استاتیک
برای مهندسین

تألیف و گردآوری:
محمدرضا فرامرزی
عضو هیأت علمی گروه مکانیک
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

انتشارات استاد

پیش‌گفتار

کتاب حاضر حاصل چندین سال تدریس درس استاتیک برای دانشجویان رشته‌های مهندسی مکانیک، مهندسی عمران و سایر رشته‌های مهندسی بوده است. برای این منظور مبنای تدریس کتاب با ارزش:
ENGINEERING MECHANICS, STATICS, R.C.HIBBELER, THIRTEENTH EDITION, 2013
و ترجمه فارسی ویراست دوازدهم آن در دستگاه-SI توسط آقای محمدرضا افضلی بوده و می‌باشد. مطالب آموزشی و کمک درسی تهیه و تدوین شده در طول سالها تدریس و حل تمرین‌های حل نشده آن به صورت جزواتی در اختیار دانشجویان این درس قرار می‌گرفته است.

اکنون مطالب تدوین شده آموزشی و کمک درسی و نیز حل تمرین‌هایی، که در کتاب‌های فوق به صورت حل نشده مطرح شده‌اند، تحت عنوان مسائل بنیادی به سبکی هماهنگ با نحوه تدریس مطالب می‌تواند به صورت یک کتاب آموزشی مستقل (و یا کتاب کمک آموزشی به همراه کتاب‌های فوق) مورد استفاده دانشجویان و دانش‌پژوهان درس استاتیک قرار گیرد.

فصل‌بندی کتاب همانند کتاب HIBBELER است، فقط دو فصل مربوط به مرکز هندسی سطوح و اجسام، به‌ویژه فصل مربوط به ممان اینرسی سطح با تغییرات بیشتر و حجم کمتر بعد از فصل ۴ آورده شده‌اند. ضمناً در این کتاب به کار مجازی پرداخته نشده است.

این کتاب قطعاً دارای عیب‌ها و کاستی‌هایی است که منعکس کردن آن توسط صاحب‌نظران و خوانندگان عزیز می‌تواند در بهتر کردن چاپ‌های بعدی آن مؤثر واقع شود. از این رو از علاقه‌مندان خواهشمند است انتقادات، پیشنهادات و اشتباهات احتمالی را به نشر طراح و یا به آدرس پست الکترونی (E-Mail) اینجانب منعکس نمایند.

محمدرضا فرامرزی
عضو هیأت علمی گروه مکانیک
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد
moh.reza.faramarzi@gmail.com
اسفند ۱۳۹۷ مشهد

فهرست مطالب

۱ مفاهیم، قوانین، تعاریف و واحدها

۱-۱ مفاهیم پایه

موضوع علم استاتیک: بررسی تعادل اجسام صُلب در وضعیت بارگذاری‌شده

جسم: مجموعه و یا توده‌ای از ذرات که مابین آنها نیروهای پیوستگی وجود دارد

جسم صُلب: به جسمی صُلب گفته می‌شود که در اثر بارگذاری (اعمال نیرو) تغییرشکل نیابد (و یا قابل اغماض باشد).

جرم: مقدار ماده را مشخص می‌کند (اینرسی و یا مقاومت ماده در برابر تغییر حرکت).

نیرو: نیرو قابل تجسم نیست و از طریق تأثیرات فیزیکی آن قابل درک می‌باشد، مانند:

- ایجاد شتاب در حرکت یک جسم
- ایجاد تغییرشکل در یک جسم
- در تعادل نگه‌داشتن نیروهای دیگر

ذره: جسمی است دارای جرم، که ابعاد آن نسبت به ابعاد محیط مورد بررسی قابل اغماض است.

۱-۲ قوانین بنیادی

قوانین نیوتن:

قانون اول: اگر برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد، آن ذره در وضعیت اولیه خود باقی خواهد ماند (ثابت می ماند و یا با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند).

قانون دوم: اگر برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر نباشد، سرعت آن ذره در جهت نیرو تغییر می‌کند (شتاب می‌گیرد).

قانون سوم: اگر دو جسم با یکدیگر در تماس باشند و یکی بر دیگری نیرو اعمال کند، جسم دیگر نیز نیرویی به همان اندازه ولی در جهت مخالف به جسم اول اعمال خواهد کرد. ***عمل (کُنش) = عکس‌العمل (واکُنش)***

قانون عمومی جاذبه نیوتن:

طبق این قانون چنانچه دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 به فاصله r از یکدیگر قرار داشته باشند، بین آنها نیروی جاذبه‌ای برابر با $F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ اثر می‌کند، که در آن $G = 66{,}73 \cdot 10^{-12}\ [\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$ ثابت عمومی جاذبه است.

طبق این قانون وزن جسمی به جرم m در روی کره زمین برابر است با: $W = G\dfrac{m \cdot M_e}{r^2} = m \cdot g$ ، که در آن $g = \dfrac{G \cdot M_e}{r^2} = 9{,}81\ [m/s^2]$ شتاب ثقل زمین نام دارد.

M_e جرم کره زمین و r فاصله جسم تا مرکز زمین است (از سطح دریا و در عرض جغرافیایی استاندارد $45°$).

۱-۳ تعریف نیرو

در گذشته در صنعت برای تعریف نیرو از وزن $1\,kg$ جرم در روی کره زمین، یعنی نیرویی که در میدان جاذبه زمین به جسمی به جرم $1\,kg$ اعمال می‌گردد استفاده می‌شد و به آن $1\,kgf = 9{,}81\,N$ گفته می شد.

امروزه نیرو براساس سیستم واحدهای بین‌المللی SI تعریف می‌شود:

واحد نیرو نیوتن (N) است و عبارت از نیرویی است که اگر به جسمی به جرم $1\,kg$ اعمال گردد، شتابی به اندازه $1\,m/s^2$ یعنی تغییر سرعتی برابر با $1\,m/s$ در هرثانیه در آن به وجود آورد.

انواع نیرو:

نیروی تماسی: در محل تماس جسم ایجاد می‌شود.

نیروی میدانی (نیروی از راه دور): مانند نیروی جاذبه، نیروی الکتریکی، نیروی مغناطیسی و ....

نحوه توزیع نیرو:

متمرکز: ابعاد سطحی که نیرو به آن اعمال می‌شود در مقایسه با ابعاد کلی جسم بسیار کوچک است.

گسترده (در سطح یا طول): نیرو در سطح و یا در طولی اثر می‌کند که ابعاد آن در مقایسه با ابعاد کلی جسم قابل چشم پوشی نیست.

۱-۴ واحدهای پایه در مکانیک در سیستم- SI

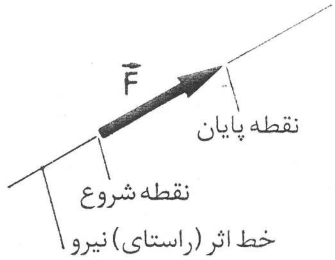
کمیت پایه	واحد پایه	علامت اختصاری واحد
طول	متر	m
زمان	ثانیه	s
جرم	کیلوگرم	kg

واحد سایر کمیتها (نیرو، سرعت، شتاب، کار و غیره) از واحدهای پایه مشتق می‌شوند، مثلاً :

واحد نیرو (نیوتن): $1\,N = 1\,kg \cdot m/s^2$

۲ بُردار نیرو

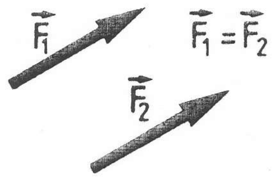
۲-۱ بُردار نیرو



تجربه نشان می‌دهد که برای بیان دقیق یک نیرو ذکر تنها یک مقدار عددی کافی نیست، بلکه برای مشخص نمودن کامل نیرو لازم است راستا و سو یا جهت آن نیز بیان گردد. مثلاً نیروی جاذبه‌ای که زمین به یک جسم اعمال می‌کند به سمت مرکز زمین است و همچنین اگر یک جسم را به حرکت وادار کنیم، حرکت جسم در راستا و جهت نیروی اعمال شده به آن خواهد بود. بنابراین بهترین روش بیان نیرو به صورت ترسیمی توسط یک پیکان است. راستا و جهت پیکان با راستا و جهت نیرو یکی است و طول پیکان بر اساس یک مقیاس انتخاب شده (مثلاً 1cm معادل چند N) مقدار نیرو را بیان می‌دارد.

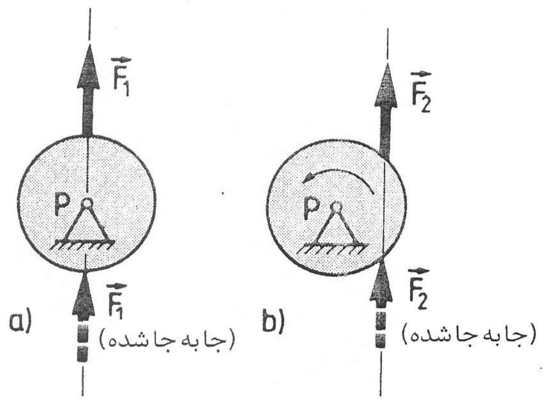
نقطه اثر نیرو نقطه‌ای از پیکان است که بر روی جسم قرار داده می‌شود. بنابراین نقطه اثر نیرو می‌تواند نقطه شروع و یا نقطه پایان پیکان باشد. خطی که پیکان بر روی آن قرار دارد را خط اثر، امتداد و یا راستای نیرو می‌نامند. چون نیرو یک کمیت بُرداری است برای بیان آن از حروف لاتین با یک پیکان کوچک بر روی آن استفاده می‌شود. در بعضی از متون به‌جای پیکان کوچک، بُردار را با حرف توپُر (Bold) نشان می‌دهند. در اینجا از هر دو روش استفاده می‌گردد.

۲-۲ ویژگی بُردارهای نیرو



دو نیرو وقتی با هم برابرند که مقدار و جهت آنها یکسان باشد (راستای آنها لزوماً یکی نیست ولی با هم موازیند). اما تأثیر نیروها بر اجسام فقط به مقدار و جهت آنها وابسته نیست، بلکه به نقطه اثر آنها نیز بستگی دارد.

شکلهای مقابل دو صفحه گرد را نشان می‌دهد که در نقطه P به‌صورت قابل دوران تکیه داده شده‌اند و در هر دو حالت نیروهای یکسان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ (مقدار و جهت یکسان) به آنها اعمال می‌شود، اما نقطه اثر این نیروها متفاوت است. در حالت (a صفحه به حالت ساکن باقی می‌ماند، در حالی‌که در حالت (b در جهت خلاف عقربه‌های ساعت خواهد چرخید.



از طرف دیگر مشاهده می‌شود که می‌توان نیرو را در امتداد راستای آن جا به‌جا نمود، بدون آنکه تأثیر این جا به‌جایی نیرو بر جسم تغییر کند (البته به‌شرطی که تغییرشکلهای صفحه قابل اغماض باشد، یعنی صُلب در نظر گرفته شود).

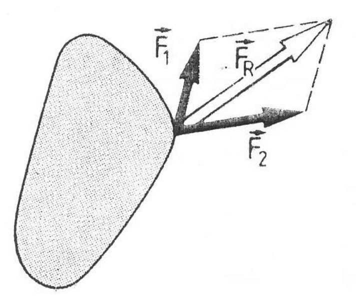
قانون جابه‌جایی نیروها:

نیروهای اعمالی به یک جسم صُلب را می‌توان در امتداد آن نیرو جابه‌جا نمود، بدون آنکه اثر آن بر تعادل (و یا حرکت) جسم تغییر کند. به عبارت دیگر: **نیرو بُرداری است قابل جابه‌جایی (لغزان) در راستایش.**

البته باید توجه داشت که نیروهای به‌وجود آمده در درون جسم و حتی تغییرشکل آنها در اجسام شکل‌پذیر (غیر صُلب) در اثر جابه‌جایی تغییر می‌کنند.

نیروهای هم‌ارز:

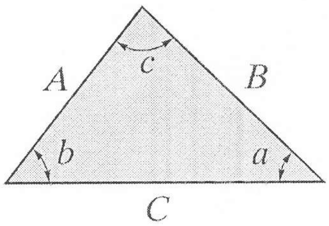
دو نیرو که مقدار و جهت یکسانی داشته و بر روی یک راستا قرار داشته باشند **هم‌ارز** نامیده می‌شوند.



قانون متوازی‌الاضلاع نیروها:

دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ با نقطه اثر مشترک را می‌توان با یک نیروی $\vec{F}_R$، که به همان نقطه اعمال می‌شود جایگزین نمود. این نیرو قطر متوازی‌الاضلاعی است که از $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ گسترده می‌شود و به آن **برآیند** دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ گفته می‌شود. اثر این نیروی برآیند بر جسم همانند اثر مشترک هر دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر جسم است و از این رو با این دو نیرو هم‌ارز است:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_R$$



قانون کسینوس:

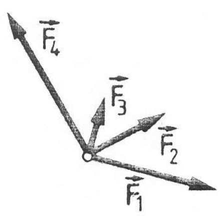
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

قانون سینوس:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

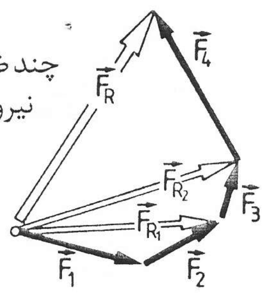
نتیجه برآیند دو نیرو به ترتیب جمع آن دو نیرو بستگی ندارد: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{F}_R$

چنانچه چند نیرو به یک نقطه از جسم اثر کنند (مطابق پلان موقعیت) می‌توان با چند بار برآیندگیری برآیند کل نیروها را به صورت $\vec{F}_R$ در آورد:



پلان موقعیت

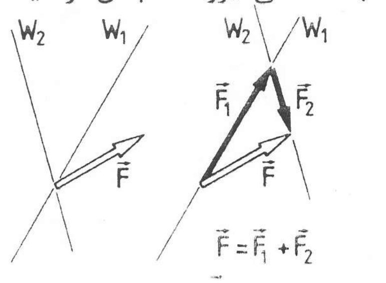
چند ضلعی نیروها



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

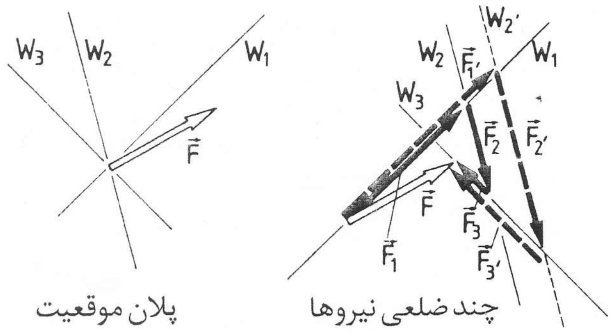
$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i$$

همان‌طورکه می‌توان چندین نیرو را با یک نیروی هم‌ارز، یعنی نیروی برآیند جایگزین نمود، برعکس می‌توان همچنین یک نیروی $\vec{F}$ را به چندین نیروی $\vec{F}_i$ به‌گونه‌ای **تجزیه** نمود، که این نیروها مجموعاً با نیروی $\vec{F}$ هم‌ارز باشند (یعنی اثری مشابه بر روی یک جسم صُلب داشته باشند).



تجزیه یک نیرو در صفحه وقتی واضح و بدیهی است که دو راستای W_1 و W_2، که قرار است نیروهای خواسته شده $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر روی این راستاها اعمال شوند با نیروی $\vec{F}$ همدیگر را در یک نقطه قطع کنند داده شده باشند. بنابراین: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

هر دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به روش ترسیمی به این صورت بدست می‌آیند که در یک چند ضلعی نیرو (مثلث نیرو)، دو راستای W_1 و W_2 را از نقطه شروع و نقطه پایان $\vec{F}$ بگذرانیم.

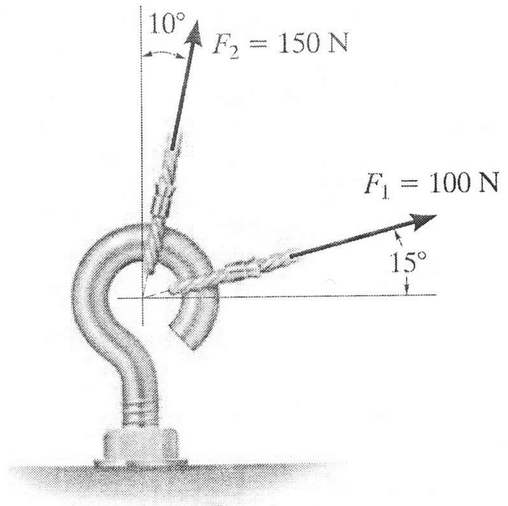


تجزیه یک نیرو در صفحه به بیش از دو راستا، که نیروی $\vec{F}$ را در یک نقطه قطع کنند دیگر واضح و بدیهی نیست. این نوع مسائل از نظر استاتیکی نامعین هستند. چنانچه این نوع مسائل در بررسی یک سازه مطرح باشند، می‌توان آنها را با در نظر گرفتن تغییرشکلها حل نمود (یعنی با روشهای مقاومت مصالح).

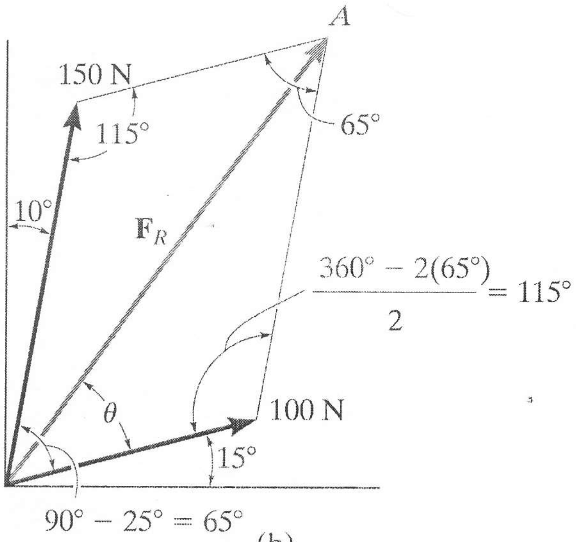
مشابه همین امر برای مسائل عمومی فضایی صدق می‌کند. در مسائل فضایی تجزیه یک نیرو فقط به سه راستای معلوم کاملاً واضح و معین است.

مثال ۲-۱

دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به قلابی مطابق شکل اعمال می‌شوند. اندازه و راستای نیروی برآیند این دو نیرو را تعیین کنید.



(a)

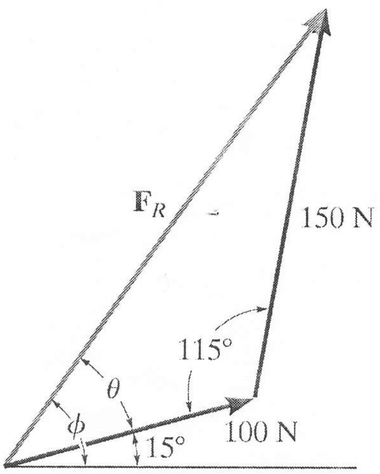


(b)

حل: (روش ترسیمی)

۱) قانون متوازی‌الاضلاع:

برای رسم متوازی‌الاضلاع خطی از نوک $\vec{F}_1$ به موازات $\vec{F}_2$ و خط دیگری از نوک $\vec{F}_2$ به‌موازات $\vec{F}_1$ طبق مقیاس (مثلاً $1\,cm \triangleq 25N$) کشیده می‌شود. قطر متوازی‌الاضلاع ترسیم شده از محل تلاقی دو نیرو نیروی برآیند $\vec{F}_R$ خواهد بود. مقدار $\vec{F}_R$ با استفاده از خط‌کش $F_R \triangleq 8{,}5\,cm \triangleq 212{,}5\ N$ و امتداد آن با استفاده از نقاله $\phi = 55°$ بدست می‌آیند.



(c)

۲) روش چندضلعی (مثلث) نیروها:

ابتدا یکی از دو بردار نیرو (مثلاً نیروی $\vec{F}_1$) را طبق مقیاس و امتداد آن رسم نموده و سپس بردار بعدی نیرو از انتهای بردار اول طبق مقیاس و راستای آن رسم می‌گردد. برداری که ابتدای آن ابتدای بردار اول و انتهای آن انتهای بردار دوم است نیروی برآیند $\vec{F}_R$ خواهد بود. مقدار $\vec{F}_R$ با استفاده از خط‌کش $F_R \triangleq 8{,}5\,cm \triangleq 212{,}5\ N$ و راستای آن با استفاده از نقاله $\phi = 55°$ بدست می‌آیند.

حل: (روش محاسباتی)

با توجه به شکل (c) و استفاده از قانون کسینوس و قانون سینوس:

$$F_R = \sqrt{(100\ N)^2 + (150\ N)^2 - 2(100\ N)(150\ N)\cos 115°} = 212{,}6\ N$$

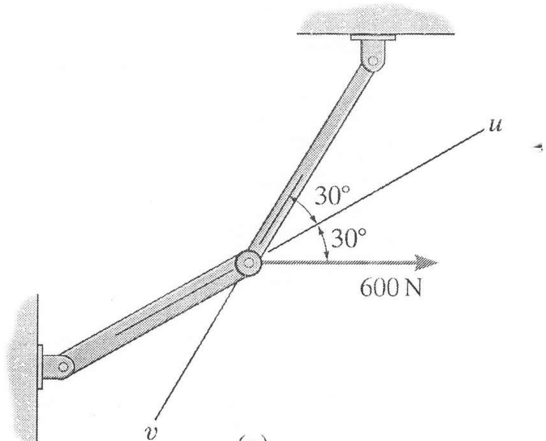
$$\frac{150\ N}{\sin\theta} = \frac{216{,}6}{\sin 115°} \Rightarrow \sin\theta = \frac{150\ N}{212{,}6\ N}(\sin 115°) \Rightarrow \theta = 39{,}8°$$

بنابراین راستای برآیند $\vec{F}_R$ نسبت به امتداد افقی، یعنی ϕ برابر است با

$$\phi = 39{,}8° + 15° = 54{,}8°$$

مثال ۲-۲

نیروی افقی 600 N را به دو راستای داده شده u و v مطابق شکل تجزیه کرده و اندازه این مؤلفه‌ها را بدست آورید.

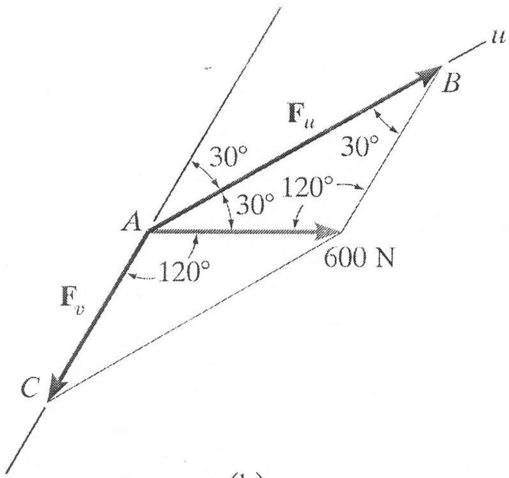


(a)

حل: (روش ترسیمی)

۱) قانون متوازی‌الاضلاع:

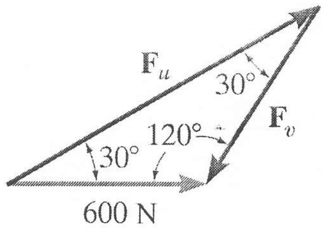
برای رسم متوازی‌الاضلاع ابتدا بردار نیروی 600N طبق مقیاس (مثلاً 1 cm≙250N) کشیده می‌شود. سپس دو خط از نوک این نیرو به‌موازات u و v و دو خط دیگر نیز به‌موازات u و v رسم می‌گردد. بردار از A تا B معرف مؤلفه $\vec{F}_u$ و بردار از A تا C نیز معرف مؤلفه $\vec{F}_v$ می‌باشند که با خط‌کش و سپس تبدیل مقیاس از cm به N بدست می‌آیند: ($F_u = 1040$ N و $F_v = 600$ N)



(b)

۲) روش چندضلعی (مثلث نیروها):

ابتدا بردار نیروی 600N طبق مقیاس (مثلاً 1 cm≙250N) رسم می‌شود. سپس از ابتدای این بردار یک خط به‌موازات راستای v (و یا u) و از انتهای آن خط دیگری به‌موازات راستای u (و یا v) رسم می‌گردد. دو ضلع مثلث رسم شده معرف $\vec{F}_u$ و $\vec{F}_v$ می‌باشند: ($F_u = 1040$ N و $F_v = 600$ N)



(c)

حل: (روش محاسباتی)

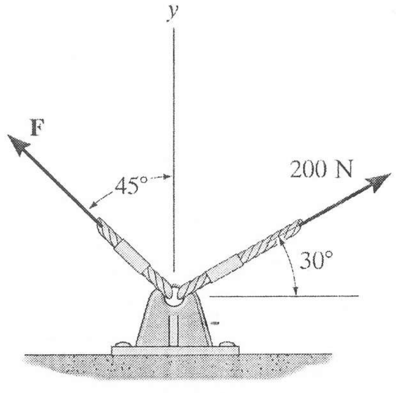
با توجه به شکل (c) و استفاده از قانون سینوس:

$$\frac{F_u}{\sin 120^\circ} = \frac{600\text{ N}}{\sin 30^\circ} \Rightarrow F_u = 1039\text{ N}$$

$$\frac{F_v}{\sin 30^\circ} = \frac{600\text{ N}}{\sin 30^\circ} \Rightarrow F_v = 600\text{ N}$$

مثال ۲-۳

نیروی معلوم 200 N و نیروی $\vec{F}$، که اندازه آن مجهول است مؤلفه‌های نیروی برآیند $\vec{F}_R$ را تشکیل می‌دهند. چنانچه راستای نیروی برآیند $\vec{F}_R$ در امتداد مثبت محور- y باشد، مطلوب است اندازه نیروی $\vec{F}$ و اندازه نیروی برآیند $\vec{F}_R$.

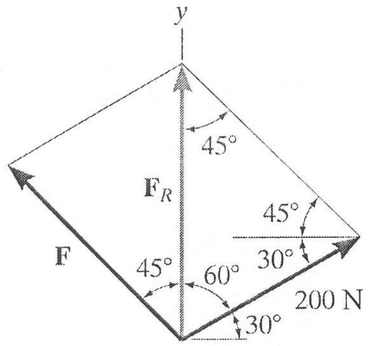


(a)

حل: (روش ترسیمی)

۱) قانون متوازی‌الاضلاع:

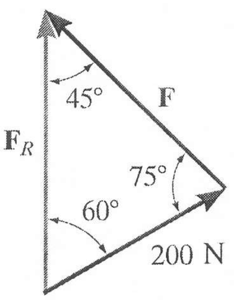
ابتدا بردار نیروی 200N طبق مقیاس (مثلاً 1 cm≙50N) در راستای خود رسم می‌شود. سپس یک خط از نوک این نیرو به‌موازات راستای $\vec{F}$ رسم می‌شود تا محور y را قطع کند. برداری که از ابتدای بردار 200N تا محل تقاطع با محور y بدست می‌آید، نیروی برآیند $\vec{F}_R$ خواهد بود ($F_R \triangleq 5{,}5\ cm \triangleq 275\ N$). حال اگر از نوک بردار برآیند $\vec{F}_R$ خطی به‌موازات نیروی 200N رسم شود راستای $\vec{F}$ را قطع و به این ترتیب اندازه بدست می‌آید. ($F \triangleq 5\ cm \triangleq 250\ N$).



(b)

۲) روش چندضلعی (مثلث) نیروها:

ابتدا بردار نیروی 200N طبق مقیاس (مثلاً 1 cm=50N) رسم می‌شود. سپس از ابتدای این بردار یک خط به‌موازات راستای $\vec{F}_R$ (و یا $\vec{F}$) و از انتهای آن خط دیگری به‌موازات راستای $\vec{F}$ (و یا $\vec{F}_R$) رسم می‌گردد. دو ضلع مثلث رسم شده معرف $\vec{F}$ و $\vec{F}_R$ می‌باشند: ($F = 250\ N$ و $F_R = 275\ N$)



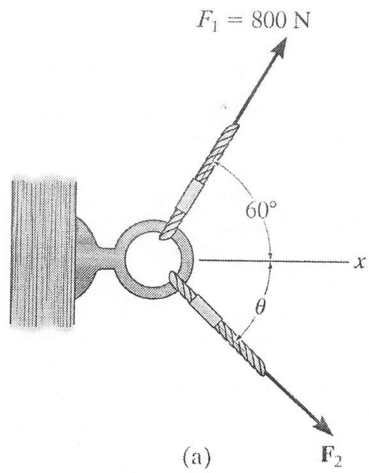
(c)

حل: (روش محاسباتی)

با توجه به شکل (c) و استفاده از قانون سینوس:

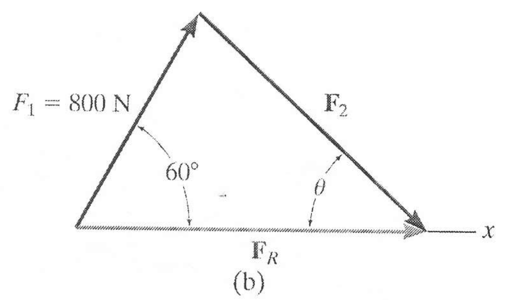
$$\frac{F}{\sin 60^\circ} = \frac{200\ N}{\sin 45^\circ} \Rightarrow F = 245\ N$$

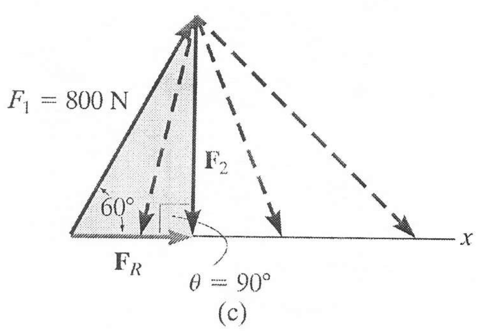
$$\frac{F_R}{\sin 75^\circ} = \frac{200\ N}{\sin 45^\circ} \Rightarrow F_R = 273\ N$$



مثال ۲-۴

نیروی معلوم $\vec{F}_1 = 800$ N و نیروی مجهول $\vec{F}_2$ مؤلفه‌های نیروی برآیند $\vec{F}_R$ را تشکیل می‌دهند. چنانچه راستای نیروی برآیند $\vec{F}_R$ در امتداد مثبت محور-x باشد، مطلوب است تعیین زاویه θ ، در صورتی‌که اندازه نیروی $\vec{F}$ مینیمم گردد. اندازه نیروی برآیند $\vec{F}_R$ را نیز در این حالت بدست آورید.





حل:

با استناد به روش ترسیمی، شکل (b) چندضلعی (مثلث) نیروها را برای یک مقدار دلخواه F_2 و F_R نشان می‌دهد، طوری‌که $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ است. چون اندازه‌های F_2 و F_R مجهول هستند $\vec{F}_2$ می‌تواند عملاً هر برداری باشد که نوک آن با نوک بردار برآیند $\vec{F}_R$ بر روی امتداد مثبت محور-x برخورد می‌کند. اما طوری‌که در شکل (c) نشان‌داده شده است، اندازه $\vec{F}_2$ وقتی مینیمم است که راستای آن بر راستای $\vec{F}_R$، یعنی محور-x عمود باشد، یعنی وقتی که:

$$\theta = 90°$$

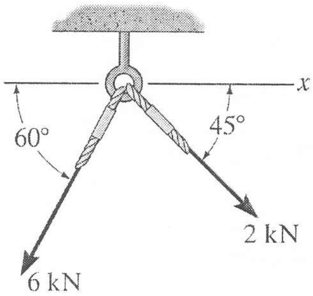
با توجه به اینکه در این حالت مثلث نیروها یک مثلث قائم‌الزاویه است، اندازه‌های مجهول F_2 و F_R از روابط مثلثاتی بدست می‌آیند:

$$F_R = (800 \text{ N})\cos 60° = 400 \text{ N}$$

$$F_2 = (800 \text{ N})\sin 60° = 693 \text{ N}$$

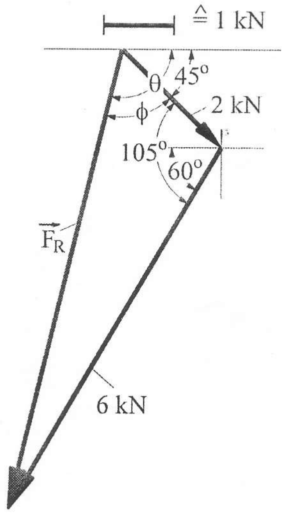
تمرین ۲-۱

برآیند نیروی وارد بر حلقه شکل مقابل را بدست آورید. برای مشخص نمودن راستای نیروی برآیند زاویه آن را نسبت به امتداد مثبت محور-x در جهت ساعتگرد بیان نمایید.



حل:

محاسباتی: ↓ ترسیمی: ⟵



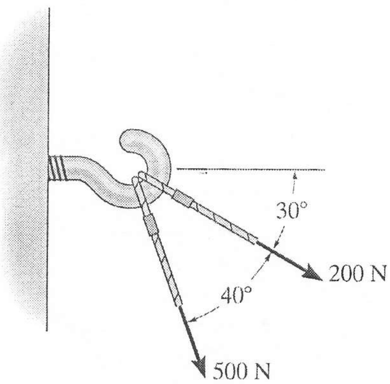
$$F_R = \sqrt{2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 105^\circ} = 6{,}8 \text{ kN}$$

$$\frac{F_R}{\sin 105^\circ} = \frac{6 \text{ kN}}{\sin \phi} \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}\left(\frac{6 \cdot \sin 105^\circ}{F_R}\right) = 58{,}5^\circ$$

$$\theta = \phi + 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 103{,}5^\circ$$

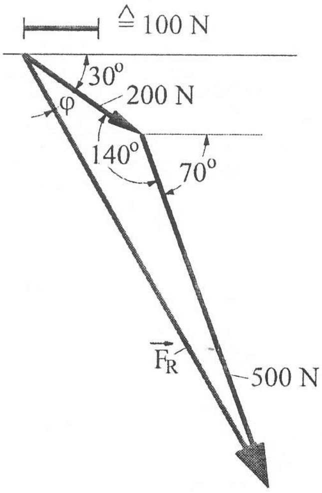
تمرین ۲-۲

مطلوب است تعیین بردار برآیند نیروی وارد بر قلاب شکل مقابل. برای مشخص نمودن راستای نیروی برآیند زاویه آن را نسبت به امتداد مثبت محور-x در جهت ساعتگرد بیان نمایید.



حل:

محاسباتی: ↓ ترسیمی: ⟵

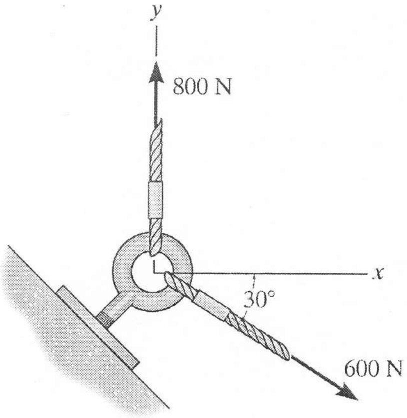


$$F_R = \sqrt{200^2 + 500^2 - 2 \cdot 200 \cdot 500 \cdot \cos 140^\circ} = 665{,}7 \text{ N}$$

$$\frac{F_R}{\sin 140^\circ} = \frac{500 \text{ N}}{\sin \varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{500 \cdot \sin 140^\circ}{F_R}\right) = 28{,}9^\circ$$

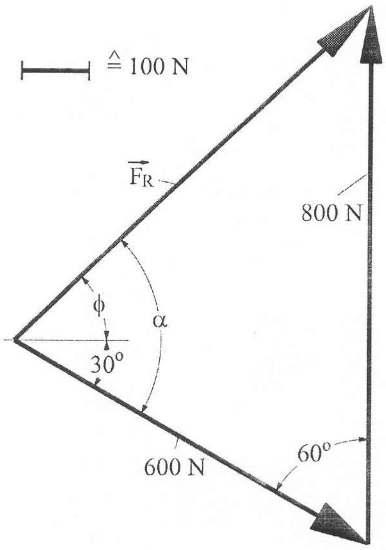
تمرین ۲-۳

برآیند نیروی وارد بر حلقه شکل مقابل را بدست آورید. برای مشخص نمودن راستای نیروی برآیند زاویه آن را نسبت به امتداد مثبت محور- x در جهت پادساعتگرد بیان نمایید.



حل:

محاسباتی: ↓ ترسیمی: ←



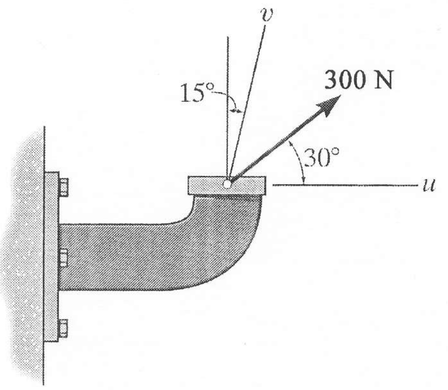
$$F_R = \sqrt{600^2 + 800^2 - 2 \cdot 600 \cdot 800 \cdot \cos 60^\circ} = 721\text{ N}$$

$$\frac{F_R}{\sin 60^\circ} = \frac{800\text{ N}}{\sin\alpha} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{800 \cdot \sin 60^\circ}{F_R}\right) = 73{,}9^\circ$$

$$\phi = \alpha - 30^\circ = 43{,}9^\circ$$

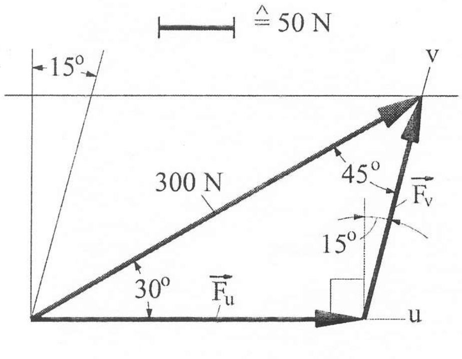
تمرین ۲-۴

نیروی 300 N را به مؤلفه‌هایی در راستاهای u و v تجزیه نموده و اندازه هر یک از مؤلفه‌ها را بدست آورید.



حل:

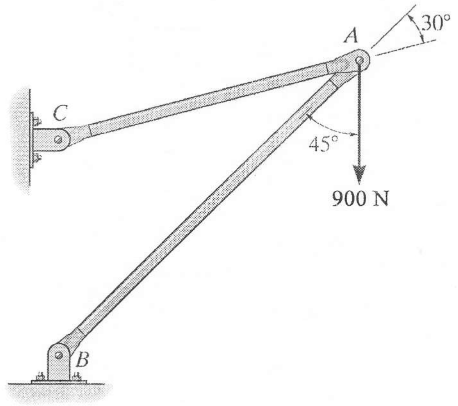
محاسباتی: ↓ ترسیمی: ←



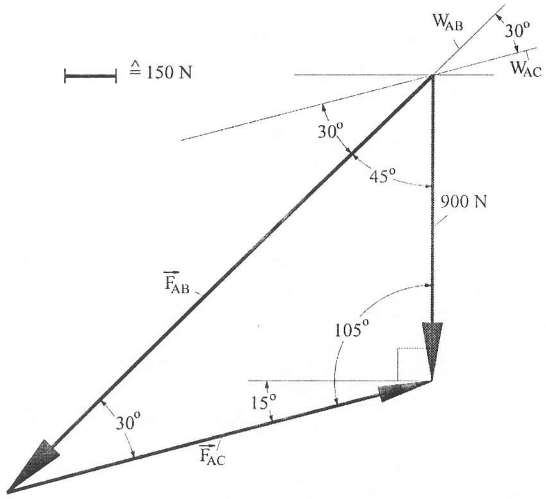
$$\frac{F_u}{\sin 45^\circ} = \frac{300\text{ N}}{\sin 105^\circ} \Rightarrow F_u = \frac{300 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = 219{,}6\text{ N}$$

$$\frac{F_v}{\sin 30^\circ} = \frac{300\text{ N}}{\sin 105^\circ} \Rightarrow F_v = \frac{300 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = 155{,}3\text{ N}$$

تمرین ۲-۵



نیروی $\vec{F} = 900\ \text{N}$ اعمال شده به قاب شکل مقابل را به مؤلفه‌هایی در امتداد عضوهای AB و AC تجزیه نموده و اندازه هر یک از مؤلفه‌ها را بدست آورید.



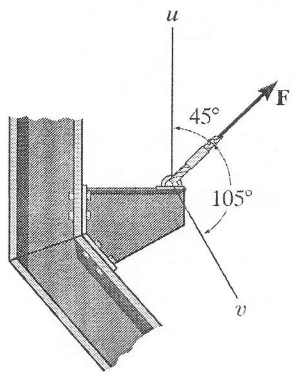
حل:

محاسباتی: ↓   ترسیمی: ←

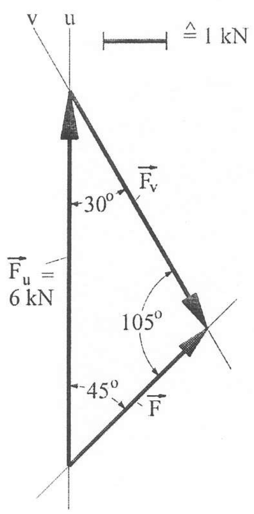
$$\frac{F_{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{900\ \text{N}}{\sin 30^\circ} \Rightarrow F_{AC} = 1272{,}8\ \text{N}$$

$$\frac{F_{AB}}{\sin 105^\circ} = \frac{300\ \text{N}}{\sin 30^\circ} \Rightarrow F_{AB} = 1738{,}7\ \text{N}$$

تمرین ۲-۶



چنانچه نیروی $\vec{F}$ مؤلفه‌ای در امتداد محور-u به اندازه $F_u = 6\ \text{kN}$ داشته باشد، مطلوب است تعیین اندازه نیروی $\vec{F}$ و اندازه مؤلفه F_v در امتداد محور- v.



حل:

محاسباتی: ↓   ترسیمی: ←

$$\frac{F}{\sin 30^\circ} = \frac{6\ \text{kN}}{\sin 105^\circ} \Rightarrow F = 3{,}106\ \text{kN}$$

$$\frac{F_v}{\sin 45^\circ} = \frac{6\ \text{kN}}{\sin 105^\circ} \Rightarrow F_v = 4{,}392\ \text{kN}$$

۲-۳ تجزیه و برآیند نیروهایی‌که به یک نقطه از جسم اثر می‌کنند (نیروهای هم‌رَس)

همان‌طور که در فصل ۲-۲ نشان‌داده شد، هر نیرو را می‌توان به‌طور معین در یک صفحه به دو راستا و در فضا به سه راستا به روش ترسیمی تجزیه نمود. این راستاها می‌توانند به‌طور قراردادی از پیش معلوم باشند، مثلاً بر هم عمود باشند. یک امکان دیگر برای نشان دادن مؤلفه‌های نیرو تجزیه آن به سه راستای عمود برهم-x، -y و -z است. برای این منظور از بردارهای یکّه دکارتی $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ در جهات مثبت محورهای مختصات استفاده می‌شود:

$$\boxed{\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k} \quad \overset{\text{و یا به فرم دیگر دکارتی}}{\Rightarrow} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}}$$

همچنین چندین نیروی $\vec{F}_i$ را می‌توان به یک نیروی هم‌ارز (برآیند) $\vec{R}$ به صورت ترسیمی تبدیل نمود:

$$\boxed{\vec{R} = \Sigma \vec{F}_i}$$

از طرفی نیز می‌توان چندین نیروی $\vec{F}_i$ را به روش محاسباتی با یک نیروی برآیند $\vec{R}$ معادل‌سازی نمود. برای این منظور از مؤلفه‌های دکارتی نیروها استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= F_{ix}\,\vec{i} + F_{iy}\,\vec{j} + F_{iz}\,\vec{k} \\ \vec{R} &= R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j} + R_z\,\vec{k} \end{aligned} \quad \overset{\text{و یا به فرم دیگر دکارتی}}{\Rightarrow} \quad \vec{F}_i = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{pmatrix} \;;\; \vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$$

حال چنانچه روش برداری دکارتی را برای رابطه برداری $\vec{R} = \Sigma \vec{F}_i$ به‌کار ببریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j} + R_z\,\vec{k} = \; & F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} + F_{1z}\,\vec{k} + \\ & F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} + F_{2z}\,\vec{k} + \\ & F_{3x}\,\vec{i} + F_{3y}\,\vec{j} + F_{3z}\,\vec{k} + \\ & \dots \end{aligned} \quad \overset{\text{و یا}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{3z} \end{pmatrix} + \dots$$

با مرتب کردن مؤلفه‌ها بر اساس بردارهای یکّه $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j} + R_z\,\vec{k} = \; & (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots)\,\vec{i} + \\ & (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots)\,\vec{j} + \\ & (F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots)\,\vec{k} \;, \end{aligned} \quad \overset{\text{و یا}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots \\ F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma F_{ix} \\ \Sigma F_{iy} \\ \Sigma F_{iz} \end{pmatrix}$$

$$R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j} + R_z\,\vec{k} = (\Sigma F_{ix})\,\vec{i} + (\Sigma F_{iy})\,\vec{j} + (\Sigma F_{iz})\,\vec{k}$$

و به عبارت دیگر:

$$(R_x - \Sigma F_{ix})\,\vec{i} + (R_y - \Sigma F_{iy})\,\vec{j} + (R_z - \Sigma F_{iz})\,\vec{k} = \vec{0}$$

یک بردار فقط وقتی صفر است که همه مؤلفه‌های آن صفر باشند، یعنی:

$$\boxed{\begin{array}{l} R_x = \Sigma F_{ix} \ , \\ R_y = \Sigma F_{iy} \ , \\ R_z = \Sigma F_{iz} \ . \end{array}}$$

اندازه $\vec{R}$ را می‌توان از روابط زیر بدست آورد:

$$\boxed{R = +\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = +\sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2 + (\Sigma F_{iz})^2}}$$

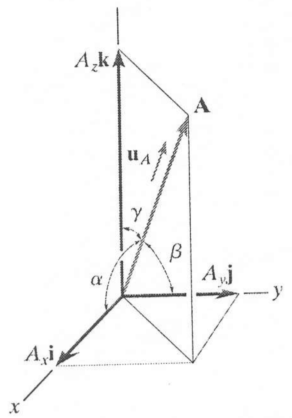
زوایای هادی α ، β و γ که این بردار به ترتیب با جهات مثبت محورهای $x-$، $y-$ و $z-$ می سازد نیز از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{array}{l} R_x = R\cos\alpha \ , \\ R_y = R\cos\beta \ , \\ R_z = R\cos\gamma \ , \end{array}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{R_x}{R} \quad , \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \ .}$$

کسینوس‌های بدست آمده را کسینوس‌های هادی بردار $\vec{R}$ می‌نامند. در مسائل صفحه‌ای ذکر زوایه α که به تنهایی امتداد نیروی برآیند را مشخص می‌کند کافی است:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right|}$$



راهی آسان برای تعیین کسینوسهای هادی یک بردار $\vec{A}$ تشکیل بردار یکّه $\vec{u}_A$ طبق شکل مقابل در امتداد $\vec{A}$ است. اگر $\vec{A}$ به صورت بردار دکارتی $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$ بیان شود، در آن صورت اگر این بردار را بر اندازه‌اش، یعنی $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ تقسیم کنیم بردار یکّه $\vec{u}_A$ در امتداد خود بردار $\vec{A}$ بدست می آید. مؤلفه‌های $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردار یکّه $\vec{u}_A$ کسینوس‌های هادی بردار $\vec{A}$ هستند، یعنی:

$$\boxed{\vec{u}_A = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} \quad \xRightarrow{\text{و یا به فرم دیگر دکارتی}} \quad \vec{u}_A = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}}$$

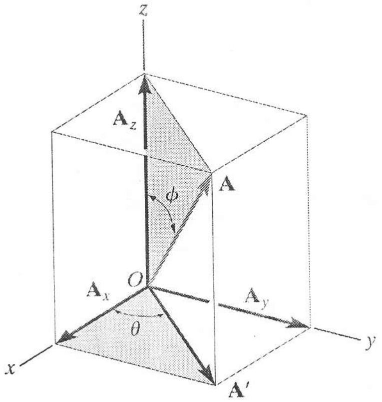
چون اندازه بردار یکّه برابر یک است، بنابراین رابطه مهم بین کسینوس‌های هادی نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

با توجه به رابطه فوق هرگاه دو زاویه هادی معلوم باشند، زاویه هادی سوم را می‌توان از رابطه بالا بدست آورد.

