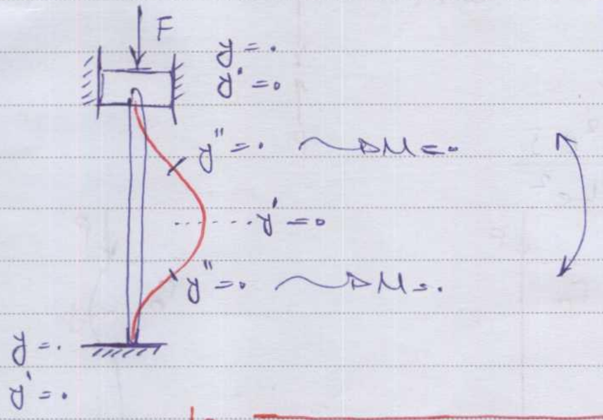
از روش کلاسیک حل کرد

$$F_{cr} = \frac{2k_\theta + L^2 k}{L}$$

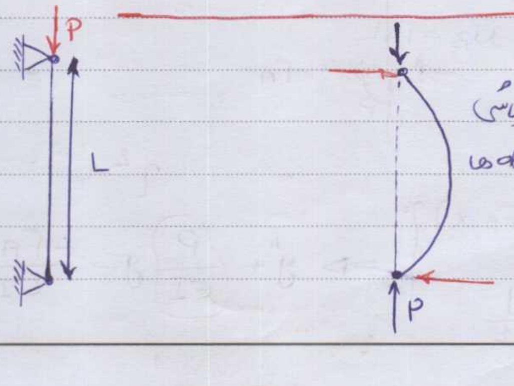
اگر F به F_{cr} برسد هر θ ای تعادل خواهد بود

اگر F کمتر از F_{cr} باشد تنها θ=0 حالت تعادل است.

اگر F بزرگتر از F_{cr} باشد ممکن است θ ای پیدا شود که جسم دوباره به تعادل برسد.

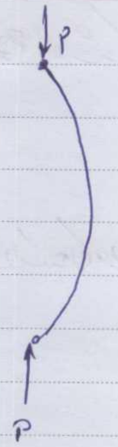


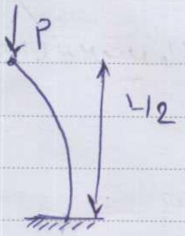
$$\Rightarrow \boxed{F_{cr} = \frac{4n^2\pi^2 EI}{L^2}}$$



هیچ عاملی وجود ندارد که تغییر شکل ناشی از نیروهای افقی را خنثی کند پس در تکیه‌گاه‌ها نیروی افقی نداریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

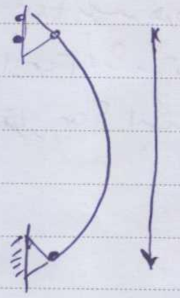




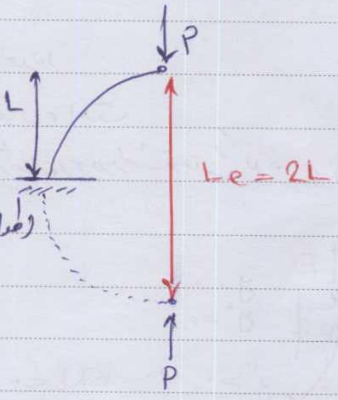
$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4(L/2)^2}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

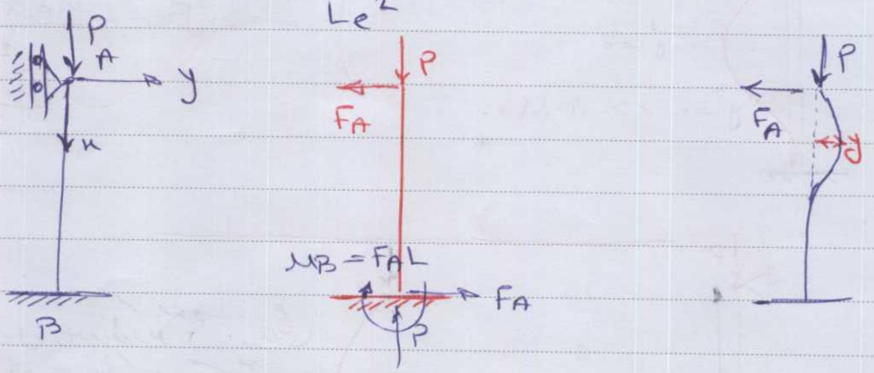
اگر قسمتی از ستون متعادل باشد ← کل ستون هم متعادل است