و بالاخره چنانچه اندازه و زوایای هادی بردار $\vec{A}$ معلوم باشند، می‌توان این بردار را به صورت دکارتی بیان نمود:

$$\vec{A} = A\,\vec{u}_A = A\cos\alpha\,\vec{i} + A\cos\beta\,\vec{j} + A\cos\gamma\,\vec{k} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k} = A\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}$$



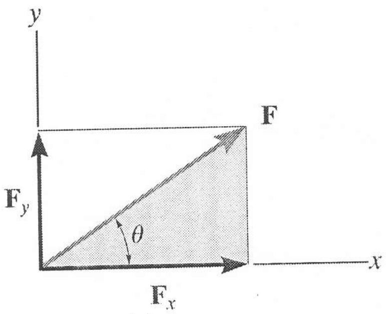
گاهی می توان مطابق شکل مقابل امتداد بردار $\vec{A}$ را با دو زاویه دیگر θ و ϕ مشخص نمود. در این حال برای مؤلفه‌های $\vec{A}$ می توان نوشت:

$$A_x = A'\cos\theta = A\sin\phi\cos\theta$$
$$A_y = A'\sin\theta = A\sin\phi\sin\theta$$
$$A_z = A\cos\phi$$

بنابراین بردار $\vec{A}$ به صورت دکارتی چنین نوشته می‌شود:

$$\vec{A} = A\sin\phi\cos\theta\,\vec{i} + A\sin\phi\sin\theta\,\vec{j} + A\cos\phi\,\vec{k} = A\begin{pmatrix}\sin\phi\cos\theta\\ \sin\phi\sin\theta\\ \cos\phi\end{pmatrix}$$

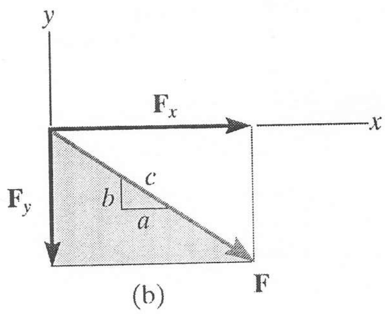
برآیند سیستم نیروهای هم‌صفحه (Coplanar)



(a)

همان‌طور که در بالا اشاره شد، هر نیرو را می‌توان در یک صفحه به‌طور معین به دو راستا مطابق شکل مقابل تجزیه نمود. این دو راستا می‌توانند به‌طور قراردادی از پیش معلوم باشند، مثلاً بر هم عمود بوده، یکی افقی و دیگری عمودی باشد. جهت مؤلفه افقی مانند محور- x از چپ به راست و جهت مؤلفه عمودی مانند محور- y از پایین به بالا مثبت در نظر گرفته می شوند. به این ترتیب برای نمایش بردار دو روش وجود دارد: روش اسکالر و روش برداری دکارتی.

روش اسکالر: اندازه مؤلفه‌های نیروی $\vec{F}$، که در شکلِ مقابل در دو راستای افقیِ- x و عمودی- y نشان‌داده شده است با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع و روابط مثلثاتی بدست می‌آیند:



(b)

$$F_x = F\cos\theta \quad ; \quad F_y = F\sin\theta$$

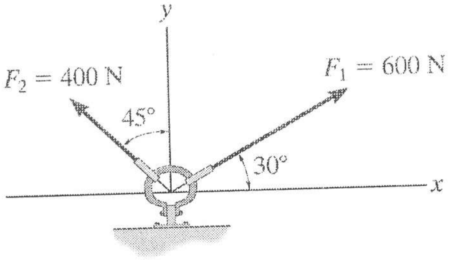
اما به‌جای زاویه θ می‌توان طبق شکل مقابل از نسبتهای اضلاع نیز استفاده نمود:

$$\frac{F_x}{F} = \frac{a}{c} \;\Rightarrow F_x = F\cdot\left(\frac{a}{c}\right) \quad ; \quad \frac{F_y}{F} = \frac{b}{c} \;\Rightarrow F_y = -F\cdot\left(\frac{b}{c}\right)$$

علامت منفی برای F_y به خاطر آن است که این مؤلفه در جهت منفی محور- y واقع است.

روش برداری دکارتی: مشابه روش برداری فضایی ولی فقط با دو مؤلفه F_x و F_y .

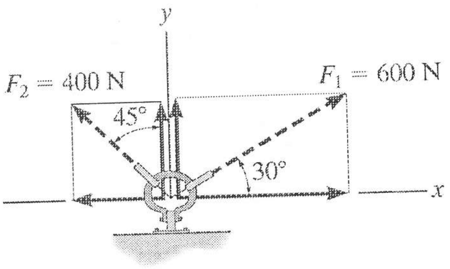
مثال ۲-۵



(a)

دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل بر حلقه‌ای اعمال می‌شوند. مطلوب است تعیین اندازه و امتداد نیروی برآیند.

حل ۱ (روش اسکالر):



(b)

ابتدا هر نیرو را مطابق شکل (b) به دو مؤلفه در راستاهای-x و y - تجزیه کرده و سپس مؤلفه‌های همنام با یکدیگر جمع جبری می گردند:

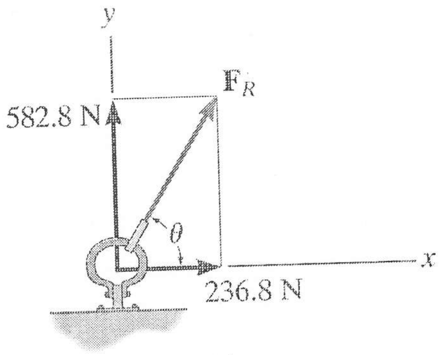
$$\overset{+}{\rightarrow} R_x = \Sigma F_{ix}: \quad R_x = 600\cos 30^\circ - 400\sin 45^\circ = 236{,}8 \text{ N}$$

$$+\uparrow R_y = \Sigma F_{iy}: \quad R_y = 600\sin 30^\circ + 400\cos 45^\circ = 582{,}8 \text{ N}$$

اندازه و امتداد نیروی برآیند که در شکل (c) نشان‌داده شده برابرند با:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(236{,}8)^2 + (582{,}8)^2} = 629 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{582{,}8}{236{,}8}\right) = 67{,}9^\circ$$



(c)

حل ۲ (روش برداری دکارتی):

$$\vec{F}_1 = \{600\cos 30^\circ\,\vec{i} + 600\sin 30^\circ\,\vec{j}\}\text{ N} = \begin{pmatrix} 519{,}6 \\ 300 \end{pmatrix}\text{N}$$

$$\vec{F}_2 = \{-400\sin 45^\circ\,\vec{i} + 400\cos 45^\circ\,\vec{j}\}\text{ N} = \begin{pmatrix} -282{,}8 \\ 282{,}8 \end{pmatrix}\text{N}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 519{,}6 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -282{,}8 \\ 282{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 236{,}8 \\ 582{,}8 \end{pmatrix}\text{N}$$

در مورد اندازه و امتداد $\vec{R}$ مثل روش اسکالر عمل می‌شود.

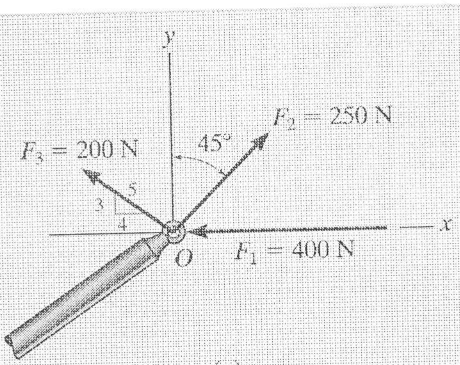
$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 236{,}8 \\ 582{,}8 \end{pmatrix}\text{N} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(236{,}8)^2 + (582{,}8)^2} = 629 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{582{,}8}{236{,}8}\right) = 67{,}9^\circ$$

مثال ۲-۶

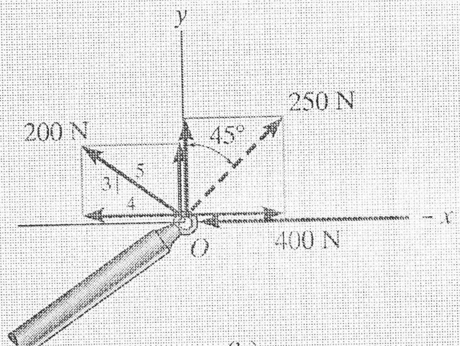
سه نیروی هم‌رس و هم‌صفحه $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ به نوک میله‌ای مطابق شکل اعمال می‌شوند. مطلوب است تعیین اندازه و امتداد نیروی برآیند این سه نیرو.



(a)

حل ۱ (روش اسکالر):

ابتدا هر نیرو را مطابق شکل (b) به دو مؤلفه در راستاهای‌ x - و y - تجزیه کرده و سپس مؤلفه‌های همنام با یکدیگر جمع جبری می‌گردند:



(b)

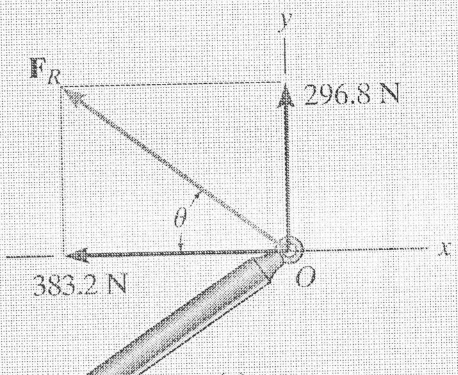
$$\overset{+}{\rightarrow} R_x = \Sigma F_{ix} = -400 + 250 \sin 45^\circ - 200 \cdot (\frac{4}{5}) = -383{,}2 \text{ N}$$

$$+\uparrow R_y = \Sigma F_{iy} = 250 \cos 45^\circ + 200 \cdot (\frac{3}{5}) = 296{,}8 \text{ N}$$

اندازه و امتداد نیروی برآیند که در شکل (c) نشان‌داده شده برابرند با:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(383{,}2)^2 + (296{,}8)^2} = 485 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \tan^{-1}(\frac{296{,}8}{383{,}2}) = 37{,}8^\circ$$



(c)

حل ۲ (روش برداری دکارتی):

$$\vec{F}_1 = \{-400\,\vec{i}\}\text{ N} = \begin{pmatrix} -400 \\ 0 \end{pmatrix}\text{N}$$

$$\vec{F}_2 = \{250 \sin 45^\circ\,\vec{i} + 250 \cos 45^\circ\,\vec{j}\}\text{ N} = \begin{pmatrix} 176{,}8 \\ 176{,}8 \end{pmatrix}\text{N}$$

$$\vec{F}_3 = \{-200 \cdot (\frac{4}{5})\vec{i} + 200 \cdot (\frac{3}{5})\vec{j}\}\text{ N} = \begin{pmatrix} -160 \\ 120 \end{pmatrix}\text{N}$$

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -400 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 176{,}8 \\ 176{,}8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -160 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -383{,}2 \\ 296{,}8 \end{pmatrix}\text{N}$$

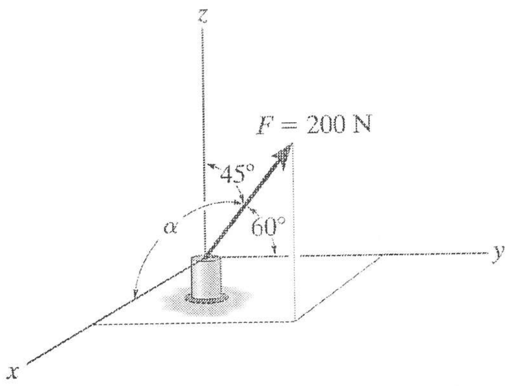
در مورد اندازه و امتداد $\vec{R}$ مثل روش اسکالر عمل می‌شود.

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -383{,}2 \\ 296{,}8 \end{pmatrix}\text{N} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(383{,}2)^2 + (296{,}8)^2} = 485 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \tan^{-1}(\frac{296{,}8}{383{,}2}) = 37{,}8^\circ$$

مثال ۲-۷



نیروی نشان داده شده $\vec{F}$ در شکل مقابل را به صورت بردار دکارتی نشان دهید.

حل:

زاویه هادی α مجهول است و باید تعیین گردد:

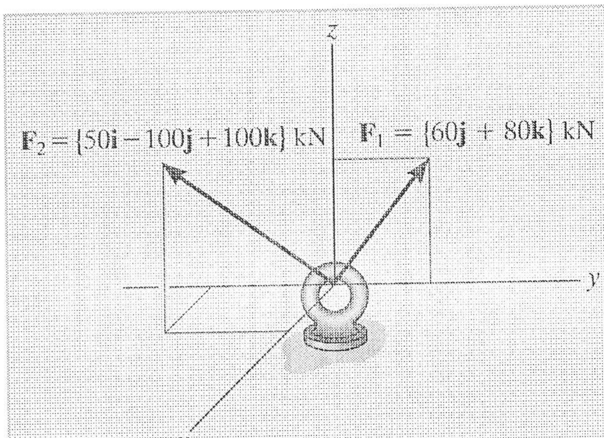
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ} = \pm 0{,}5$$

چون مؤلفه F_x این نیرو در جهت مثبت محور-x است، فقط $\cos\alpha = +0{,}5$ می‌تواند قابل قبول باشد: $\alpha = 60^\circ$.

در نتیجه:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = 200\text{ N} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \cos 60^\circ \\ \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 141{,}4 \end{pmatrix} \text{N} \equiv \{100\,\vec{i} + 100\,\vec{j} + 141{,}4\,\vec{k}\}$$

مثال ۲-۸



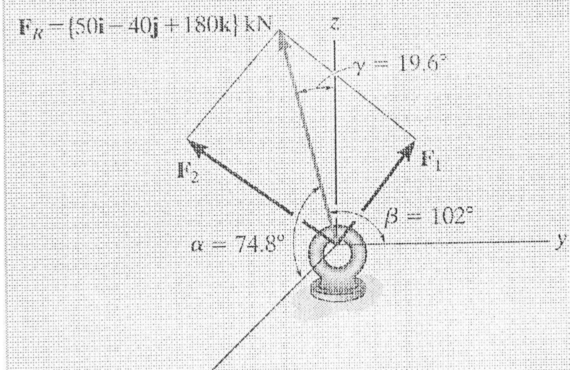
(a)

دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل بر حلقه‌ای اعمال می شوند. مطلوب است تعیین اندازه و امتداد نیروی برآیند.

حل:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix} \text{kN} \quad ; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ -100 \\ 100 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ -100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -40 \\ 180 \end{pmatrix} \text{kN}$$



(b)

اندازه بردار برآیند $\vec{F}_R$ برابر است با:

$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -40 \\ 180 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$F_R = \sqrt{(50)^2 + (-40)^2 + (180)^2} = 191\text{ kN}$$

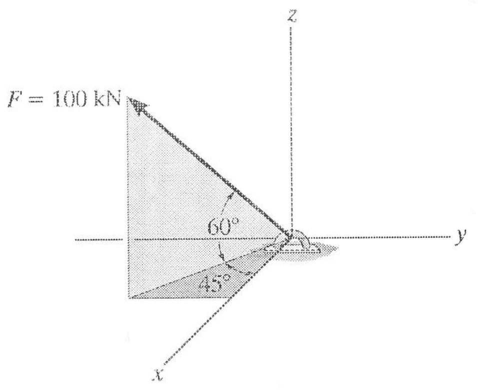
برای امتداد بردار برآیند بایستی بردار یکّه آن را بدست آورد.

$$\vec{u}_{F_R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \frac{\vec{F}_R}{F_R} = \frac{1}{191}\begin{pmatrix} 50 \\ -40 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2617 \\ -0{,}2094 \\ 0{,}9422 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos\alpha = 0{,}2617 \\ \cos\beta = -0{,}2094 \\ \cos\gamma = 0{,}9422 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 74{,}8^\circ \\ \beta = 102^\circ \\ \gamma = 19{,}6^\circ \end{array}$$

این زوایا در شکل (b) نشان داده شده‌اند.

مثال ۲-۹۰

نیروی نشان داده شده $\vec{F}$ در شکل مقابل را به صورت بردار دکارتی نمایش دهید.

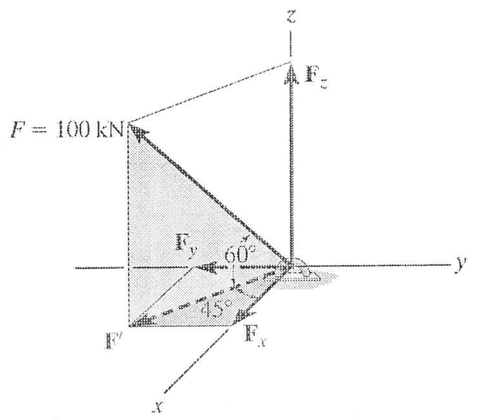


(a)

حل:

با توجه به شکل(b):

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F'\cos 45^\circ \\ -F'\sin 45^\circ \\ F\sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\cos 60^\circ \cos 45^\circ \\ -100\cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ 100\sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35{,}4 \\ -35{,}4 \\ 86{,}6 \end{pmatrix} \text{kN}$$



(b)

و یا به فرم دیگر برداری دکارتی:

$$\vec{F} = \{35{,}4\,\vec{i} - 35{,}4\,\vec{j} + 86{,}6\,\vec{k}\}\ \text{kN}$$

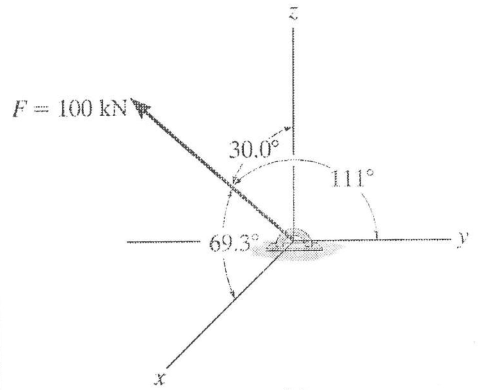
برای کنترل درستی اندازه این بردار:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(35{,}4)^2 + (-35{,}4)^2 + (86{,}6)^2} = 100\ \text{kN}$$

در صورت لزوم زوایای هادی $\vec{F}$ را می‌توان با استفاده از مؤلفه-های بردار یکّه آن بدست آورد:

$$\vec{u}_F = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 35{,}4 \\ -35{,}4 \\ 86{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}354 \\ -0{,}354 \\ 0{,}866 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

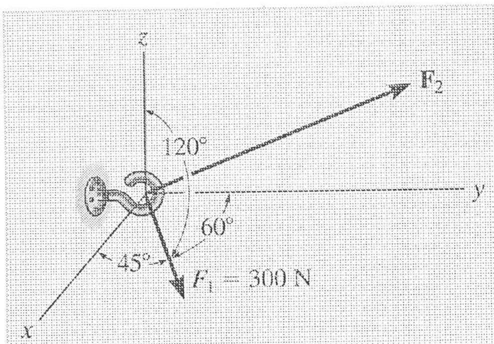
$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1}(0{,}354) & & \alpha = 69{,}3^\circ \\ \beta &= \cos^{-1}(-0{,}354) & \Rightarrow\quad & \beta = 111^\circ \\ \gamma &= \cos^{-1}(0{,}866) & & \gamma = 30{,}0^\circ \end{aligned}$$



(c)

این نتایج در شکل (c) نشان داده شده‌اند

مثال ۲-۱۰



(a)

دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل (a) به حلقه‌ای اعمال می‌شوند. مطلوب است تعیین اندازه و امتداد نیروی $\vec{F}_2$، در صورتی‌که نیروی برآیند $\vec{F}_R$ به اندازه 800 N در جهت مثبت محور- y اثر کند.

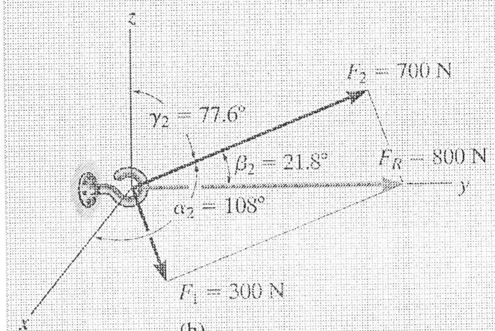
حل:

با توجه به شکل (b):

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 300\cos 45^\circ \\ 300\cos 60^\circ \\ 300\cos 120^\circ \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} N \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= 212{,}1 + F_{2x} \\ 800 &= 150 + F_{2y} \\ 0 &= -150 + F_{2z} \end{aligned} \Rightarrow \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -212{,}1 \\ 650 \\ 150 \end{pmatrix} N$$



(b)

و یا به فرم دیگر برداری دکارتی:

$$\vec{F}_2 = \{-212{,}1\,\vec{i} + 650\,\vec{j} + 150\,\vec{k}\}\ N$$

برای تعیین اندازه این $\vec{F}_2$:

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2 + F_{2z}^2} = \sqrt{(-212{,}1)^2 + (650)^2 + (150)^2} = 700\ N$$

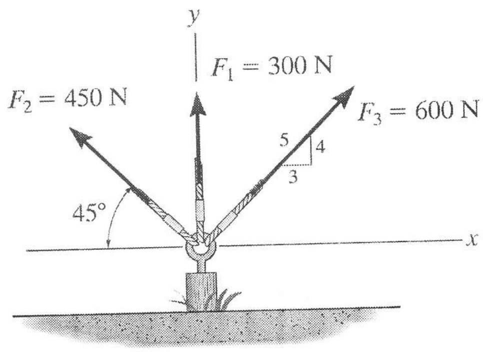
برای زوایای هادی بردار $\vec{F}_2$ می‌توان با استفاده از مؤلفه‌های بردار یکّه آن بدست آورد:

$$\vec{u}_{F_2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{\vec{F}_2}{F_2} = \frac{1}{700}\begin{pmatrix} -212{,}1 \\ 650 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}303 \\ 0{,}929 \\ 0{,}214 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \cos^{-1}(-0{,}303) \\ \beta_2 &= \cos^{-1}(0{,}929) \\ \gamma_2 &= \cos^{-1}(0{,}214) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_2 &= 108^\circ \\ \beta_2 &= 21{,}8^\circ \\ \gamma_2 &= 77{,}6^\circ \end{aligned}$$

این نتایج در شکل (b) نشان داده شده‌اند.

تمرین ۲-۷

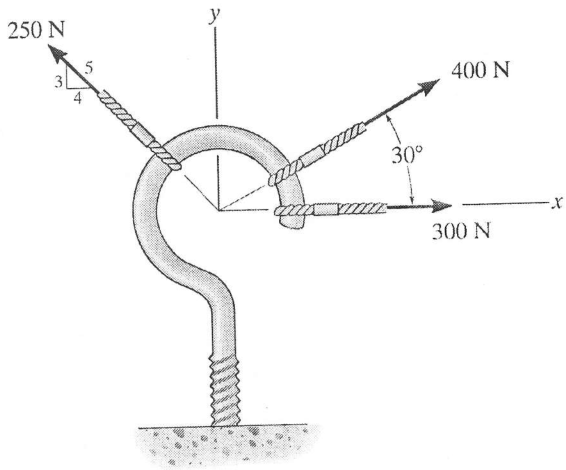


هر یک از نیروهای وارد بر حلقه شکل مقابل را به مؤلفه‌هایی در امتداد محورهای- x و - y تجزیه کنید.

حل:

$$\begin{cases} F_{1x} = \ \ 0 \text{ N} \\ F_{1y} = 300 \text{ N} \end{cases} ; \quad \begin{cases} F_{2x} = -450 \cdot \cos 45^\circ = -318 \text{ N} \\ F_{2y} = \ \ 450 \cdot \sin 45^\circ = \ \ 318 \text{ N} \end{cases} ; \quad \begin{cases} F_{3x} = 600 \cdot (3/5) = 360 \text{ N} \\ F_{3y} = 600 \cdot (4/5) = 480 \text{ N} \end{cases}$$

تمرین ۲-۸



اندازه و امتداد نیروی برآیند سه نیروی وارد بر حلقه شکل مقابل را بدست آورید.

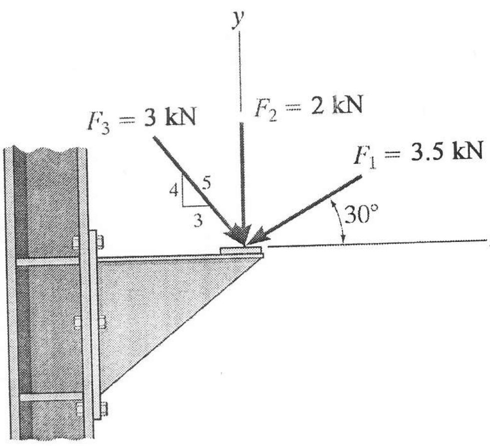
حل:

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} 400 \cos 30^\circ \\ 400 \sin 30^\circ \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} -250 \cdot (4/5) \\ 250 \cdot (3/5) \end{pmatrix} \text{N}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 446{,}4 \\ 350 \end{pmatrix} \text{N} \quad \Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(446{,}4)^2 + (350)^2} = 567{,}25 \text{ N} ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{350}{445{,}4}\right) = 38{,}1^\circ$$

تمرین ۲-۹



مطلوب است اندازه نیروی برآیند حاصل از سه نیروی وارد بر کنسول شکل مقابل و امتداد آن در جهت پادساعتگرد نسبت محور- x.

حل:

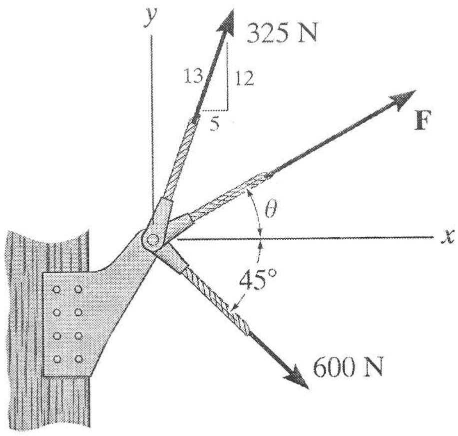
$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \cos 30^\circ \\ -3{,}5 \sin 30^\circ \end{pmatrix} \text{kN} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{kN} + \begin{pmatrix} 3 \cdot (3/5) \\ -3 \cdot (4/5) \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}231 \\ -6{,}15 \end{pmatrix} \text{kN} \quad \Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(-1{,}231)^2 + (-6{,}15)^2} = 6{,}272 \text{ kN}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{6{,}15}{1{,}231}\right) = 78{,}68^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = \phi + 180^\circ = 258{,}68^\circ$$

تمرین ۲-۱۰



مطلوب است اندازه و امتداد θ نیروی $\vec{F}$، در صورتی‌که اندازه نیروی برآیند حاصل از سه نیروی وارد بر دستک شکل مقابل 750N بوده و در امتداد مثبت محور- x اعمال گردد.

حل:

$$\vec{F}_R = \Sigma\vec{F}_i \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 750 \\ 0° \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 600\cos 45° \\ -600\sin 45° \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 325\cdot(5/13) \\ 325\cdot(12/13) \end{pmatrix} N$$

$$\begin{cases} 750 = F\cos\theta + 600\cos 45° + 325\cdot(5/13) \\ 0 = F\sin\theta - 600\sin 45° + 325\cdot(12/13) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\cos\theta = 200{,}736 & (1) \\ F\sin\theta = 124{,}264 & (2) \end{cases}$$

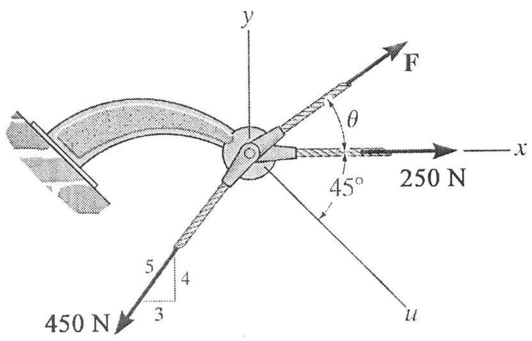
از تقسیم (2) بر (1):

$$\tan\theta = 0{,}619 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0{,}619) = 31{,}76°$$

از جمع مجذور (1) و (2) :

$$F^2\cos^2\theta + F^2\sin^2\theta = 55736{,}473 \Rightarrow F = 236 \text{ N}$$

تمرین ۲-۱۱



مطلوب است اندازه و امتداد θ نیروی $\vec{F}$، در صورتی‌که اندازه نیروی برآیند حاصل از سه نیروی وارد بر دستک شکل مقابل 400N بوده و در امتداد مثبت محور- u اعمال گردد.

حل:

$$\vec{F}_R = \Sigma\vec{F}_i \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 400\cos 45° \\ -400\sin 45° \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} -450\cdot(3/5) \\ -450\cdot(4/5) \end{pmatrix} N$$

$$\begin{cases} 400\cos 45° = F\cos\theta + 250 - 450\cdot(3/5) \\ -400\sin 45° = F\sin\theta - 450\cdot(4/5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\cos\theta = 302{,}843 & (1) \\ F\sin\theta = 77{,}157 & (2) \end{cases}$$

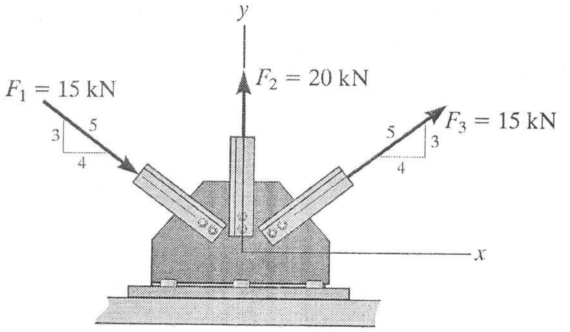
از تقسیم (2) بر (1):

$$\tan\theta = 0{,}2547 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0{,}2547) = 14{,}3°$$

از جمع مجذور (1) و (2) :

$$F^2\cos^2\theta + F^2\sin^2\theta = 97666{,}956 \Rightarrow F = 312{,}5 \text{ N}$$

تمرین ۲-۱۲



مطلوب است اندازه نیروی برآیند حاصل از سه نیروی وارد بر صفحه شکل مقابل و امتداد آن در جهت پادساعتگرد نسبت محور- x.

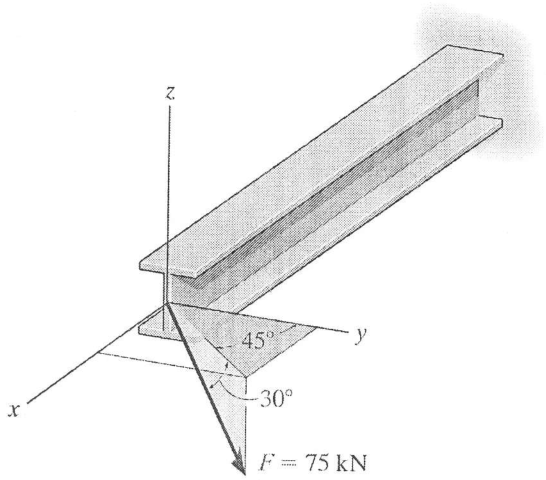
حل:

$$\vec{F}_R = \Sigma\vec{F}_i \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\cdot(4/5) \\ -15\cdot(3/5) \end{pmatrix} \text{kN} + \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} \text{kN} + \begin{pmatrix} 15\cdot(4/5) \\ 15\cdot(3/5) \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \end{pmatrix} \text{kN} \Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(24)^2 + (20)^2} = 31{,}241 \text{ kN} \; ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{20}{24}\right) = 39{,}8^\circ$$

تمرین ۲-۱۳



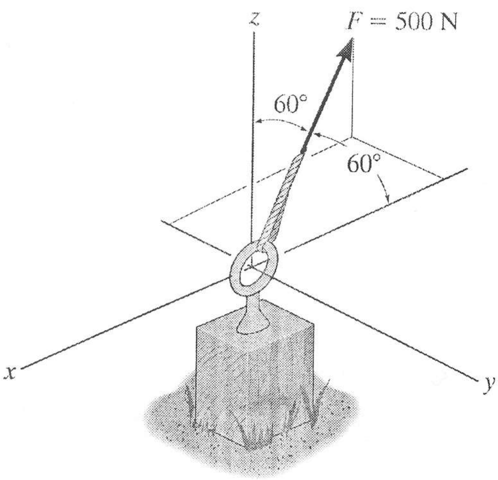
زوایای هادی نیروی وارد بر تیرآهن شکل مقابل را تعیین کنید.

حل:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 75\cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ 75\cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ -75\sin 30^\circ \end{pmatrix} \text{kN} = \begin{pmatrix} 45{,}928 \\ 45{,}928 \\ -37{,}5 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{45{,}928}{75} \\ \cos\beta = \dfrac{45{,}928}{75} \\ \cos\gamma = \dfrac{-37{,}5}{75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{45{,}928}{75}\right) = 52{,}2^\circ \\ \beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{45{,}928}{75}\right) = 52{,}2^\circ \\ \gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{-37{,}5}{75}\right) = 120^\circ \end{cases}$$

تمرین ۲-۱۴



نیروی وارد بر حلقه در شکل مقابل را به صورت بردار دکارتی بیان کنید.

حل:

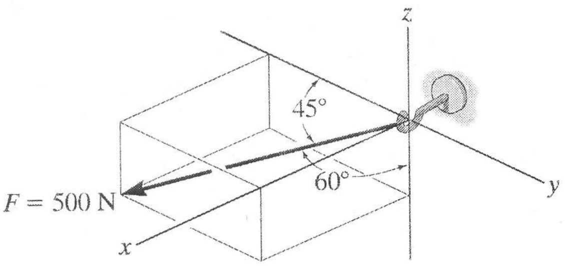
$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad ; \quad \gamma = 60^\circ$

$\cos\beta = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma} = \pm\, 0{,}707$

فقط جواب $\cos\beta = -0{,}707$ قابل قبول است، زیرا مؤلفه- y نیرو منفی است، در نتیجه: $\beta = \cos^{-1}(-0{,}707) = 135^\circ$

$$\vec{F} = F\,\vec{u}_F = F\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = 500\begin{pmatrix} \cos 120^\circ \\ \cos 135^\circ \\ \cos 60^\circ \end{pmatrix} \text{N} = \begin{pmatrix} -250 \\ -353{,}553 \\ 250 \end{pmatrix} \text{N} \equiv \{-250\,\vec{i} - 353{,}553\,\vec{j} + 250\,\vec{k}\}\text{ N}$$

تمرین ۲-۱۵



نیروی وارد بر حلقه در شکل مقابل را به صورت بردار دکارتی بیان کنید.

حل:

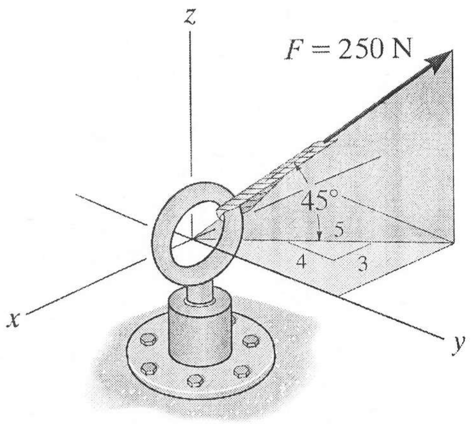
$$\beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \quad ; \quad \gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma} = \pm\, 0{,}5$$

فقط جواب $\cos\alpha = 0{,}5$ قابل قبول است، زیرا مؤلفه- x نیرو مثبت است، در نتیجه: $\alpha = \cos^{-1}(0{,}5) = 60^\circ$

$$\vec{F} = F\,\vec{u}_F = F\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} = 500\begin{pmatrix}\cos 60^\circ\\ \cos 135^\circ\\ \cos 120^\circ\end{pmatrix}\mathrm{N} = \begin{pmatrix}250\\ -353{,}553\\ -250\end{pmatrix}\mathrm{N} \equiv \{250\,\vec{i} - 353{,}553\,\vec{j} - 250\,\vec{k}\}\ \mathrm{N}$$

تمرین ۲-۱۶



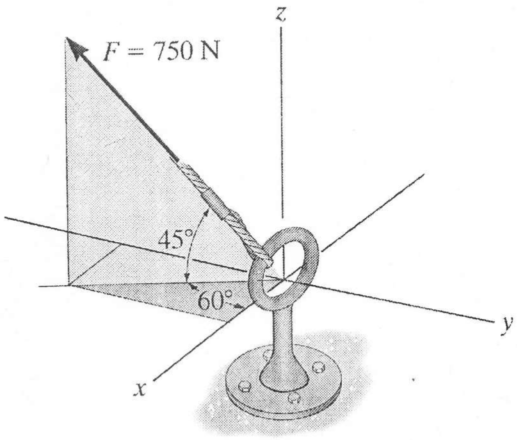
نیروی وارد بر حلقه در شکل مقابل را به صورت بردار دکارتی بیان کنید.

حل:

$$\vec{F} = 250\begin{pmatrix}-\cos 45^\circ\cdot(3/5)\\ \cos 45^\circ\cdot(4/5)\\ \sin 45^\circ\end{pmatrix}\mathrm{N} = \begin{pmatrix}-106{,}1\\ 141{,}4\\ 176{,}8\end{pmatrix}\mathrm{N}$$

ویا فرم دیگر دکارتی: $\vec{F} = \{-106{,}1\,\vec{i} + 141{,}4\,\vec{j} + 176{,}8\,\vec{k}\}\ \mathrm{N}$

تمرین ۲-۱۷



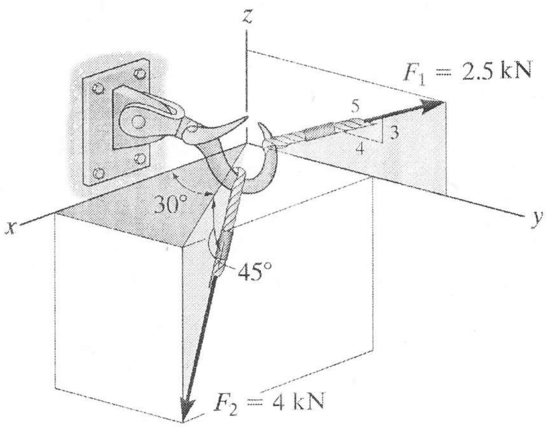
نیروی وارد بر حلقه در شکل مقابل را به صورت بردار دکارتی بیان کنید.

حل:

$$\vec{F} = 750\begin{pmatrix}\cos 45^\circ\cdot\cos 60^\circ\\ -\cos 45^\circ\cdot\sin 60^\circ\\ \sin 45^\circ\end{pmatrix}\mathrm{N} = \begin{pmatrix}265{,}2\\ -459{,}3\\ 530{,}3\end{pmatrix}\mathrm{N}$$

ویا فرم دیگر دکارتی: $\vec{F} = \{265{,}2\,\vec{i} - 459{,}3\,\vec{j} + 530{,}3\,\vec{k}\}\ \mathrm{N}$

تمرین ۲-۱۸



نیروی برآیند حاصل از دو نیروی وارد بر حلقه شکل مقابل را بدست آورید.

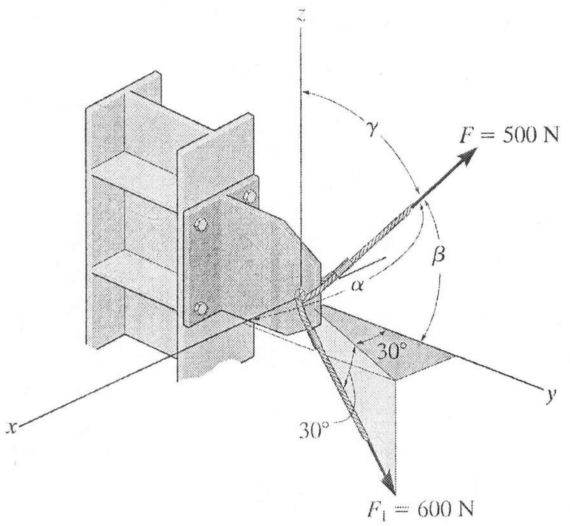
حل:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5\cdot(4/5) \\ 2{,}5\cdot(3/5) \end{pmatrix} \text{kN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 4\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \\ 4\cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ -4\sin 45^\circ \end{pmatrix} \text{kN} = \begin{pmatrix} 2{,}449 \\ 1{,}414 \\ -2{,}828 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}449 \\ 1{,}414 \\ -2{,}828 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}449 \\ 3{,}414 \\ -1{,}328 \end{pmatrix} \text{kN} \equiv \{2{,}449\,\vec{i} + 3{,}414\,\vec{j} - 1{,}328\,\vec{k}\}\ \text{kN}$$

تمرین ۲-۱۹



چنانچه نیروی برآیند حاصل از دو نیروی وارد بر قطعه شکل مقابل در امتداد مثبت محور- y اثر کند، مطلوب است تعیین اندازه نیروی برآیند و زوایای هادی بردار $\vec{F}$، به‌طوری‌که $\beta < 90^\circ$.

حل:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 600\cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ 600\cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ \\ -600\sin 30^\circ \end{pmatrix} \text{N} \ ; \ F = \begin{pmatrix} 500\cos\alpha \\ 500\cos\beta \\ 500\cos\gamma \end{pmatrix} \text{N}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ F_{Ry} \\ 0 \end{pmatrix} \text{N} = \begin{pmatrix} 600\cos 30^\circ \sin 30^\circ \\ 600\cos 30^\circ \cos 30^\circ \\ -600\sin 30^\circ \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} 500\cos\alpha \\ 500\cos\beta \\ 500\cos\gamma \end{pmatrix} \text{N} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 600\cos 30^\circ \sin 30^\circ + 500\cos\alpha & (1) \\ F_{Ry} = 600\cos 30^\circ \cos 30^\circ + 500\cos\beta & (2) \\ 0 = -600\sin 30^\circ + 500\cos\gamma & (3) \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 & (4) \end{cases}$$

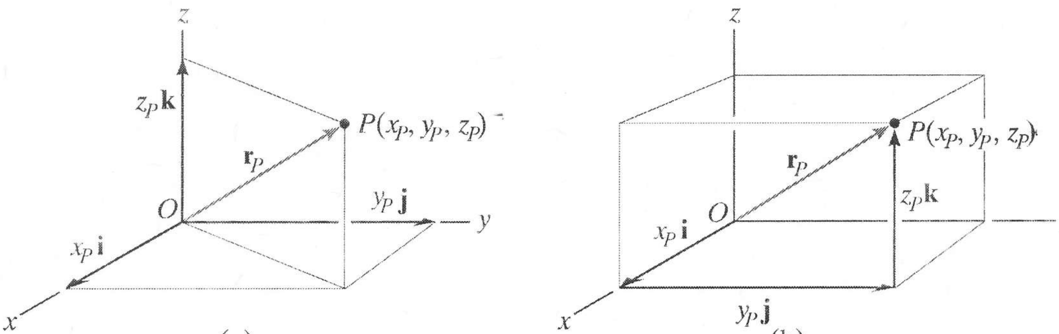
از معادله (1): $\cos\alpha = -0{,}5196 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}(-0{,}5196) = 121{,}3^\circ$

از معادله (3): $\cos\gamma = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \cos^{-1}(0{,}6) = 53{,}1^\circ$

از معادله (4): $(\beta < 90^\circ)$: $\cos\beta = +\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\gamma} = 0{,}6083 \ \Rightarrow \ \beta = \cos^{-1}(0{,}6083) = 52{,}5^\circ$

با قرار دادن β در معادله (2): $F_R = F_{Ry} = 600\cos 30^\circ \cos 30^\circ + 500\cos 52{,}5^\circ = 754$ N

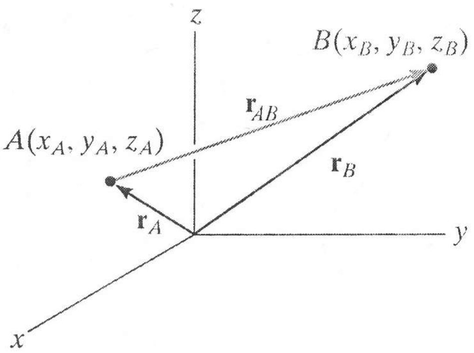
۲-۴ بُردارهای مکان



(a) (b)

موقعیت نقاط در فضا در یک دستگاه مختصات راستگرد توسط بُردارهای مکان، که در اصل مختصات آن نقاط را مشخص می‌کنند بیان می‌شوند. بُردار مکان نقطه P مانند شکل بالا بُرداری است ثابت که از مبدأ مختصات O تا نقطه $P(x_P,y_P,z_P)$ امتداد داشته و می‌توان آن را به صورت دکارتی زیر بیان نمود:

$$\vec{r}_P = \{x_P\,\vec{i} + y_P\,\vec{j} + z_P\,\vec{k}\} \equiv \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$



در حالت کلی‌تر، بُردار مکان را می‌توان مثلاً از نقطه A به نقطه B در فضا بیان نمود. در شکل مقابل این بُردار با نماد $\vec{r}_{AB}$ نشان داده شده است. با توجه به شکل و با استفاده از جمع بُرداری نتیجه می‌شود:

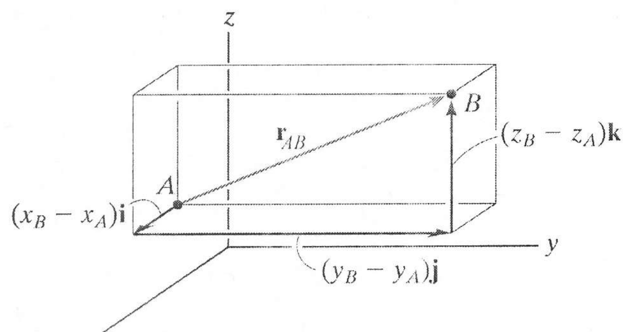
$$\vec{r}_A + \vec{r}_{AB} = \vec{r}_B$$

با حل این معادله بر حسب $\vec{r}_{AB}$ و بیان $\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ به صورت دکارتی:

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \{x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}\} - \{x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}\} = \{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\}$$

و یا به فرم دیگر دکارتی:

$$\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

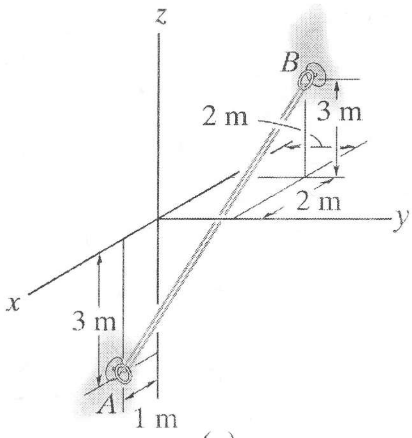


(b)

بنابراین مؤلفه‌های بُردار مکان با استفاده از تفاضل مختصات متناظر بُردار نقاط انتها و ابتدا بیان می گردند (رجوع شود به شکل مقابل).

مثال ۲-۱۱

یک نوار کش لاستیکی مطابق شکل (a) به نقاط A و B متصل شده است. مطلوب است تعیین طول و امتداد کش، وقتی از A به طرف B اندازه‌گیری گردد.



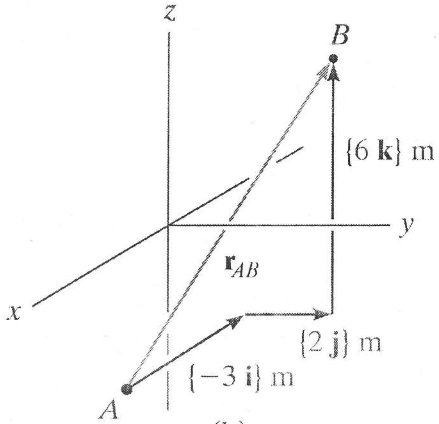
(a)

حل:

بُردار مکان $\vec{r}_{AB}$ با استفاده از مختصات نقاط A و B بدست می آید:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} m \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} m \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} m \equiv \{-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}\}$$



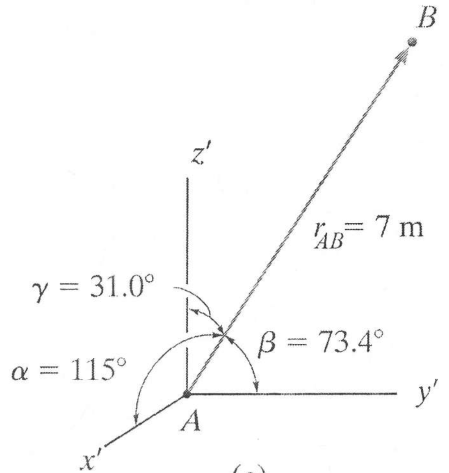
(b)

مؤلفه‌های $\vec{r}_{AB}$ بردارهایی هستند که مطابق شکل (b) بایستی در امتداد محورهای مختصات پیموده شوند تا از نقطه A به نقطه B برسیم، یعنی به اندازه $-3\vec{i}$ در امتداد محور-x، $2\vec{j}$ در امتداد محور-y و $6\vec{k}$ در امتداد محور-z. طول نوار کش لاستیکی برابر است با:

$$r_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = 7 \text{ m}$$

امتداد نوار کش و زوایای هادی آن از بردار یکّه $\vec{u}_{AB}$ نتیجه می‌شوند:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \equiv \{-\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}\}$$



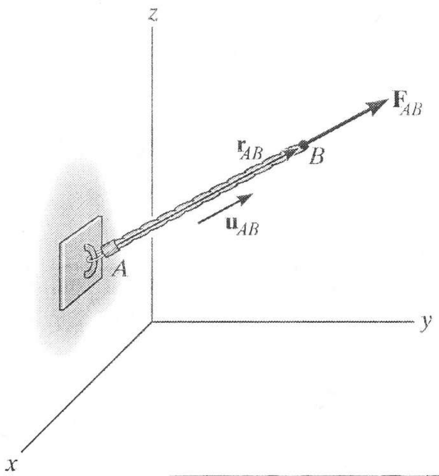
(c)

زوایای هادی امتدا $\vec{r}_{AB}$ از مؤلفه‌های این بردار یکّه بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-3}{7} \\ \cos\beta = \dfrac{2}{7} \\ \cos\gamma = \dfrac{6}{7} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \cos^{-1}(\dfrac{-3}{7}) = 115° \\ \beta = \cos^{-1}(\dfrac{2}{7}) = 73{,}4° \\ \gamma = \cos^{-1}(\dfrac{6}{7}) = 31{,}0° \end{cases}$$

این نتایج در شکل (c) نشان داده شده‌اند.

۲-۵ بُردار نیرو در امتداد یک خط

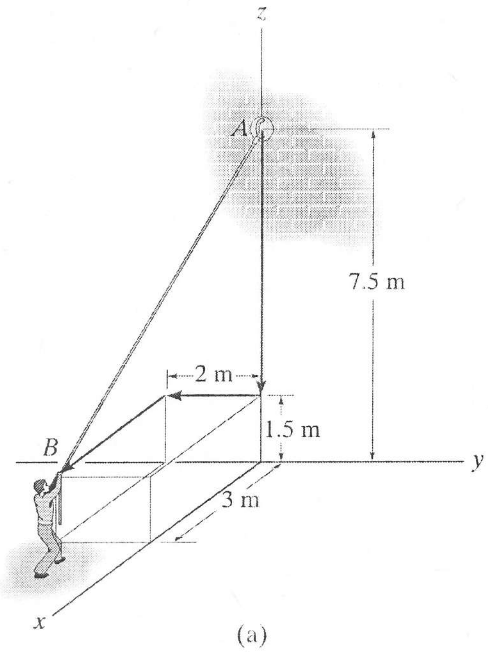


در مسائل سه بُعدی استاتیک، غالباً نیرو در راستای خطی اثر می‌کند، که دو نقطه از آن مشخص می‌باشند، مانند شکل مقابل. از آنجایی‌که امتداد نیرو در راستای آن خط واقع است، نیرو و خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد بُردار یکّه مشترکی دارند. بنابراین بُردار نیرو را می‌توان براساس بُردار یکّه خط به صورت دکارتی به شکل زیر بیان نمود:

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = F_{AB}\,\vec{u}_{AB} = F_{AB}\left(\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = F\left(\frac{\{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}\right)}$$

مثال ۲-۱۲

مردی مطابق شکل طنابی را از نقطه B با نیروی $F_{AB} = 350$ N می کشد. این نیرو که به قلاب A اعمال می شود را به صورت بُردار دکارتی نمایش داده و امتداد آن را نیز تعیین کنید.



(a)

حل:

نوشتن بُردار مکان به صورت دکارتی:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} m \quad ; \quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} m \ ;$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} m \ \Rightarrow$$

در نتیجه: $r_{AB} = \sqrt{(3^2) + (-2^2) + (-6^2)} = 7\,m$ و $\Rightarrow$ بنابراین: $\vec{u}_{AB} = \dfrac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \dfrac{3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}}{7} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$

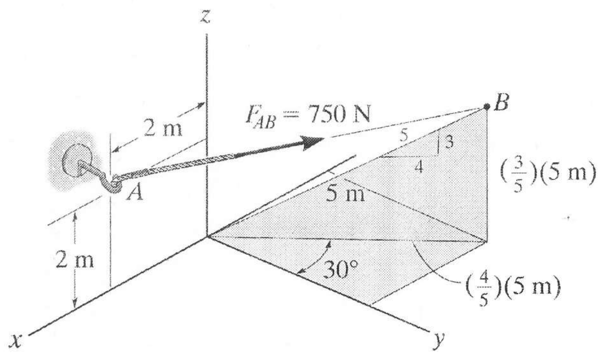
$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\,\vec{u}_{AB} = 350\begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ -6/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ -100 \\ -300 \end{pmatrix} N = \left\{150\vec{i} - 100\vec{j} - 300\vec{k}\right\} N$$

زوایای هادی نیروی $\vec{F}_{AB}$:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ -6/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \cos^{-1}(3/7) = 64{,}6^\circ \\ \beta = \cos^{-1}(-2/7) = 106{,}6^\circ \\ \gamma = \cos^{-1}(-6/7) = 149^\circ \end{cases}$$

مثال ۲-۱۳

نیرویی مطابق شکل به قلاب از نقطه A به طرف نقطه B اعمال می‌شود. این نیرو را به صورت دکارتی بیان کنید.



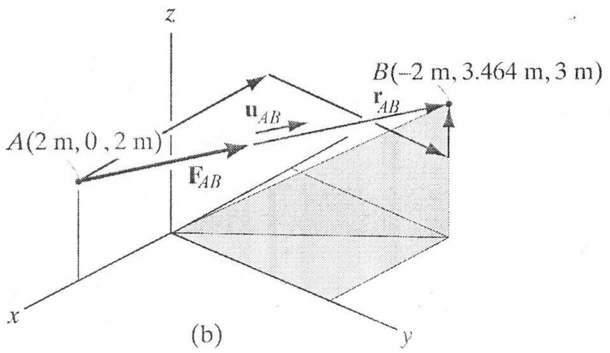
(a)

حل:

بُردار مکان $\vec{r}_{AB}$ با استفاده از مختصات نقاط A و B بدست می آید:

$$\vec{r}_A=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\text{m}\ ;\ \vec{r}_B=\begin{pmatrix}-(4/5)\cdot 5\cdot \sin 30^\circ\\(4/5)\cdot 5\cdot\cos 30^\circ\\(3/5)\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3{,}464\\3\end{pmatrix}\text{m}\ \Rightarrow$$

$$\vec{r}_{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\begin{pmatrix}-2\\3{,}464\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3{,}464\\1\end{pmatrix}\text{m}\ \equiv\ \{-4\vec{i}+3{,}464\vec{j}+1\vec{k}\}$$



(b)

مؤلفه‌های بُردار $\vec{r}_{AB}$ بُردارهایی هستند که مطابق شکل (b) بایستی در امتداد محورهای مختصات پیمود شوند تا از نقطه A به نقطه B برسیم، یعنی به اندازه $-4\vec{i}$ در امتداد محور- x، $3{,}464\vec{j}$ در امتداد محور- y و $1\vec{k}$ در امتداد محور- z. برای بردار یکّه $\vec{u}_{AB}$ نتیجه می‌شود:

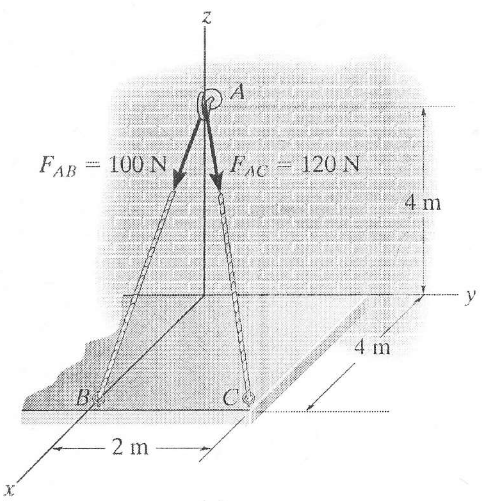
$$\vec{u}_{AB}=\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{\{-4\vec{i}+3{,}464\vec{j}+1\vec{k}\}}{\sqrt{(-4)^2+(3{,}464)^2+(1)^2}}=\{-0{,}7428\vec{i}+0{,}6433\vec{j}+0{,}1857\vec{k}\}$$

اکنون می‌توان نیروی $\vec{F}_{AB}$ را به صورت دکارتی بیان نمود:

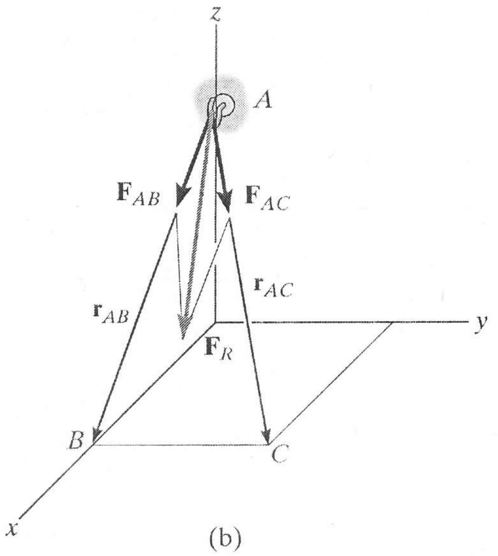
$$\vec{F}_{AB}=F_{AB}\,\vec{u}_{AB}=750\text{ N}\begin{pmatrix}-0{,}7428\\0{,}6433\\0{,}1857\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-557\\482\\139\end{pmatrix}\text{N}\ \equiv\ \{-557\vec{i}+482\vec{j}+139\vec{k}\}\text{ N}$$

مثال ۲-۱۴

صفحه‌ای مطابق شکل (a) توسط دو عدد کابل از حلقه‌های B و C بر روی این صفحه به قلاب A بر روی دیوار متصل شده است. چنانچه این کابل‌ها نیروهای $\vec{F}_{AB} = 100\ N$ و $\vec{F}_{BC} = 120\ N$ را به قلاب دیواری اعمال کنند، مطلوب است تعیین نیروی برآیند وارد بر قلاب A. نتیجه را به صورت بردار دکارتی بیان کنید.



(a)



(b)

حل:

نیروی برآیند $\vec{F}_R$ به صورت ترسیمی در شکل (b) نشان‌داده شده است. برای بیان این نیرو به صورت دکارتی بایستی ابتدا نیروهای $\vec{F}_{AB}$ و $\vec{F}_{AC}$ را به صورت بُردارهای دکارتی فورموله کرده و سپس مؤلفه‌های آن‌ها را با هم جمع نمود. امتدادهای $\vec{F}_{AB}$ و $\vec{F}_{AC}$ با تشکیل بُردارهای یکّه $\vec{u}_{AB}$ و $\vec{u}_{AC}$ در امتداد کابل‌ها مشخص می‌شوند. این بُردارهای یکّه نیز با استفاده از بُردارهای مکان $\vec{r}_{AB}$ و $\vec{r}_{AC}$ بدست می‌آیند. بُردارهای مکان $\vec{r}_{AB}$ و $\vec{r}_{AC}$ هم با استفاده از مختصات نقاط A، B و C تعیین می‌شوند:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} m \;;\; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \;;\; \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} m \equiv \{4\vec{i} - 4\vec{k}\}\ m \quad ; \quad r_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 5{,}66\ m$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\,\vec{u}_{AB} = F_{AB}\left(\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = 100\left(\frac{\{4\vec{i} - 4\vec{k}\}}{5{,}66}\right) = \begin{pmatrix} 70{,}7 \\ 0 \\ -70{,}7 \end{pmatrix} N \equiv \left\{70{,}7\,\vec{i} - 70{,}7\,\vec{k}\right\} N$$

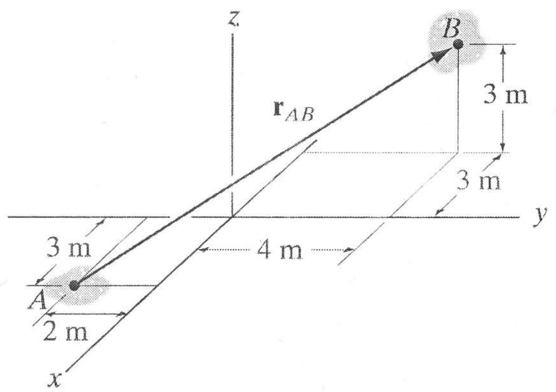
$$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} m \equiv \{4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\}\ m \quad ; \quad r_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 6\ m$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC}\,\vec{u}_{AC} = F_{AC}\left(\frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = 120\left(\frac{\{4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\}}{6}\right) = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ -80 \end{pmatrix} N \equiv \left\{80\,\vec{i} + 40\,\vec{j} - 80\,\vec{k}\right\} N$$

و بالاخره $\vec{F}_R$ برابر است با:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} = \begin{pmatrix} 70{,}7 \\ 0 \\ -70{,}7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ -80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 \\ 40 \\ 151 \end{pmatrix} N \equiv \left\{151\,\vec{i} + 40\,\vec{j} - 151\,\vec{k}\right\} N$$

تمرین ۲-۲۰



بُردار مکان $\vec{r}_{AB}$ را به صورت بُردار دکارتی بیان کرده و سپس اندازه و زوایای هادی مختصات آن را بدست آورید.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} m \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} m$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} m \equiv \{6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}\}\, m \qquad \Rightarrow \qquad r_{AB} = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2 + (3)^2} = 9\ m$$

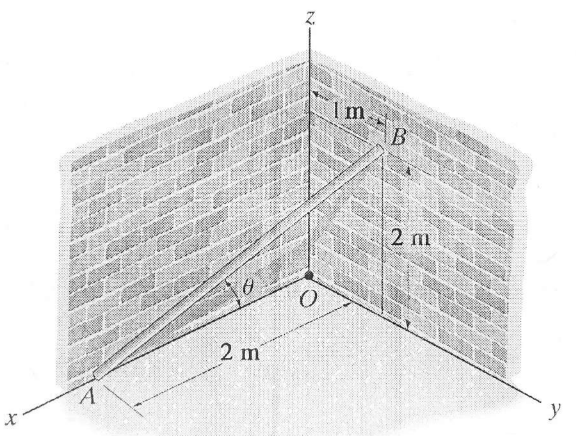
زوایای هادی بُردار $\vec{r}_{AB}$:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \cos^{-1}(-2/3) = 131{,}8^\circ \\ \beta = \cos^{-1}(2/3) = 48{,}2^\circ \\ \gamma = \cos^{-1}(1/3) = 70{,}5^\circ \end{cases}$$

تمرین ۲-۲۱

مطلوب است تعیین طول میله $\vec{r}_{AB}$ و بُردار مکان از A تا B. همچنین زاویه θ را بدست آورید.

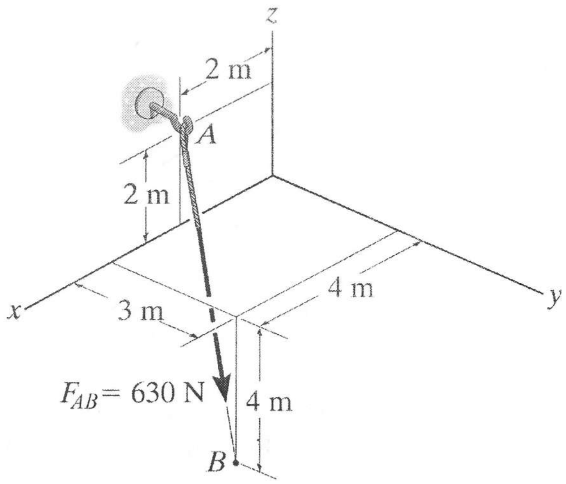


حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} m$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} m \equiv \{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\}\, m \qquad \Rightarrow \qquad r_{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = 3\ m$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-2/3) = 131{,}8^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 180 - \alpha = 48{,}2$$



تمرین ۲-۲۲

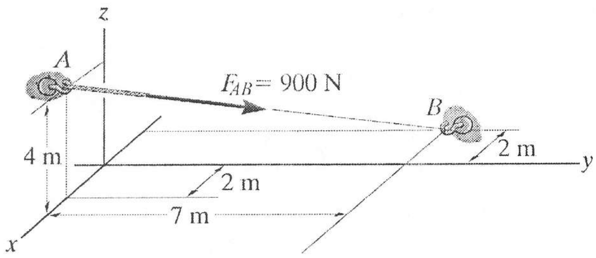
نیروی نشان داده شده در شکل مقابل را به صورت بُردار دکارتی بیان کنید.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{m} \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{m} \equiv \{2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}\}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad r_{AB} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = 7\ \text{m}$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\,\vec{u}_{AB} = F_{AB}\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = 630\frac{\{2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}\}}{7} = 90\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 270 \\ -540 \end{pmatrix} \text{N} \equiv \{180\vec{i} + 270\vec{j} - 540\vec{k}\}\ \text{N}$$



تمرین ۲-۲۳

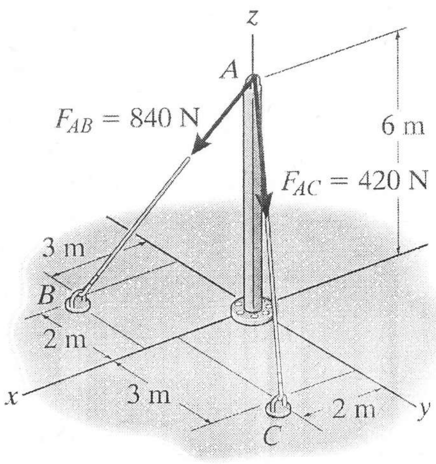
نیروی نشان داده شده در شکل مقابل را به صورت بُردار دکارتی بیان کنید.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{m} \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{m} \equiv \{-4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}\}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad r_{AB} = \sqrt{(-4)^2 + (7)^2 + (-4)^2} = 9\ \text{m}$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\,\vec{u}_{AB} = F_{AB}\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = 900\frac{\{-4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}\}}{9} = 100\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ 700 \\ -400 \end{pmatrix} \text{N} \equiv \{-400\vec{i} + 700\vec{j} - 400\vec{k}\}\ \text{N}$$



تمرین ۲-۲۴

مطلوب است تعیین اندازه نیروی برآیند وارد بر ستون در نقطه A.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{m} \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \; ; \; \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

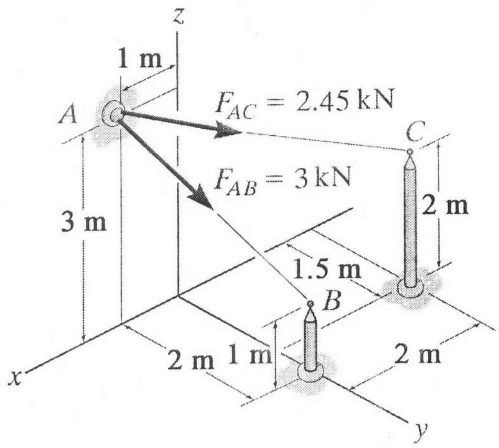
$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{m} \quad ; \quad \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$r_{AB} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7 \text{ m} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}_B = F_B \cdot \vec{u}_{AB} = \frac{840}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ -240 \\ -720 \end{pmatrix} \text{N}$$

$$r_{AC} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7 \text{ m} \Rightarrow \vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}_C = F_C \cdot \vec{u}_{AC} = \frac{420}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ -360 \end{pmatrix} \text{N}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} = \begin{pmatrix} 360 \\ -240 \\ -720 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ -360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 \\ -60 \\ -1080 \end{pmatrix} \text{N} = \{480\vec{i} - 60\vec{j} - 1080\vec{k}\} \text{N}$$

$$\Rightarrow \qquad F_R = \sqrt{480^2 + (-60)^2 + (-1080)^2} = 1183{,}4 \text{ N}$$



تمرین ۲-۲۵

مطلوب است تعیین نیروی برآیند وارد بر نقطه A.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{m} \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m} \; ; \; \vec{r}_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{m}$$

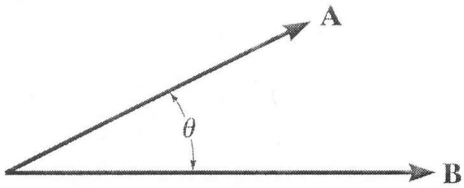
$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{m} \quad ; \quad \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = 3 \text{ m} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}_B = F_B \, \vec{u}_{AB} = \frac{3}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$r_{AC} = \sqrt{(-3)^2 + 1{,}5^2 + (-1)^2} = 3{,}5 \text{ m} \Rightarrow \vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{1}{3{,}5}\begin{pmatrix} -3 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}_C = F_C \, \vec{u}_{AC} = \frac{2{,}45}{3{,}5}\begin{pmatrix} -3 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 1{,}05 \\ -0{,}7 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 1{,}05 \\ -0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}1 \\ 3{,}05 \\ -2{,}7 \end{pmatrix} \text{kN} = \{-3{,}1\vec{i} + 3{,}05\vec{j} - 2{,}7\vec{k}\} \text{kN}$$

۶-۲ ضرب نقطه‌ای (ضرب اسکالر) دو بُردار



ضرب نقطه‌ای بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت $\vec{A}\cdot\vec{B}$ نوشته می‌شود، نتیجه این ضرب یک مقدار عددی مثبت یا منفی بوده و برابر است با:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \qquad (0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$$

و اگر به صورت بردار دکارتی نوشته شود:

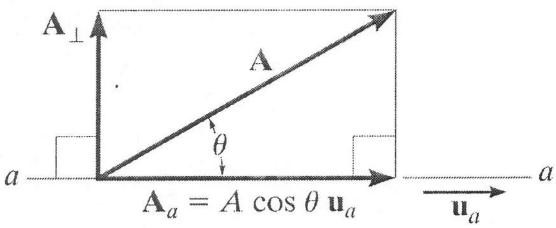
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

کاربردهای ضرب نقطه‌ای در استاتیک:

- تعیین زاویه بین دو بُردار و یا بین دو خط متقاطع:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right) \qquad (0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$$

- تعیین مؤلفه‌های یک بُردار به‌موازات و عمود بر یک خط:



اندازه مؤلفه بُردار $\vec{A}$ به‌موازات خط aa یا هم‌خط با آن (با بُردار یکه $\vec{u}_a$) طبق شکل زیر، برابر است با:

$$A_a = A\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{u}_a$$

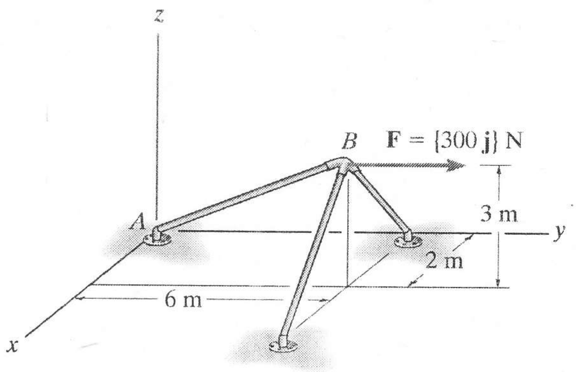
مؤلفه بُرداری $\vec{A}_a$ به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\vec{A}_a = A_a\,\vec{u}_a$$

مؤلفه‌ای از $\vec{A}$ ، به صورت بُردار که بر خط aa عمود است از رابطه $\vec{A}_\perp = \vec{A} - \vec{A}_a$ بدست می‌آید. دو روش برای تعیین $\vec{A}_\perp$ وجود دارد. در روش اول باید زاویه $\theta = \cos^{-1}\left(\vec{A}\cdot\vec{u}_a/A\right)$ را از ضرب نقطه‌ای بدست آورده و سپس $A_\perp = A\sin\theta$ را تعیین نمود. در روش دوم اگر A_a معلوم باشد، می‌توان طبق قضیه فیثاغورث نوشت: $A_\perp = \sqrt{A^2 - A_a^2}$

مثال ۲-۱۵

سازه‌ای نشان‌داده شده در شکل (a) در معرض نیروی افقی $\vec{F}=\{300\vec{j}\}$ N قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین اندازه مؤلفه‌های این نیرو به‌موازات عضو AB و عمود بر آن.

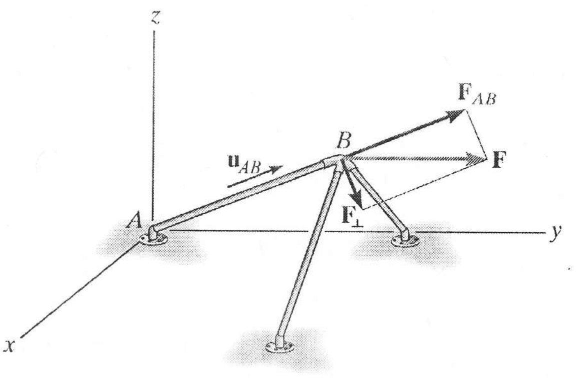


(a)

حل:

$$\vec{r}_A=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{m}\ ;\ \vec{r}_B=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\text{m}\ \Rightarrow\ \vec{r}_{AB}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\text{m}$$

همان‌طورکه در شکل (b) مشاهده می‌شود، اندازه تصویر مؤلفه $\vec{F}$ بر روی AB برابر است با حاصلضرب نقطه‌ای بُردار $\vec{F}$ و بُردار یکّه $\vec{u}_{AB}$، که امتداد AB را مشخص می‌کند.



(b)

$$\vec{u}_{AB}=\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{\{2\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}\}}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\text{m}=\begin{pmatrix}0{,}286\\0{,}857\\0{,}429\end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$F_{AB}=F\cos\theta=\vec{F}\cdot\vec{u}_{AB}=\begin{pmatrix}0\\300\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}286\\0{,}857\\0{,}429\end{pmatrix}=257{,}1\ \text{N}$$

چون این نتیجه مقدار عددی مثبت است، $\vec{F}_{AB}$ با $\vec{u}_{AB}$ هم امتداد و هم جهت است (رجوع شود به شکل (b)).

$\vec{F}_{AB}$ را می‌توان به صورت دکارتی بیان نمود:

$$\vec{F}_{AB}=F_{AB}\,\vec{u}_{AB}=257{,}1\begin{pmatrix}0{,}286\\0{,}857\\0{,}429\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}73{,}5\\220\\110\end{pmatrix}\text{N}\ \equiv\ \{73{,}5\,\vec{i}+220\,\vec{j}+110\,\vec{k}\}\ \text{N}$$

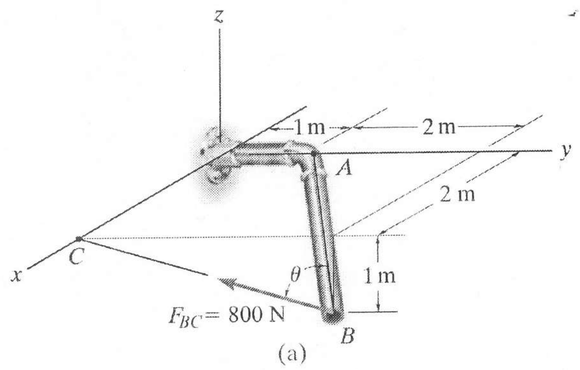
به این ترتیب مؤلفه عمودی $\vec{F}_\perp$ (رجوع شود به شکل (b)) عبارت است از:

$$\vec{F}_\perp=\vec{F}-\vec{F}_{AB}=\begin{pmatrix}0\\300\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}73{,}5\\220\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-73{,}5\\80\\-110\end{pmatrix}\text{N}\equiv\{-73{,}5\,\vec{i}+80\,\vec{j}-110\,\vec{k}\}\ \text{N}$$

اندازه این مؤلفه با توجه به این بُردار و یا با استفاده از قضیه فیثاغورث بدست می‌آید (رجوع شود به شکل (b)).

$$F_\perp=\sqrt{F^2-F_{AB}^2}=\sqrt{300^2-257{,}1^2}=155\ \text{N}$$

مثال ۲-۱۶

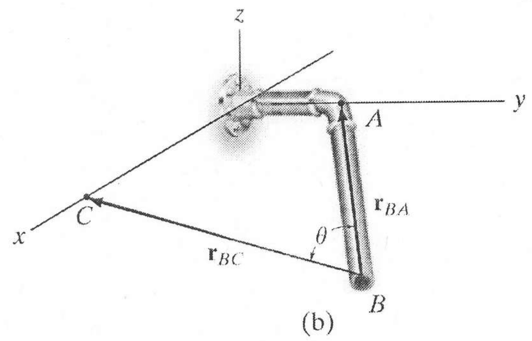


(a)

لوله‌ای مطابق شکل (a) در معرض نیروی F= 800 N قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین زاویه θ بین $\vec{F}$ و قسمت BA از لوله و تصویر $\vec{F}$ روی این قسمت.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m \; ; \; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} m \; ; \; \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \;\Rightarrow$$



(b)

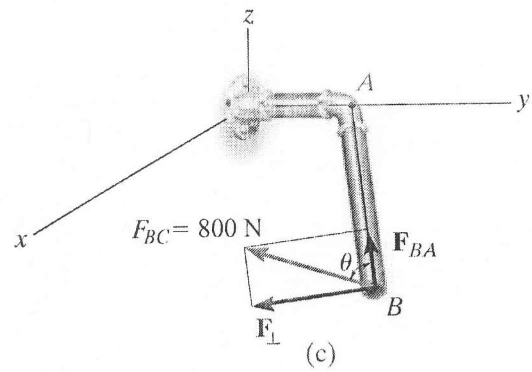
ابتدا بردارهای مکان از B تا A و از B تا C تعیین می‌گردند. سپس زاویه θ بین این دو بُردار طبق شکل (b) بدست می‌آید:

$$\vec{r}_{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} m \; ; \; \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} m \; ; \; r_{BA} = 3\,m \; ; \; r_{BC} = \sqrt{10}\,m$$

در نتیجه:

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{BC}}{r_{BA}\; r_{BC}} = \frac{(-2)(0) + (-2)(-3) + (1)(1)}{3\sqrt{10}} = 0{,}7379$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \cos^{-1}(0{,}7379) = 42{,}5^\circ$$



(c)

برای تعیین مؤلفه $\vec{F}$ روی BA، که در شکل (c) نشان‌داده شده است بایستی ابتدا بُردار یکّه $\vec{u}_{BA}$ و نیروی $\vec{F}$ را به صورت بُردار دکارتی بیان نمود:

$$\vec{u}_{BA} = \frac{\vec{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{\{-2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 1\vec{k}\}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} m$$

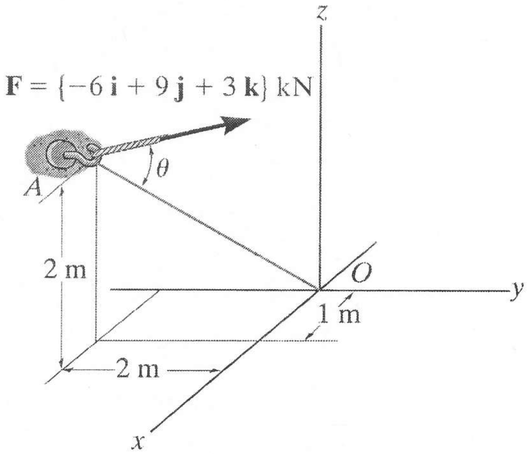
$$\vec{F} = F\,\vec{u}_{BC} = 800\left(\frac{\vec{r}_{BC}}{r_{BC}}\right) = 800\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -758{,}9 \\ 253{,}0 \end{pmatrix} N \equiv \{-758{,}9\,\vec{j} + 253{,}0\,\vec{k}\}\,N$$

بنابراین:

$$F_{BA} = \vec{F} \cdot \vec{u}_{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -758{,}9 \\ 253{,}0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = (0)(-\frac{2}{3}) + (-758{,}9)(-\frac{2}{3}) + (253{,}0)(\frac{1}{3}) = 590\,N$$

روش ساده‌تر حل این قسمت آن‌است که چون θ معلوم است، در نتیجه:

$$F_{BA} = F\cos\theta = 800\,\cos 42{,}5^\circ = 590\,N$$



تمرین ۲-۲۶

مطلوب است تعیین زاویه θ بین نیرویی مطابق شکل و خط AO.

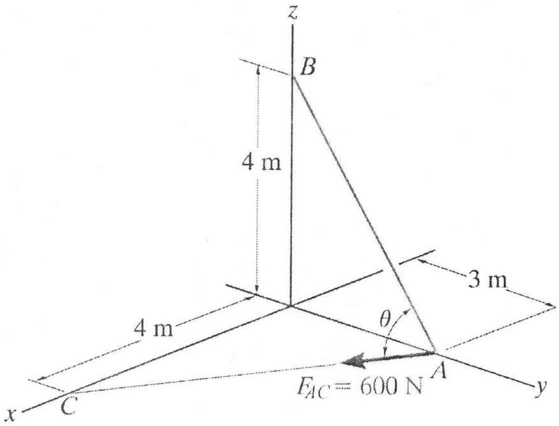
حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; r_{AO} = 3$$

و

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{m} \;\Rightarrow\; F = 11{,}225 \text{ kN}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{F}\cdot\vec{r}_{AO}}{F\,r_{AO}} = \frac{1}{11{,}225\cdot 3}\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{18}{33{,}675} = 0{,}5345 \;\Rightarrow\; \theta = \cos^{-1}(0{,}5345) = 57{,}7^\circ$$



تمرین ۲-۲۷

مطلوب است تعیین زاویه θ بین نیرویی مطابق شکل و خط AB.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$\Rightarrow\; \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \;\Rightarrow\; r_{AB} = r_{AC} = 5 \text{ m}$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC}\,\vec{u}_{AC} = F_{AC}\,\frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = 600\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 \\ -360 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N}$$

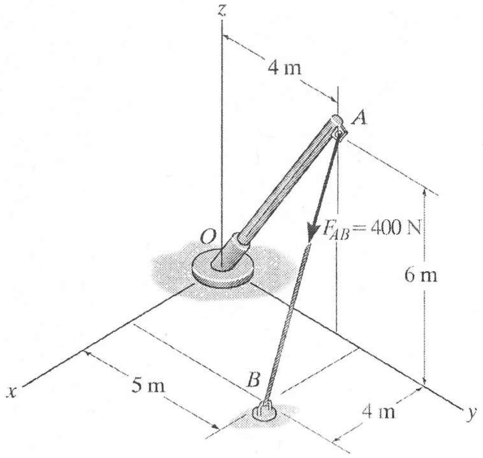
$$\vec{F}_{AC}\cdot\vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 480 \\ -360 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (480)(0)+(-360)(-3)+(0)(4) = 1080 \text{ Nm}$$

$$F_{AC}\,r_{AB} = 600\cdot 5 = 3000 \text{ Nm}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{F}_{AC}\cdot\vec{r}_{AB}}{F_{AC}\,r_{AB}} = \frac{1080}{3000} = 0{,}36 \;\Rightarrow\; \theta = \cos^{-1}(0{,}36) = 68{,}9^\circ$$

تمرین ۲-۲۸

مطلوب است تعیین اندازه مؤلفه تصویر نیرویی مطابق شکل در طول لوله.



حل:

$$\vec{r}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \Rightarrow$$

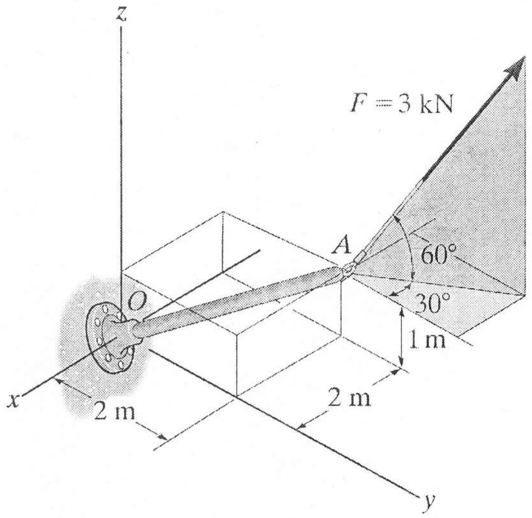
$$\vec{r}_{AO} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{m} \Rightarrow r_{AO} = \sqrt{52}\ \text{m} \;;\; r_{AB} = \sqrt{53}\ \text{m}$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\,\vec{u}_{AB} = F_{AB}\,\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = 400 \cdot \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 219{,}8 \\ 54{,}9 \\ -329{,}7 \end{pmatrix} \text{N}$$

$$\vec{u}_{AO} = \frac{\vec{r}_{AO}}{r_{AO}} = \frac{1}{\sqrt{52}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5547 \\ -0{,}8321 \end{pmatrix} \Rightarrow F_{AO} = \vec{F}_{AB} \cdot \vec{u}_{AO} = \begin{pmatrix} 219{,}8 \\ 54{,}9 \\ -329{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5547 \\ -0{,}8321 \end{pmatrix} = 243{,}8\ \text{N}$$

تمرین ۲-۲۹

مطلوب است تعیین مؤلفه‌های نیروی وارد بر تیری مطابق شکل به‌موازات و عمود بر محور تیر.



حل:

$$\vec{r}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$\vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; r_{OA} = 3\ \text{m} \;;\; \vec{u}_{OA} = \frac{\vec{r}_{OA}}{r_{OA}} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

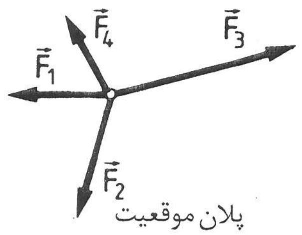
$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_F = 3 \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ \sin 30^\circ \\ \cos 60^\circ \cos 30^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 1{,}299 \\ 2{,}598 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$F_{OA_{\parallel}} = \vec{F} \cdot \vec{u}_{OA} = \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 1{,}299 \\ 2{,}598 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 2{,}232\ \text{kN} \Rightarrow \vec{F}_{OA_{\parallel}} = F_{OA_{\parallel}}\,\vec{u}_{OA} = 2{,}232 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}488 \\ 1{,}488 \\ 0{,}744 \end{pmatrix} \text{kN}$$

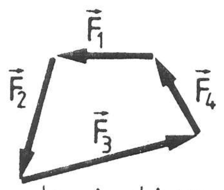
$$\vec{F}_{OA_{\perp}} = \vec{F} - \vec{F}_{OA_{\parallel}} = \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 1{,}299 \\ 2{,}598 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1{,}488 \\ 1{,}488 \\ 0{,}744 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}738 \\ -0{,}189 \\ -1{,}854 \end{pmatrix} \text{kN} \Rightarrow F_{OA_{\perp}} = \sqrt{0{,}738^2 + (-0{,}189)^2 + (-1{,}854)^2} = 2\ \text{kN}$$

۳ تعادل اجسام با مجموعه نیروهایی با نقطه اثر مشترک(نیروهای هم‌رَس)

۳-۱ تعادل



پلان موقعیت



چند ضلعی نیروها

یک جسم ساکن تحت اعمال چندین نیرو وقتی در تعادل است که وضعیت سکون خود را همچنان حفظ کند. به عبارت دیگر نیروهای اعمال شده به آن در تعادلند. شرایطی، که بایستی این نیروهای اعمالی برآورده نمایند را **شرایط تعادل** می نامند.

۳-۱-۱ شرط تعادل برای نیروهایی با نقطه اثر مشترک (نیروهای هم‌رَس)

نیروهایی با نقطه اثر مشترک وقتی در تعادلند، که برآیند آنها $\vec{R}$ صفر باشد، یعنی:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \Sigma \vec{F}_i = \vec{0}$$

این به این معنی است که در وضعیت تعادل، نیروها یک چند ضلعی بسته را می‌سازند. در این حال بایستی نیروها بدنبال هم قرار داده شوند.

چنانچه نیرو به مؤلفه‌های خود در راستای محورهای مختصات تجزیه شود، شرط تعادل به صورت زیر در می‌آید:

$$(\Sigma F_x)\ \vec{i} + (\Sigma F_y)\ \vec{j} + (\Sigma F_z)\ \vec{k} = \vec{0} \quad \equiv \quad \begin{pmatrix} \Sigma F_x \\ \Sigma F_y \\ \Sigma F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

این معادله بُرداری وقتی برقرار است که جمع مؤلفه‌ها در راستای هر محور مختصات صفر باشد. در این صورت شرط تعادل به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma F_z = 0}$$

فورموله کردن تعادل نیروها برای هر دو فُرم نوشتاری کاملاً هم‌ارزند. فُرم بُرداری در حل ترسیمی و فُرم اسکالر در حل محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

اگر نیروهای اعمال شده به یک جسم صلب شرایط زیر را برآورده نمایند، یعنی:

۱) به یک نقطه اثر کنند و یا راستاهای آنها (به دلیل آن‌که می‌توان آنها را بر روی راستاهای خود جابه‌جا نمود) یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند و

۲) برآیند نیروها $\vec{R}$ صفر باشد، یعنی $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0}$

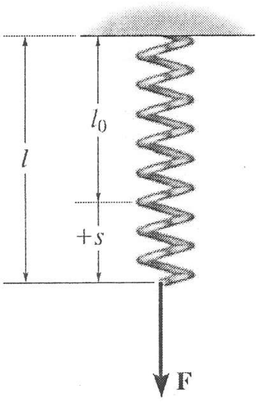
جسم در حالت سکون باقی خواهد ماند. در این حال باید کلیه نیروهای اعمال شده به جسم از جمله وزن، نیروهای تکیه‌گاهی و هادیها و غیره را در نظر گرفت.

شرایط تعادل برای حالتی که نیروهای اعمال شده به جسم یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند پیچیده‌تر است و در فصلهای بعدی مورد بررسی قرار خواهند گرفت

۲-۳ نمودار جسم آزاد (FBD)

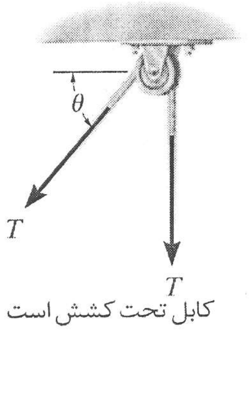
در حالتی‌که نیروها هم‌رَس بوده و یا به یک ذره اعمال شوند بایستی برای کاربرد معادله تعادل کلیه نیروهای معلوم و مجهول در نظر گرفته شوند. بهترین راه برای انجام این کار آنست که ذره و یا آن قسمت از جسم که نیروها به آن اعمال می‌شوند را به صورت مجزا و آزاد شده از محیط پیرامون آن در نظر بگیریم. ترسیمی که ذره و یا قسمتی از جسم با همه نیروهایی که بر آن اعمال می‌شوند نشان‌داده شده است را **نمودار جسم آزاد (FBD)** آن ذره و یا آن قسمت می‌گویند.

لازم به ذکر است که در مسائل تعادل نیروهای هم‌رَس غالباً با دو نوع اتصال روبرو هستیم، که بایستی به بررسی آن پرداخت: فنرها، کابلها و قرقره‌ها.



فنر تغییر طول یافته

فنرها: چنانچه یک فنر (یا طناب) الاستیک خطی با طول اولیه ℓ_0 برای نگه‌داشتن ذره استفاده شود، تغییر طول فنر $s=\ell-\ell_0$ با نیروی فنر متناسب است. ضریب سفتی یا ثابت تناسب (k) ثابت فنر و یا ضریب سفتی فنر نامیده می‌شود: $F = ks$

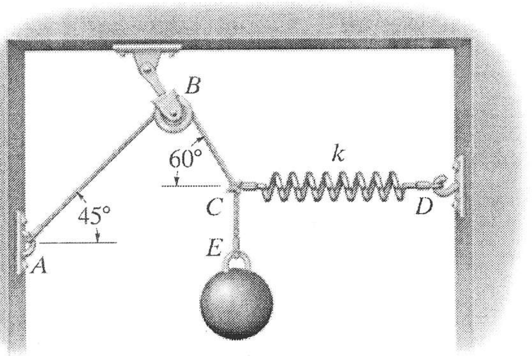


کابل تحت کشش است

کابل‌ها و قرقره‌ها: غالباً از وزن و تغییر طول کابل‌ها و طناب‌ها به استثنای مواردی که خلاف آن تصریح شده باشد صرفنظر می‌شود. به‌علاوه کابل‌ها و طناب‌ها را می‌توان فقط تحت کشش در آورد. در عین حال نیروی کشش کابلها و طناب‌ها فقط مماس بر امتداد آنها اثر می‌کنند. همچنین در بیشتر موارد به استثنای مواردی که اصطکاک قابل چشم‌پوشی نباشد در نیروی کشش کابل‌ها و طناب‌هایی که از روی قرقره‌ای عبور می‌کنند تغییری ایجاد نمی‌شود، زیرا باید کابل‌ها و طناب‌ها در تعادل باقی بمانند. در نتیجه برای هر زاویه θ مطابق شکل مقابل سراسر طول آنها در معرض نیروی کششی ثابت T قرار می‌گیرد.

مثال ۳-۱

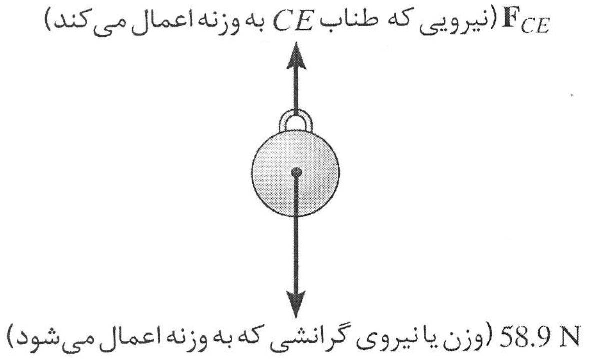
سیستمی مطابق شکل (a) موجود است، که در آن یک جسم کُروی به جرم 6kg، یک فنر و یک قرقره توسط طناب‌های ABC و CE به یکدیگر متصلند. نمودار جسم آزاد کُره، طناب CE و گره C را ترسیم کنید.