$L_e = L$ (طول موثر ستون)



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$



$$\left.\begin{aligned} M(x) &= -(Py + F_A x) \\ M(x) &= EI\frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'' + \frac{P}{EI}\, y = -\frac{F_A}{EI}\, x$$

q^2

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y = A\sin qx + B\cos qx - \frac{F_A x}{P}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y(L) = 0 \Rightarrow A\sin qL = \dfrac{F_A L}{P} \\ y'(L) = 0 \Rightarrow Aq\cos qL = \dfrac{F_A}{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{q}\tan qL = L$$

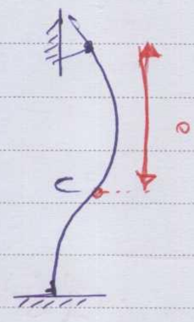
Pcr انحرافی که شرایط تعادل را ارضا کند باشد $\underline{P = P_{cr}}$

$qL = 4.49\ \text{rad}$ کوچکترین qL

$$P = P_{cr} = \frac{20.19\,EI}{L^2} \simeq \frac{\pi^2 EI}{\underbrace{(0.7L)}_{L_e}{}^2}$$

$$y = \overbrace{\frac{F_A L}{P\sin qL}}^{A} \sin qx - \frac{F_A x}{P} \Leftarrow$$ $P=P_{cr}$ انحرافی با این شکل وقتی

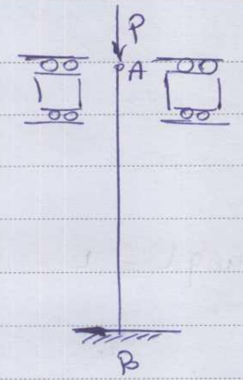
حاصل می‌شود و می‌خواهیم پیدا کنیم

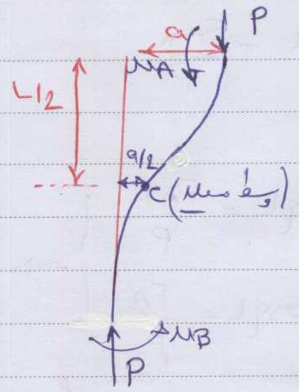


طول موثر: فاصله بین دو نقطه با انحنا صفر

اگر Mc حساب شود صفر است

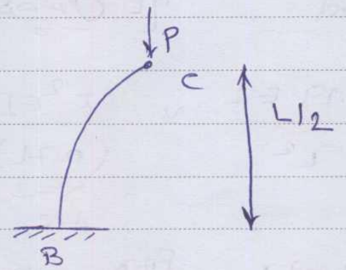
Subject:
Year. Month. Date. ( )





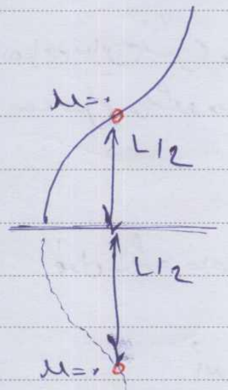
$M_A = M_B$, $M_A + M_B = Pa$ $\Rightarrow M_A = M_B = Pa/2$

$M_C = 0$



$\Rightarrow P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4(L/2)^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

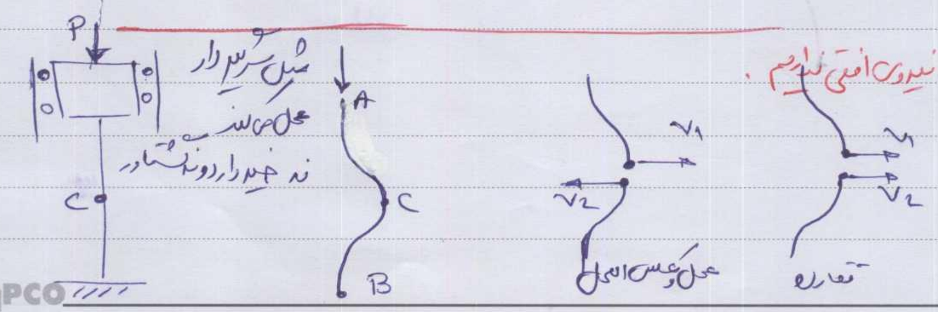
L_e



وقتی قسمت BC میله تعادل داشته باشد

نتیجه قسمت AC میله هم تعادل دارد ← کل میله تعادل دارد

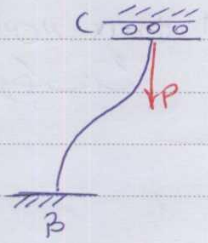
$\Rightarrow L_e = L$



دیگر سر میله نیروی افقی نداریم.

PAPCO

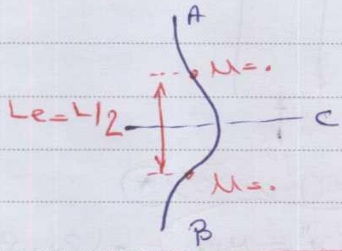
Subject:
Year. Month. Date. ( )



$L_e = L/2$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}$$

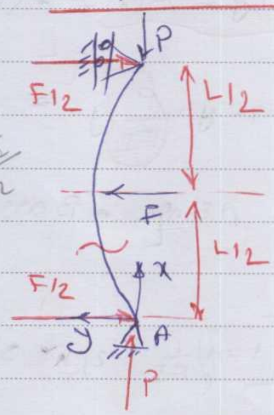
شبیه شکل قبل



نیروی فشاری محوری

تیر - ستون

نیروی برشی



? $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

$$EI y'' = M(x)$$

$$M(x) = (Py + F/2\, x)(-1) \qquad 0 \le x \le L/2$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{P}{EI} y = -\frac{1}{EI} \frac{Fx}{2}$$

$$\Rightarrow y = A \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x + B \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x - \frac{Fx}{2P}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

تقارن: $y'(L/2) = 0 \Rightarrow A$ ✓

$$y(x) = \frac{F}{2P\sqrt{\frac{P}{EI}}} \times \frac{1}{\cos\left(\sqrt{P/EI}\, L/2\right)} \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x - \frac{Fx}{2P}$$

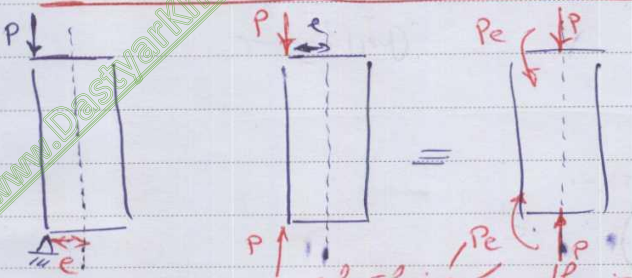
$x \le L/2$

$$y_{max} = y(L/2) = \frac{F}{2P\sqrt{\frac{P}{EI}}} \left[\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\, L/2\right) - \sqrt{\frac{P}{EI}}\, L/2\right]$$

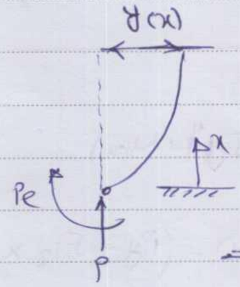
if $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}\, L/2 = \pi/2 \Rightarrow \tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\, L/2\right) = \infty$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای این که y_{max} اعتبار داشته باشد باید P_{cr} کوچک شده یا کوچک باشد. $\longrightarrow y_{max} = \infty$



برای تیرستون‌های خارج از مرکز استفاده شد (*)



$$EIy'' = M(x) = -(Py + Pe)$$

$$\Rightarrow y'' + \underbrace{\frac{P}{EI}}_{q^2} y = \frac{-Pe}{EI}$$

$$\Rightarrow y = A\sin qx + B\cos qx - e$$

$y(0) = 0 \Rightarrow B = e$

$y(L) = 0 \Rightarrow A\checkmark$

$$\Rightarrow y(x) = e\left[\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L}{2}\right) \times \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) - 1\right]$$

$$y_{max} = y(L/2) = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L}{2}\right) - 1\right]$$

$$= e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] \quad (I)$$

شبیه ستون دو سر مفصل $\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

$P \rightarrow P_{cr} \Rightarrow y_{max} \rightarrow \infty$

اگر $P = \frac{1}{10} P_{cr}$ هم که باشد y_{max} بزرگ خواهد بود و رابطه اعتبار ندارد (*)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\sigma = \frac{-P}{A} + \frac{Mz}{I}$$