(a)

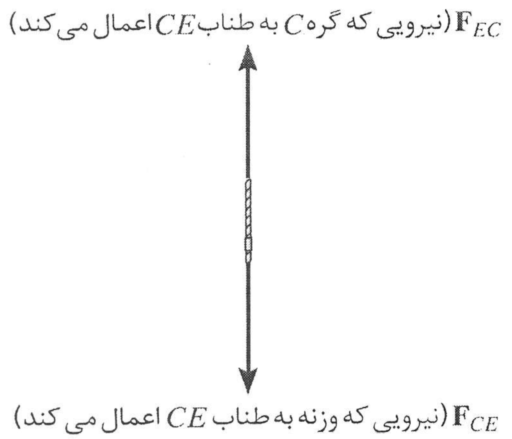
حل:

جسم کُروی: به جسم کُروی فقط نیروی وزن آن ($W = mg = 6\,kg \cdot 9{,}81\,m/s^2 = 58{,}9\,N$) و نیروی طناب CE اعمال می‌شود. نمودار جسم آزاد این کُره در شکل (b) نشان‌داده شده است.



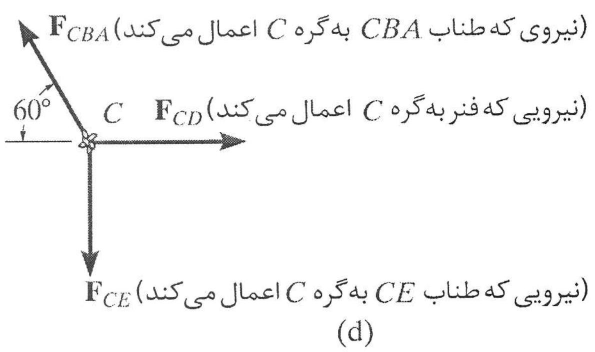
(b)

طناب CE : چنانچه طناب CE از محیط اطرافش آزاد شود، نمودار جسم آزاد آن از دو نیرو تشکیل می‌گردد. یکی نیرویی که جسم کُروی به طناب CE اعمال می‌کند و دیگری نیرویی که از طرف گره C به طناب اثر می‌کند. این نکته قابل توجه است که F_{EC} با نیروی F_{CE} ، که در شکل (b) مشخص شده برابر ولی در جهت مخالف آن است (قانون سوم نیوتن). به علاوه F_{CE} و F_{EC} هر دو طناب را می‌کشند و آن را تحت کشش نگه می‌دارند (c).



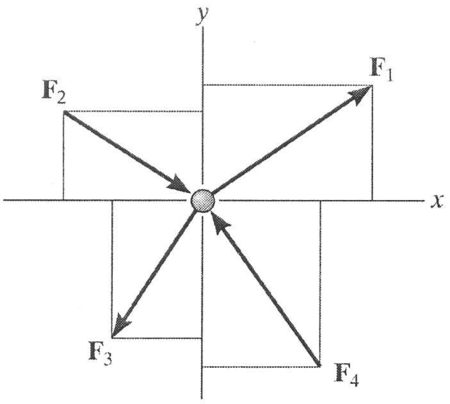
(c)

گره C : این گره در معرض سه نیرو قرار دارد، که توسط طناب‌های CBA ، CE و همچنین فنر CD ایجاد می‌شوند. در نمودار جسم آزاد گره C همه این نیروها مشخص گردیده‌اند (شکل d).



(d)

۳-۳ نیروهای صفحه‌ای (coplanar)



چنانچه نیروهایی صفحه‌ای و هم‌رَس مطابق شکل مقابل در صفحه x−y به یک ذره و یا یک جسم اعمال شوند، آن‌گاه می‌توان هر نیرو را به مؤلفه‌هایی در راستاهای x و y تجزیه نمود. برای ایجاد تعادل باید برآیند این نیروها صفر باشد:

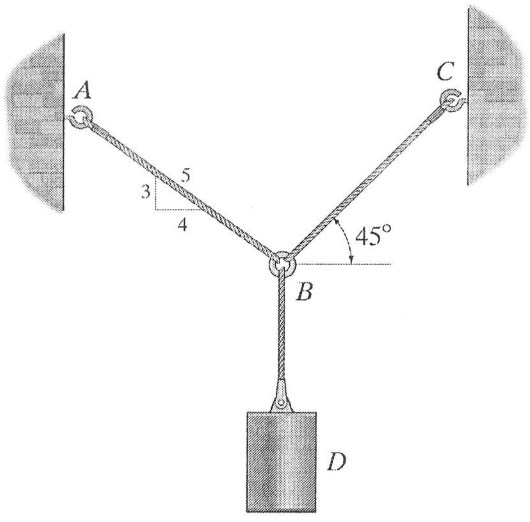
(یک معادله بُرداری) $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \Sigma F_{ix}\,\vec{i} + \Sigma F_{iy}\,\vec{j} = \vec{0}$

یک بُردار صفحه‌ای وقتی صفر است که هر دو مؤلفه x و y آن صفر باشند:

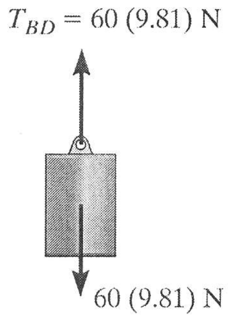
(دو معادله اسکالر) $\Sigma F_{ix} = 0 \quad ; \quad \Sigma F_{iy} = 0$

مثال ۳-۲

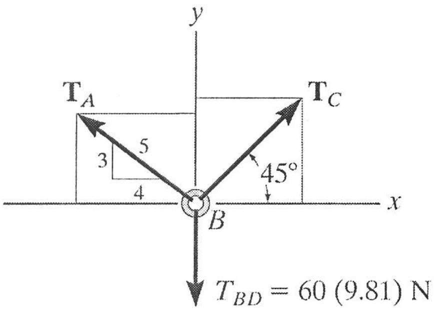
کشش ایجاد شده در کابلهای BA و BC برای نگه‌داشتن وزنه استوانه‌ای D به جرم 60 kg را مطابق شکل (a) بدست آورید.



(a)



(b)



(c)

حل

با توجه به نمودار جسم آزاد وزنه استوانه‌ای D و نوشتن شرایط تعادل برای آن، نیروی کشش در کابل BD بدست می‌آید :

$$T_{BD} - 60 \cdot 9{,}81 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BD} = 588{,}6 \text{ N}$$

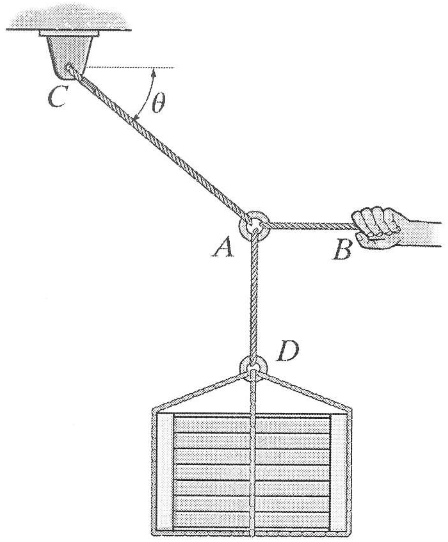
همچنین با توجه به نمودار جسم آزاد حلقه B مطابق شکل (c) و نوشتن شرایط تعادل برای آن نیروی کشش در کابلهای BA و BC بدست می‌آیند :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_{ix} = 0: \quad -(\frac{4}{5})T_A + T_C \cos 45^\circ = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad (\frac{3}{5})T_A + T_C \sin 45^\circ - T_{BD} = 0 \qquad (2)$$

با حل دو معادله دو مجهولی (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$T_A = 420 \text{ N}$ و $T_C = 476 \text{ N}$

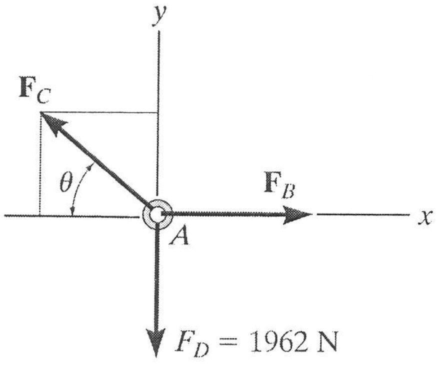


(a)

مثال ۳-۳

صندوقی به جرم 200 kg مطابق شکل (a) توسط طناب‌های AB و AC به حالت آویزان نگهداشته شده است. چنانچه حد تحمل هر طناب قبل از گسیختن 10 kN باشد و طناب AB نیز همواره به حالت افقی بماند، مطلوب است تعیین کوچکترین زاویه θ، که صندوق را می‌توان طبق آن آویزان نمود، قبل از آن‌که یکی از طناب‌ها پاره شود.

حل:



(b)

با توجه به نمودار جسم آزاد حلقه A در آستانه پاره شدن یک از طناب‌ها، سه نیرو به این حلقه مطابق شکل (b) اثر می‌کنند. اندازه نیروی $\vec{F}_D$ با وزن صندوق برابر است، یعنی:

$$F_D = 200 \cdot 9{,}81\ \text{N} = 1962\ \text{N} < 10\ \text{kN}$$

با کاربرد معادلات تعادل در امتداد محورهای x و y :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_{ix} = 0: \quad -F_C \cos\theta + F_B = 0 \ \Rightarrow\ F_C = \frac{F_B}{\cos\theta} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad F_C \sin\theta - 1962\ \text{N} = 0 \qquad (2)$$

از معادله (1) نتیجه می‌شود که F_C همواره از F_B بزرگتر است، زیرا $\cos\theta \le 1$ می‌باشد. در نتیجه طناب AC قبل از طناب AB به حد گسیختگی 10 kN خواهد رسید. بنابراین با قرار دادن $F_C = 10\ \text{kN} = 10 \cdot 10^3\ \text{N}$ در معادله (2) نتیجه می‌شود:

$$[10 \cdot 10^3\ \text{N}]\sin\theta - 1962\ \text{N} = 0$$

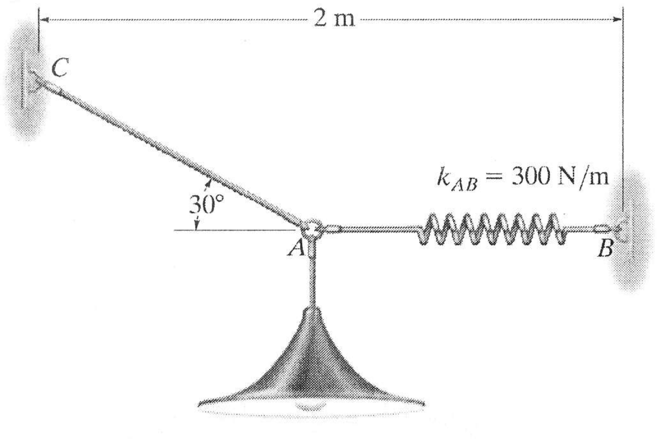
$$\theta = \sin^{-1}(0{,}1962) = 11{,}31^\circ$$

نیرویی که در طناب AB ایجاد می‌شود، از قرار دادن مقادیر θ و F_C در معادله (1) بدست می‌آید :

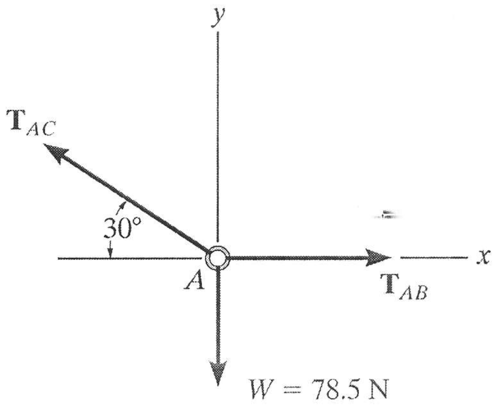
$$10 \cdot 10^3\ \text{N} = \frac{F_B}{\cos 11{,}31^\circ} \quad \Rightarrow \quad F_B = 9{,}81\ \text{kN}$$

مثال ۳-۴

مطلوب است تعیین طول لازم برای طناب AC شکل(a)، به‌گونه‌ای که چراغی به جرم 8 kg را بتوان در وضعیتی مطابق شکل آویزان نمود. طول اولیه فنر برابر است با: $\ell'_{AB} = 0{,}4$ m و ضریب سفتی فنر عبارت است از: $k_{AB} = 300$ N/m



(a)



(b)

حل:

با معلوم بودن نیروی فنر AB می‌توان به‌کمک رابطه $F = ks$ تغییر طول فنر را بدست آورده و سپس با توجه به ابعاد هندسی مجموعه، طول لازم برای طناب AC را محاسبه نمود.

وزن چراغ برابر $W = 8 \cdot 9{,}81 = 78{,}5$ N است و به این ترتیب با توجه به نمودار جسم آزاد حلقه A، سه نیرو به این حلقه مطابق شکل (b) اثر می‌کنند.

با کاربرد معادلات تعادل در امتداد محورهای x و y :

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_{ix} = 0: \quad T_{AB} - T_{AC}\cos 30^\circ = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad T_{AC}\sin 30^\circ - 78{,}5 \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

و حل این معادله‌ها نتیجه می‌شود:

$$T_{AC} = 157{,}0 \text{ N} \quad ; \quad T_{AB} = 135{,}9 \text{ N}$$

به این ترتیب تغییر طول فنر را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$T_{AB} = k_{AB}\, s_{AB} \; ; \quad 135{,}9 \text{ N} = 300 \text{ N/m} \cdot s_{AB} \;\Rightarrow\; s_{AB} = 0{,}453 \text{ m}$$

بنابراین طول کشیده شده فنر برابر است با:

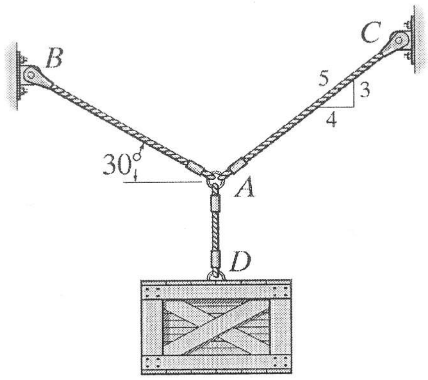
$$\ell_{AB} = \ell'_{AB} + s_{AB} = 0{,}4 \text{ m} + 0{,}453 \text{ m} = 0{,}853 \text{ m}$$

فاصله افقی از C تا B مطابق شکل (a) ایجاب می‌کند که:

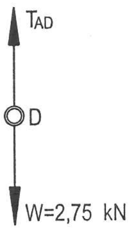
$$2 \text{ m} = \ell_{AC}\cos 30^\circ + 0{,}853 \text{ m} \;\Rightarrow\; \ell_{AC} = 1{,}32 \text{ m}$$

تمرین ۳-۱

وزن جعبه‌ای مطابق شکل 2,75 kN است. مطلوب است تعیین نیرو در هر یک از کابل‌ها.



حل

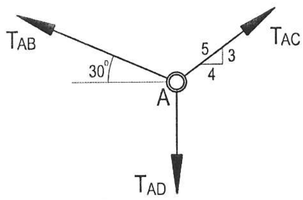


$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0:$

$T_{AD} - 2,75\ kN = 0$

$\Rightarrow$

$\boxed{T_{AD} = 2,75\ kN}$



$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_{ix} = 0: -T_{AB}\cos 30^\circ + \frac{4}{5}\cdot T_{AC} = 0$

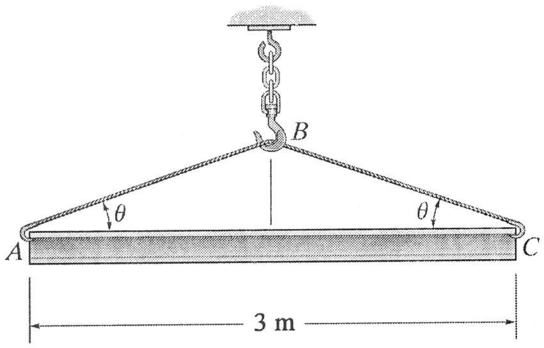
$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: T_{AB}\sin 30^\circ + \frac{3}{5}\cdot T_{AC} - T_{AD} = 0$

$\Rightarrow$

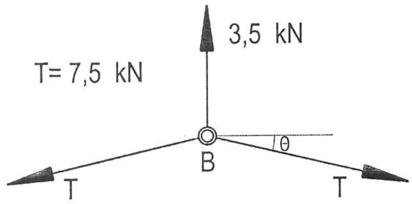
$\boxed{T_{AC} = 2,95\ kN}$ $\boxed{T_{AB} = 2,39\ kN}$

تمرین ۳-۲

وزن تیری مطابق شکل 3,5 kN است. چنانچه حداکثر نیرویی که کابل می‌تواند تحمل کند 7,5 kN باشد، مطلوب است تعیین کوتاهترین کابل ABC که می‌توان برای بلند کردن تیر به‌کار برد.



حل

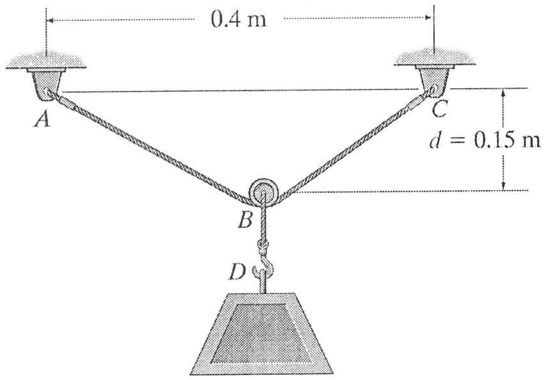


$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: -2\cdot 7,5\cdot \sin\theta_{min} + 3,5 = 0 \Rightarrow \theta_{min} = 13,5^\circ$

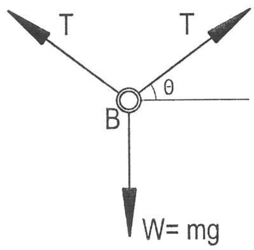
$\ell_{ABC,min} = 2\left(\frac{1,5}{\cos\theta_{min}}\right) \Rightarrow \boxed{\ell_{ABC,min} = 3,09\ m}$

تمرین ۳-۲

وزنه‌ای به جرم 5 kg مطابق شکل از قرقره B آویزان شده و به اندازه d = 0,15 m پایین آمده است. مطلوب است تعیین نیرو در طناب ABC. از اندازه قرقره می‌توان چشم‌پوشی نمود.



حل

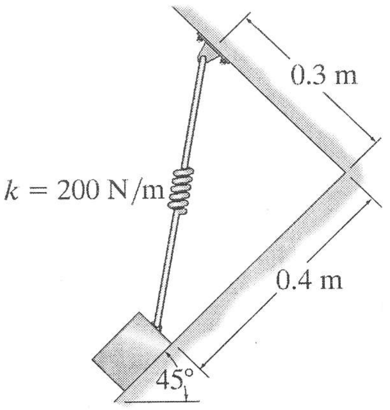


$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0,15}{0,2}\right) = 36,87^\circ \quad ; \quad W = mg = 5\cdot 9,81 = 49,05\ N$

$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad 2T\sin\theta - 49,05 = 0$

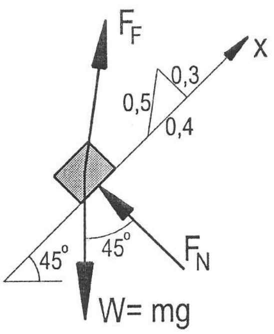
$\Rightarrow \boxed{T = 40,875\ N}$

تمرین ۳-۴



جرم قطعه‌ای مطابق شکل 5 kg است. این قطعه به فنری با ضریب سفتی $k=200\ N/m$ متصل است و بر روی سطح صافی در حال سکون قرار دارد. طول اولیه فنر را بدست آورید.

حل



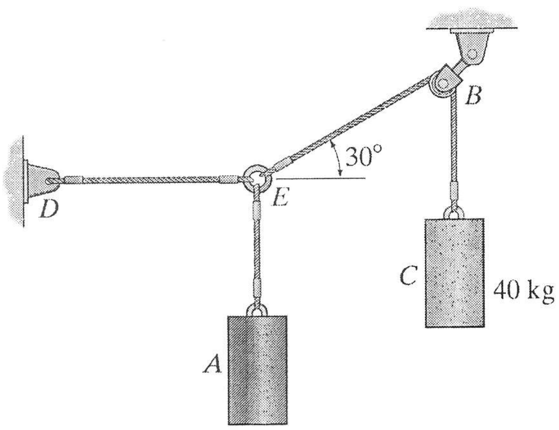
$$W = mg = 5kg \cdot 9{,}81 = 49{,}05\ N$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_{ix} = 0: \quad -49{,}05 \cdot \sin 45° + F_F \cdot \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0 \Rightarrow F_F = 43{,}35\ N$$

$$F_F = k(\ell - \ell_0) \quad \Rightarrow \quad 43{,}35 = 200(0{,}5 - \ell_0)$$

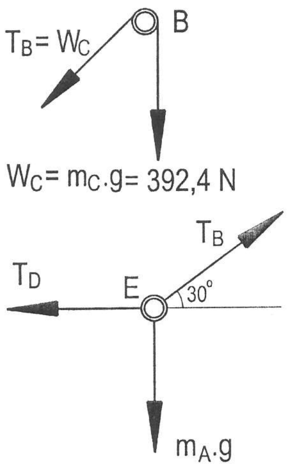
$$\boxed{\ell_0 = 0{,}28325\ m}$$

تمرین ۳-۵



اگر جرم استوانه C برابر 40 kg باشد، مطلوب است تعیین جرم استوانه A، به‌گونه‌ای که مجموعه در وضعیتی مطابق شکل باقی بماند.

حل



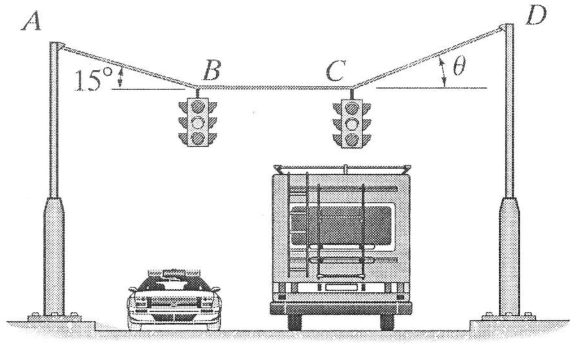
ابتدا نیروی T_B از نمودار جسم آزاد قرقره B بدست می‌آید:

$$T_B = m_C \cdot g = 392{,}4\ N$$

سپس جرم استوانه A از تعادل جسم آزاد حلقه E تعیین می‌گردد:

$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad T_B \sin 30° - m_A \cdot g = 0$$

$$m_A = \frac{T_B \sin 30°}{9{,}81} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_A = 20\ kg}$$

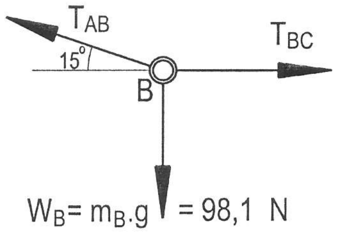


تمرین ۳-۶

مطلوب است کشش لازم در کابل‌های AB، BC و CD برای نگه داشتن چراغ‌های راهنمایی B و C به جرم‌های 10 kg و 15 kg در وضعیتی مطابق شکل و همچنین زاویه θ.

حل

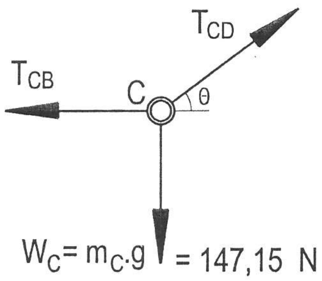
با توجه به شرایط تعادل در اتصال B :



$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad T_{AB}\sin 15^\circ - 98,1 = 0 \Rightarrow \boxed{T_{AB} = 379,03 \text{ N}}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_{ix} = 0: \quad T_{BC} - T_{AB}\cos 15^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{T_{BC} = T_{CB} = 366 \text{ N}}$$

همچنین با توجه به شرایط تعادل در اتصال C :



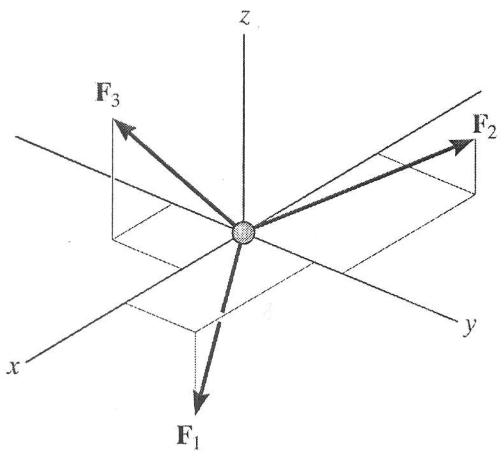
$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad T_{CD}\sin\theta - 147,15 = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_{ix} = 0: \quad T_{CD}\cos\theta - T_{CB} = 0$$

$$\tan\theta = \frac{147,15}{366} \Rightarrow \boxed{\theta = 21,95^\circ}$$

$$T_{CD} = \frac{147,15}{\sin\theta} \Rightarrow \boxed{T_{CD} = 395 \text{ N}}$$

۴-۳ مجموعه نیروهای سه بُعدی



چنانچه نیروهایی سه بُعدی و هم‌رَس مطابق شکل مقابل به یک ذره و یا یک جسم اعمال شوند، آن‌گاه می‌توان هر نیرو را به مؤلفه‌هایی در راستاهای x، yو z تجزیه نمود. برای ایجاد تعادل باید برآیند این نیروها صفر باشد:

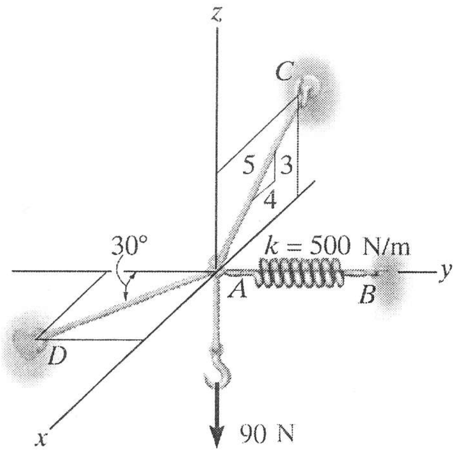
(یک معادله بُرداری) $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \Sigma F_{ix}\,\vec{i} + \Sigma F_{iy}\,\vec{j} + \Sigma F_{iz}\,\vec{k} = \vec{0}$

یک بُردار سه بُعدی وقتی صفر است که هر سه مؤلفه x ، y و z آن صفر باشند:

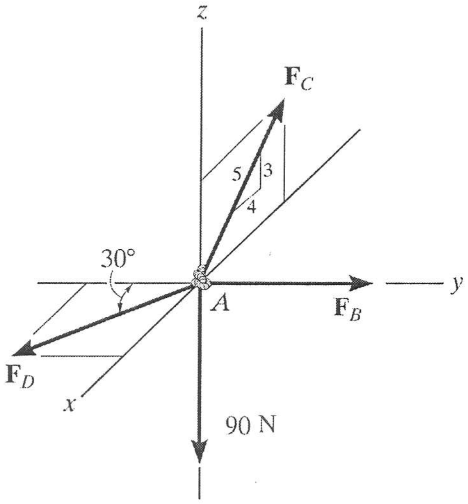
(سه معادله اسکالر) $\Sigma F_{ix} = 0 \quad ; \quad \Sigma F_{iy} = 0 \quad ; \quad \Sigma F_{iz} = 0$

مثال ۳-۵

باری به وزن 90 N مطابق شکل (a) توسط دو کابل AC و AD و نیز فنر AB با سفتی k=500 N/m به حالت آویزان نگهداشته شده است. مطلوب است تعیین نیروی کابل‌ها و میزان کشیدگی فنر در وضعیت تعادل. کابل AD در صفحه x – y و کابل AC در صفحه x – z قرار دارند.



(a)



(b)

حل:

میزان کشیدگی فنر پس از تعیین نیروی فنر بدست می‌آید.

اتصال A را برای تحلیل تعادل انتخاب می‌کنیم، زیرا کلیه نیروها در این نقطه هم‌رَس می‌باشند. نمودار جسم آزاد این نقطه در شکل (b) نشان داده شده است. برای نوشتن معادله تعادل بایستی ابتدا نیروها را به صورت دکارتی بیان نمود. فرض می‌شود نیروهای اعمال شده به نقطه A کششی‌اند :

$$\vec{F}_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -90 \end{pmatrix} ; \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{F}_C = \begin{pmatrix} -(4/5)F_C \\ 0 \\ (3/5)F_C \end{pmatrix} ; \vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \sin 30^\circ \\ -F_D \cos 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$$

معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_W + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(4/5)F_C \\ 0 \\ (3/5)F_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_D \sin 30^\circ \\ -F_D \cos 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

معادله بُرداری فوق با سه معادله اسکالر در راستای سه محور مختصات هم ارز است:

$$\Sigma F_{ix} = 0: \quad -(4/5)F_C + F_D \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0: \quad F_B - F_D \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: \quad -90 + (3/5)F_C = 0 \quad (3)$$

با حل معادله (3) برای یافتن F_C ، سپس معادله (1) برای یافتن F_D و بالاخره معادله (2) برای یافتن F_B نتیجه می‌شود:

$$F_C = 150 \text{ N}$$

$$F_D = 240 \text{ N}$$

$$F_B = 207{,}8 \text{ N}$$

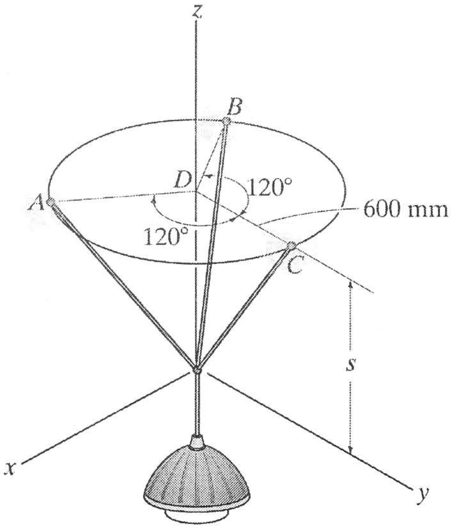
بنابراین میزان کشیدگی فنر برابر است با:

$$F_B = k\, s_{AB} \Rightarrow 207{,}8 \text{ N} = 500 (\text{N/m}) \cdot s_{AB} \Rightarrow s_{AB} = 0{,}416 \text{ m}$$

چون نتایج بدست آمده برای نیروها در هر سه کابل مثبت است، همه کابلها تحت کشش‌اند، یعنی چنان‌که انتظار می‌رفت به نقطه A نیروهای کششی اعمال می‌شود، شکل (b).

مثال ۳-۶

چراغی به جرم 10 kg مطابق شکل (a) از سه طناب به طول‌های مساوی آویزان است. مطلوب است تعیین کوچکترین فاصله عمودی s از سقف، هرگاه قرار باشد نیرو در هیچ یک از طناب‌ها از 50 N بیش‌تر نشود.



(a)

حل:

در نمودار جسم آزاد شکل (b) با توجه به تقارن ، فاصله‌های :

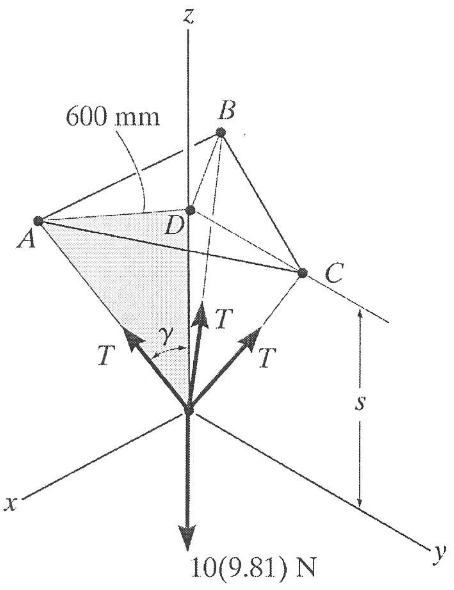
$$AD = DB = DC = 600 \text{ mm}$$

هستند. از معادله‌های $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ نتیجه می‌شود که کشش T در همه طناب‌ها برابر است. همچنین زاویه بین هر طناب و محور z – برابر γ است.

با کاربرد معادله تعادل در امتداد محور z – و نیز با قرار دادن حد کشش T= 50 N نتیجه می‌شود:

$$\Sigma F_{iz} = 0: \quad 3\left[(50\text{ N})\cos\gamma\right] - 10(9{,}81)\text{ N} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{98{,}1}{150} = 49{,}16°$$



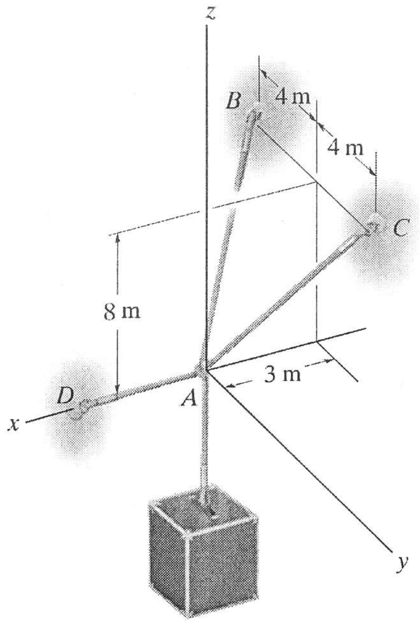
(b)

از مثلث هاشور خورده در نتیجه می‌شود:

$$\tan 49{,}16° = \frac{600}{s} \quad \Rightarrow \quad s = 519 \text{ mm}$$

مثال ۳-۷

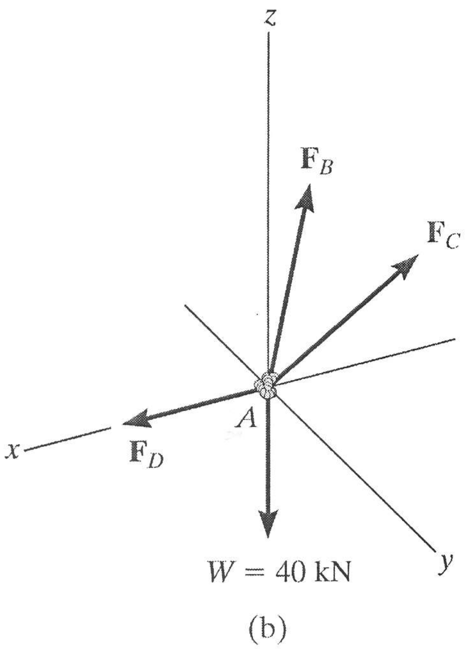
مطلوب است تعیین کشش در هر کابل، که برای نگه داشتن صندوقی به وزن 40 kN مطابق شکل (a) مورد استفاده قرار می‌گیرد.



(a)

حل:

اتصال A را برای تحلیل تعادل انتخاب می‌کنیم، زیرا کلیه نیروها (سه نیروی مجهول و یک نیروی معلوم) در این نقطه هم‌رَس می‌باشند. نمودار جسم آزاد این نقطه در شکل (b) نشان داده شده است. برای نوشتن معادله تعادل بایستی ابتدا نیروها را به صورت دکارتی بیان نمود و فرض می‌شود نیروهای اعمال شده به نقطه A کششی‌اند :



(b)

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{m} \Rightarrow \vec{F}_B = F_B \left[\frac{-3\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}} \right] = F_B \begin{pmatrix} -0{,}318 \\ -0{,}424 \\ 0{,}848 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_C = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{m} \Rightarrow \vec{F}_C = F_C \left[\frac{-3\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}} \right] = F_C \begin{pmatrix} -0{,}318 \\ 0{,}424 \\ 0{,}848 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_D = F_D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{F}_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix} \text{kN}$$

معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_W + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}318F_B \\ -0{,}424F_B \\ 0{,}848F_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}318F_C \\ 0{,}424F_C \\ 0{,}848F_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

معادله برداری فوق با سه معادله اسکالر در راستای سه محور مختصات هم ارز است:

$$\Sigma F_{ix} = 0: \qquad -0{,}318F_B - 0{,}318F_C + F_D = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0: \qquad -0{,}424F_B + 0{,}424F_C = 0 \qquad (2)$$

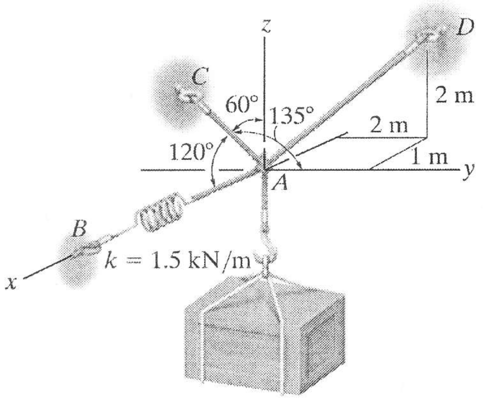
$$\Sigma F_{iz} = 0: \qquad -40 + 0{,}848F_B + 0{,}848F_C = 0 \qquad (3)$$

با توجه به معادله (2) نتیجه می‌شود $F_B = F_C$ است. سپس از معادله (3) برای یافتن F_B و F_C استفاده می‌شود و در پایان F_D از معادله (1) بدست می‌آید:

$$F_B = F_C = 23 \text{ kN} \quad \text{و} \quad F_D = 15 \text{ kN}$$

مثال ۳-۸

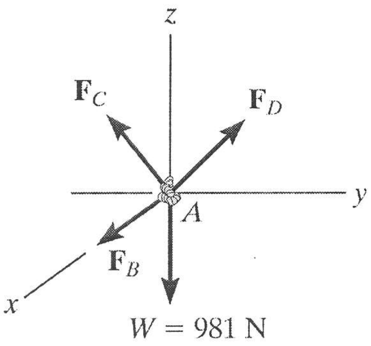
مطلوب است تعیین کشش در هر کابل، که برای نگه داشتن صندوقی به جرم 100 kg مطابق شکل (a) مورد استفاده قرار می‌گیرد.



(a)

حل:

اتصال A را برای تحلیل تعادل انتخاب می‌کنیم، زیرا کلیه نیروها در این نقطه هم‌رَس می‌باشند. نمودار جسم آزاد این نقطه در شکل (b) نشان داده شده است. برای نوشتن معادله تعادل بایستی ابتدا نیروها را به صورت دکارتی بیان نمود. وزن صندوق برابر است با: $W = 100\ \text{kg} \cdot 9{,}81 = 981\ \text{N}$



(b)

$$F_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -981 \end{pmatrix} N \quad ; \quad \vec{F}_B = F_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_C = F_C \begin{pmatrix} \cos 120° \\ \cos 135° \\ \cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5F_C \\ 0{,}707F_C \\ 0{,}5F_C \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} m \Rightarrow \vec{F}_D = F_D \left[\frac{-1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} \right] = \begin{pmatrix} -0{,}333F_D \\ 0{,}667F_D \\ 0{,}667F_D \end{pmatrix}$$

معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_W + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -981 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5F_C \\ 0{,}707F_C \\ 0{,}5F_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}333F_D \\ 0{,}667F_D \\ 0{,}667F_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

معادله بُرداری فوق با سه معادله اسکالر در راستای سه محور مختصات هم ارز است:

$$\Sigma F_{ix} = 0: \qquad F_B - 0{,}5F_C - 0{,}333F_D = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0: \qquad 0{,}707F_C + 0{,}667F_D = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: \qquad -981 + 0{,}5F_C + 0{,}667F_D = 0 \qquad (3)$$

با حل دو معادله دو مجهولی (2) و (3) F_C و F_D تعیین می‌شوند و سپس با قرار دادن این دو در معادله (1) F_B بدست می‌آید:

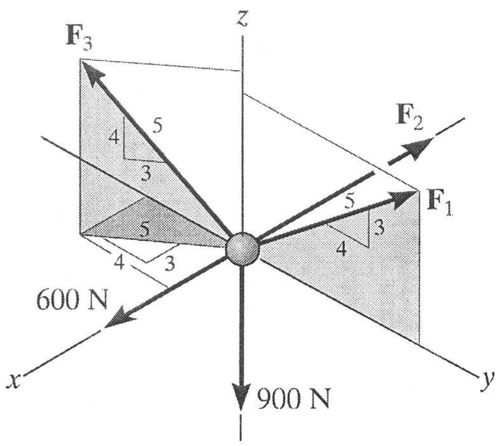
$F_C = 813\ \text{N}$

$F_D = 862\ \text{N}$

$F_B = 694\ \text{N}$

تمرین ۳-۷

مطلوب است تعیین اندازه نیروهای $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ به‌گونه‌ای که ذره در تعادل بماند.



حل:

کلیه نیروهای وارد بر ذره هم‌رَس می‌باشند. نمودار نشان داده شده نمودارجسم آزاد این ذره است. برای نوشتن معادله تعادل بایستی ابتدا نیروها را به صورت دکارتی بیان نمود:

$$\vec{F}_1=\begin{pmatrix}0\\(4/5)F_1\\(3/5)F_1\end{pmatrix}\quad;\quad \vec{F}_2=\begin{pmatrix}-F_2\\0\\0\end{pmatrix}\quad;\quad \vec{F}_3=\begin{pmatrix}(3/5)(3/5)F_3\\-(3/5)(4/5)F_3\\(4/5)F_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_4=\begin{pmatrix}600\\0\\0\end{pmatrix}N\quad;\quad \vec{F}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\-900\end{pmatrix}N$$

معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma\vec{F}_i=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5=\vec{0}$

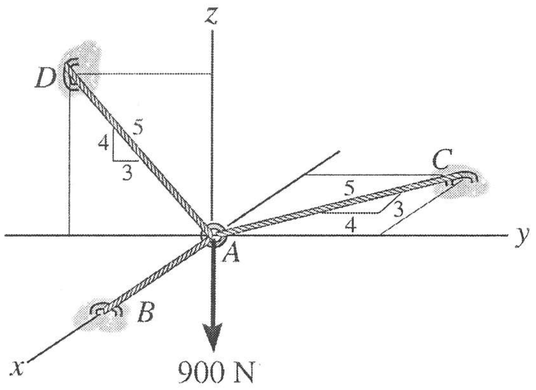
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\(4/5)F_1\\(3/5)F_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-F_2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(3/5)(3/5)F_3\\-(3/5)(4/5)F_3\\(4/5)F_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}600\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-900\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

از معادله بُرداری فوق سه معادله مستقل اسکالر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{ix}=0:&\quad -F_2+\frac{9}{25}F_3+600=0\\
\Sigma F_{iy}=0:&\quad \frac{4}{5}F_1-\frac{12}{25}F_3=0\\
\Sigma F_{iz}=0:&\quad \frac{3}{5}F_1+\frac{4}{5}F_3-900=0
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\boxed{\begin{aligned}F_1&=465{,}517\ N\\ F_2&=879{,}310\ N\\ F_3&=775{,}862\ N\end{aligned}}$$

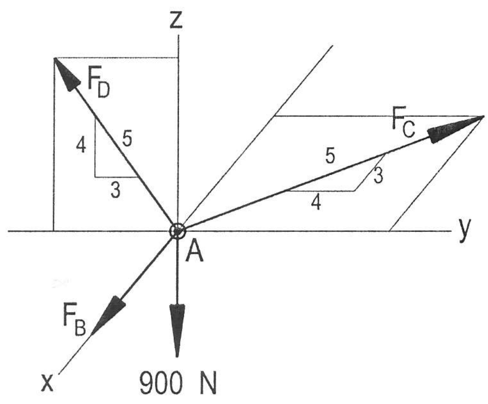
تمرین ۳-۸

مطلوب است تعیین اندازه نیروهای کششی ایجاد شده در کابل‌های AB ، AC و AD.



حل:

با توجه به نمودار جسم آزاد حلقه A نیروها به صورت بُردار دکارتی بیان می‌گردند:



$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{F}_C = \begin{pmatrix} -(3/5)F_C \\ (4/5)F_C \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{F}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ -(3/5)F_D \\ (4/5)F_D \end{pmatrix} ; \vec{F}_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -900 \end{pmatrix} N$$

معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_W = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(3/5)F_C \\ (4/5)F_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(3/5)F_D \\ (4/5)F_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0: \quad F_B - \frac{3}{5}F_C = 0$$

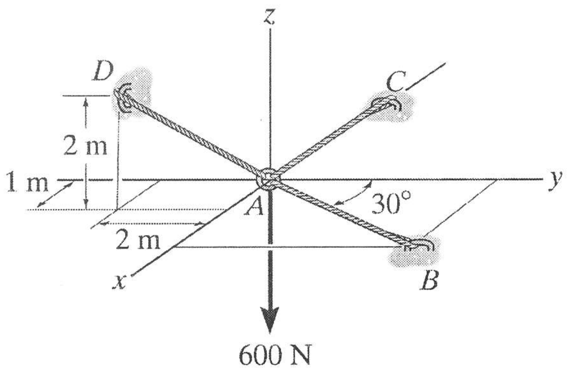
$$\Sigma F_{iy} = 0: \quad \frac{4}{5}F_C - \frac{3}{5}F_D = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Sigma F_{iz} = 0: \quad \frac{4}{5}F_D - 900 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_D &= 1125 \text{ N} \\ F_C &= 843{,}75 \text{ N} \\ F_B &= 506{,}25 \text{ N} \end{aligned}}$$

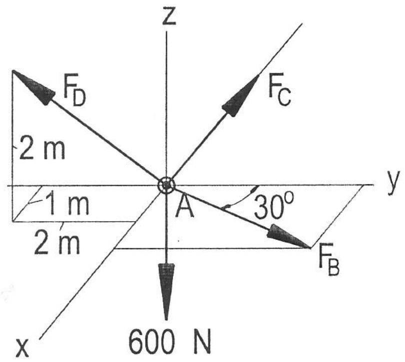
تمرین ۳-۹

مطلوب است تعیین اندازه نیروهای کششی ایجاد شده در کابل‌های AB ، AC و AD.



حل:

با توجه به نمودار جسم آزاد حلقه A نیروها به صورت بُردار دکارتی بیان می‌گردند:



$$\vec{r}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} m \Rightarrow \vec{F}_D = F_D\,\vec{u}_D = F_D \frac{\vec{r}_D}{r_D} = F_D \left[\frac{1\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} \right] = \begin{pmatrix} (1/3)F_D \\ -(2/3)F_D \\ (2/3)F_D \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} F_B \sin 30^\circ \\ F_B \cos 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{F}_C = \begin{pmatrix} -F_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{F}_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix} N$$

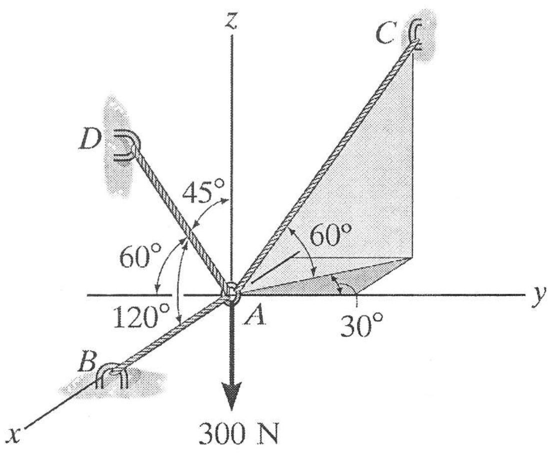
معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_W = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} F_B \sin 30^\circ \\ F_B \cos 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1/3)F_D \\ -(2/3)F_D \\ (2/3)F_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_{ix} = 0: &\quad F_B \sin 30^\circ - F_C + \frac{1}{3} F_D = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0: &\quad F_B \cos 30^\circ - \frac{2}{3} F_D = 0 \\ \Sigma F_{iz} = 0: &\quad \frac{2}{3} F_D - 600 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F_D &= 900\ N \\ F_B &= 692{,}82\ N \\ F_C &= 646{,}41\ N \end{aligned}}$$

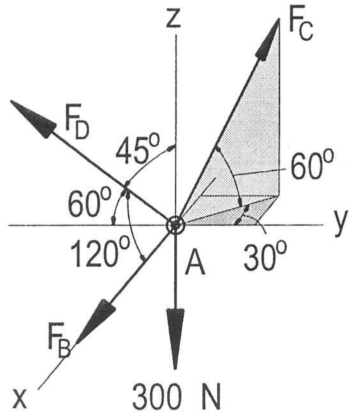
تمرین ۳-۱۰

مطلوب است تعیین اندازه نیروهای کششی ایجاد شده در کابل‌های AB ، AC و AD.