بیشترین فاصله از ... ترین مقطع

مقطع ستون را میخوانی $\longrightarrow$ $$|\sigma_{max}| = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}\,c}{I}$$

$I = Ar^2$

شعاع ژیراسیون (شدت پراکندگی سطح از محور مرکزی را نشان میدهد)

پس $M_{max} = Py_{max} + Pe \Rightarrow |\sigma_{max}| = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{max}+e)c}{r^2}\right]$

$$\xrightarrow{(I)} |\sigma_{max}| = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$

$$= \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L}{2}\right)\right]$$

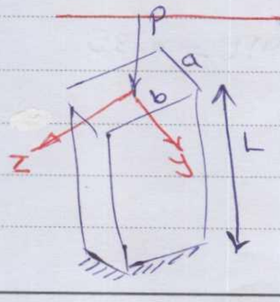
$$\sqrt{\frac{P}{EA}}\,\frac{L}{2r}$$

σ رابطه خطی با P ندارد $\longrightarrow$ ضریب اطمینان را روی P اعمال میکنیم (nP)

برای هر ستون با بارگذاری خارج از مرکز با هر شرایط تکیه‌گاهی $\longrightarrow$ $|\sigma_{max}| = \left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L_e}{2}\right)\right]$

$$\sqrt{\frac{P}{EA}}\,\frac{L_e}{2r}$$

(مثال 1)



$b > a$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_e^2}$$

در مسائلی که بررسی می‌کنیم P در سراسر جسم ثابت است،

در صورتیکه وقتی که P، وزن‌دار است چنین نیست

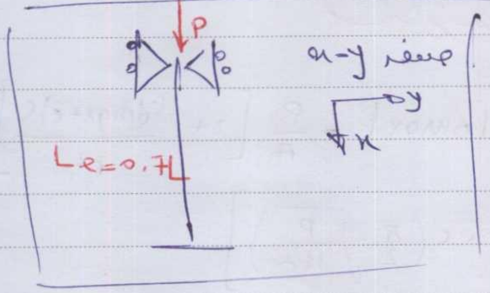
PAPCO

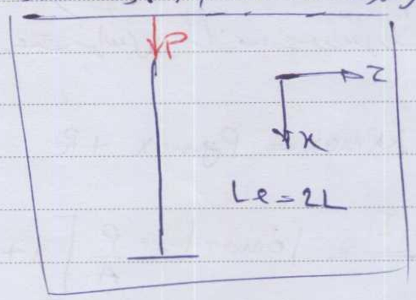
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{Le^2} = \frac{\pi^2 E (\frac{1}{12} ba^3)}{(2L)^2}$$

کمانش در صفحه xy آسان‌تر می‌افتد

مثال 2) اگر در مورد تکیه‌گاه بدانیم که حرکت در راستای z آزاد و در راستای y بسته باشیم





$$P_{cr} = \min\left(\frac{\pi^2 E I_{zz}}{(Le)^2_{xy}} + \frac{\pi^2 E I_{yy}}{(Le)^2_{xz}}\right)$$

در مثال بالا $\Rightarrow P_{cr} = \pi^2 E \min\left(\frac{I_{zz}}{(0.7L)^2} + \frac{I_{yy}}{(2L)^2}\right)$

$$P_{cr} = \pi^2 EA \min\left(\frac{r_z^2}{(Le)^2_{xy}} + \frac{r_y^2}{(Le)^2_{xz}}\right)$$