حل:

با توجه به نمودار جسم آزاد حلقه A نیروها به صورت بُردار دکارتی بیان می‌گردند:



$$\alpha_D = 120^\circ \;;\; \beta_D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \;;\; \gamma_D = 45^\circ$$

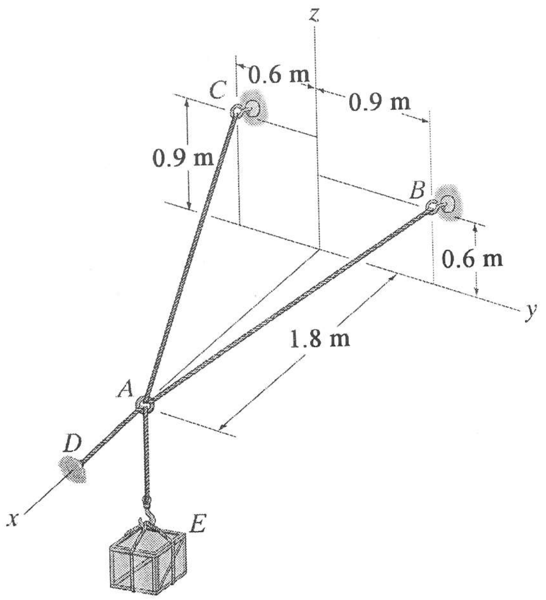
$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; \vec{F}_C = \begin{pmatrix} -F_C\cos 60^\circ \sin 30^\circ \\ F_C \cos 60^\circ \cos 30^\circ \\ F_C \sin 60^\circ \end{pmatrix} \;;\; \vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \cos 120^\circ \\ F_D \cos 120^\circ \\ F_D \cos 45^\circ \end{pmatrix} \;;\; \vec{F}_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \end{pmatrix} N$$

معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_W = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_C\cos 60^\circ \sin 30^\circ \\ F_C \cos 60^\circ \cos 30^\circ \\ F_C \sin 60^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_D \cos 120^\circ \\ F_D \cos 120^\circ \\ F_D \cos 45^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_{ix} = 0: &\quad F_B - F_C \cos 60^\circ \sin 30^\circ + F_D \cos 120^\circ = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0: &\quad F_C \cos 60^\circ \cos 30^\circ + F_D \cos 120^\circ = 0 \\ \Sigma F_{iz} = 0: &\quad F_C \sin 60^\circ + F_D \cos 45^\circ - 300 = 0 \end{aligned} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{aligned} F_C &= 202{,}9\ N \\ F_D &= 175{,}7\ N \\ F_B &= 138{,}6\ N \end{aligned}}$$

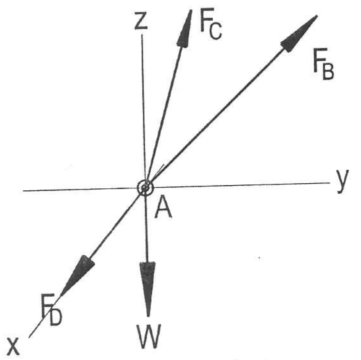
تمرین ۳-۱۱



صندوقی به جرم 75 kg با کابل‌های AB ، AC و AD نگه داشته می‌شود. مطلوب است تعیین کشش ایجاد شده در این کابل‌ها .

حل:

با توجه به نمودار جسم آزاد حلقه A نیروها به صورت بُردار دکارتی بیان می‌گردند:



$$\vec{r}_B=\begin{pmatrix}0\\0{,}9\\0{,}6\end{pmatrix}m\ ;\ \vec{r}_A=\begin{pmatrix}1{,}8\\0\\0\end{pmatrix}m\ ;\ \vec{r}_{AB}=\begin{pmatrix}-1{,}8\\0{,}9\\0{,}6\end{pmatrix}m \Rightarrow \vec{F}_B=F_B\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}=F_B\left[\frac{-1{,}8\vec{i}+0{,}9\vec{j}+0{,}6\vec{k}}{\sqrt{(-1{,}8)^2+(0{,}9)^2+(0{,}6)^2}}\right]=\begin{pmatrix}-0{,}857F_B\\0{,}428F_B\\0{,}286F_B\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_C=\begin{pmatrix}0\\-0{,}6\\0{,}9\end{pmatrix}m\ ;\ \vec{r}_A=\begin{pmatrix}1{,}8\\0\\0\end{pmatrix}m\ ;\ \vec{r}_{AC}=\begin{pmatrix}-1{,}8\\-0{,}6\\0{,}9\end{pmatrix}m \Rightarrow \vec{F}_C=F_C\frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}}=F_C\left[\frac{-1{,}8\vec{i}-0{,}6\vec{j}+0{,}9\vec{k}}{\sqrt{(-1{,}8)^2+(-0{,}6)^2+(0{,}9)^2}}\right]=\begin{pmatrix}-0{,}857F_C\\-0{,}286F_C\\0{,}428F_C\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_D=\begin{pmatrix}F_D\\0\\0\end{pmatrix}\quad;\quad \vec{F}_W=\begin{pmatrix}0\\0\\-75\cdot 9{,}81\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}0\\0\\-735{,}75\end{pmatrix}N$$

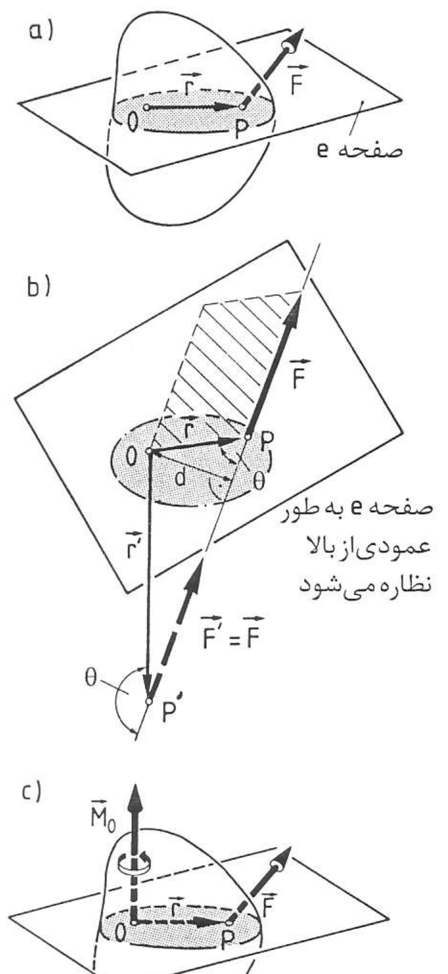
معادله تعادل به صورت بُرداری: $\Sigma\vec{F}_i=\vec{0} \Rightarrow \vec{F}_B+\vec{F}_C+\vec{F}_D+\vec{F}_W=\vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-0{,}857F_B\\0{,}428F_B\\0{,}286F_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0{,}857F_C\\-0{,}286F_C\\0{,}428F_C\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_D\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-375{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{ix}=0:&\quad -0{,}857F_B-0{,}857F_C+F_D=0\\ \Sigma F_{iy}=0:&\quad 0{,}428F_B-0{,}286F_C=0\\ \Sigma F_{iz}=0:&\quad 0{,}286F_B+0{,}428F_C-375{,}75=0\end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}F_B&=792{,}3\ N\\ F_C&=1188{,}5\ N\\ F_D&=1697{,}9\ N\end{aligned}}$$

۴ گروههای عمومی نیرو

۱-۴ گشتاور یک نیرو حول یک نقطه



چنانچه نیرویی مانند $\vec{F}$ به یک جسم صلب مطابق شکل (a اثر کند، این نیرو در هر نقطه‌ای از جسم که بر راستای $\vec{F}$ قرار ندارد یک میل به چرخش ایجاد می‌کند. برای درک تأثیر این نیرو نقطه‌ای از جسم مانند O را به صورت یک تکیه‌گاه مفصلی در نظر می‌گیریم. حال با توجه به تجربه می دانیم که تأثیر نیروی $\vec{F}$ به موقعیت آن نسبت به نقطه O بستگی دارد. مثلاً اگر راستای $\vec{F}$ از نقطه O بگذرد، جسم در حالت ساکن خود باقی خواهد ماند. اما اگر راستای نیروی $\vec{F}$ از نقطه O نگذرد، جسم خواهد چرخید. از طرف دیگر می دانیم که تأثیر نیروی $\vec{F}$ بر روی جسم صلب مورد نظر به راستای آن بستگی ندارد، یعنی $\vec{F}$ در نقطه P با بُردار مکان $\vec{r}$ در شکل (b همان تأثیر را دارد که نقطه P′ با بُردار مکان $\vec{r}'$ می‌گذارد. مهم بازوی گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول آن نقطه است:

$$\boxed{M_O = Fd}$$

همان‌طور که از شکل (b استنباط می‌شود، می‌توان به‌جای d از بُردار مکان $\vec{r}$ از نقطه O به هر نقطه دلخواه از راستای $\vec{F}$ استفاده نمود، زیرا $d = r\sin\theta$ بوده و θ زاویه بین $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است، به‌گونه‌ای که از $\vec{r}$ کوتاهترین مسیر را در جهت $\vec{F}$ طی کند، یعنی:

$$M_O = Fd = rF\sin\theta$$

این عبارت با مقدار حاصلضرب خارجی $\vec{r} \times \vec{F}$ برابر بوده و به عنوان گشتاور یا لنگر نیروی $\vec{F}$ نسبت به یک نقطه O، یعنی بُردار زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

در شکل (c بُردار $\vec{M}_O$ نشان داده شده است.

امتداد و جهت بردار گشتاور از قاعده دست راست در ضرب خارجی دو بُردار بدست می‌آید (شکل (d). بنابراین با لغزاندن بُردار $\vec{r}$ به وضعیت خطچین و چرخاندن انگشتان دست راست از $\vec{r}$ به طرف $\vec{F}$ به‌گونه‌ای که نقطه O در طرف کف دست باشد، شست ما عمود بر صفحه گسترده شده از $\vec{r}$ و $\vec{F}$ امتداد و جهت $\vec{M}_O$ را نشان می‌دهد.

گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه O به نقطه O اثر می‌کند و دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) بُردار گشتاور $\vec{M}_O$ دارای مقداری است مطابق آنچه در بالا به آن اشاره شد:

$$M_O = rF\sin\theta = Fd$$

این مقدار مستقل از موقعیت $\vec{F}$ در راستای خود نیرو است، زیرا $r\sin\theta = d$ در اثر جابه‌جایی بدون تغییر می‌ماند.

۲) بردار $\vec{M}_O$ به نقطه O اثر می‌کند و بر صفحه گسترده شده از $\vec{r}$ و $\vec{F}$ عمود است.

۳) $\vec{M}_O$ در جهتی است که طبق قانون دست راست مشخص گردیده و $\vec{r}$ در کوتاهترین مسیر به سمت $\vec{F}$ چرخانده می‌شود.

در فصل دوم گفته شد که دو نیرو وقتی هم‌ارزند یا به عبارت دیگر وقتی تأثیر یکسانی بر یک جسم صُلب می‌گذارند که اولاً برابر بوده و ثانیاً راستای یکسانی داشته باشند. اکنون می‌توان چنین نتیجه گرفت که:

دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ که با هم برابر بوده و دارای گشتاور یکسانی حول یک نقطه O باشند هم‌ارزند، یعنی

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 \quad \text{و} \quad \vec{M}_{O,F_1} = \vec{M}_{O,F_2}$$

۴-۲ نمایش دکارتی گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

چنانچه بُردار مکان $\vec{r}$ و بردار نیروی $\vec{F}$ در یک دستگاه مختصات دکارتی تعریف شوند:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + \vec{r}_z k \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

آنگاه $\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F} = \{r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}\}\times\{F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\}$

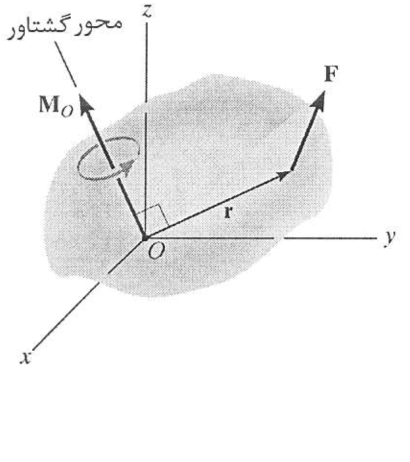
با توجه به نتیجه ضرب خارجی بردارهای یکّه در یکدیگر به صورت زیر:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$

$$\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j}$$

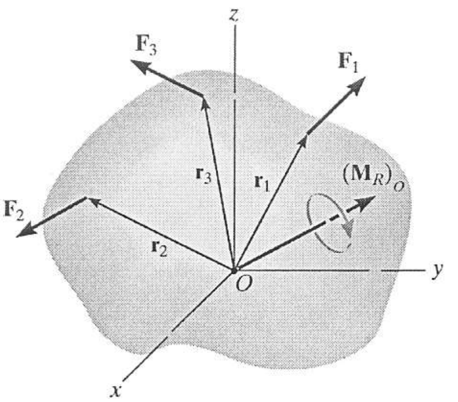
$$\vec{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\vec{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\vec{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\vec{k} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} (r_yF_z - r_zF_y) \\ -(r_xF_z - r_zF_x) \\ (r_xF_y - r_yF_x) \end{pmatrix}$$

این روابط را می‌توان به صورت فشرده‌تر دترمینانی نوشت:



$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} (r_yF_z - r_zF_y) \\ -(r_xF_z - r_zF_x) \\ (r_xF_y - r_yF_x) \end{pmatrix}}$$

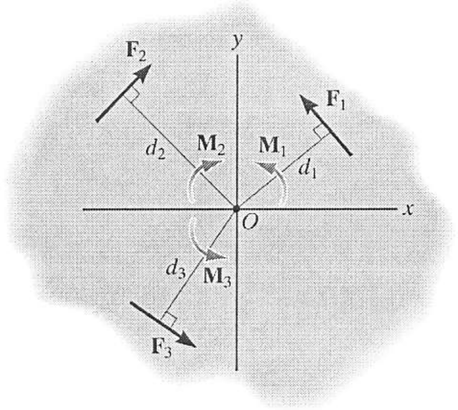
۳-۴ گشتاور برآیند مجموعه‌ای از چند نیرو



چنانچه چندین نیرو به جسمی صُلب مطابق شکل مقابل اثر کنند، گشتاور برآیند این نیروها حول نقطه O با جمع بُرداری گشتاورهای این نیروها حول نقطه O برابر است.

$$\boxed{(\vec{M}_R)_O = \Sigma\, \vec{r}_i \times \vec{F}_i}$$

در مسائل دوبُعدی که نیروها در یک صفحه x − y قرار دارند، گشتاور برآیند $(\vec{M}_R)_O$ حول نقطه O در امتداد محور z را می‌توان از جمع جبری گشتاورهای ناشی از همه این نیروها بدست آورد. در این حال گشتاورهای مثبت به صورت پادساعتگرد در راستای مثبت محور z (بیرون از صفحه) نشان داده می‌شوند. بنابراین مطابق شکل مقابل جهت هر یک از گشتاورها با علامت مثبت (پادساعتگرد) و یا منفی (ساعتگرد) در نظر گرفته می‌شوند. طبق این قرارداد گشتاور برآیند شکل مقابل برابر است با:

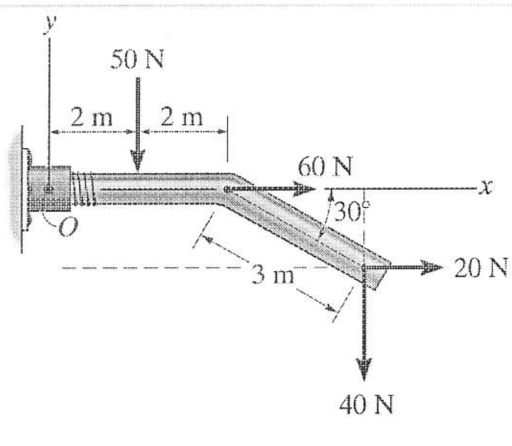


$$\circlearrowleft\!+\ (M_R)_O = \Sigma\, Fd: \quad (M_R)_O = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3$$

هرگاه نتیجه عددی این جمع اسکالری مثبت باشد، $(\vec{M}_R)_O$ گشتاوری پادساعتگرد (به‌سوی بیرون از صفحه) است و چنانچه نتیجه منفی باشد، $(\vec{M}_R)_O$ گشتاوری ساعتگرد (به‌سوی داخل صفحه) خواهد بود.

مثال ۴-۱

گشتاور برآیند چهار نیروی وارد بر میله‌ای مطابق شکل را حول نقطه O بدست آورید.



حل :

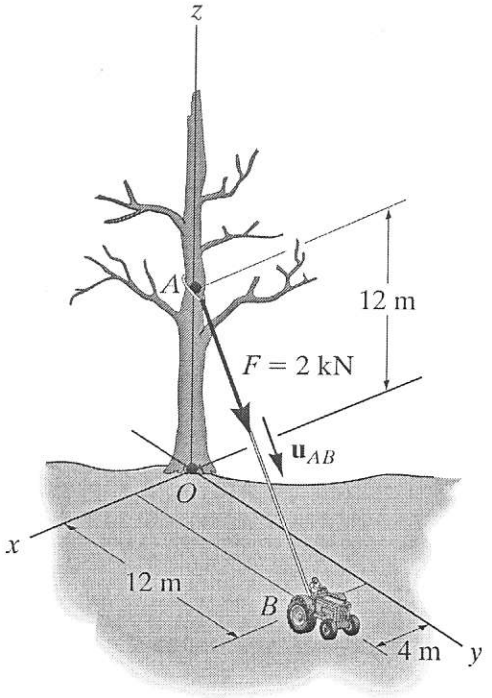
با فرض این‌که گشتاورهای مثبت پادساعتگرد بوده و در امتداد محور z اثر می‌کنند:

$$\circlearrowleft\!+\ (M_R)_O = \Sigma\, Fd: \qquad (M_R)_O = [50 \cdot 2]\ \text{Nm} + [60 \cdot 0]\ \text{Nm} + [20 \cdot 3\sin 30^\circ]\ \text{Nm} - [40 \cdot (2+2+3\cos 30^\circ)]\ \text{Nm}$$

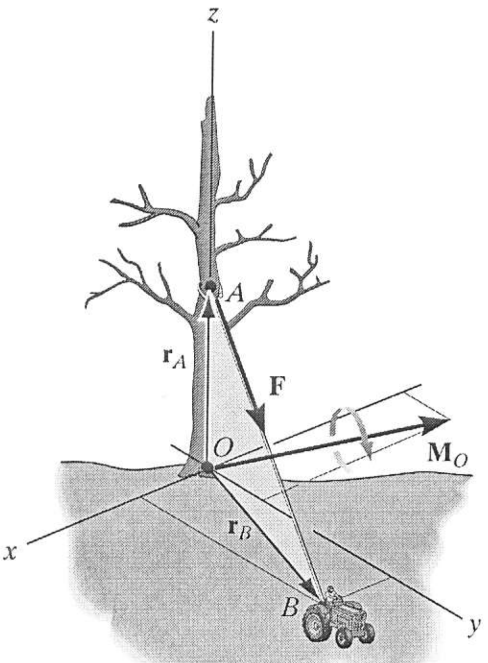
$$\circlearrowleft\!+\ (M_R)_O = -\,334\ \text{Nm}$$

مثال ۴-۲

مطلوب است گشتاوری که نیروی $\vec{F}$ مطابق شکل (a) توسط تراکتور حول نقطه O در پای درخت ایجاد می‌کند. نتیجه را به صورت دکارتی نشان دهید.



(a)



(b)

حل :

برای تعیین گشتاور نیرو حول نقطه O می توان از بُردار مکان $\vec{r}_A$ و یا از بُردار مکان $\vec{r}_B$ استفاده نمود.

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \text{m}\,; \quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \;\Rightarrow\; \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \text{m}$$

بیان نیروی $\vec{F}$ به صورت دکارتی:

$$\vec{F} = F u_{AB} = F\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = 2\frac{4\,\vec{i} + 12\,\vec{j} - 12\,\vec{k}}{\sqrt{(4)^2 + (12)^2 + (-12)^2}} = \begin{pmatrix} 0{,}4588 \\ 1{,}376 \\ -1{,}376 \end{pmatrix} \text{kN}$$

بنابراین گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه O با استفاده از بردار مکان $\vec{r}_A$ برابر است با:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0{,}4588 & 1{,}376 & -1{,}376 \end{vmatrix} \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} -16{,}5 \\ 5{,}51 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kNm}$$

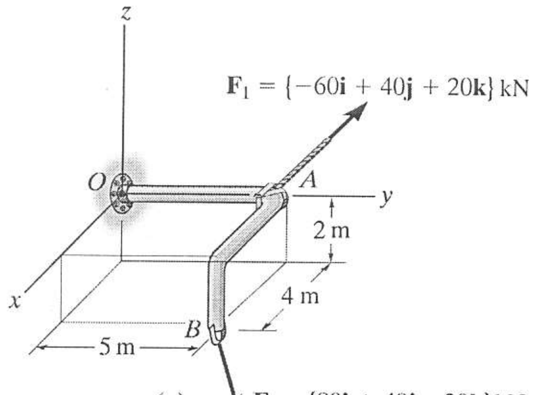
همین نتیجه نیز با استفاده از بردار مکان $\vec{r}_B$ بدست می‌آید :

$$\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0{,}4588 & 1{,}376 & -1{,}376 \end{vmatrix} \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} -16{,}5 \\ 5{,}51 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kNm}$$

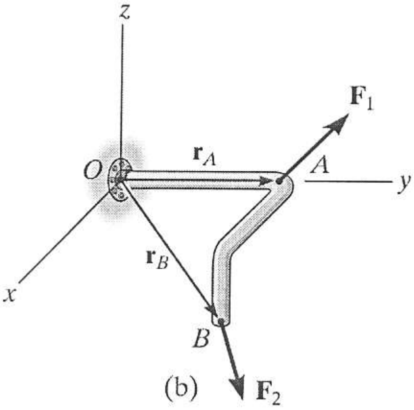
همان‌طورکه در شکل (b) نشان داده شده است، $\vec{M}_O$ در امتداد عمود بر صفحه گسترده شده از $\vec{F}$ ، $\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ اثر می‌کند:

مثال ۴-۳

دو نیرو مطابق شکل (a) به میله‌ای اعمال می‌شوند. مطلوب است گشتاوری برآیندی که این دو نیرو حول نقطه O ایجاد می‌کنند. نتیجه را به صورت دکارتی نشان دهید.



(a)

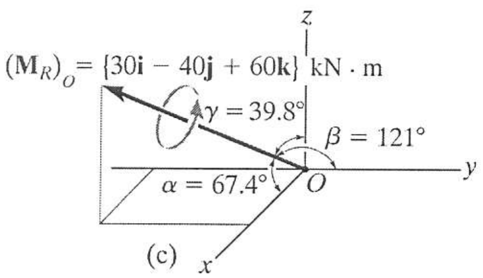


(b)

حل :

بُردارهای مکان $\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ از نقطه O مطابق شکل (b) به‌ترتیب به نقطه اثر نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ رسم شده‌اند. این بُردارهای مکان به صورت دکارتی با توجه به شکل عبارتند از:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}\,; \quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{m}$$



(c)

نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ نیز به صورت دکارتی داده شده‌اند:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -60 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} \text{kN}; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ -30 \end{pmatrix} \text{kN}$$

بنابراین گشتاور این دو نیرو حول نقطه O برابر است با:

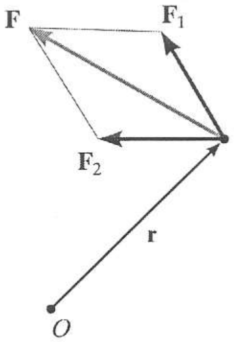
$$(\vec{M}_R)_O = \Sigma\,(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 100-0 \\ -(0-0) \\ 0+300 \end{pmatrix} \text{kNm} + \begin{pmatrix} -150+80 \\ -(-120+160) \\ 160-400 \end{pmatrix} \text{kNm} \Rightarrow$$

$$(\vec{M}_R)_O = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -70 \\ -40 \\ -240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -40 \\ 60 \end{pmatrix} \text{kNm}$$

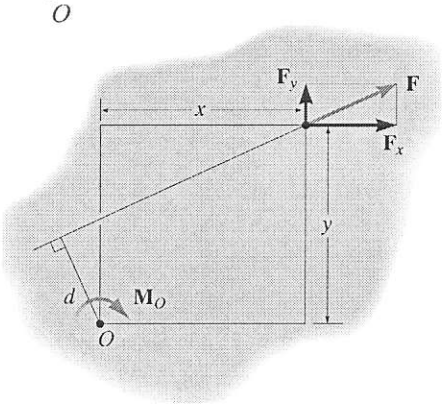
این نتیجه در شکل (c) نشان داده شده است. زوایای هادی بُردار $(\vec{M}_R)_O$ با استفاده از بُردار یکّه این بردار تعیین می شوند. توجه کنید، این دو نیرو گرایش دارند که میله را در امتداد و جهت نشان داده شده بردار گشتاور بچرخانند.

۴-۴ اصل گشتاورها



طبق این اصل گشتاور هر نیرو حول یک نقطه با جمع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول آن نقطه برابر است.
مثلاً اگر $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل مقابل مؤلفه‌های نیروی $\vec{F}$ باشند:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$



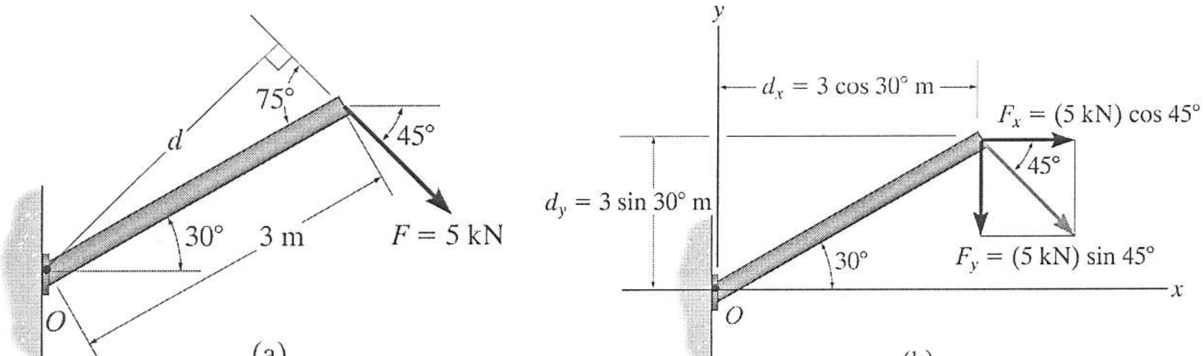
در مسائل دو بُعدی مانند شکل مقابل می‌توان با تجزیه نیرو به مؤلفه‌های عمود بر هم آن و سپس تعیین گشتاور به روش اسکالر، از اصل گشتاورها استفاده نمود. بنابراین:

$$M_O = F_x\,y - F_y\,x$$

این روش معمولاً از یافتن همین گشتاور به کمک رابطه $M_O = Fd$ آسان‌تر است.

مثال ۴-۴

گشتاور نیروی $F = 5\ \text{kN}$ در شکل (a) را حول نقطه O به‌دست آورید.



(a) (b)

حل ۱:

بازوی گشتاور طبق شکل (a) برابر $d = 3 \cdot \sin 75° = 2{,}898\ \text{m}$ است، در نتیجه:

$$M_O = Fd = (5\ \text{kN})(2{,}898\ \text{m}) = 14{,}5\ \text{kN} \curvearrowright$$

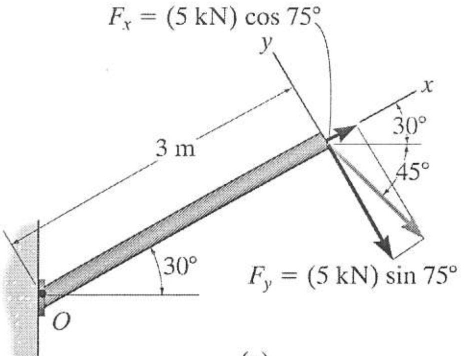
چون این نیرو در قطعه تمایل به چرخش ساعتگرد حول نقطه O ایجاد می‌کند، گشتاور به داخل صفحه است.

حل ۲:

مؤلفه‌های x و y نیرو در شکل (b) نشان داده شده‌اند. با مثبت گرفتن گشتاورهای پادساعتگرد و استفاده از اصل گشتاورها:

$$\curvearrowleft + M_O = -F_x\,d_y - F_y\,d_x$$

$$\curvearrowleft + M_O = -(5\cos 45° \cdot 3\sin 30°) - (5\sin 45° \cdot 3\cos 30°) = -14{,}5\ \text{kNm} \mathrel{\hat{=}} 14{,}5\ \text{kNm} \curvearrowright$$



(c)

حل ۳ : (ادامه مثال ۴-۴)

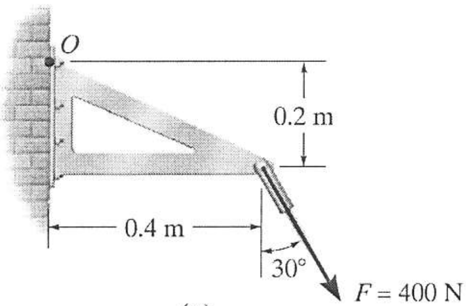
می‌توان محورهای x و y را مطابق شکل (c) به‌موازات محور میله و عمود بر آن در نظر گرفت. در این صورت F_x هیچ گشتاوری حول نقطه O ایجاد نمی‌کند، زیر راستای آن از این نقطه می‌گذرد. بنابراین:

$$\circlearrowleft + M_O = -F_y\, d_x$$

$$\circlearrowleft + M_O = -(5\sin 75° \cdot 3) = -14{,}5\ \mathrm{kNm} \triangleq 14{,}5\ \mathrm{kNm} \circlearrowright$$

مثال ۴-۵

نیرو $\vec{F}$ مطابق شکل (a) به انتهای دیوارکوب مثلثی اعمال می‌گردد. گشتاور این نیرو را حول نقطه O به‌دست آورید.



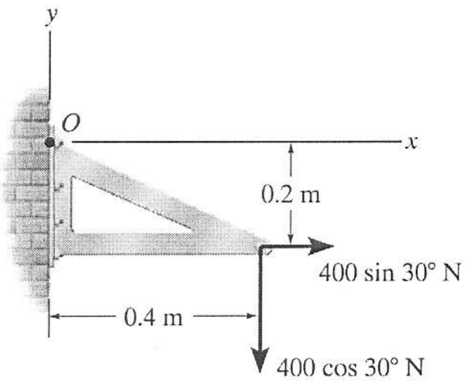
(a)

حل ۱ : (تحلیل اسکالر)

این نیرو مطابق شکل (b) به مؤلفه‌هایش در جهت x و y تجزیه گردیده و سپس گشتاور آنها حول نقطه O به‌دست می‌آیند.

$$\circlearrowleft + M_O = -(400\sin 30° \cdot 0{,}2)\,\mathrm{Nm} - (400\cos 30° \cdot 0{,}4)\,\mathrm{Nm}$$

$$\circlearrowleft + M_O = -98{,}6\ \mathrm{Nm} \triangleq 98{,}6\ \mathrm{Nm} \circlearrowright \Rightarrow \vec{M}_O = \{-98{,}6\,\vec{k}\}\ \mathrm{Nm}$$



(b)

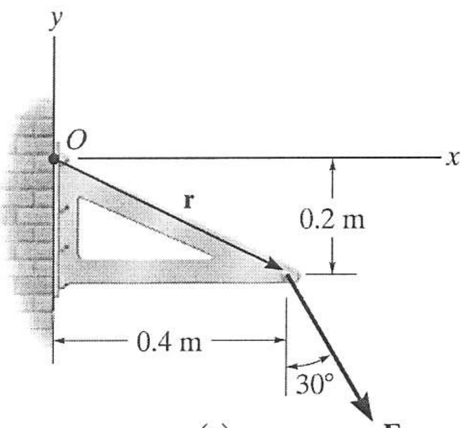
حل ۲ : (تحلیل بُرداری)

با استفاده از بردارهای نیرو و مکان به صورت دکارتی:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m}\ ;\quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 400\sin 30° \\ -400\cos 30° \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -346{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N} \Rightarrow$$

$$(\vec{M})_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 200 & -346{,}4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -(0-0) \\ -0{,}4 \cdot 346{,}4 + 0{,}2 \cdot 200 \end{pmatrix}$$

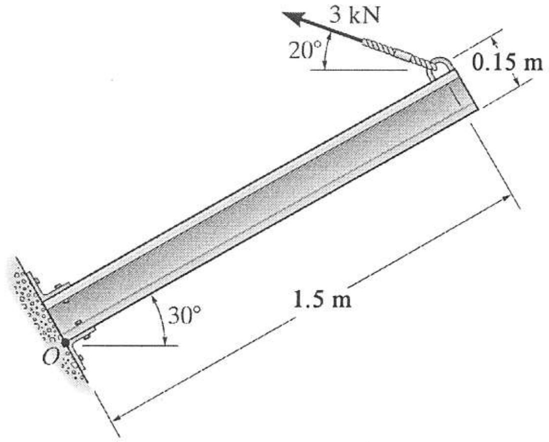
$$(\vec{M})_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0) \\ -98{,}6 \end{pmatrix} \mathrm{Nm} \triangleq \{-98{,}6\,\vec{k}\}\ \mathrm{Nm}$$



(c)

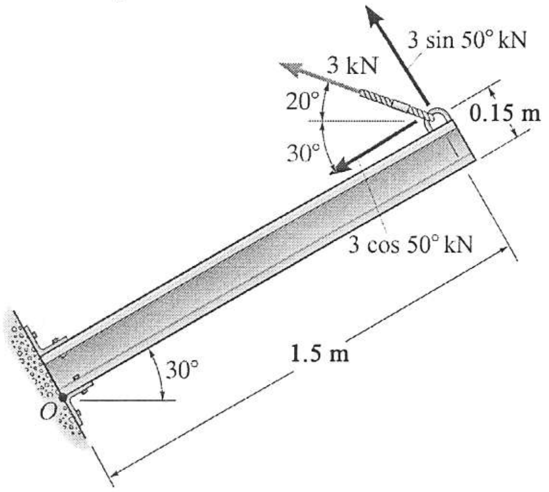
همان‌طورکه مشاهده شد روش اسکالر برای مسائل دوُبعدی راحت‌تر است. روش بُرداری برای مسائل سه بُعدی توصیه می‌شود

تمرین ۴-۱



گشتاور نیرویی مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.

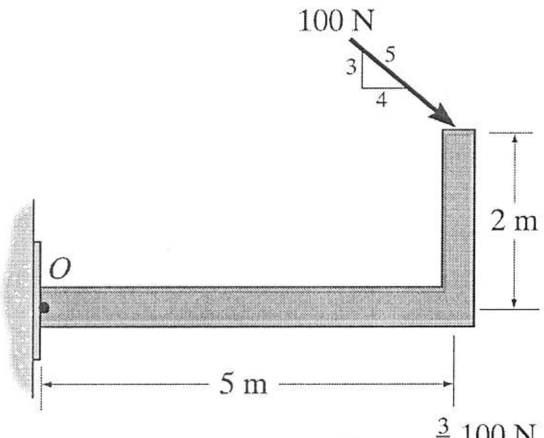
حل:



نیرو را به دو مؤلفه در راستای تیر به فاصله 0,15 m از نقطه O مطابق شکل و عمود بر آن تجزیه می‌کنیم. طبق اصل گشتاورها:

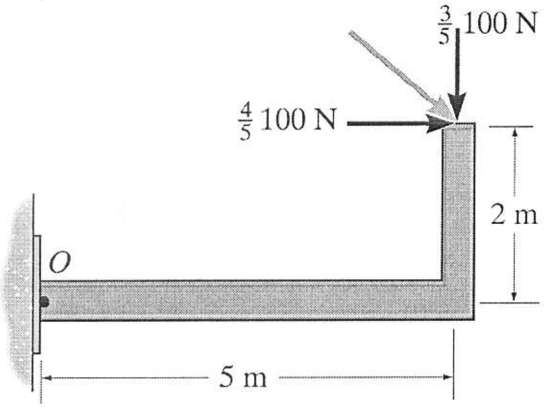
$$\curvearrowleft + M_O = (3\cos 50° \cdot 0{,}15)\ \text{kNm} + (3\sin 50° \cdot 1{,}5)\ \text{kNm}$$
$$\curvearrowleft + M_O = 3{,}736\ \text{kNm}$$

تمرین ۴-۲



گشتاور نیرویی مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.

حل:

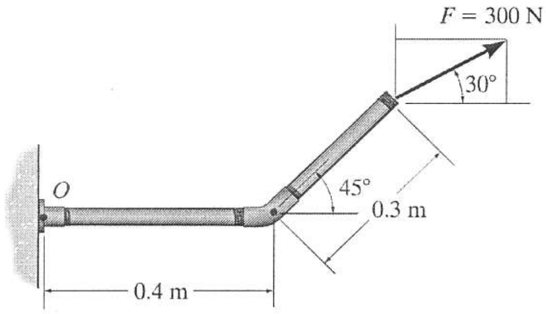


نیرو را به دو مؤلفه در راستای افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم. طبق اصل گشتاورها:

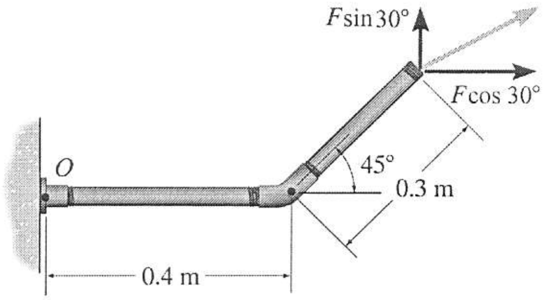
$$\curvearrowleft + M_O = -(\frac{4}{5}100 \cdot 2)\text{Nm} - (\frac{3}{5}100 \cdot 5)\text{Nm}$$
$$\curvearrowleft + M_O = -460\ \text{Nm} \triangleq 460\ \text{Nm} \curvearrowright$$

تمرین ۴-۳

گشتاور نیرویی مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.



حل:



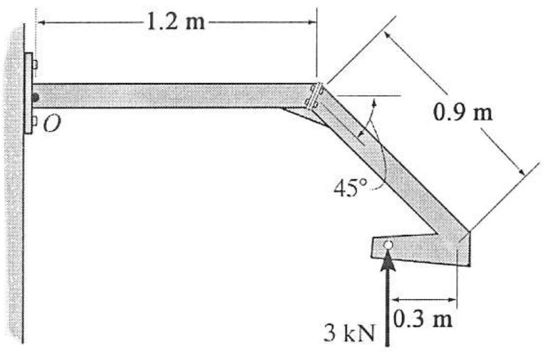
نیرو را به دو مؤلفه در راستای افقی و عمودی مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. طبق اصل گشتاورها:

$$\circlearrowleft + M_O = [300 \sin 30°(0{,}4 + 0{,}3 \cos 45°)]\ \text{Nm}$$

$$- [300 \cos 30° \cdot 0{,}3 \sin 45°]\ \text{Nm}$$

$$\circlearrowleft + M_O = 36{,}706\ \text{Nm}$$

تمرین ۴-۴



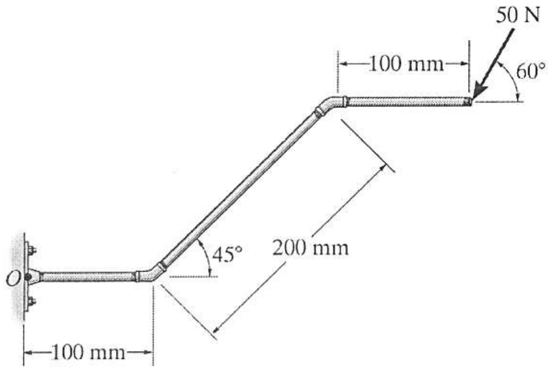
گشتاور نیرویی مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.

حل:

$$\circlearrowleft + M_O = [3\ (1{,}2 + 0{,}9 \cos 45° - 0{,}3)]\ \text{kNm}$$

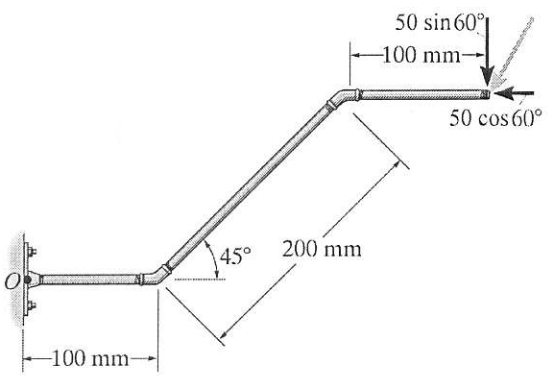
$$\circlearrowleft + M_O = 4{,}609\ \text{kNm}$$

تمرین ۴-۵



گشتاور نیرویی مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.

حل:



نیرو را به دو مؤلفه در راستای افقی و عمودی مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. طبق اصل گشتاورها:

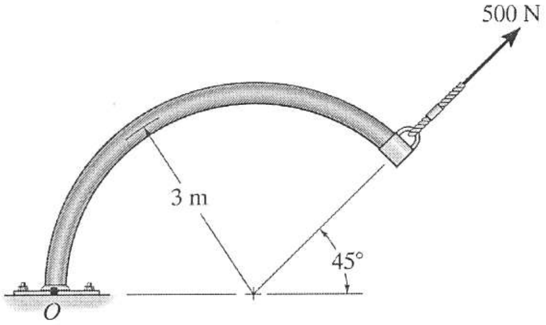
$$\circlearrowleft + M_O = [50 \cos 60° \cdot 200 \sin 45°]\ \text{Nmm}$$

$$- [50 \sin 60° (100 + 200 \cos 45° + 100)]\ \text{Nmm}$$

$$\circlearrowleft + M_O = -11248{,}445\ \text{Nmm} \mathrel{\hat{=}} 11{,}248\ \text{Nm} \circlearrowright$$

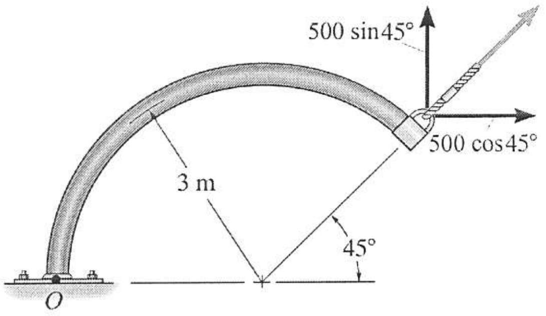
تمرین ۴-۶

گشتاور نیرویی مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.



حل:

نیرو را به دو مؤلفه در راستای افقی و عمودی مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. طبق اصل گشتاورها:

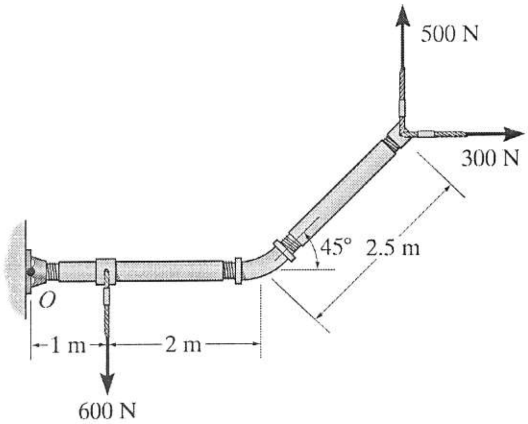


$$\circlearrowleft + M_O = [500 \sin 45^\circ (3 + 3\cos 45^\circ)]\ \text{Nm} - [500 \cos 45^\circ \cdot 3 \sin 45^\circ]\ \text{Nm}$$

$$\circlearrowleft + M_O = 1060{,}66\ \text{Nm} = 1{,}061\ \text{kNm}$$

تمرین ۴-۷

گشتاور نیروهای مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.



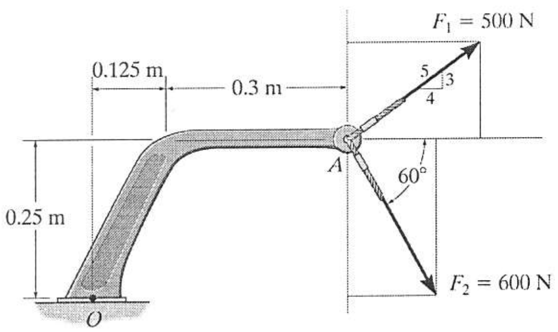
حل:

$$\circlearrowleft + M_O = -[600 \cdot 1]\ \text{Nm} + [500(1 + 2 + 2{,}5 \cos 45)]\ \text{Nm} - [300 \cdot 2{,}5 \sin 45^\circ]\ \text{Nm}$$

$$\circlearrowleft + M_O = 1253{,}5\ \text{Nm}$$

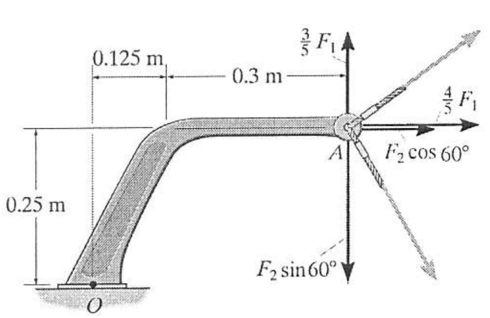
تمرین ۴-۸

گشتاور نیروهای مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.



حل:

نیروها را به دو مؤلفه در راستای افقی و عمودی مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. طبق اصل گشتاورها:

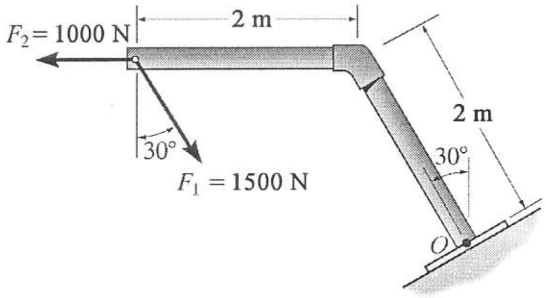


$$\circlearrowleft + M_O = [(\frac{3}{5} 500 - 600 \sin 60^\circ)(0{,}125 + 0{,}3)]\ \text{Nm} - [(\frac{4}{5} 500 + 600 \cos 60^\circ) \cdot 0{,}25]\ \text{Nm}$$

$$\circlearrowleft + M_O = -268{,}336\ \text{Nm} \triangleq 268{,}336\ \text{Nm} \circlearrowright$$

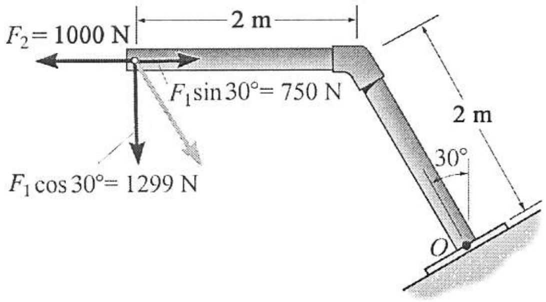
تمرین ۴-۹

گشتاور نیروهای مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید.