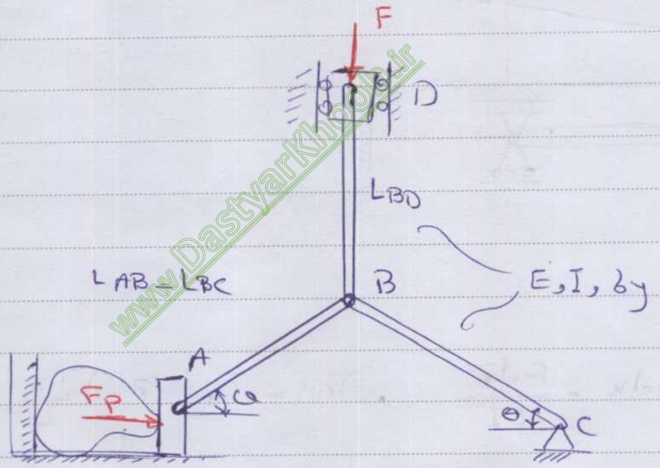
$$\frac{I_{zz}}{(0.7)^2} = \frac{I_{yy}}{2^2} \longleftarrow$$ برای رسیدن به کارآمدترین طرح در مثال 2

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{12} ba^3}{(0.7)^2} = \frac{\frac{1}{12} ab^3}{2^2} \longrightarrow a/b = 0.35$$

PAPCO

Month . Date . ( )

حداکثر نیروی پرس؟



$AB, BC \Rightarrow F = \dfrac{F_p}{\cos\theta} \longrightarrow$ ① $\dfrac{F_p}{\cos\theta \times A} \leq \sigma_y \Rightarrow F_p \leq \sigma_y A \cos\theta$

② $\dfrac{F_p}{\cos\theta} \leq \dfrac{\pi^2 EI}{L_{BC}^2}$

$\Rightarrow F_p \leq \dfrac{\pi^2 EI}{L_{BC}} \cos\theta$

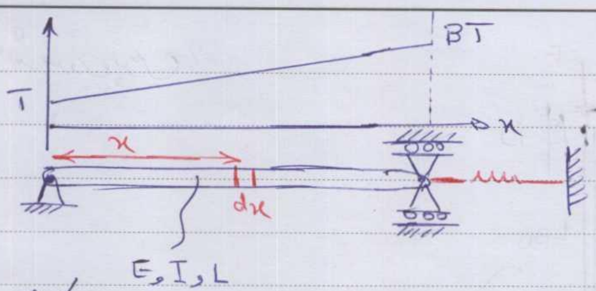
$BD \Rightarrow F = 2F_p \tan\theta \longrightarrow$ ① $\dfrac{2F_p \tan\theta}{A} \leq \sigma_y \Rightarrow F_p \leq \dots$

② $2F_p \tan\theta \leq \dfrac{\pi^2 EI}{L_{BD}^2} \Rightarrow F_p \leq \dots$

$F_p \leq \min \{$

$\max(F) = 2F_p \tan\theta$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



حداکثر مقدار T ؟

$$d\delta = \alpha T(x)\,dx - \frac{F_s\,dx}{EI} \quad , \quad T(x) = T + (\beta - 1)\frac{Tx}{L}$$

$$\Delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \alpha T\left(1 + (\beta - 1)\frac{x}{L}\right)dx - \frac{F_s L}{AE}$$

$$\Rightarrow \Delta = \alpha T\left(L + \frac{(\beta - 1)L}{2}\right) - \frac{F_s L}{AE}$$

$$\rightsquigarrow \Delta = \frac{F_s}{k} \Rightarrow F_s = \alpha T\left(\frac{2L + (\beta - 1)L}{2}\right) \times \left(\frac{kAE}{L + AE}\right) \leq \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\Rightarrow T \leq \left(\frac{\pi^2 EI}{L^2}\right)\left(\frac{L + AE}{kAE}\right)\left(\frac{2}{\alpha L(\beta + 1)}\right)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

طراحی ستون (آشتری)

معیار طراحی ستون

$$\left(\sigma_{max} = P/A + \frac{M_{max}c}{I}\right) < \sigma_y$$

$$P < \left(P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}\right)$$

$$P < P_{cr} \Rightarrow \underbrace{\frac{P}{A}}_{\bar{\sigma}} < \underbrace{\frac{P_{cr}}{A}}_{\sigma_{cr}}$$