حل:

نیروی $\vec{F}_1$ را به دو مؤلفه افقی و عمودی مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. طبق اصل گشتاورها:

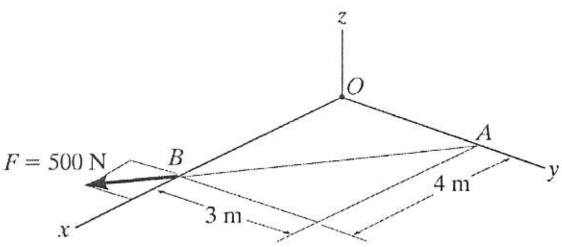


$$\circlearrowleft + M_O = [(1000 - 1500\sin 30°)\cdot 2\cos 30°]\ \text{Nm} + [1500\cos 30°(2 + 2\sin 30°)]\ \text{Nm}$$

$$\circlearrowleft + M_O = 4330{,}127\ \text{Nm}$$

تمرین ۴-۱۰

گشتاور نیروی $\vec{F}$ مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید و نتیجه را به صورت بردار دکارتی بنویسید.



حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\text{m}\ ;\quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\text{m} \ \Rightarrow\ \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}\text{m} \ \Rightarrow\ r_{AB} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5\ \text{m}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8\\-0{,}6\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow\quad \vec{F} = 500\,\vec{u}_{AB} = 500\begin{pmatrix}0{,}8\\-0{,}6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}400\\-300\\0\end{pmatrix}\text{N}$$

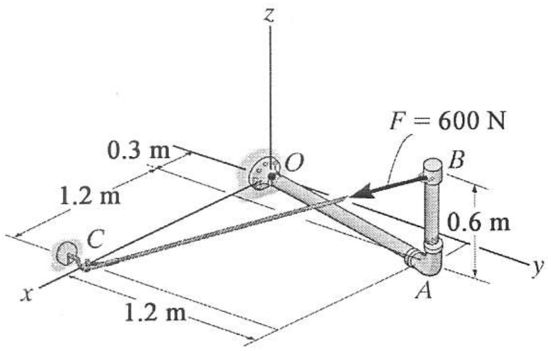
بنابراین:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & 0\\ 400 & -300 & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1200\end{pmatrix}\text{Nm} = \left\{-1200\vec{k}\right\}\text{Nm}$$

و یا همچنین :

$$\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 0 & 0\\ 400 & -300 & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1200\end{pmatrix}\text{Nm} = \left\{-1200\vec{k}\right\}\text{Nm}$$

تمرین ۴-۱۱



گشتاور نیروی $\vec{F}$ مطابق شکل را حول نقطه O به‌دست آورید و نتیجه را به صورت بردار دکارتی بنویسید.

حل:

$$\vec{r}_B=\begin{pmatrix}0,3\\1,2\\0,6\end{pmatrix}\text{m}\ ;\ \vec{r}_C=\begin{pmatrix}1,5\\0\\0\end{pmatrix}\text{m}\Rightarrow \vec{r}_{BC}=\begin{pmatrix}1,2\\-1,2\\-0,6\end{pmatrix}\text{m}\Rightarrow r_{BC}=\sqrt{(1,2)^2+(-1,2)^2+(-0,6)^2}=1,8\text{ m}$$

$$\vec{u}_{BC}=\frac{\vec{r}_{BC}}{r_{BC}}=\frac{\{1,2\vec{i}-1,2\vec{j}-0,6\vec{k}\}}{1,8}=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{F}=F\,\vec{u}_{BC}=600\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\-400\\-200\end{pmatrix}\text{N}$$

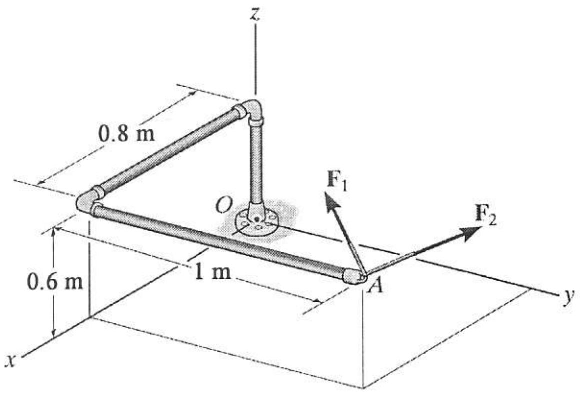
بنابراین:

$$\vec{M}_O=\vec{r}_B\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0,3&1,2&0,6\\400&-400&-200\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1,2\cdot200+0,6\cdot400\\+0,3\cdot200+0,6\cdot400\\-0,3\cdot400-1,2\cdot400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\300\\-600\end{pmatrix}\text{N}\cdot\text{m}=\{300\vec{j}-600\vec{k}\}\text{Nm}$$

و یا همچنین :

$$\vec{M}_O=\vec{r}_C\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1,5&0&0\\400&-400&-200\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0-0\\1,5\cdot200+0\\-1,5\cdot400+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\300\\-600\end{pmatrix}\text{N}\cdot\text{m}=\{300\vec{j}-600\vec{k}\}\text{Nm}$$

تمرین ۴-۱۲



دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل به نقطه A اثر می کنند. گشتاور این دو نیرو را حول نقطه O به‌دست آورده و نتیجه را به صورت بردار دکارتی بنویسید.

$\vec{F}_1=\{100\vec{i}-120\vec{j}+75\vec{k}\}$ N

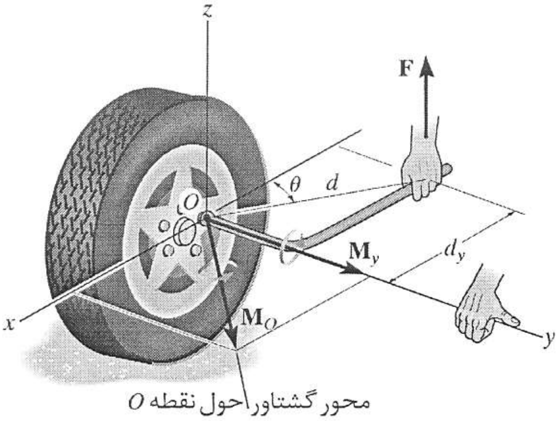
$\vec{F}_2=\{-200\vec{i}+250\vec{j}+100\vec{k}\}$ N

حل:

$$\vec{F}_R=\vec{F}_1+\vec{F}_2=\begin{pmatrix}100\\-120\\75\end{pmatrix}\text{N}+\begin{pmatrix}-200\\250\\100\end{pmatrix}\text{N}=\begin{pmatrix}-100\\130\\175\end{pmatrix}\text{N};\qquad r_A=\begin{pmatrix}0,8\\1\\0,6\end{pmatrix}\text{m}$$

$$\vec{M}_O=\vec{r}_A\times\vec{F}_R=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0,8&1&0,6\\-100&130&175\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot175-0,6\cdot130\\-(0,8\cdot175+0,6\cdot100)\\0,8\cdot130+1\cdot100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}97\\-200\\204\end{pmatrix}\text{N}\cdot\text{m}=\{97\vec{i}-200\vec{j}+204\vec{k}\}\text{Nm}$$

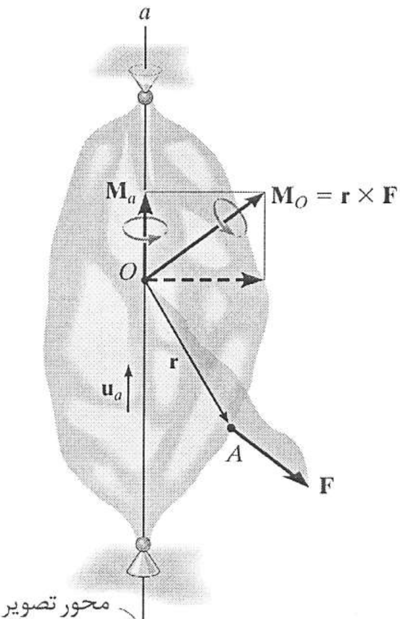
۵-۴ گشتاور نیرو حول یک محور



گاهی گشتاور یک نیرو حول یک محور معین مطلوب است. مثلاً گشتاور لازم برای شل کردن یک مهره چرخ O مطابق شکل مقابل مؤلفه‌ای از گشتاور کل ایجاد شده در نقطه O است، که حول محور چرخ (محور y) ایجاد می‌شود. برای تعیین این مؤلفه از دو روش تحلیل اسکالر و یا تحلیل بُرداری استفاده می‌شود.

تحلیل اسکالر: برای استفاده از تحلیل اسکالر در مورد مهره چرخ شکل فوق می‌دانیم که بازوی گشتاور یا فاصله عمودی از محور تا خط اثر نیرو $d_y = d\cos\theta$ است. بنابراین گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور y برابر است با: $M_y = Fd_y = F(d\cos\theta)$. طبق قانون دست راست، M_y مطابق شکل در امتداد محور y است و به‌طور کلی گشتاور برای هر محور a برابر است با: $M_a = Fd_a$

چنانچه یک نیرو محوری را قطع کرده و یا با آن موازی باشد، این نیرو حول آن محور هیچ گشتاوری ایجاد نمی‌کند.



تحلیل بُرداری: چنانچه یک نیروی $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ و یک محور با بُردار یکّه $\vec{u}_a = \begin{pmatrix} u_{a_x} \\ u_{a_y} \\ u_{a_z} \end{pmatrix}$ داده شده باشند و $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$ بُردار مکان از یک نقطه دلخواه O بر روی محور a به یک نقطه دلخواه از راستای $\vec{F}$ باشد، آن‌گاه اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور a برابر است با:

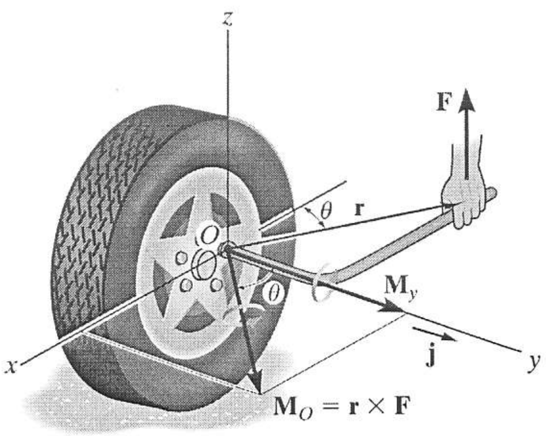
$$M_a = \vec{u}_a \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_a = u_{a_x}(r_yF_z - r_zF_y) - u_{a_y}(r_xF_z - r_zF_x) + u_{a_z}(r_xF_y - r_yF_x)$$

اگر M_a اسکالری مثبت باشد، جهت گشتاور $\vec{M}_a$ با جهت $\vec{u}_a$ یکی است و اگر منفی باشد، جهت گشتاور $\vec{M}_a$ مخالف جهت $\vec{u}_a$ خواهد بود.

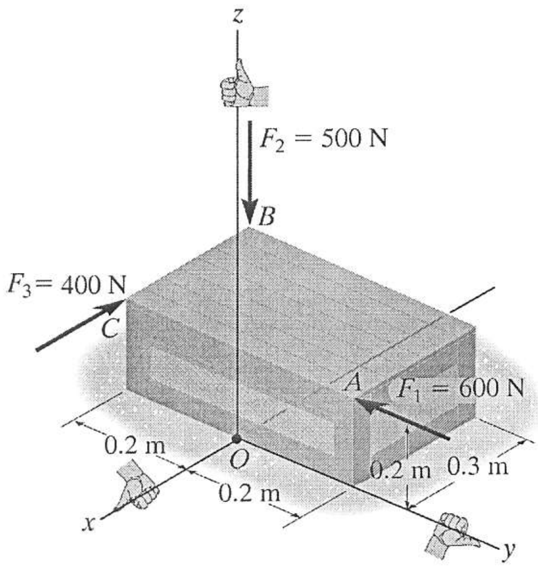
پس از تعیین M_a، می‌توان $\vec{M}_a$ را به صورت بردار دکارتی بیان نمود:

$$\vec{M}_a = M_a \vec{u}_a$$



برای تحلیل بُرداری در مورد مهره چرخ O و تعیین مؤلفه گشتاور M_y حول محور y از رابطه $M_y = \vec{j} \cdot \vec{M}_o = \vec{j} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$ استفاده می‌شود، که در آن $\vec{M}_o = (\vec{r} \times \vec{F})$ گشتاور نیرو حول یک نقطه اختیاری O روی محور y بوده و $\vec{j}$ بُردار یکّه محور y می‌باشد:

مثال ۴-۶



برآیند گشتاور نیروهای $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ را حول محور x ، محور y و محور z بدست آورید.

حل به روش برداری:

$$(M_R)_x = \Sigma \vec{i} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{i} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + \vec{i} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + \vec{i} \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{F}_3)$$

$$(M_R)_y = \Sigma \vec{j} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{j} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + \vec{j} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + \vec{j} \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{F}_3)$$

$$(M_R)_z = \Sigma \vec{k} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + \vec{k} \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{F}_3)$$

نوشتن به فرم دترمینانی :

$$(M_R)_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & -600 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}3 \\ -400 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{Nm}$$

$$(M_R)_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & -600 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}3 \\ -400 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -150 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -120 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -230 \\ 0 \end{pmatrix} \text{Nm}$$

$$(M_R)_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & -600 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}3 \\ -400 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix} \text{Nm}$$

حل به روش اسکالر:

$$(M_R)_x = (600 \cdot 0{,}2) + (500 \cdot 0{,}2) + 0 = 220 \text{ Nm}$$

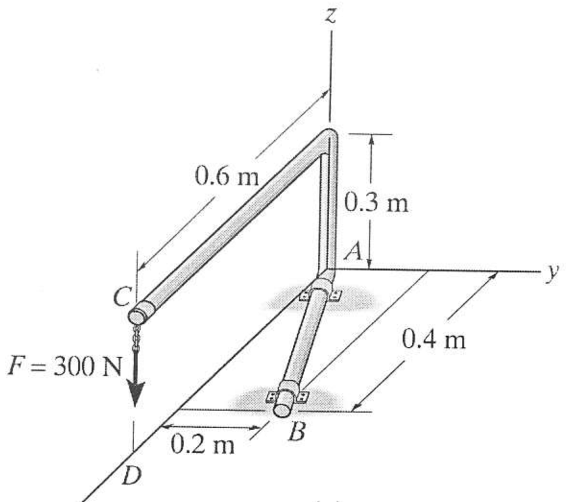
$$(M_R)_y = 0 - (500 \cdot 0{,}3) - (400 \cdot 0{,}2) = -230 \text{ Nm}$$

$$(M_R)_z = 0 + 0 - (400 \cdot 0{,}2) = -80 \text{ Nm}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود روش تحلیل اسکالر در این مورد بسیار ساده‌تر است.

مثال ۴-۷

مطلوب است گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور AB ، یعنی $\vec{M}_{AB}$ که گرایش دارد میله شکل (a) را حول محور AB بچرخاند.



(a)

حل :

اندازه گشتاور $\vec{M}_{AB}$ حول محور AB با استفاده از روش بُرداری برابر است با:

$$M_{AB} = \vec{u}_{AB} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

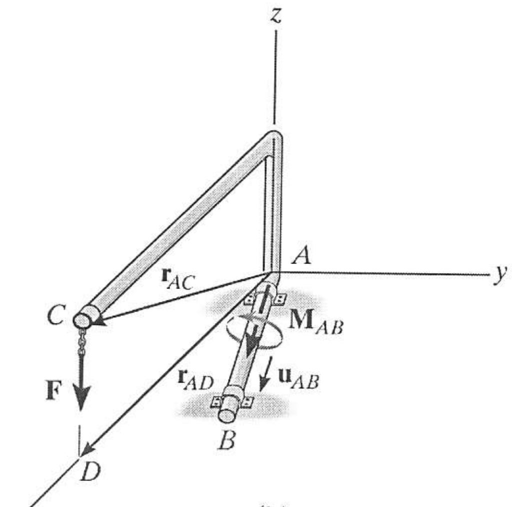
که در

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{\{0{,}4\,\vec{i} + 0{,}2\,\vec{j}\}\,m}{\sqrt{0{,}4^2 + 0{,}2^2}\;m} = \begin{pmatrix} 0{,}8944 \\ 0{,}4472 \\ 0 \end{pmatrix}$$

آن

بُردار یکّه محور AB، $\vec{r}$ بُردار مکانی است، که می‌تواند از هر نقطه بر روی محور AB تا هر نقطه از خط اثر نیرو امتداد داشته باشد: $\vec{r} = \vec{r}_{AC}$ یا $= \vec{r}_{AD}$ یا $= \vec{r}_{BC}$ یا $= \vec{r}_{BD}$ (بُردارهای $\vec{r}_{BC}$ و $\vec{r}_{BD}$ در شکل (b) نشان‌داده نشده‌اند).

در اینجا از بُردار مکان $\vec{r} = \vec{r}_{AD} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$ استفاده می‌شود.



(b)

همچنین نیروی $\vec{F}$ به صورت بُردار دکارتی: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \end{pmatrix} N$

در نتیجه:

$$M_{AB} = \vec{u}_{AB} \cdot (\vec{r}_{AD} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0{,}8944 & 0{,}4472 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix} = [0{,}8944(0-0)] - [0{,}4472(-180-0)] + 0 = 80{,}5\ Nm$$

این نتیجه مثبت بیانگر آن است که $\vec{M}_{AB}$ با $\vec{u}_{AB}$ هم‌جهت است.

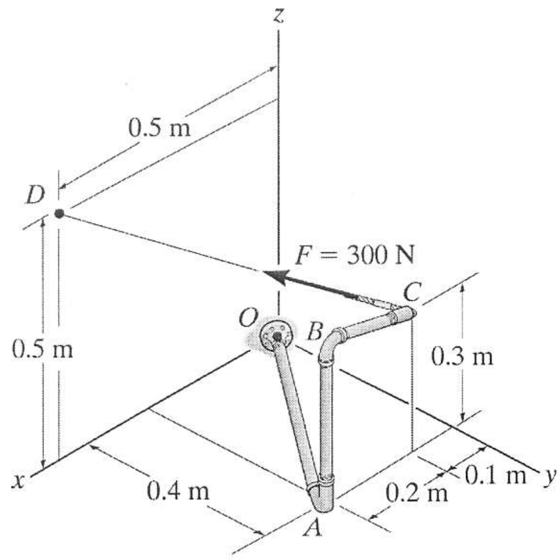
گشتاور $\vec{M}_{AB}$ به صورت بُردار دکارتی برابر است با:

$$\vec{M}_{AB} = M_{AB}\,\vec{u}_{AB} = 80{,}5 \begin{pmatrix} 0{,}8944 \\ 0{,}4472 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} Nm \equiv \{72\,\vec{i} + 36\,\vec{j}\}\ Nm$$

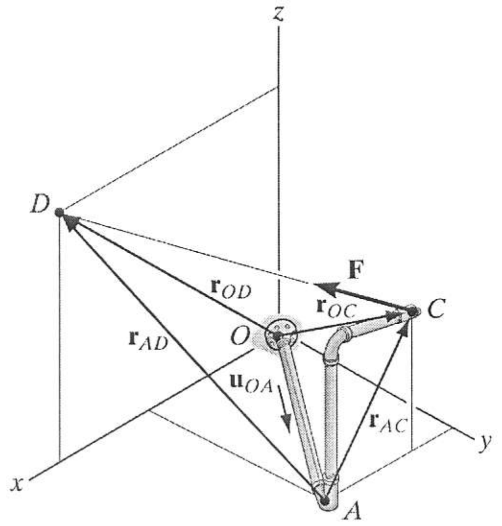
این نتیجه در شکل (b) نشان‌داده شده است.

مثال ۴-۸

مطلوب است تعیین اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور OA از لوله نشان‌داده شده در شکل (a).



(a)



(b)

حل:

اندازه گشتاور $\vec{M}_{OA}$ حول محور OA به روش بُرداری با استفاده از رابطه $M_{OA} = \vec{u}_{OA} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$ به‌دست می‌آید.

که در آن

$$\vec{u}_{OA} = \frac{\vec{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{\{0{,}3\,\vec{i} + 0{,}4\,\vec{j}\}\,m}{\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2}\,m} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بُردار یکّه محور OA، $\vec{r}$ بُردار مکانی است، که می‌تواند از هر نقطه بر روی محور OA تا هر نقطه از خط اثر نیرو امتداد داشته باشد: $\vec{r} = \vec{r}_{OC}$ یا $= \vec{r}_{OD}$ یا $= \vec{r}_{AC}$ یا $= \vec{r}_{AD}$ (در شکل (b) نشان‌داده شده‌اند).

در اینجا از بُردار مکان $\vec{r} = \vec{r}_{OD} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} m$ استفاده می‌شود.

همچنین نیروی $\vec{F}$ به صورت بُردار دکارتی:

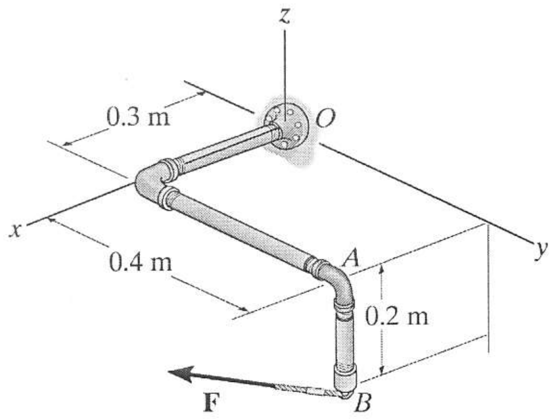
$$\vec{F} = F\left(\frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}}\right) = 300\frac{\{0{,}4\,\vec{i} - 0{,}4\,\vec{j} + 0{,}2\,\vec{k}\}m}{\sqrt{0{,}3^2 + (-0{,}4^2) + 0{,}2^2}\,m} = \begin{pmatrix} 200 \\ -200 \\ 100 \end{pmatrix} N$$

که در آن $\vec{r}_{CD} = \vec{r}_D - \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} m$ است.

بنابراین

$$M_{OA} = \vec{u}_{OA} \cdot (\vec{r}_{OD} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 200 & -200 & 100 \end{vmatrix} = [0{,}6(0+100)] - [0{,}8(50-100)] + 0 = 100\ Nm$$

تمرین ۴-۱۳



اندازه گشتاور نیروی $\vec{F} = \{300\vec{i} - 200\vec{j} + 150\vec{k}\}$ N را حول محور x به‌دست آورده و نتیجه به صورت بُردار دکارتی بیان کنید.

حل:

با
$$\vec{u}_x = \vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \; ; \; \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix}0{,}3\\0{,}4\\-0{,}2\end{pmatrix}\text{m} \; ; \; \vec{F} = \begin{pmatrix}300\\-200\\150\end{pmatrix}\text{N}$$

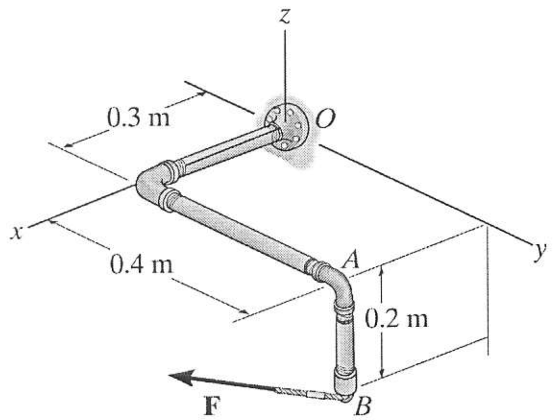
اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور x به‌دست می‌آید:

$$M_x = \vec{u}_x \cdot (\vec{r}_{OB} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}2\\300 & -200 & 150\end{vmatrix} = [1(60-40)] - 0 + 0 = 20\ \text{Nm}$$

گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور x به صورت بُردار دکارتی برابر است با:

$$\vec{M}_x = M_x\,\vec{i} = 20\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\0\\0\end{pmatrix}\text{Nm} \equiv \{20\vec{i}\}\ \text{Nm}$$

تمرین ۴-۱۴



اندازه گشتاور نیروی $\vec{F} = \{300\vec{i} - 200\vec{j} + 150\vec{k}\}$ N را حول محور OA به‌دست آورده و نتیجه به صورت بُردار دکارتی بیان کنید.

حل:

با توجه به

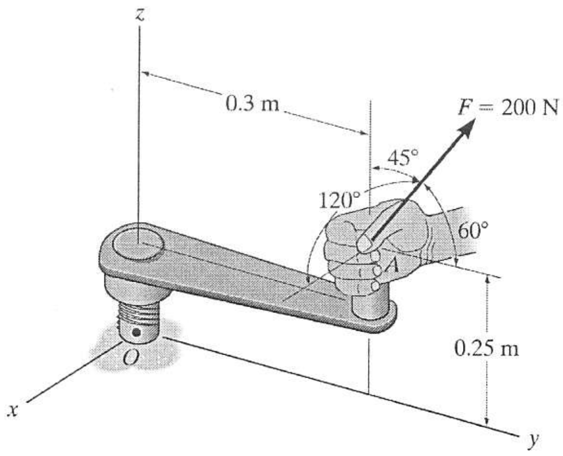
$$\vec{u}_{OA} = \frac{\vec{r}_{OA}}{r_{OA}} = \; = \frac{\{0{,}3\vec{i} + 0{,}4\vec{j}\}\text{m}}{\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2}\ \text{m}} = \begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\\0\end{pmatrix} \; ; \; \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix}0{,}3\\0{,}4\\-0{,}2\end{pmatrix}\text{m} \; ; \; \vec{F} = \begin{pmatrix}300\\-200\\150\end{pmatrix}\text{N}$$

اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور OA به‌دست می‌آید:

$$M_{OA} = \vec{u}_{OA} \cdot (\vec{r}_{OB} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix}0{,}6 & 0{,}8 & 0\\0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}2\\300 & -200 & 150\end{vmatrix} = [0{,}6(60-100)] - [0{,}8(45+60)] + 0 = -72\ \text{Nm}$$

گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور OA به صورت بُردار دکارتی برابر است با:

$$\vec{M}_{OA} = M_{OA}\,\vec{u}_{OA} = -72\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-43{,}2\\-57{,}6\\0\end{pmatrix}\text{Nm} \equiv \{-43{,}2\vec{i} - 57{,}6\vec{j}\}\ \text{Nm}$$



تمرین ۴-۱۵

مطلوب است تعیین اندازه گشتاور نیروی $F = 200\ N$ حول محور x.

حل به روش بُرداری:

$$\vec{F} = F\,\vec{u}_F = 200\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} = 200\begin{pmatrix}\cos 120^\circ\\ \cos 60^\circ\\ \cos 45^\circ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-100\\ 100\\ 100\sqrt{2}\end{pmatrix} N$$

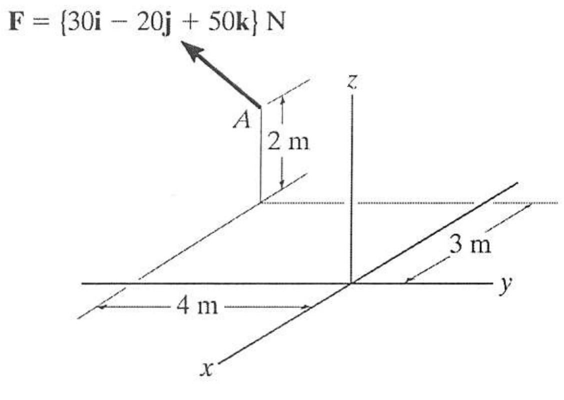
$$\vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix}0\\ 0{,}3\\ 0{,}25\end{pmatrix} m \quad ; \quad \vec{u}_x = \vec{i} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور x برابر است با:

$$M_x = \vec{i}\cdot(\vec{r}_{OA}\times\vec{F}) = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}3 & -0{,}25\\ -100 & 100 & 100\sqrt{2}\end{vmatrix} = [1(30\sqrt{2}+25)] - 0 + 0 = 17{,}426\ Nm$$

حل به روش اسکالر:

$$M_x = (r_y F_z - r_z F_y) = (0{,}3\cdot 200\cos\gamma - 0{,}25\cdot 200\cos\beta) = (0{,}3\cdot 200\cos 45^\circ - 0{,}25\cdot 200\cos 60^\circ) = 17{,}426\ \ Nm$$



تمرین ۴-۱۶

اندازه گشتاور نیروی $\vec{F} = \{30\,\vec{i} - 20\,\vec{j} + 50\,\vec{k}\}N$ را حول محور y به‌دست آورید.

حل به روش بُرداری:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ -4\\ 2\end{pmatrix} m \quad ; \quad \vec{u}_y = \vec{j} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور y برابر است با:

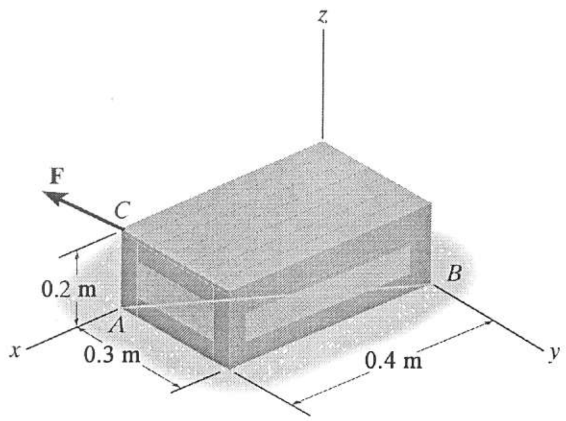
$$M_y = \vec{j}\cdot(\vec{r}_A\times\vec{F}) = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 2\\ 30 & -20 & 50\end{vmatrix} = 0 - [1(-150-60)] + 0 = 210\ Nm$$

روش حل اسکالر:

$$M_y = (r_z F_x - r_x F_z) = (2\cdot 30 + 3\cdot 50) = \ 210\ \ Nm$$

تمرین ۴-۱۷

اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}=\{50\vec{i}-40\vec{j}+20\vec{k}\}\text{N}$ را حول محور AB به‌دست آورده و نتیجه را به صورت بُرداری دکارتی بیان کنید.



حل:

$$\vec{r}_A=\begin{pmatrix}0{,}4\\0\\0\end{pmatrix}\text{m}\;;\;\vec{r}_B=\begin{pmatrix}0\\0{,}3\\0\end{pmatrix}\text{m}\;;\;\vec{r}_C=\begin{pmatrix}0{,}4\\0\\0{,}2\end{pmatrix}\text{m}\Rightarrow$$

$$\vec{r}_{BC}=\vec{r}_C-\vec{r}_B=\begin{pmatrix}0{,}4\\-0{,}3\\0{,}2\end{pmatrix}\text{m}\;;\;\vec{r}_{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\begin{pmatrix}-0{,}4\\0{,}3\\0\end{pmatrix}\text{m}\;\Rightarrow\;\vec{u}_{AB}=\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{\{-0{,}4\,\vec{i}+0{,}3\,\vec{j}\}}{\sqrt{(-0{,}4)^2+0{,}3^2}}=\begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}6\\0\end{pmatrix}$$

اندازه گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور AB برابر است با:

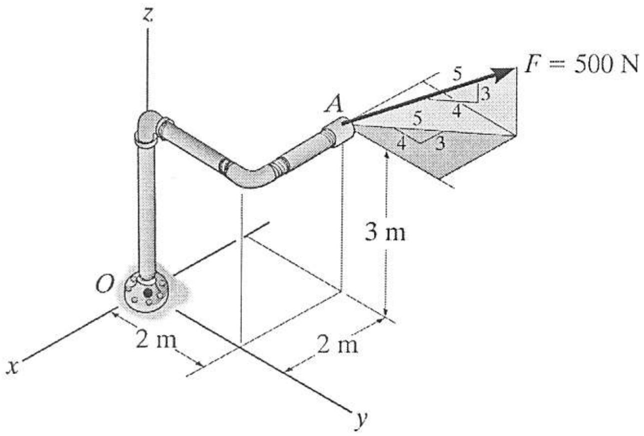
$$M_{AB}=\vec{u}_{AB}\cdot(\vec{r}_{BC}\times\vec{F})=\begin{vmatrix}-0{,}8&0{,}6&0\\0{,}4&-0{,}3&0{,}2\\50&-40&20\end{vmatrix}=[-0{,}8(-6+8)]-[0{,}6(8-10)]+0=-0{,}4\ \text{Nm}$$

گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محور AB به صورت بُردار دکارتی برابر است با:

$$\vec{M}_{AB}=M_{AB}\,\vec{u}_{AB}=-0{,}4\begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}32\\-0{,}24\\0\end{pmatrix}\text{Nm}\equiv\{0{,}32\,\vec{i}-0{,}24\,\vec{j}\}\ \text{Nm}$$

تمرین ۴-۱۸

گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول محورهای x، y و z را با استفاده از تحلیل اسکالر به‌دست آورید.



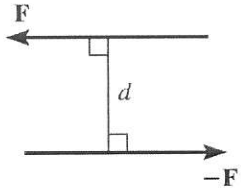
حل:

$$\vec{r}_A=\begin{pmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\text{m}$$

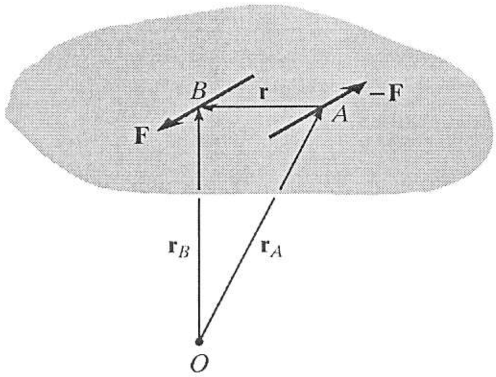
$$\vec{F}=\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(3/5)(4/5)500\\(4/5)(4/5)500\\(3/5)500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-240\\320\\300\end{pmatrix}\text{N}\;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}M_x&=-320\cdot3+300\cdot2=-360\ \text{Nm}\\M_y&=-240\cdot3+300\cdot2=-120\ \text{Nm}\\M_z&=\ \ 240\cdot2+320\cdot2=-160\ \text{Nm}\end{aligned}\;\Rightarrow\;\vec{M}_O=\begin{pmatrix}-360\\-120\\-160\end{pmatrix}\text{Nm}\equiv\{-360\,\vec{i}-120\,\vec{j}-160\,\vec{k}\}$$

۶-۴ گشتاور کوپل



کوپل نیرو عبارت است از دو نیروی موازی و مساوی، که جهت‌های مخالف داشته و به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. چون برآیند این دو نیرو صفر است، تنها اثر این کوپل نیرو چرخش خالص یا گرایش به چرخش در جهتی معین است. این اثر تحت عنوان **گشتاور کوپل** نامیده می‌شود و مقدار آن از جمع گشتاورهای هر دو نیروی کوپل حول هر نقطه دلخواه به‌دست می‌آید. مثلاً در شکل مقابل بردارهای مکان $\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ از نقطه اختیاری O تا نقاط A و B روی خط اثر نیروهای $\vec{F}$ و $-\vec{F}$ رسم شده‌اند. بنابراین گشتاور کوپل حول نقطه O برابر است با:

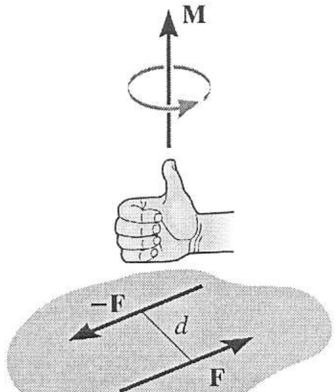


$$\vec{M} = \vec{r}_B \times \vec{F} + r_A \times -\vec{F} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}$$

چون $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}$ و در نتیجه $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ است، بنابراین:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

به این ترتیب مشاهده می‌شود که گشتاور کوپل یک بُردار آزاد است، زیرا فقط به بُردار مکان $\vec{r}$ بین نیروها بستگی دارد، نه به بُردارهای مکان $\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ که از نقطه دلخواه O تا نیروها رسم شده‌اند. این پدیده به مفهوم گشتاور نیرو شباهتی ندارد، زیرا گشتاور نیرو به نقطه (یا محور) معینی وابسته است.



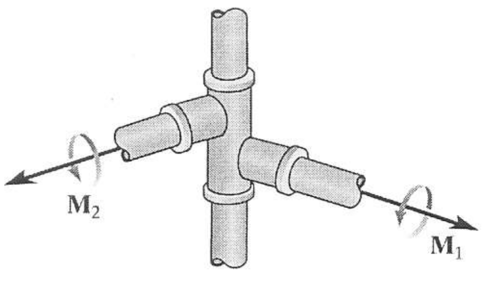
فورمول‌بندی اسکالر: اندازه گشتاور کوپل $\vec{M}$ برابر است با: $M = Fd$ که در آن F اندازه نیروها و d فاصله عمودی یا بازوی گشتاور بین نیروها است. امتداد و جهت این گشتاور با استفاده از قانون دست راست به‌دست می‌آید. در همه موارد، $\vec{M}$ عمود بر صفحه این دو نیرو قرار دارد.

فورمول‌بندی بُرداری: گشتاور کوپل را می‌توان با استفاده از ضرب برداری بیان نمود: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ در این رابطه بُردار مکان از یک نقطه بر روی راستای یکی از نیروها است و بُردار نیروی دیگر است.

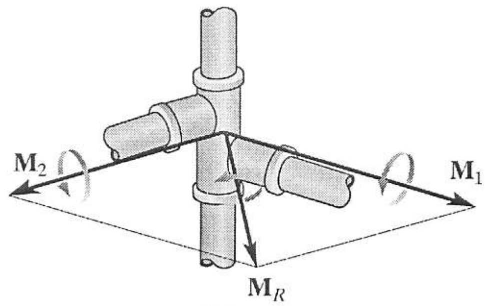
کوپل‌های هم‌ارز: چنانچه دو کوپل دارای اندازه و امتداد برابر باشند، این دو کوپل هم‌ارزند.

گشتاور کوپل برآیند: از آنجایی‌که گشتاور کوپل‌ها بُردارهای آزاد هستند، می‌توان آنها را به موازات راستای خود به یک نقطه دلخواه انتقال داده و سپس با هم جمع نمود (شکل‌های (a) و (b)):

$$\vec{M}_R = \Sigma(\vec{r} \times \vec{F})$$



(a)

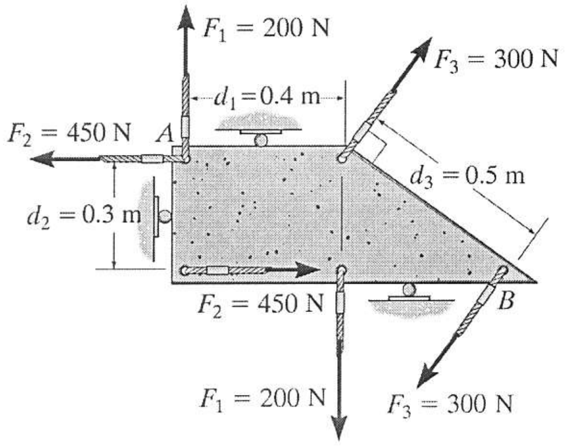


(b)

توصیه می‌شود مسائل دو بُعدی با استفاده از تحلیل اسکالر و مسائل سه بُعدی به روش بُرداری حل شوند.

مثال ۴-۹

گشتاور کوپل برآیند حاصل از سه گشتاور کوپل اعمال شده به صفحه شکل مقابل را به‌دست آورید.



حل:

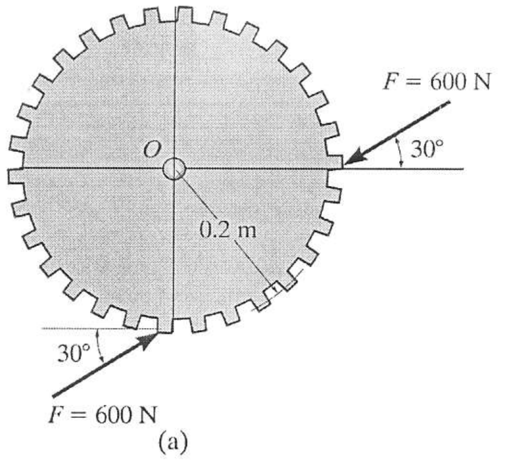
مطابق شکل فواصل عمودی بین زوج نیروهای کوپل F_1، F_2 و F_3 به‌ترتیب $d_1 = 0{,}4$ m، $d_2 = 0{,}3$ m و $d_3 = 0{,}5$ m می‌باشند. همچنین گشتاورهای کوپل پادساعت‌گرد را مثبت می‌گیریم:

$$\circlearrowleft + (M_R) = \Sigma M \,; \quad M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3 = -(200 \cdot 0{,}4) + (450 \cdot 0{,}3) - (300 \cdot 0{,}5) = -95 \text{ Nm} \equiv 95 \text{ Nm} \circlearrowright$$

علامت منفی گشتاور کوپل برآیند بیانگر آن است که جهت چرخش $\vec{M}_R$ ساعت‌گرد است.

مثال ۴-۱۰

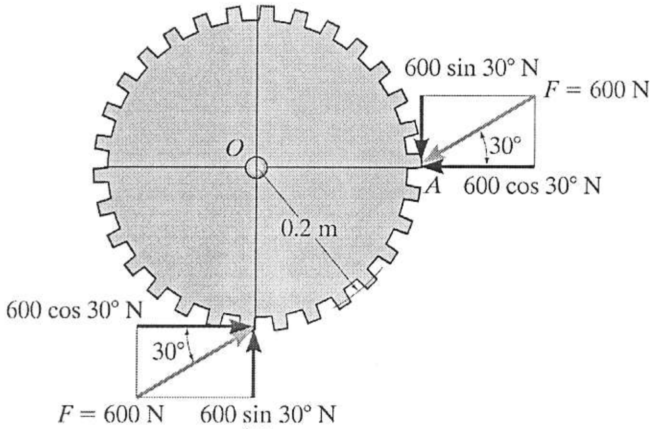
مطلوب است تعیین اندازه و امتداد گشتاور کوپل اعمال شده به چرخدنده‌ای مطابق شکل (a).



(a)

حل:

ابتدا هر نیرو را به دو مؤلفه افقی و عمودی مطابق شکل (b) تجزیه کرده و سپس می‌توان گشتاور کوپل این مؤلفه‌های نیرو را حول هر نقطه دلخواه، مثلاً حول مرکز چرخدنده O و یا حول نقطه A به‌دست آورد.
گشتاور کوپل پادساعت‌گرد مثبت فرض می شود:



(b)

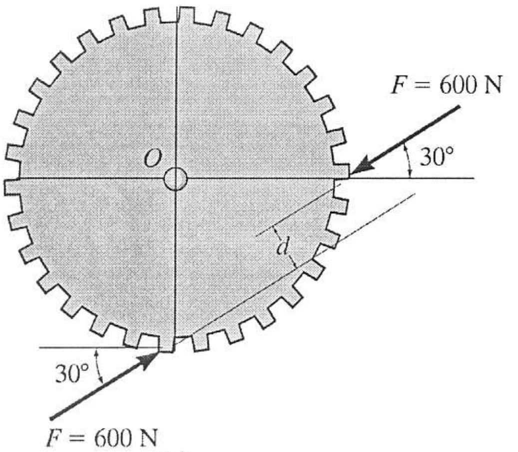
$$\circlearrowleft + M = \Sigma M_O \; ; \quad M = (600\cos 30° \cdot 0{,}2) - (600\sin 30° \cdot 0{,}2) = 43{,}9 \text{ Nm} \circlearrowleft$$

یا

$$\circlearrowleft + M = \Sigma M_A \; ; \quad M = (600\cos 30° \cdot 0{,}2) - (600\sin 30° \cdot 0{,}2) = 43{,}9 \text{ Nm} \circlearrowleft$$

این نتیجه مثبت بیانگر آن است که جهت چرخش گشتاور پادساعت‌گرد است.

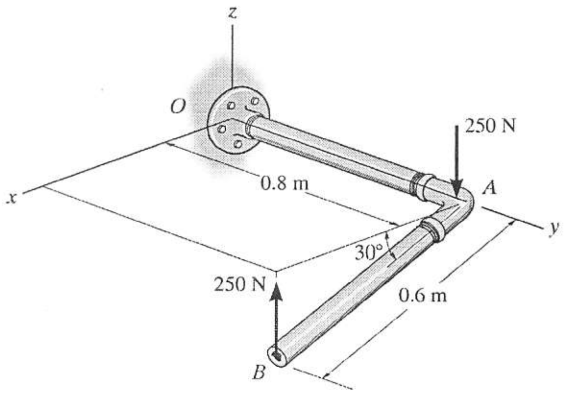
چنانچه از رابطه M = Fd که در آن d فاصله عمودی بین خطوط اثر زوج نیروی کوپل است استفاده شود (رجوع شود به شکل مقابل (c))، همین نتیجه نیز به‌دست می‌آید. ولی در این صورت محاسبه d دشوارتر است.



(c)

مثال ۴-۱۱

مطلوب است تعیین گشتاور کوپل اعمال شده به لوله‌ای مطابق شکل (a). قسمت AB از لوله به اندازه $30°$ به زیر صفحه x − y چرخیده است.

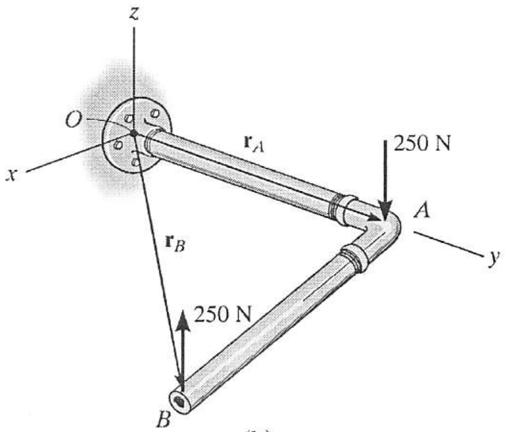


(a)

حل ۱ به روش بُرداری:

گشتاور دو نیروی کوپل را می‌توان حول هر نقطه دلخواه به‌دست آورد.

مثلاً اگر گشتاور این دو نیرو حول نقطه O مطابق شکل (b) در نظر گرفته شود، داریم:



(b)

$$\vec{M}=(\vec{r}_A\times-\vec{F})+(\vec{r}_B\times\vec{F})$$

که در آن:

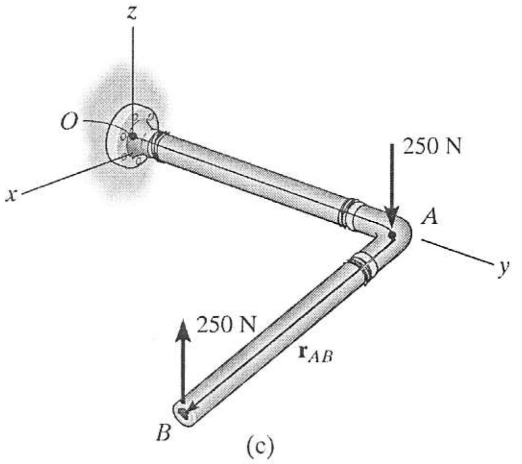
$$\vec{r}_A=\begin{pmatrix}0\\0{,}8\\0\end{pmatrix}\text{m}\ ;\ \vec{r}_B=\begin{pmatrix}0{,}6\cos 30°\\0{,}8\\-0{,}6\sin 30°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5196\\0{,}8\\-0{,}3\end{pmatrix}\text{m}$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}0\\0\\250\end{pmatrix}\text{N}\ ;\ -\vec{F}=\begin{pmatrix}0\\0\\-250\end{pmatrix}\text{N}$$

است. در نتیجه:

$$\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0{,}8&0\\0&0&-250\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0{,}5196&0{,}8&-0{,}3\\0&0&250\end{vmatrix}\text{Nm}$$

$$=\begin{pmatrix}-200\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200\\-130\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-130\\0\end{pmatrix}\text{Nm}\equiv\{-130\,\vec{j}\}\ \text{Nm}$$



(c)

محاسبه گشتاورهای نیروهای کوپل حول نقطه‌ای بر روی یکی از نیروها، مثلاً حول نقطه A ساده‌تر است(شکل(c)).