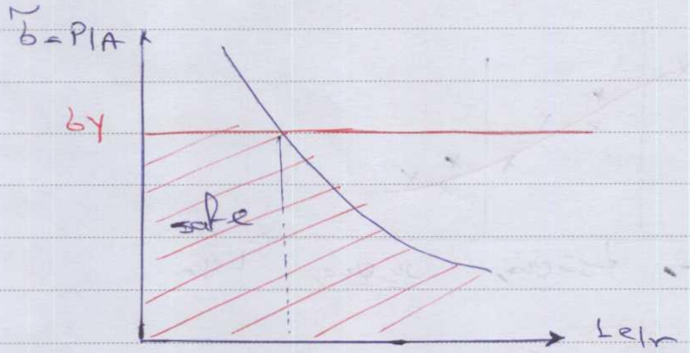
$$\bar{\sigma} = \sigma_{cr} \iff P = P_{cr}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E \overbrace{I}^{Ar^2}}{A L_e^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

slender ratio : $\frac{L_e}{r}$

$\sigma_{max} < \sigma_y$ برای ستون‌ها نسبتاً کوتاه نگران fail هستیم

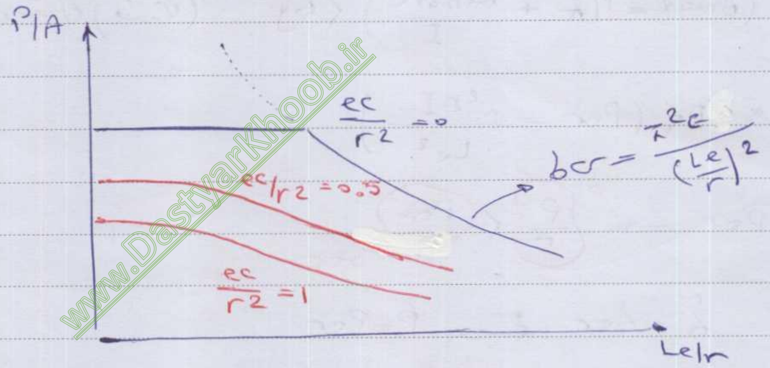
$\bar{\sigma} < \sigma_{cr}$ برای ستون‌های نسبتاً بلند نگران کمانش هستیم



$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L_e}{2}\right)\right]$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

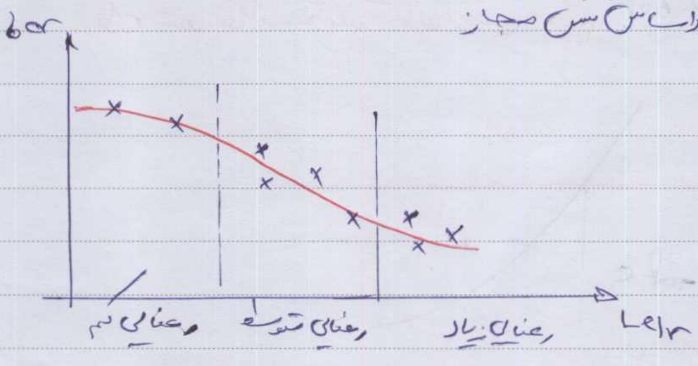


وقتی خروج از مرکز داریم ($e \neq 0$) بعداً تسلیم هستیم ؟

طراحی ستون‌ها (براساس فرمول‌های تجربی) :

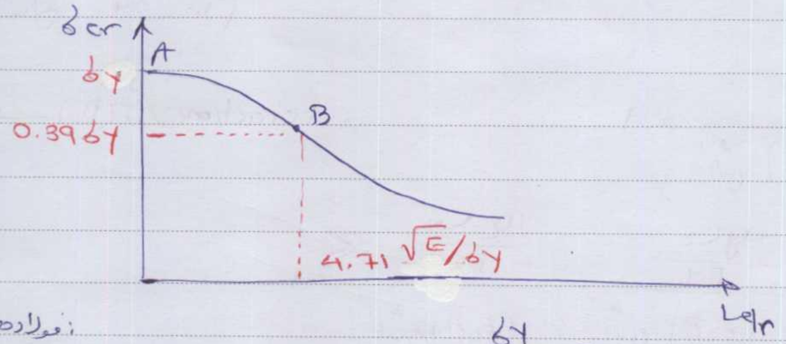
الف) بار روی مرکز سطح

الف (I) : طراحی براساس تنش مجاز



$$\frac{P}{A} \leq \frac{1}{F.S}\,\sigma_{cr} = \sigma_{all}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



فولادها:

$$\sigma_{cr} = \left[0.658^{\frac{\sigma_y}{\sigma_e}}\right]\sigma_y$$

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

$$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e$$

$$\sigma_{cr_B} = 0.39\sigma_y$$

$$\left(\frac{L_e}{r}\right)_B = 4.71\sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$$

$$F.S = 1.67$$

مثال 10-02 کتاب

الف (II) ، طراحی ستون با بار روی محوری طبق بر اساس نیروی مجاز:

ب طراحی ستون تحت بار خارج از مرکز (بر اساس روابط تجربی)

فاصله دورترین تار ستون

ب (I) روش تنش مجاز:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \sigma_{all}$$

PAPCO

ممان اینرسی نسبت به محوری که کمانش در ستون حول آن اعمال می شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

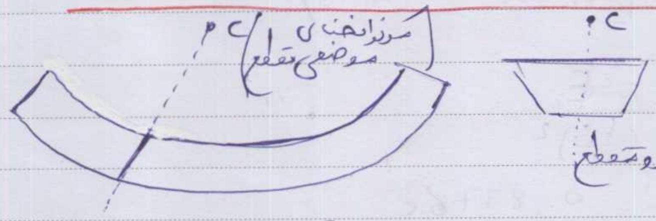
مثال (10-04)

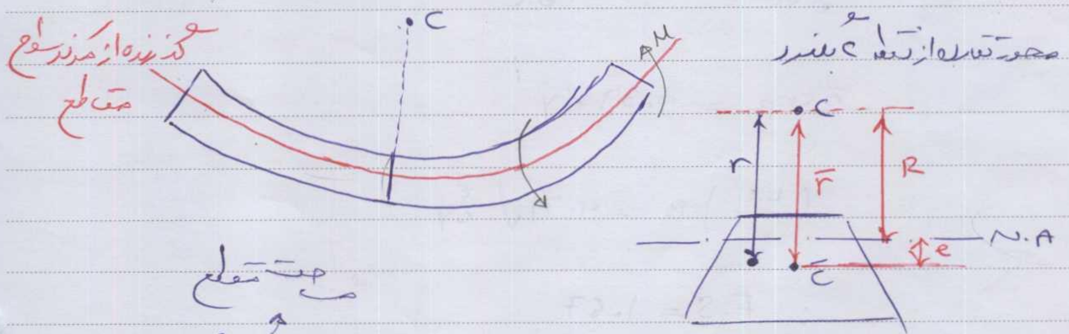
ب- (II) روش interaction

$$\frac{P/A}{(\text{مجاز})\text{محوری}} + \frac{Mc/I}{(\text{مجاز})\text{خمشی}} = 1$$

$$\frac{P/A}{(\text{مجاز})\text{محوری}} + \frac{M_y c_z / I_y}{(\text{مجاز})\text{خمشی}} + \frac{M_z c_y / I_z}{(\text{مجاز})\text{خمشی}} \leq 1$$

تیرهای خمیده :



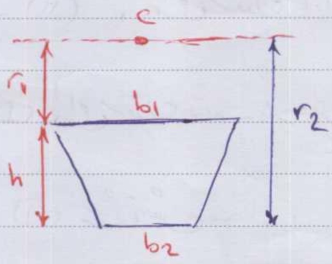


جهت مقطع

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}$$

همیشه : $R < \bar{r}$

$$\bar{r} - R = e$$

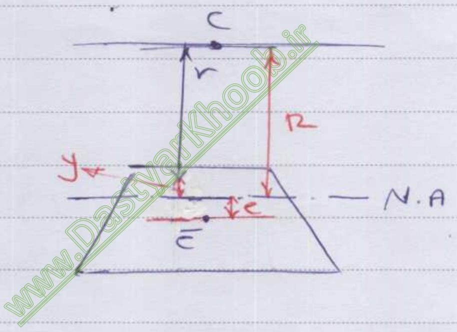


$$R = \frac{1/2\, h^2 (b_1 + b_2)}{(b_1 r_2 - b_2 r_1) \ln \frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$$\sigma = -\frac{My}{Ae(R-y)} \qquad \bar{r}-R$$

$$\sigma = -\frac{M(R-r)}{Aer}$$

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR}$$

از احمدی بپرس چرا e منفی می‌شود.


دستیارخوب را به دوستانتان معرفی کنید...