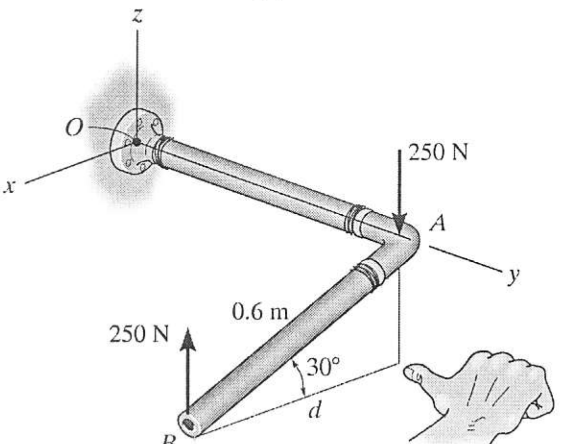
$$\vec{M}=\vec{r}_{AB}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0{,}6\cos 30°&0&-0{,}6\sin 30°\\0&0&250\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-130\\0\end{pmatrix}\text{Nm}$$

حل ۲ به روش اسکالر:

فاصله عمودی بین دو نیرو $d=0{,}6\cos 30°=0{,}5196\text{ m}$ است. در نتیجه اندازه گشتاور کوپل برابر است با:

$$M=Fd=250\cdot 0{,}5196=130\text{ Nm}$$

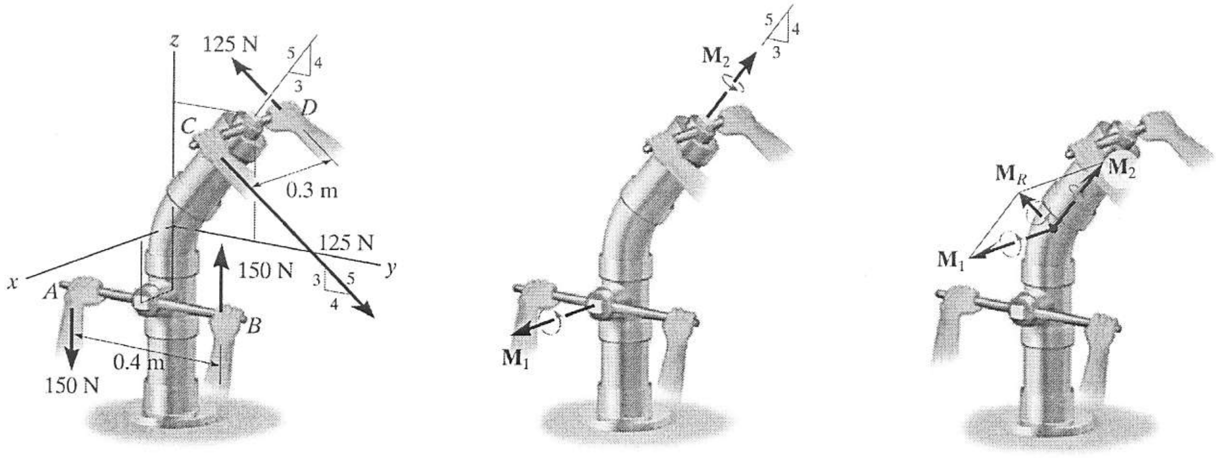
با توجه به قانون دست راست: $\vec{M}=\{-130\,\vec{j}\}\ \text{Nm}$



(d)

مثال ۴-۱۲

دو کوپل نشان‌داده شده در شکل (a) وارد بر لوله را با یک گشتاور کوپل برآیند جایگزین کنید.



(a) (b) (c)

حل به روش بُرداری:

اندازه گشتاور کوپل $\vec{M}_1$ ناشی از اعمال زوج نیروها در نقاط A و B به آسانی به‌روش اسکالر به‌دست می‌آید:

$$M_1 = Fd = 150 \cdot 0{,}4 = 60 \text{ Nm}$$

طبق قانون دست راست، $\vec{M}_1$ در امتداد $\vec{i}$ اثر می‌کند (شکل (b)):

$$\vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{Nm} \equiv \{60\,\vec{i}\}\ \text{Nm}$$

برای تعیین گشتاور کوپل $\vec{M}_2$ ناشی از زوج نیروها در نقاط C و D از روش برداری استفاده می‌شود: چنانچه گشتاور این نیروها حول نقطه D محاسبه شود، شکل (a):

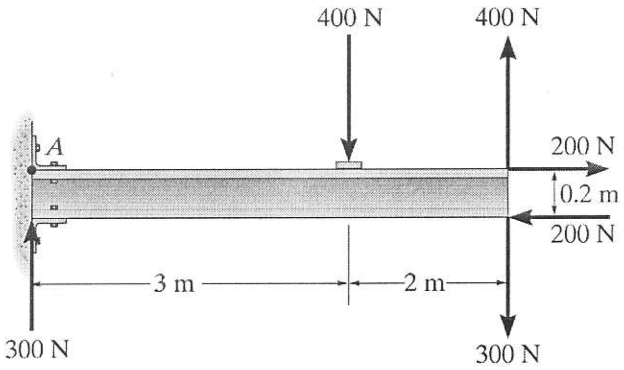
$$\vec{M}_2 = \vec{r}_{CD} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ (4/5)125 \\ -(3/5)125 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -75 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 22{,}5 \\ 30 \end{pmatrix} \text{Nm} \equiv \{22{,}5\,\vec{j} + 30\,\vec{k}\}\ \text{Nm}$$

چون $\vec{M}_1$ و $\vec{M}_2$ بُردارهای آزادند، می‌توان آنها را به هر نقطه دلخواه انتقال داده و با هم جمع بُرداری نمود، (شکل (c)). به این ترتیب گشتاور کوپل برآیند برابر خواهد بود با:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 22{,}5 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 22{,}5 \\ 30 \end{pmatrix} \text{Nm} \equiv \{60\,\vec{I} + 22{,}5\,\vec{J} + 30\,\vec{K}\}\ \text{Nm}$$

تمرین ۴-۱۹

گشتاور کوپل برآیند وارد بر تیری مطابق شکل را به‌دست آورید.

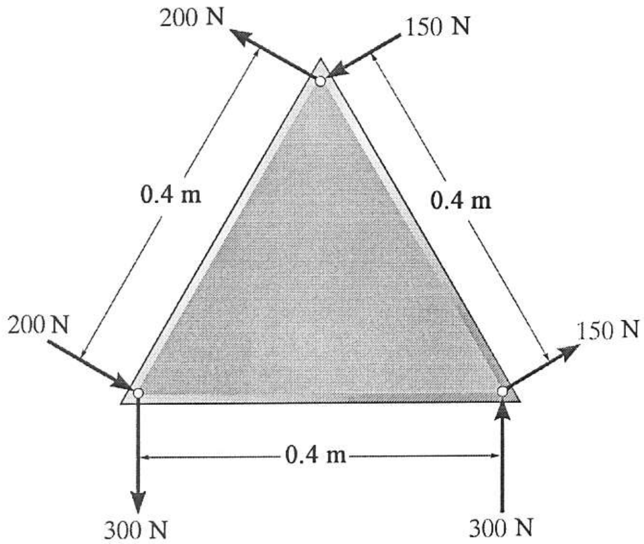


حل:

$\circlearrowleft + M_{CR} = \Sigma M_C$; $M_{CR} = (400 \cdot 2) - (300 \cdot 5) - (200 \cdot 0{,}2) = -740\ \text{Nm} = 740\ \text{Nm} \circlearrowright$

تمرین ۴-۲۰

گشتاور کوپل برآیند وارد بر صفحه‌ای مثلثی مطابق شکل را به‌دست آورید.

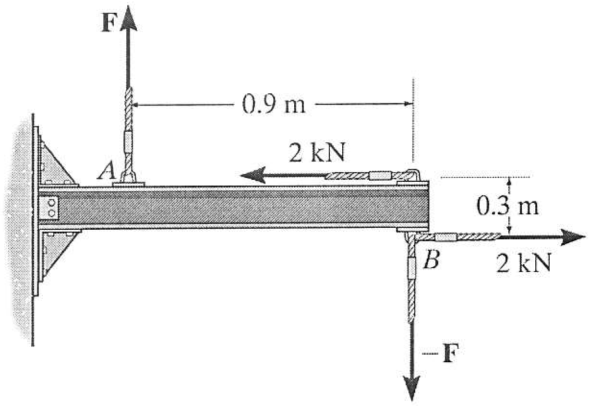


حل:

$\circlearrowleft + M_{CR} = \Sigma M_C$; $M_{CR} = (300 \cdot 0{,}4) + (150 \cdot 0{,}4) + (200 \cdot 0{,}4) = 260\ \text{Nm} \circlearrowleft$

تمرین ۴-۲۱

نیرو $\vec{F}$ را چنان تعیین کنید، که گشتاور کوپل برآیند وارد بر تیری مطابق شکل 1,5 kNm ساعت‌گرد شود.

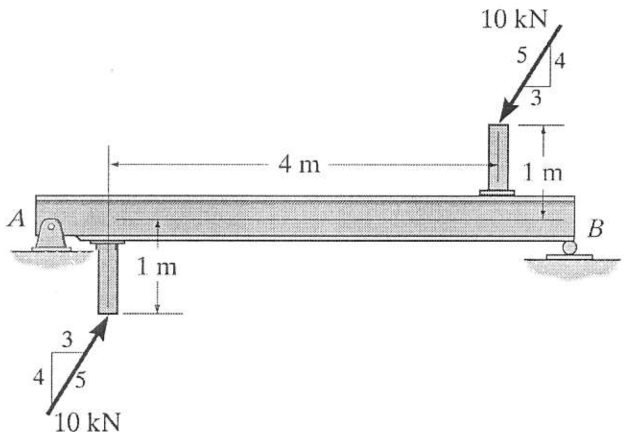


حل:

$\circlearrowleft + M_{CR} = \Sigma M_C$; $M_{CR} = -(0{,}9F) + (0{,}3 \cdot 2) = -1{,}5\ \text{kNm} \Rightarrow F = \dfrac{2{,}1}{0{,}9} = 2{,}333\ \text{kN}$

تمرین ۴-۲۲

گشتاور کوپل برآیند وارد بر تیری مطابق شکل را به‌دست آورید.

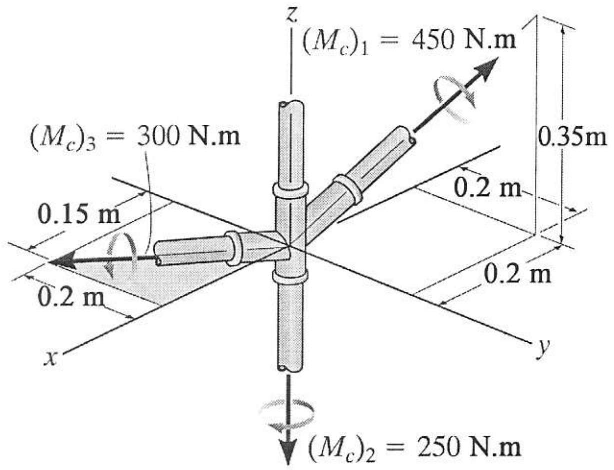


حل:

$$\circlearrowleft + M_{CR} = \Sigma M_C \; ; \quad M_{CR} = [(3/5)\cdot 10\cdot(1+1)] - [(4/5)\cdot 10\cdot 4] = -20 \text{ kNm} = 20 \text{ kNm} \circlearrowright$$

تمرین ۴-۲۳

گشتاور کوپل برآیند وارد بر سیستم لوله‌ای مطابق شکل را به‌دست آورید.



حل:

بُردارهای یکّه گشتاورهای کوپل:

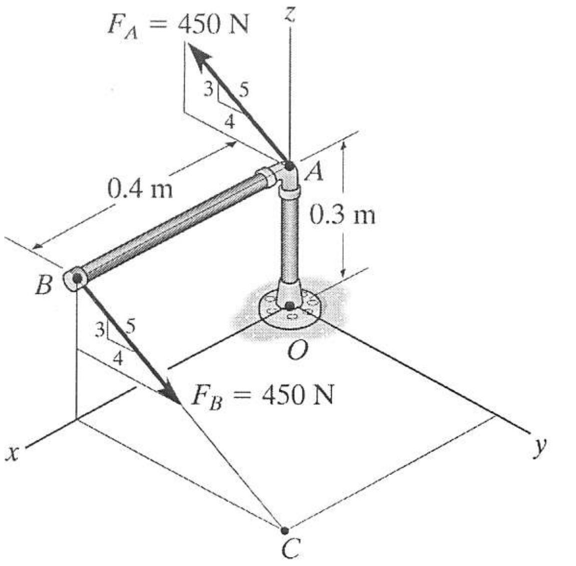
$$\vec{u}_{C1} = \frac{-0{,}2\,\vec{i} + 0{,}2\,\vec{j} + 0{,}35\,\vec{k}}{\sqrt{(-0{,}2)^2 + 0{,}2^2 + 0{,}35^2}} = \begin{pmatrix} -0{,}44\overline{4} \\ 0{,}44\overline{4} \\ 0{,}77\overline{7} \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{u}_{C2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{k} \; ; \quad \vec{u}_{C3} = \frac{0{,}15\,\vec{i} - 0{,}2\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}15^2 + (-0{,}2)^2}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

گشتاور برآیند کوپل‌ها:

$$\vec{M}_{CR} = \Sigma \vec{M}_{Ci} \; ; \qquad \vec{M}_{CR} = \vec{M}_{C1}\,\vec{u}_{C1} + \vec{M}_{C2}\,\vec{u}_{C2} + \vec{M}_{C3}\,\vec{u}_{C3}$$

$$\vec{M}_{CR} = 450\begin{pmatrix} -0{,}444 \\ 0{,}444 \\ 0{,}777 \end{pmatrix} + 250\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 300\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \\ 350 \end{pmatrix}\text{Nm} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{pmatrix}\text{Nm} + \begin{pmatrix} 180 \\ -240 \\ 0 \end{pmatrix}\text{Nm} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_{CR} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ 100 \end{pmatrix}\text{Nm} \equiv \{-20\,\vec{i} - 40\,\vec{j} + 100\,\vec{k}\}\text{Nm} \; ; \quad M_{CR} = \sqrt{(-20)^2 + (-40)^2 + 100^2} = 109{,}545 \text{ Nm}$$



تمرین ۴-۲۴

گشتاور کوپل وارد بر سیستم لوله‌ای مطابق شکل را به‌دست آورده و نتیجه را به صورت بردار دکارتی نشان دهید.

حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} m \quad ; \quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} m \quad ; \quad \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -(4/5)\cdot 450 \\ (3/5)\cdot 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -360 \\ 270 \end{pmatrix} N \quad ; \quad \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ (4/5)\cdot 450 \\ -(3/5)\cdot 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 360 \\ -270 \end{pmatrix} N$$

راه حل اول – گشتاورگیری حول نقطه O:

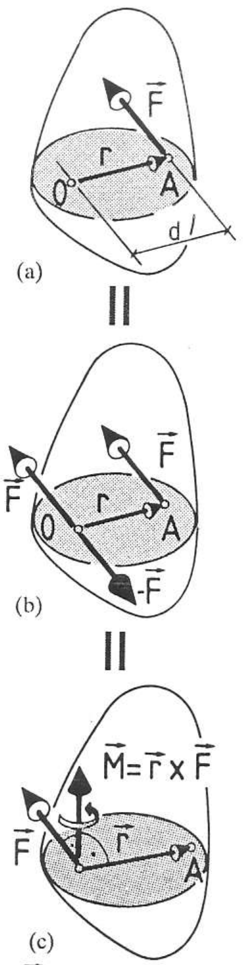
$$\vec{M}_{CR} = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & -360 & 270 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 360 & -270 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -108 \\ 108 \\ 144 \end{pmatrix} Nm$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_{CR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 108 \\ 144 \end{pmatrix} Nm \equiv \{108\,\vec{j} + 144\,\vec{k}\}\ Nm \quad \Rightarrow \quad M_{CR} = \sqrt{108^2 + 144^2} = 180\ Nm$$

راه حل دوم – گشتاورگیری حول نقطه A:

$$\vec{M}_{CR} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 360 & -270 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 108 \\ 144 \end{pmatrix} Nm \equiv \{108\,\vec{j} + 144\,\vec{k}\}\ Nm \Rightarrow M_{CR} = 180\ Nm$$

۴-۷ ساده کردن و معادلسازی نیرو و کوپل



$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

$M=F\cdot d$ با

جابه‌جایی موازی یک نیرو:

می خواهیم شرایطی را به‌دست آوریم که بر اساس آن بتوان یک نیروی $\vec{F}$، که به نقطه‌ای از جسم مانند A اثر می کند را به موازات خود جابه‌جا نمود و یک سیستم هم‌ارز را به‌دست آورد. برای این منظور، همان‌طور که در شکل (b) نشان‌داده شده است یک زوج نیروی کمکی مساوی نیروی $\vec{F}$ و مخالف هم را به نقطه‌ای که می خواهیم به آنجا جابه‌جا کنیم (نقطه O) در نظر می‌گیریم. اکنون می توان این نیروها را به صورت یک نیروی $\vec{F}$ در نقطه O به عنوان یک نیروی منفرد و همچنین یک زوج نیروی $-\vec{F}$ در O و $\vec{F}$ در A به عنوان کوپل نیرو با گشتاور $\vec{M} = \vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$ خلاصه نمود. به این ترتیب طوری که در شکل (c) نیز نشان‌داده شده است نیروی $\vec{F}$ از نقطه A به‌موازات خود تا نقطه O جابه‌جا شد، اما در این حال یک کوپل نیرو نیز به آن افزوده گردید، که گشتاور آن با گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه O برابر است:

$$\vec{M} = \vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$$

مقدار این گشتاور $M = Fd$ است، که در آن d فاصله نقطه O از خط اثر اولیه نیروی $\vec{F}$ است.

بایستی توجه داشت که در اثر جابه‌جا کردن یک نیروی $\vec{F}$ به‌موازات خود، گشتاور به وجود آمده $\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$ بر نیروی $\vec{F}$ عمود است.

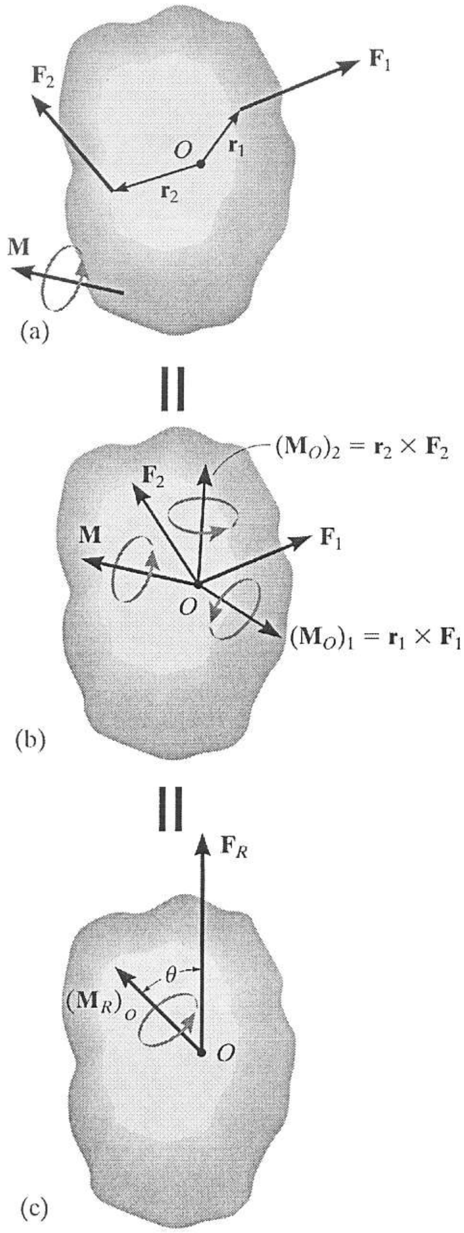
این نتیجه مهم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

> یک نیروی $\vec{F}$ با نقطه اثر A معادل (هم‌ارز) است با یک سیستم با نقطه اثر O متشکل از نیروی اولیه $\vec{F}$ و یک کوپل نیرو، که گشتاور آن $\vec{M}$ با گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول نقطه O برابر می‌باشد، $\vec{M} = \vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$ (هم‌ارز بودن سیستم‌ها در شکل‌های (a) و (c)).

و یا به عبارت دیگر:

یک نیروی $\vec{F}$ را می‌توان از نقطه A به نقطه O به‌موازات خود جابه‌جا نمود، به شرطی که یک گشتاور $\vec{M} = \vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$ به آن اضافه گردد.

ساده کردن سیستمی از نیروها و گشتاورهای کوپل:



چنانچه سیستمی متشکل از چندین نیرو و گشتاور کوپل (شکل (a)) موجود باشد می‌توان آن را به یک نیروی برآیند در نقطه O و یک گشتاور کوپل برآیند معادل‌سازی نمود. مثلاً نقطه O روی خط اثر نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ واقع نیست و بنابراین می‌توان این نیروها را به نقطه O منتقل نمود، به شرط آن‌که علاوه بر این گشتاورهای کوپل $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ و $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ نیز به جسم اعمال شوند. همچنین از آنجایی‌که گشتاور کوپل $\vec{M}$ بُرداری آزاد است، می‌توان آن را نیز به نقطه O منتقل نمود. به این ترتیب سیستم هم‌ارزی به‌دست می‌آید که در شکل (b) نشان‌داده شده است. اکنون اگر نیروها و گشتاورهای کوپل را جمع کنیم، نیروی برآیند $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ و گشتاور کوپل برآیند $(\vec{M}_R)_O = \vec{M} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ به‌دست می‌آیند، شکل (c).

توجه به این نکته ضروری است که $\vec{F}_R$ مستقل از محل نقطه O است، ولی در عین حال $(\vec{M}_R)_O$ به این محل وابسته است، زیرا گشتاورهای $\vec{M}_1$ و $\vec{M}_2$ با استفاده از بردارهای مکان $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ تعیین می‌شوند. به علاوه باید توجه داشت که $(\vec{M}_R)_O$ بُردار آزاد است و می‌تواند در هر نقطه از جسم اثر کند، اگر چه عموماً نقطه O نقطه اثر آن در نظر گرفته می‌شود.

با استفاده از دو معادله بُرداری زیر می‌توان روش فوق را برای معادل‌سازی سیستمی از نیروها و گشتاورها و تبدیل آنها به یک نیروی برآیند $\vec{F}_R$، که به نقطه O اثر می‌کند و گشتاور کوپل برآیند $(\vec{M}_R)_O$ تعمیم داد.

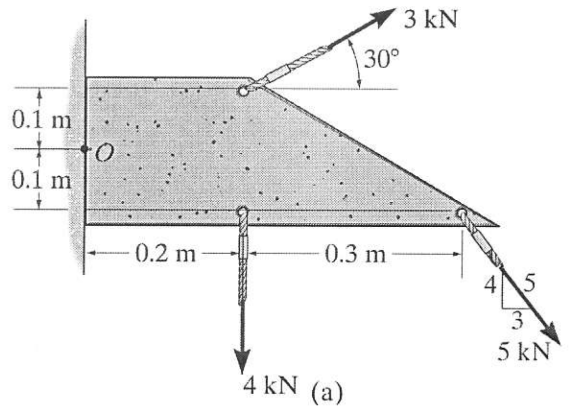
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_R &= \Sigma \vec{F} \\ (\vec{M}_R)_O &= \Sigma \vec{M}_O + \Sigma \vec{M} \end{aligned}}$$

معادله اول نشان می‌دهد که نیروی برآیند سیستم ساده شده با جمع همه نیروها هم‌ارز است و بنا به معادله دوم گشتاور کوپل برآیند سیستم ساده شده با جمع همه گشتاورهای کوپل ($\Sigma \vec{M}$)، به اضافه گشتاورهای همه نیروها حول نقطه O، یعنی $\Sigma \vec{M}_O$ هم‌ارز است. چنانچه این سیستم نیرو در صفحه مثلاً $x-y$ باشد و همه گشتاورهای کوپل بر این صفحه عمود باشند، آن‌گاه معادله‌های بالا به سه معادله اسکالر تبدیل می‌گردند.

$$\boxed{\begin{aligned} (F_R)_x &= \Sigma F_x \\ (F_R)_y &= \Sigma F_y \\ (M_R)_O &= \Sigma M_O + \Sigma M \end{aligned}}$$

در اینجا نیروی برآیند از جمع بُرداری دو مؤلفه آن، یعنی $(F_R)_x$ و $(F_R)_y$ به‌دست می‌آید.

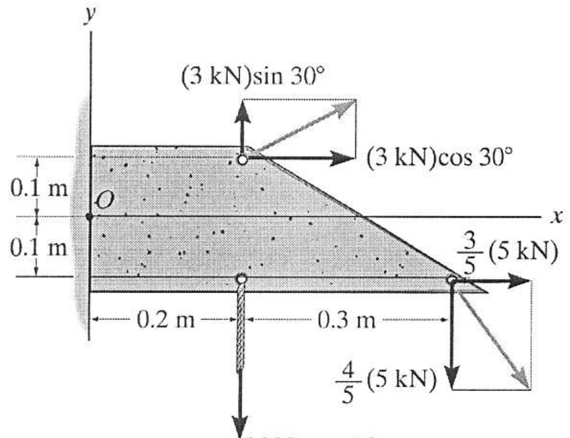
مثال ۴-۱۳



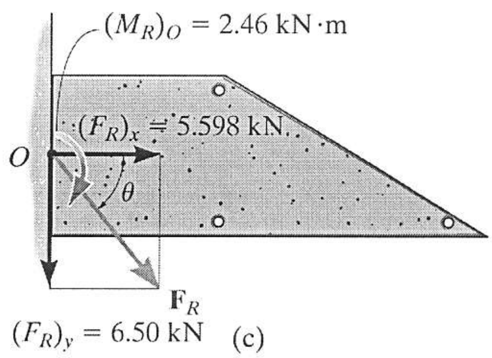
(a)

سیستم نیرو و کوپلی مطابق شکل (a) را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه O جایگزین کنید.

حل:



(b)



(c)

جمع نیروها: ابتدا هر دو نیروی 3 kN و 5 kN به دو مؤلفه افقی و عمودی مطابق شکل (b) تجزیه می شوند. در نتیجه:

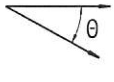
$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x = 3\cos 30^\circ + (\frac{3}{5})\, 5 = 5{,}598 \text{ kN}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = 3\sin 30^\circ - (\frac{4}{5}) 5 - 4 = -6{,}50 \text{ kN}$$

اندازه و امتداد نیروی برآیند که در شکل (c) نشان‌داده شده برابرند با:

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{5{,}598^2 + (-6{,}50)^2} = 8{,}58 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = \tan^{-1}(\frac{6{,}50}{5{,}598}) = 49{,}3^\circ$$



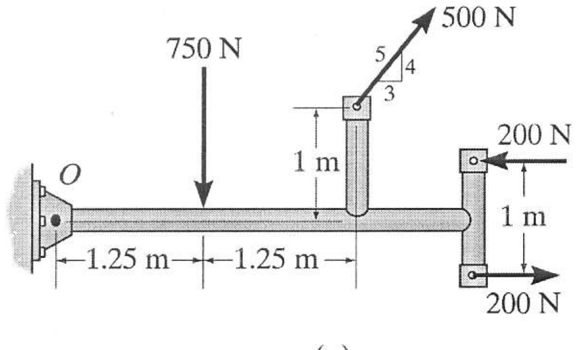
جمع گشتاورها: گشتاورهای دو نیروی 3 kN و 5 kN حول نقطه O با استفاده از مؤلفه‌های افقی وعمودی نیروها تعیین می‌گردند. با توجه به شکل (b) نتیجه می شود:

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O \;:\; (M_R)_O = [3\sin 30^\circ \cdot 0{,}2] - [3\cos 30^\circ \cdot 0{,}1] + [(\frac{3}{5}) \cdot 5 \cdot 0{,}1] - [(\frac{4}{5}) \cdot 5 \cdot 0{,}5] - [4 \cdot 0{,}2] \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow \qquad (M_R)_O = -2{,}46 \text{ kNm} = 2{,}46 \text{ kNm} \circlearrowright$$

این نتیجه در شکل (c) نشان‌داده شده است.

توجه داشته باشید که نتایج و آثار خارجی یا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در شکل (c) با نتایج و آثار خارجی سیستم نیروهای شکل (a) یکسان است.



(a)

مثال ۴-۱۴

سیستم نیرو و کوپلی مطابق شکل (a) را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه O جایگزین کنید.

حل:

جمع نیروها: از آنجایی‌که نیروهای کوپل 200 N مساوی و مخالف هم هستند، برآیند آنها صفر است. بنابراین نیازی به منظور کردن آن‌ها در جمع نیروها نیست. نیروی 500 N نیز ابتدا به دو مؤلفه افقی و عمودی تجزیه می‌گردد، در نتیجه:

$$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x = (\frac{3}{5})\,500 = 300\text{ N}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = -750 + (\frac{4}{5})\,500 = -350\text{ N}$$

اندازه و امتداد نیروی برآیند که در شکل (b) نشان‌داده شده برابرند با:

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{300^2 + (-350)^2} = 461\text{ N}$$

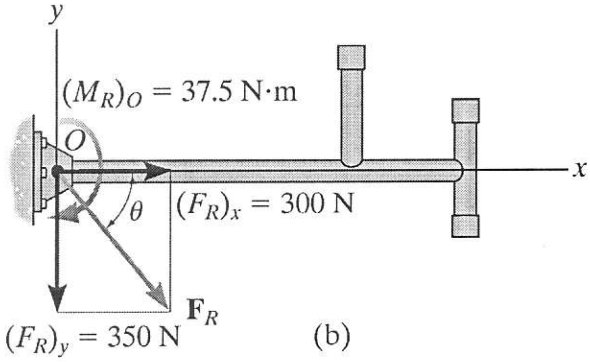
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = \tan^{-1}(\frac{350}{300}) = 49{,}4^\circ$$

جمع گشتاورها: چون گشتاور کوپل دو نیروی 200 N بُرداری آزاد است و می‌تواند به هر نقطه دلخواه از جمله نقطه O اثر کند. در نتیجه گشتاور برآیند سیستم نیروها برابر است با:

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O \;:\; (M_R)_O = -[750 \cdot 1{,}25]\text{ Nm} + [(\frac{4}{5})500 \cdot 2{,}5]\text{ Nm} - [(\frac{3}{5})\,500 \cdot 1]\text{ Nm} + [200 \cdot 1]\text{ Nm}$$

$$\Rightarrow \quad (M_R)_O = -37{,}5\text{ Nm} = 37{,}5\text{ Nm} \circlearrowright$$

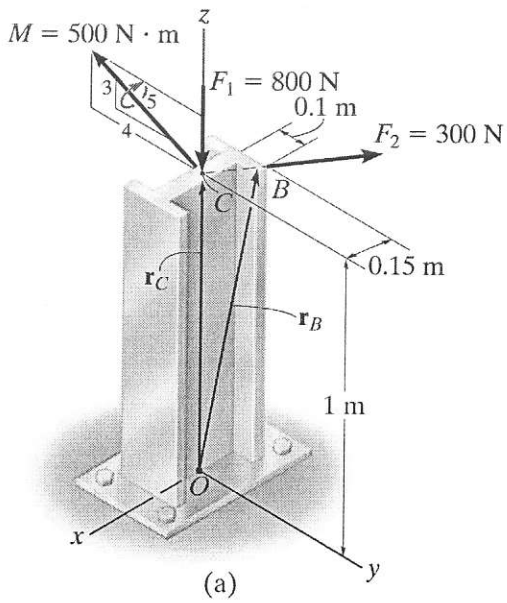
این نتیجه نیز در شکل (b) نشان‌داده شده است.



(b)

مثال ۴-۱۵

عضو یک سازه مطابق شکل (a) در معرض گشتاور کوپل $\vec{M}$ و دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل قرار دارد. این سیستم نیرو و کوپل را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در پای این عضو در نقطه O جایگزین کنید.



(a)

حل: (تحلیل بُرداری)

ابتدا گشتاور کوپل و نیروها به صورت دکارتی بیان می‌گردند:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(4/5)500 \\ (3/5)500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -400 \\ 300 \end{pmatrix} \text{Nm} \quad ; \quad \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m} \quad ; \quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -0{,}15 \\ 0{,}1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m} \Rightarrow \quad \vec{r}_{CB} = \begin{pmatrix} -0{,}15 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

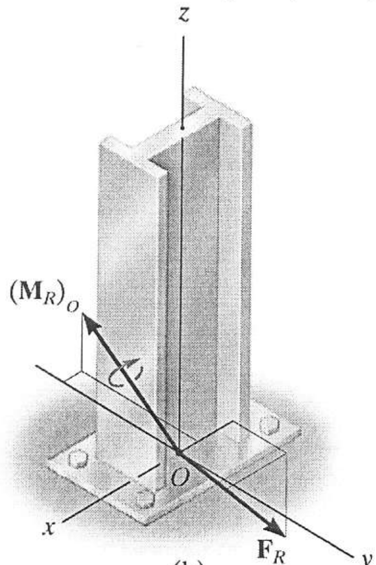
و

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -800 \end{pmatrix} \text{N} \quad ; \quad \vec{F}_2 = F_2\,\vec{u}_{CB} = 300\frac{\vec{r}_{CB}}{r_{CB}} = 300\frac{\{-0{,}15\,\vec{i} + 0{,}1\,\vec{j}\}}{\sqrt{(-0{,}15)^2 + 0{,}1^2}} = \begin{pmatrix} -250 \\ 166 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N}$$

جمع نیروها:

$$\vec{F}_R = \Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -800 \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} -250 \\ 166 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N} = \begin{pmatrix} -250 \\ 166 \\ -800 \end{pmatrix} \text{N} \equiv \{-250\,\vec{i} + 166\,\vec{j} - 800\,\vec{k}\}$$

جمع گشتاورها:



(b)

$$\vec{M}_{RO} = \Sigma\vec{M} + \Sigma\vec{M}_O$$

$$\vec{M}_{RO} = \vec{M} + \vec{r}_C \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_{RO} = \begin{pmatrix} 0 \\ -400 \\ 300 \end{pmatrix} \text{Nm} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -800 \end{vmatrix} \text{Nm} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0{,}15 & 0{,}1 & 1 \\ -250 & 166 & 0 \end{vmatrix} \text{Nm}$$

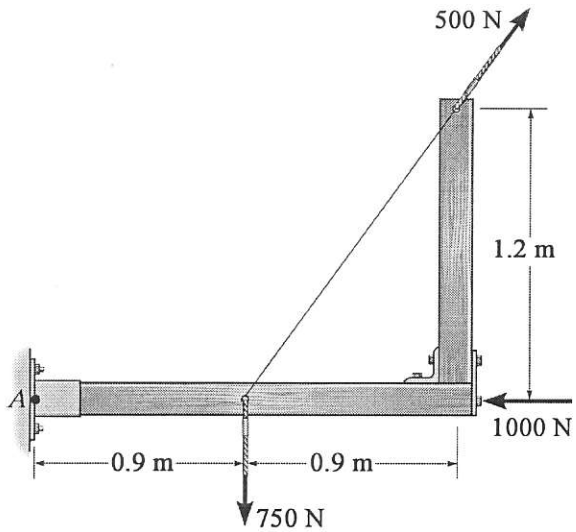
$$\vec{M}_{RO} = \begin{pmatrix} 0 \\ -400 \\ 300 \end{pmatrix} \text{Nm} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{Nm} + \begin{pmatrix} (0-166) \\ -(0+250) \\ (-25+25) \end{pmatrix} \text{Nm}$$

$$\vec{M}_{RO} = \begin{pmatrix} -166 \\ -650 \\ 300 \end{pmatrix} \text{Nm} \equiv \{-166\,\vec{i} - 650\,\vec{j} + 300\,\vec{k}\} \text{ Nm}$$

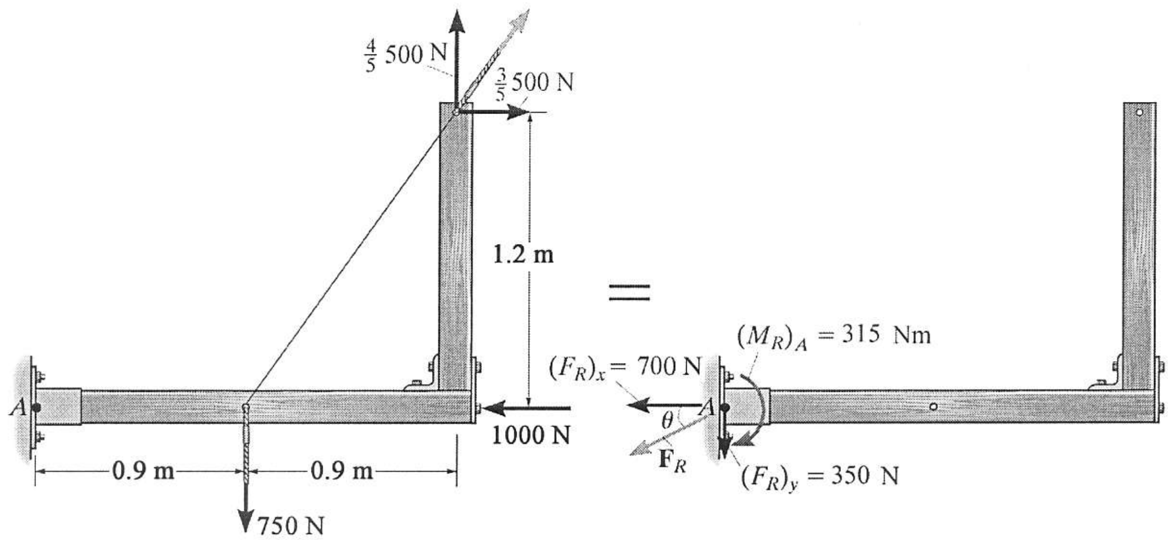
این نتیجه در شکل (b) نشان‌داده شده است.

تمرین ۴-۲۵

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه A جایگزین کنید.



حل:



جمع نیروها:

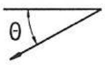
$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x = (\frac{3}{5})\ 500 - 1000 = -700\ N$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = -750 + (\frac{4}{5}) 500 = -350\ N$$

اندازه و امتداد نیروی برآیند که در شکل نشان‌داده شده‌اند برابرند با:

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{(-700)^2 + (-350)^2} = 782{,}624\ N$$

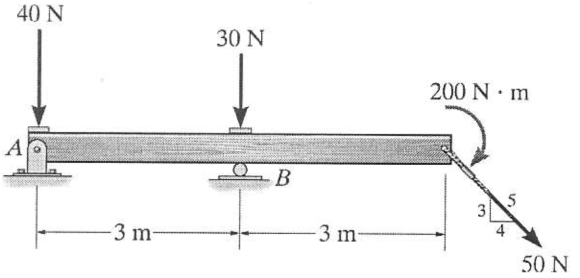
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = \tan^{-1}(\frac{350}{700}) = 26{,}565°$$



جمع گشتاورها:

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A \ :\ (M_R)_A = -[750 \cdot 0{,}9]\ Nm + [(\frac{3}{5}) 500 \cdot 1{,}2]\ Nm + [(\frac{4}{5})\ 500 \cdot 1{,}8]\ Nm = -37{,}5\ Nm$$

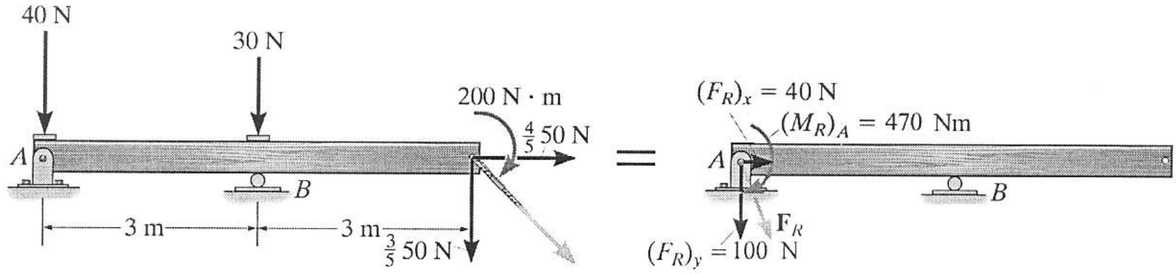
$$\Rightarrow \quad (M_R)_A = 37{,}5\ Nm \circlearrowright$$



تمرین ۴-۲۶

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه A جایگزین کنید.

حل:



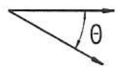
$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x = (\frac{4}{5})\ 500 = 40\ \text{N}$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = -40 - 30 - (\frac{3}{5}) 500 = -100\ \text{N}$

$\Rightarrow$

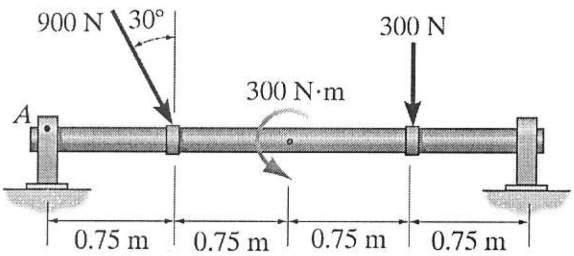
$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = 107{,}703\ \text{N}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{|(F_R)_y|}{|(F_R)_x|}\right) = 68{,}198°$



$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A + \Sigma M \ :\ (M_R)_A = -[30 \cdot 3]\ \text{Nm} + [(\frac{3}{5}) 50 \cdot 6]\ \text{Nm} - 200\ \text{Nm} = -470\ \text{Nm}$

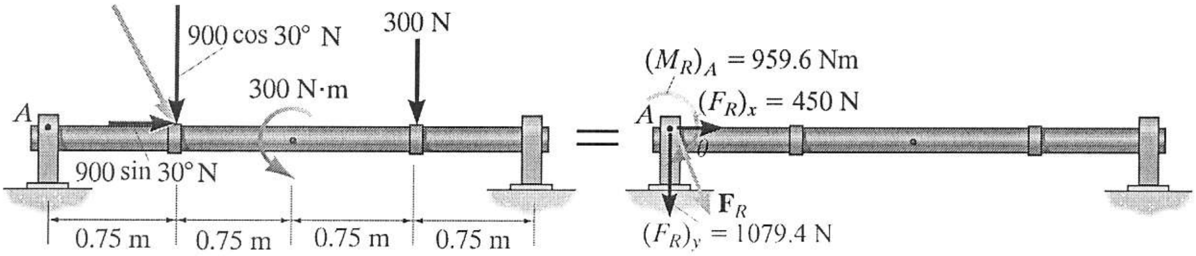
$\Rightarrow \quad (M_R)_A = 37{,}5\ \text{Nm} \curvearrowright$



تمرین ۴-۲۷

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه A جایگزین کنید.

حل:



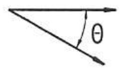
$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = 900\ \sin 30° = 450\ \text{N}$

$+\uparrow\ (F_R) y = -900 \cos 30° - 300 = -1079{,}4\ \text{N}$

$\Rightarrow$

$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = 1169{,}5\ \text{N}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{|(F_R)_y|}{|(F_R)_x|}\right) = 68{,}2°$

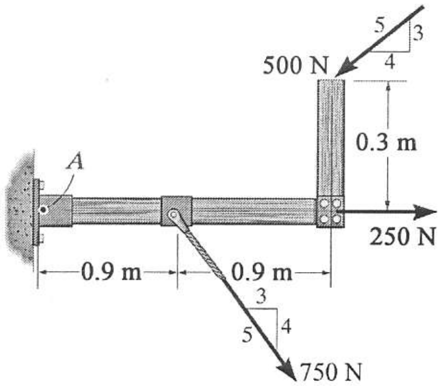


$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma (M_i)_A = 300 - (900 \cos 30° \cdot 0{,}75) - (300 \cdot 2{,}25) = -959{,}567\ \text{Nm}$

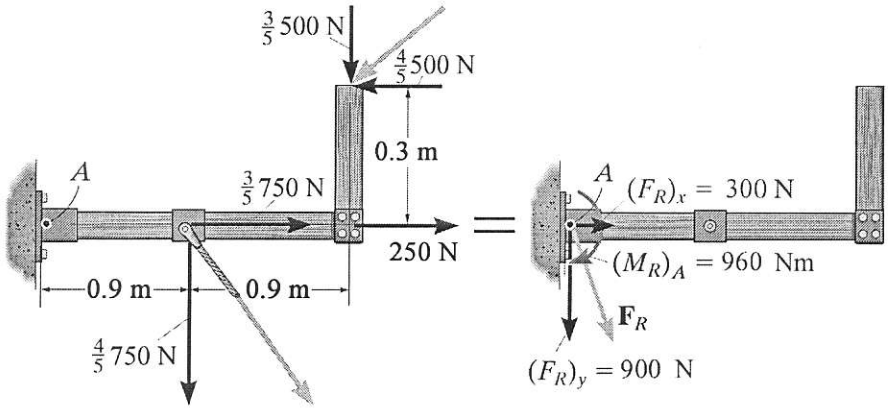
$\Rightarrow \quad (M_R)_A = 959{,}567\ \text{Nm} \curvearrowright$

تمرین ۴-۲۸

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه A جایگزین کنید.



حل:

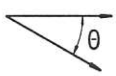


$$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x = -(\frac{4}{5})\,500 + 250 + (\frac{3}{5})750 = 300 \text{ N}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = -(\frac{3}{5})500 - (\frac{4}{5})750 = -900 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = 948{,}683 \text{ N}$$

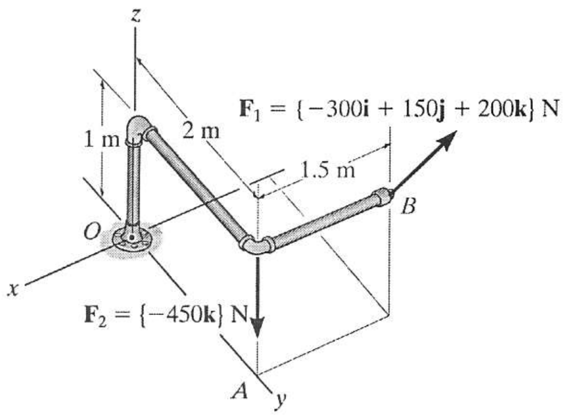
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{|(F_R)_y|}{|(F_R)_x|}\right) = 71{,}6°$$



$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A + \Sigma M \;:\; (M_R)_A = -[(\frac{4}{5})750 \cdot 0{,}9] + [(\frac{4}{5})500 \cdot 0{,}3] - [(\frac{3}{5})500 \cdot 1{,}8] = -960 \text{ Nm}$$

تمرین ۴-۲۹

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه O جایگزین کنید.



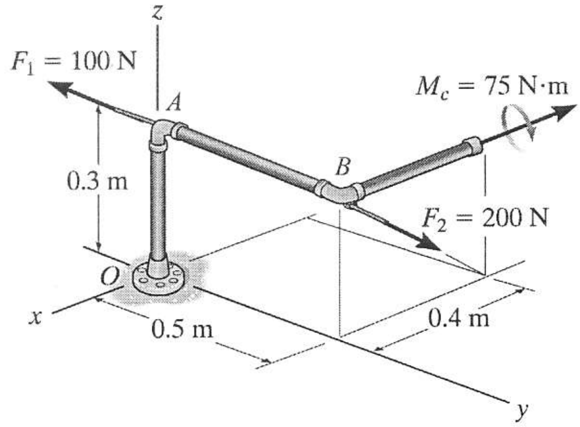
حل:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \;;\; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m} \quad \text{و} \quad \vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} \text{N} \equiv \{-300\,\vec{i} + 150\,\vec{j} + 250\,\vec{k}\}\text{N}$$

$$\vec{M}_{RO} = \vec{r}_B \times \vec{F}_1 + \vec{r}_A \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1{,}5 & 2 & 1 \\ -300 & 150 & 200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -450 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 375 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -900 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -650 \\ 0 \\ 375 \end{pmatrix} \text{Nm}$$

$$\vec{M}_{RO} = \{-650\,\vec{i} + 375\,\vec{k}\} \text{ Nm}$$

تمرین ۴-۳۰



سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با سیستم هم‌ارز نیروی برآیند و گشتاور کوپل برآیند در نقطه O جایگزین کنید.

حل:

جمع نیروها:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} N \;\; ; \;\; \vec{F}_2 = F_2 \frac{\{-0{,}4\,\vec{i} - 0{,}3\,\vec{k}\}}{\sqrt{(-0{,}4)^2 + (-0{,}3)^2}} = 200 \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} -160 \\ 0 \\ -120 \end{pmatrix} N \;;\; M_c = \begin{pmatrix} -75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Nm$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -160 \\ 0 \\ -120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -160 \\ -100 \\ -120 \end{pmatrix} N \equiv \{-160\,\vec{i} - 100\,\vec{j} - 120\,\vec{k}\} N$$

جمع گشتاورها:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} m \;\; ; \;\; \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} m \;\; \Rightarrow$$

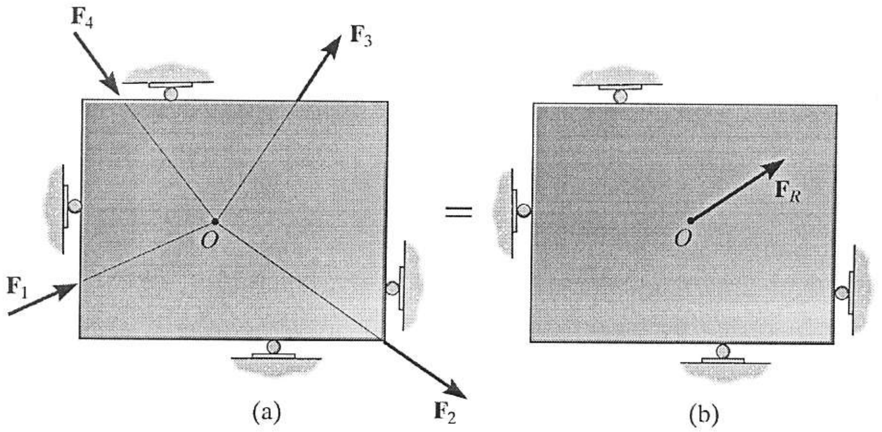
$$\vec{M}_{RO} = \vec{M}_c + \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Nm + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & -100 & 0 \end{vmatrix} Nm + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ -160 & 0 & -120 \end{vmatrix} Nm \;\Rightarrow$$

$$\vec{M}_{RO} = \begin{pmatrix} -75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -60 \\ -48 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -105 \\ -48 \\ 80 \end{pmatrix} Nm \equiv \{-105\,\vec{i} - 48\,\vec{j} + 80\,\vec{k}\}\; Nm$$

۸-۴ ساده کردن بیشتر سیستم نیرو و گشتاور کوپل

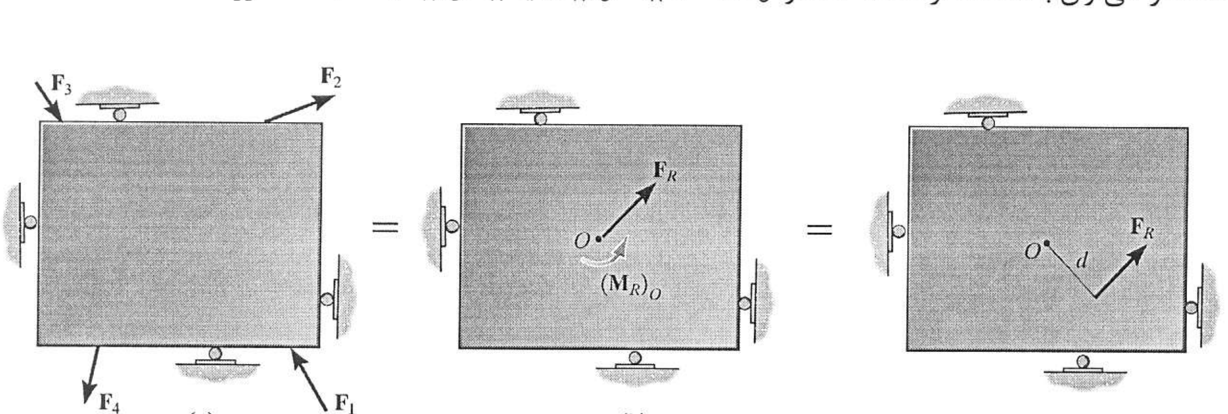
یک سیستم نیرو و گشتاور کوپل، که به یک نیروی برآیند و یک گشتاور برآیند هم ارز ساده شده است را می توان، به شرطی‌که راستای نیروی برآیند $\vec{F}_R$ و گشتاور برآیند $(\vec{M}_R)_O$ بر هم عمود باشند باز هم ساده‌تر نمود و این در صورتی است که سیستم نیروها یا هم‌رَس، یا هم‌صفحه و یا موازی هم باشند.

سیستم نیروی هم‌رَس: چون در این سیستم راستای نیروها همدیگر را در یک نقطه مشترک O قطع می‌کنند، این سیستم نیرو هیچ گشتاوری حول این نقطه ایجاد نمی‌کند، شکل زیر (a). بنابراین این سیستم نیرو را می‌توان فقط با یک نیروی برآیند هم‌ارز $\vec{F}_R = \Sigma\vec{F}$ که در نقطه O اثر می‌کند نمایش داد، شکل زیر (b).



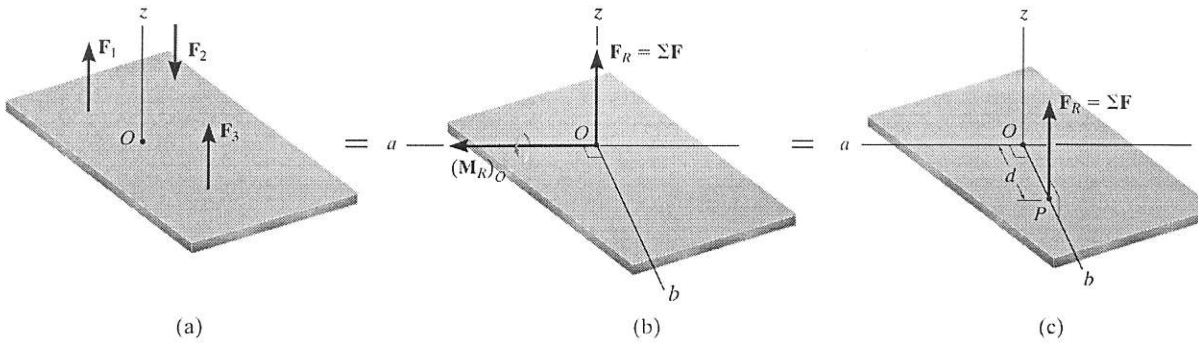
(a) (b)

سیستم نیروی هم‌صفحه: در سیستم نیروی هم‌صفحه راستای کلیه نیروها و در نتیجه نیروی برآیند $\vec{F}_R = \Sigma\vec{F}$ در صفحه نیروها واقع‌اند، شکل زیر (a) و (b). به علاوه گشتاور هر یک از نیروها حول نقطه‌ای مانند O در صفحه بر این صفحه عمود است. بنابراین گشتاور $(\vec{M}_R)_O$ و نیروی $\vec{F}_R$ بر هم عمود خواهند بود. برای جایگزین کردن این گشتاور برآیند می‌توان نیروی برآیند $\vec{F}_R$ را به اندازه فاصله عمودی d (یا بازوی گشتاور از نقطه O) جابه‌جا نمود، به طوری‌که $\vec{F}_R$ همان گشتاور $(\vec{M}_R)_O$ را حول نقطه O ایجاد کند، شکل زیر (c). این فاصله را می‌توان با استفاده از معادله اسکالر $(M_R)_O = F_R\, d = \Sigma M_O$ یا $d = (M_R)_O / F_R$ بدست آورد.

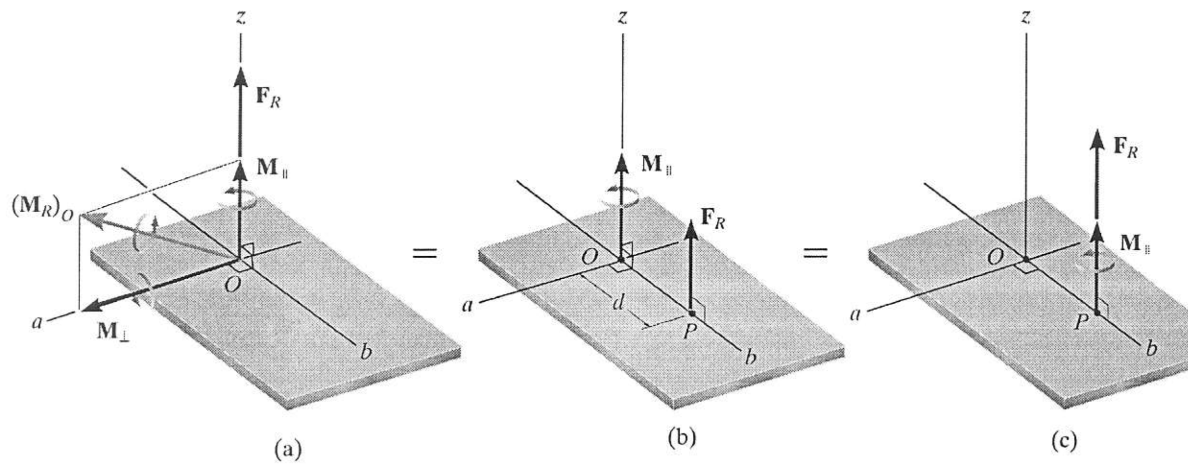


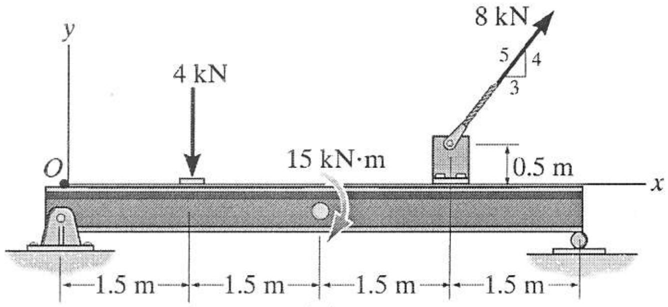
(a) (b) (c)

سیستم نیروی موازی: وقتی نیروها همه به موازات یک راستا، مثلاً در امتداد محور z قرار داشته باشند، نیروی برآیند آنها $\vec{F}_R = \Sigma\vec{F}$ در نقطه O نیز با این محور موازی است. گشتاور هر یک از نیروها حول نقطه O نیز در صفحه‌ای واقع است که بر محور Z در نقطه O عمود بوده و در نتیجه گشتاور برآیند $(\vec{M}_R)_O$ نیز در همین صفحه در امتداد محور a واقع خواهد بود، زیرا $\vec{F}_R$ و $(\vec{M}_R)_O$ بر هم عمود می‌باشند. بنابراین این سیستم نیرو را می توان با یک نیروی برآیند $\vec{F}_R$ جایگزین نمود، که در نقطه P روی محور b، که هم بر محور a و هم بر محور Z عمود است اثر می‌کند، شکل زیر (c). فاصله نقطه P از نقطه O، یعنی فاصله d بر روی این محور از رابطه $(M_R)_O = F_R\, d = \Sigma M_O$ به‌دست می‌آید: $d = \Sigma M_O / F_R$



تبدیل به پیچ نیرو: همان‌طورکه مشاهده شد به طور کلی هر سیستم نیرو و گشتاور کوپل سه بُعدی را می‌توان به صورت یک نیروی برآیند $\vec{F}_R$ و یک گشتاور کوپل برآیند $(\vec{M}_R)_O$، که مطابق شکل زیر (a) بر هم عمود نیستند خلاصه نمود. هرچند چنین سیستم نیرو و گشتاور کوپل را نمی‌توان فقط به یک نیروی برآیند هم‌ارز خلاصه کرد، اما گشتاور کوپل برآیند $(\vec{M}_R)_O$ را می‌توان ابتدا به دو مؤلفه موازی راستای $\vec{F}_R$ و عمود بر آن تجزیه نمود (شکل زیر (a)) و سپس مؤلفه عمودی $\vec{M}_\perp$ آن‌را حذف نمود، به شرط آن‌که $\vec{F}_R$ به نقطه P به اندازه d روی محور b از نقطه O در جهتی جابه‌جا شود که گشتاوری به اندازه $(M_R)_O$ ایجاد کند. محور b هم بر محور a و هم بر محور z و در نتیجه بر راستای $\vec{F}_R$ عمود است. محل نقطه P را می‌توان از رابطه $d = M_\perp / F_R$ به‌دست آورد. و سرانجام چون $\vec{M}_\parallel$ بُرداری آزاد است می‌توان آن را به نقطه P منتقل نمود، شکل زیر (c). به این ترتیب سیستم هم‌ارز به دست آمده ترکیبی است از نیروی برآیند $\vec{F}_R$ و گشتاور کوپل هم راستای آن $\vec{M}_\parallel$. این سیستم گرایش به انتقال جسم در راستای $\vec{F}_R$ و همزمان دوران آن حول محور خود را دارد و به آن **پیچ نیرو** یا **رنچ** گفته می‌شود. پیچ نیرو ساده‌ترین سیستم هم‌ارزی است که می‌تواند معرف هر سیستم نیرو و گشتاور کوپل وارد بر یک جسم باشد.





(a)

مثال ۴-۱۶

سیستم نیرو و گشتاور کوپل اعمال شده به تیر شکل (a) را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و محل تقاطع خط اثر آن‌را با تیر نسبت به نقطه O به‌دست آورید.

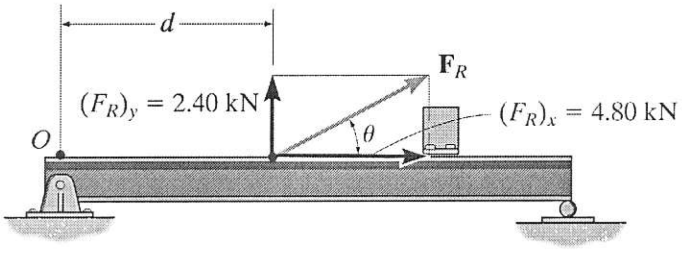
حل:

جمع نیروها:

از جمع کردن مؤلفه‌های نیرو نتیجه می‌شود:

$$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x; \qquad (F_R)_x = (\frac{3}{5})\,8 = 4{,}80 \text{ kN}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \qquad (F_R)_y = -4 + (\frac{4}{5})8 = 2{,}40 \text{ kN}$$



(b)

اندازه و امتداد نیروی برآیند $\vec{F}_R$ که در شکل (b) نشان‌داده شده برابرند با:

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{4{,}80^2 + 2{,}40^2} = 5{,}37 \text{ kN}$$

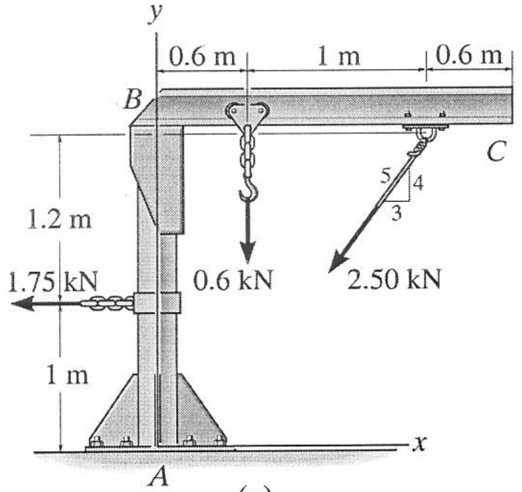
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = \tan^{-1}(\frac{2{,}40}{4{,}80}) = 26{,}6^\circ$$

جمع گشتاورها: گشتاور کوپل نیروی $\vec{F}_R$ در شکل (b) حول نقطه O بایستی با جمع گشتاورهای سیستم نیرو و کوپل حول نقطه O در شکل (a) برابر باشد. چون راستای $(F_R)_x$ از نقطه O می‌گذرد، فقط $(F_R)_y$ حول این نقطه گشتاور ایجاد می‌کند. بنابراین:

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \quad 2{,}40\, d \text{ kNm} = -[4 \cdot 1{,}5] \text{ kNm} - [15] \text{ kNm} - [(\frac{3}{5})8 \cdot 0{,}5] \text{ kNm} + [(\frac{4}{5})8 \cdot 4{,}5] \text{ kNm}$$

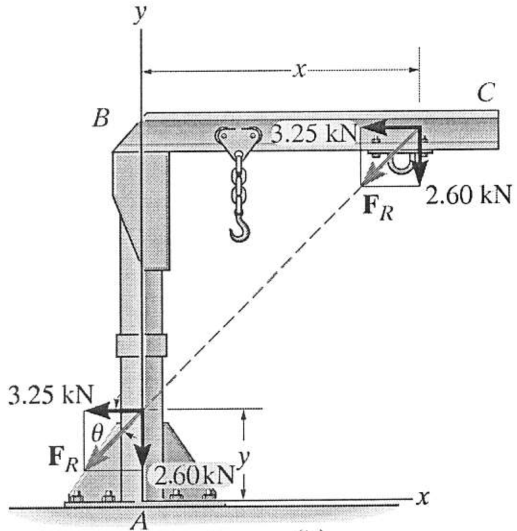
$$\Rightarrow \qquad d = 2{,}25 \text{ m}$$

مثال ۴-۱۷



(a)

جرثقیلی مطابق شکل (a) در معرض سه نیروی هم‌صفحه قرار دارد. این بارگذاری را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و نقطه تقاطع راستای این برآیند را با ستون AB و بازوی BC به‌دست آورید.



(b)

حل:

جمع نیروها:

با تجزیه نیروی 2,50 kN به مؤلفه‌های x و y و جمع کردن مؤلفه‌های نیرو نتیجه می‌شود:

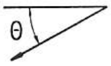
$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \qquad (F_R)_x = -(\frac{3}{5})\, 2{,}50 - 1{,}75 = -3{,}25 \text{ kN}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \qquad (F_R)_y = -(\frac{4}{5})\, 2{,}50 - 0{,}6 = -2{,}60 \text{ kN}$$

اندازه و امتداد نیروی برآیند $\vec{F}_R$ که در شکل (b) نشان‌داده شده برابرند با:

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{3{,}25^2 + 2{,}60^2} = 4{,}16 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = \tan^{-1}(\frac{2{,}60}{3{,}25}) = 38{,}7^\circ$$



جمع گشتاورها: با فرض آن‌که راستای $\vec{F}_R$ ستون AB را به فاصله y از A قطع کند، گشتاور نیروها حول نقطه A در شکل (a) بایستی با گشتاور نیروی $\vec{F}_R$ در شکل (b) برابر باشد (فقط مؤلفه $(F_R)_x$ حول نقطه A گشتاور ایجاد می‌کند):

$$\circlearrowleft\!+ (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad 3{,}25\, y \text{ kNm} = [1{,}75 \cdot 1] \text{ kNm} - [0{,}6 \cdot 0{,}6] \text{ kNm} + [(\frac{3}{5})2{,}50 \cdot 2{,}2] \text{ kNm} - [(\frac{4}{5})2{,}50 \cdot 1{,}6] \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow \quad y = 0{,}458 \text{ m}$$

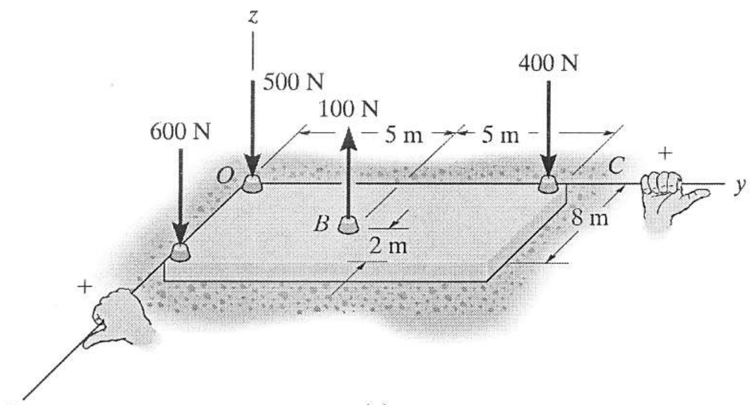
با استفاده از اصل انتقال‌پذیری می‌توان نیروی $\vec{F}_R$ را به نقطه C در بازوی BC به فاصله x از ستون AB جابه‌جا نمود. در این حال نیز بایستی گشتاور نیروها حول نقطه A با گشتاور نیروی $\vec{F}_R$ حول نقطه A برابر باشد:

$$\circlearrowleft\!+ (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad [3{,}25 \cdot 2{,}2] \text{ kNm} - [2{,}60\, x] \text{ kNm} = [1{,}75 \cdot 1] \text{ kNm} - [0{,}6 \cdot 0{,}6] \text{ kNm}$$

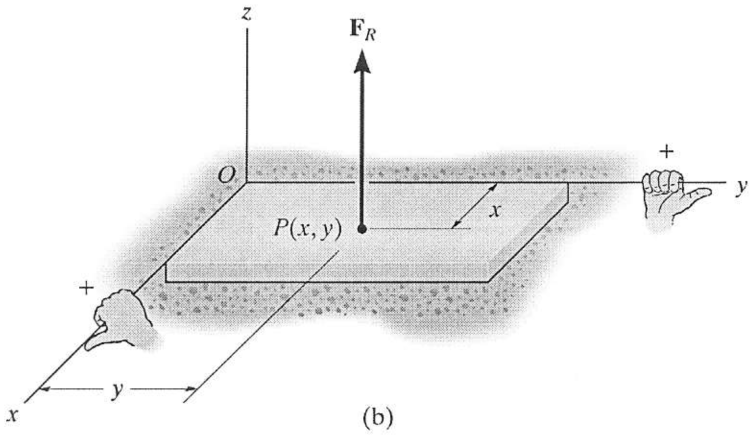
$$+ [(\frac{3}{5})2{,}50 \cdot 2{,}2] \text{ kNm} - [(\frac{4}{5})2{,}50 \cdot 1{,}6] \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}177 \text{ m}$$

مثال ۴-۱۸

دالی مطابق شکل (a) در معرض چهار نیروی موازی قرار دارد. این بارگذاری را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و نقطه اثر این نیروی برآیند با دال را تعیین کنید.



(a)



(b)

حل:

جمع نیروها:

با توجه به شکل (a) همه نیروها و در نتیجه نیروی برآیند در راستای محور z هستند:

$(F_R)_z = \Sigma F_z;\quad F_R = (F_R)_z = -500\text{ N} - 600\text{ N} + 100\text{ N} - 400\text{ N} = -1400\text{ N}$

امتداد نیروی برآیند $\vec{F}_R$ که در شکل (b) نشان‌داده شده است در جهت منفی محور z است.

جمع گشتاورها:

نیروی برآیند $\vec{F}_R$، که در نقطه P به مختصات P(x,y) در شکل (b) اثر می‌کند وقتی با مجموعه نیروهای وارد بر دال در شکل (a) هم‌ارز است که گشتاور آن با مجموع گشتاورهای نیروهای وارد بر دال هم حول محور x و هم حول محور y برابر باشد. با استفاده از قانون دست راست:

$(M_R)_x = \Sigma M_x;\quad [-1400\ y]\text{ Nm} = [500\cdot 0]\text{ Nm} + [600\cdot 0]\text{ Nm} + [100\cdot 5]\text{ Nm} - [400\cdot 10]\text{ Nm}$

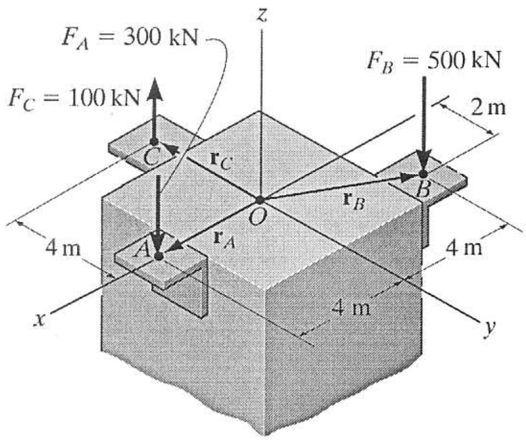
$-1400y = -3500 \quad\Rightarrow\quad y = 2{,}50\text{ m}$

$(M_R)_y = \Sigma M_y;\quad -[-1400\ x]\text{ Nm} = [500\cdot 0]\text{ Nm} + [400\cdot 0]\text{ Nm} - [100\cdot 6]\text{ Nm} + [600\cdot 8]\text{ Nm}$

$1400x = 4200 \quad\Rightarrow\quad x = 3\text{ m}$

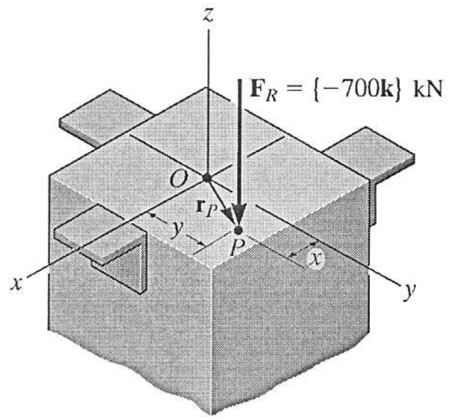
مثال ۴-۱۹

سیستم نیروی اعمال شده به یک پایه مطابق شکل(a) را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و نقطه اثر این نیروی برآیند را روی پایه مشخص کنید.



(a)

حل:



(b)

جمع نیروها به روش تحلیل بُرداری:

$$\vec{F}_R = \Sigma\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C \qquad \vec{F}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +100 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -700 \end{pmatrix} N \equiv \{-700\vec{k}\}\ N$$

جمع گشتاورها و تعیین نقطه اثر نیروی برآیند به روش تحلیل بُرداری:

نیروی برآیند $\vec{F}_R$، که در نقطه P با بردار مکان $\vec{r}_P$ در شکل (b) اثر می‌کند وقتی با مجموعه نیروهای وارد بر پایه در شکل (a) هم‌ارز است که گشتاور آن با مجموع گشتاورهای نیروهای وارد بر پایه حول نقطه O برابر باشد:

$$(\vec{M}_R)_O = \Sigma\vec{M}_O; \qquad \vec{r}_P \times \vec{F}_R = (\vec{r}_A \times \vec{F}_A) + (\vec{r}_B \times \vec{F}_B) + (\vec{r}_C \times \vec{F}_C)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & -700 \end{vmatrix} Nm = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix} Nm + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} Nm + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix} Nm \Rightarrow$$

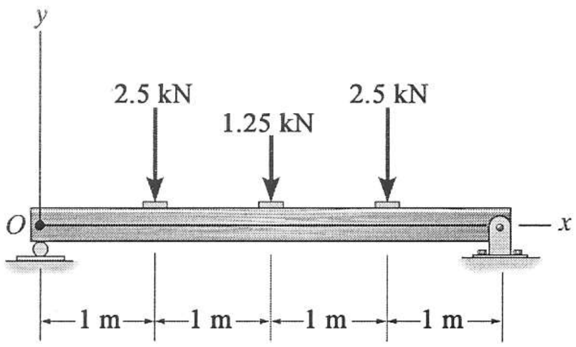
$$\begin{pmatrix} -700y \\ 700x \\ 0 \end{pmatrix} Nm = \begin{pmatrix} 0 \\ 1200 \\ 0 \end{pmatrix} Nm + \begin{pmatrix} -1000 \\ -2000 \\ 0 \end{pmatrix} Nm + \begin{pmatrix} -400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Nm \Rightarrow \begin{cases} -700y = -1400 & (1) \\ 700x = -800 & (2) \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\ m \\ x = -1{,}14\ m \end{cases}$$

تذکر: می‌توان معادله‌های (1) و (2) را مستقیماً با جمع بستن گشتاورها حول محورهای x و y به‌دست آورد. با استفاده از قانون دست راست:

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \qquad [-700\ y]\ Nm = -[100 \cdot 4]\ Nm - [500 \cdot 2]\ Nm$$
$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad [700\ x]\ Nm = [300 \cdot 4]\ Nm - [500 \cdot 4]\ Nm$$

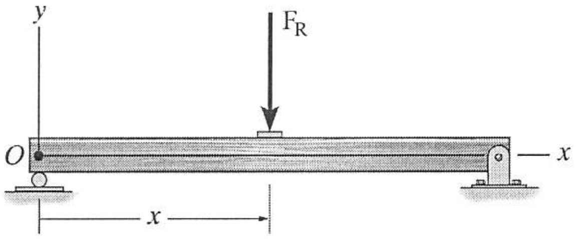
تمرین ۴-۳۱

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و مشخص کنید که راستای این نیروی برآیند در چه فاصله‌ای از نقطه O تیر را قطع می‌کند.



حل:

نیروی برآیند F_R وقتی با سیستم نیروهای شکل بالا هم‌ارز است که گشتاور آن با گشتاور نیروهای آن سیستم حول نقطه O برابر باشد.



$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x = 0 \text{ kN}$

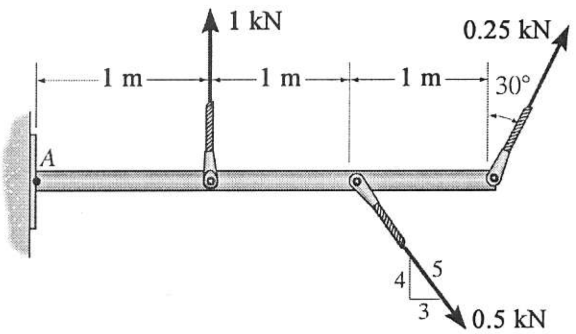
$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = -2{,}5 - 1{,}25 - 2{,}5 = -6{,}25 \text{ kN}$

$\Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = 6{,}25 \text{ kN}, \quad \theta = 90^\circ$

$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \quad -6{,}25\, x = -(2{,}5 \cdot 1) - (1{,}25 \cdot 2) - (2{,}5 \cdot 3) \quad \Rightarrow \quad x = 2\text{m}$

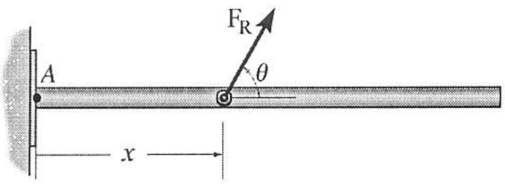
تمرین ۴-۳۲

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و مشخص کنید که راستای این نیروی برآیند در چه فاصله‌ای از نقطه A تیر را قطع می‌کند.



حل:

نیروی برآیند F_R وقتی با سیستم نیروهای شکل بالا هم‌ارز است که گشتاور آن با گشتاور نیروهای آن سیستم حول نقطه A برابر باشد.



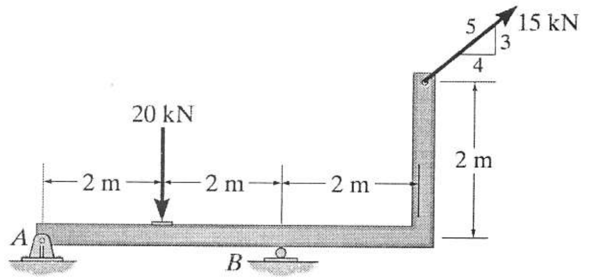
$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x = [(\frac{3}{5})0{,}5] + (0{,}25 \sin 30^\circ) = 0{,}425 \text{ kN}$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = 1 - [(\frac{4}{5})0{,}5] + (0{,}25 \cos 30^\circ) = 0{,}8165 \text{ kN}$

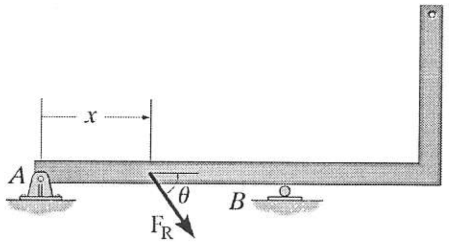
$\Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = 0{,}92 \text{ kN}, \quad \theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = 62{,}5^\circ$

$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad 0{,}8165\, x = (1 \cdot 1) - [(\frac{4}{5})0{,}5 \cdot 2] + (0{,}25 \cos 30^\circ \cdot 3) \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}04\,\text{m}$

تمرین ۴-۳۳



سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل مقابل را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و مشخص کنید که راستای این نیروی برآیند در چه فاصله‌ای از نقطه A تیر را قطع می‌کند.



حل:

نیروی برآیند F_R وقتی با سیستم نیروهای شکل بالا هم‌ارز است که گشتاور آن با گشتاور نیروهای آن سیستم حول نقطه A برابر باشد.

$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x = [(\frac{4}{5})15] = 12 \text{ kN}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = -20 + [(\frac{3}{5})15] = -11 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = 16{,}279 \text{ kN}$$

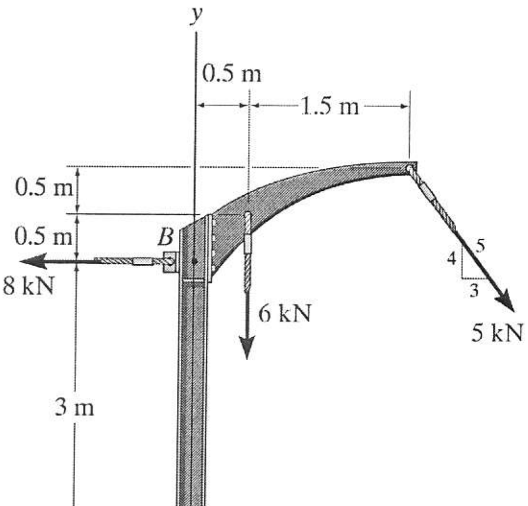
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = 42{,}51°$$

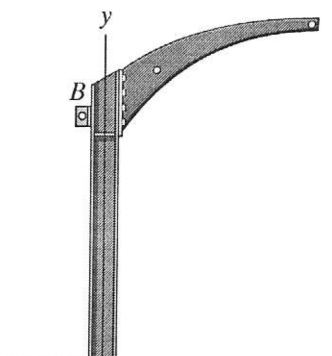
$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad -11\,x = -(20\cdot 2) - [(\frac{4}{5})15\cdot 2] + [(\frac{3}{5})15\cdot 6] \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}909\text{m}$$

تمرین ۴-۳۲

سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل زیر سمت چپ را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و مشخص کنید که راستای این نیروی برآیند در چه فاصله‌ای از نقطه A عضو AB را قطع می‌کند.

حل:





$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x = -8 + [(\frac{3}{5})5] = -5 \text{ kN}$$

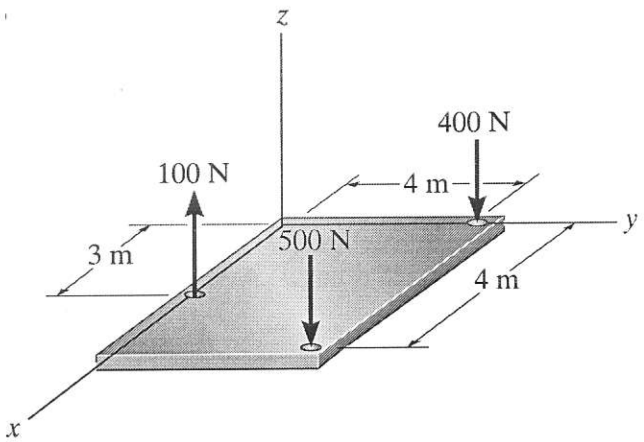
$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = -6 - [(\frac{4}{5})5] = -10 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \quad F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = 11{,}18\text{kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right| = 63{,}435°$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad 5\,y = (8\cdot 3) - (6\cdot 0{,}5) - [(\frac{4}{5})5\cdot 2] - [(\frac{3}{5})5\cdot 4] \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}2\text{m}$$

تمرین ۴-۳۵



سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و مختصات x و y نقطه اثر این نیروی برآیند را تعیین کنید.

حل:

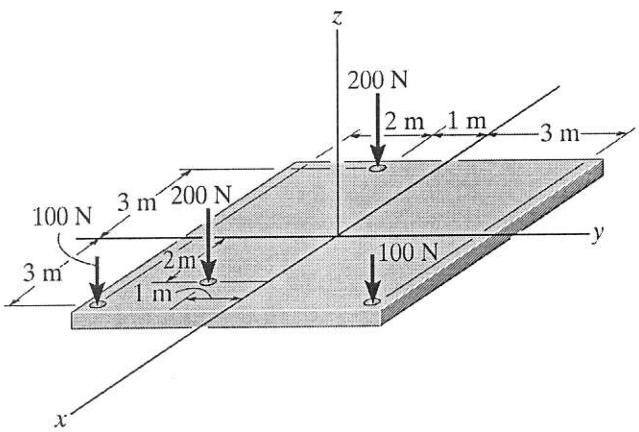
$(F_R)_z = \Sigma F_z; \quad F_R = (F_R)_z = -500\text{ N} + 100\text{ N} - 400\text{ N} = -800\text{ N}$

نیروی برآیند $\vec{F}_R$، که در نقطه‌ای به مختصات (x,y) اثر می‌کند وقتی با مجموعه نیروهای سیستم بارگذاری هم‌ارز است که گشتاور آن با مجموع گشتاورهای نیروهای سیستم بارگذاری، هم حول محور x و هم حول محور y برابر باشد. با استفاده از قانون دست راست:

$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad (-800\,y)\text{ Nm} = -(500\cdot 4)\text{ Nm} - (400\cdot 4)\text{ Nm} \quad \Rightarrow \quad y = 4{,}5\text{ m}$

$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad (800\,x)\text{ Nm} = -(100\cdot 3)\text{ Nm} + (500\cdot 4)\text{ Nm} \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}125\text{ m}$

تمرین ۴-۳۶



سیستم بارگذاری نشان‌داده شده در شکل را با یک نیروی برآیند هم‌ارز جایگزین کرده و مختصات x و y نقطه اثر این نیروی برآیند را تعیین کنید.

حل:

$(F_R)_z = \Sigma F_z; \quad F_R = (F_R)_z = -100\text{ N} - 100\text{ N} - 200\text{ N} - 200\text{ N} = -600\text{ N}$

نیروی برآیند $\vec{F}_R$، که در نقطه‌ای به مختصات (x,y) اثر می‌کند وقتی با مجموعه نیروهای سیستم بارگذاری هم‌ارز است که گشتاور آن با مجموع گشتاورهای نیروهای سیستم بارگذاری، هم حول محور x و هم حول محور y برابر باشد. با استفاده از قانون دست راست:

$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad -(600\,y)\text{ Nm} = -(100\cdot 3)\text{ Nm} + (100\cdot 3)\text{ Nm} + (200\cdot 1)\text{ Nm} + (200\cdot 1)\text{ Nm}$

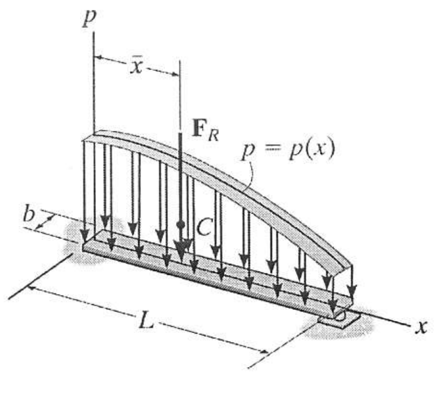
$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad (600\,x)\text{ Nm} = (100\cdot 3)\text{ Nm} + (100\cdot 3)\text{ Nm} + (200\cdot 2)\text{ Nm} + (200\cdot 3)\text{ Nm}$

در نتیجه:

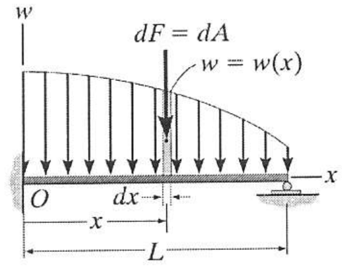
$-600\,y = 400 \quad \Rightarrow \quad y = -0{,}667\text{ m}$

$600\,x = 400 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}667\text{ m}$

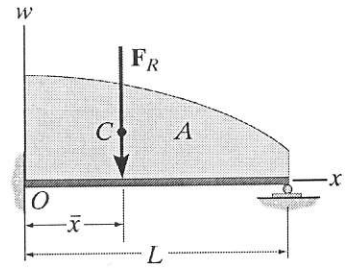
۹-۴ خلاصه کردن و معادل‌سازی بارگذاری گسترده ساده



(a)



(b)



(c)

اگر نیرو بر روی یک سطح توزیع شده باشد، به آن بارگذاری گسترده سطحی (شکل(a)) و چنانچه در امتداد یک خط توزیع گردد، به آن بارگذاری گسترده طولی گفته می‌شود (شکل(b)).

بارگذاری گسترده در طول یک تیر: این بارگذاری در مهندسی بسیار متداول است، مثلاً چنانچه تیر یا صفحه‌ای که عرض ثابتی دارد و در معرض بارگذاری گسترده سطحی، که فقط در طول تیر تغییر می کند قرار گیرد از جمله این بارگذاری است و با تابع $p = p(x) \ \mathrm{N/m^2}$ بیان می‌گردد. متغییر این تابع فقط x است و می توان تابع بارگذاری را در عرض ثابت b ضرب نمود، طوری‌که تابع $w(x) = p(x)b \ \mathrm{N/m}$ به دست آید، شکل(b). با استفاده از روشهای بخش ۴-۸ می‌توان این سیستم نیروی موازی را با نیروی برآیند $\vec{F}_R$ جایگزین نمود، که در نقطه‌ای مشخص بر تیر وارد می‌شود، شکل(c).

اندازه نیروی برآیند: با استفاده از معادله $F_R = \Sigma F$ اندازه $\vec{F}_R$ با جمع همه نیروهای سیستم برابر است. از آنجایی‌که بار گسترده متشکل از تعداد نامتناهی نیروهای موازی $d\vec{F}$ است (شکل(b))، بایستی انتگرال آن را به‌دست آورد. چون $d\vec{F}$ به جزء طول dx اعمال می‌شود و $w(x)$ نیز نیرو بر واحد طول است، در نتیجه $dF = w(x)\,dx = dA$ خواهد بود. به این ترتیب اندازه $d\vec{F}$ با استفاده از جزء سطح دیفرانسیلی dA زیر منحنی بارگذاری به‌دست می‌آید. برای کل طول L نتیجه می‌شود:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F\ :\quad F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A$$

بنابراین اندازه نیروی برآیند برابر است با سطح کل A زیر منحنی بارگذاری (شکل(c)).

تعیین محل نیروی برآیند: برای آن‌که نیروی برآیند به‌دست آمده با بارگذاری گسترده هم‌ارز باشد، بایستی گشتاور این نیروی برآیند با گشتاورهای حاصل از بارگذاری گسترده حول هر نقطه دلخواه، از جمله نقطه O نیز برابر باشد ($M_{R_O} = \Sigma M_O$). به این ترتیب محل خط اثر $\vec{F}_R$، یعنی $\bar{x}$ تعیین می‌گردد. چون dF گشتاور $x\,dF = x\,w(x)\,dx$ را حول نقطه O ایجاد می‌کند، بنابراین برای کل طول تیر (شکل(c)) می‌توان نوشت:

$$\circlearrowleft + \ (M_R)_O = \Sigma M_O;\qquad -\bar{x}\,F_R = -\int_L x\,w(x)\,dx$$

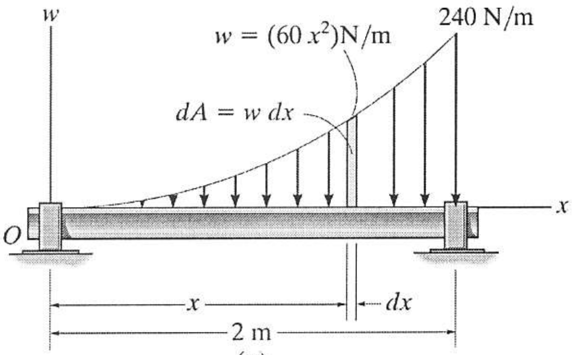
در نتیجه:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_L x\,w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}}$$

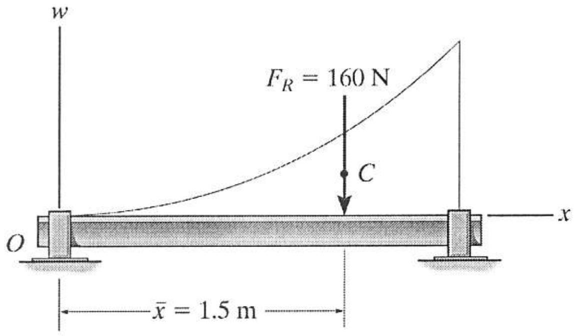
مقدار $\bar{x}$ محل مرکز هندسی سطح زیر منحنی توزیع بار را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر خط اثر نیروی برآیند از مرکز هندسی بارگذاری (و یا سطح زیر منحنی بار) می‌گذرد (شکل(c)). در بسیاری از موارد منحنی بارگذاری گسترده به شکل مستطیل، مثلث و یا شکل هندسی ساده دیگری است. برای تعیین محل مرکز چنین سطوحی استفاده از معادلات بالا ضرورت ندارد و می‌توان آن‌را مستقیماً و یا با استفاده از جداول مربوطه به‌دست آورد.

مثال ۴-۲۰

اندازه و محل نیروی برآیند هم‌ارز وارد بر تیری مطابق شکل(a) را تعیین کنید.



(a)



(b)

حل:

چون $w = w(x)$ معلوم است، می‌توان مسئله را به روش انتگرال‌گیری حل نمود. اندازه سطح جزء دیفرانسیلی dA برابر است با: $dA = w(x)\,dx = 60x^2$ در نتیجه:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F;$$

$$F_R = \int_A dA = \int_0^{2m} 60x^2 dx = 60\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2m} = 60\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 160\ \text{N}$$

برای تعیین محل اعمال نیروی F_R نسبت به نقطه O، یعنی $\bar{x}$ در شکل(b) می‌توان نوشت:

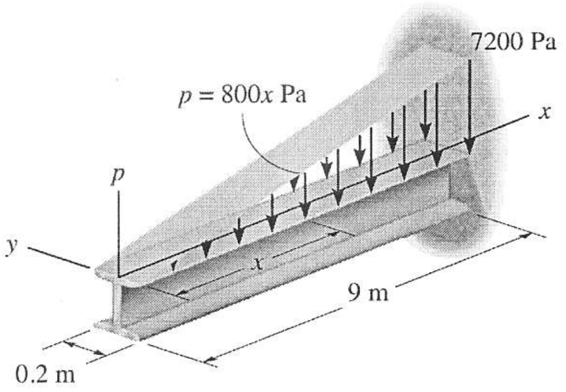
$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{2m} x(60x^2)\,dx}{160\ \text{N}} = \frac{60\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{2m}}{160\ \text{N}} = \frac{60\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)}{160\ \text{N}} = 1{,}5\ \text{m}$$

تذکر: می‌توان با استفاده از جدول پایان کتاب Hibbeler برای سطح سهموی به طول a و ارتفاع b نوشت:

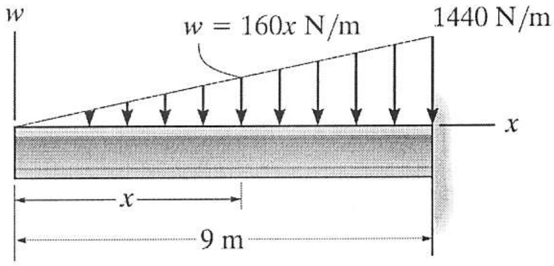
$$A = \frac{ab}{3} = \frac{2\text{m}(240\ \text{N/m})}{3} = 160\ \text{N} \qquad \text{و} \qquad \bar{x} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}(2\ \text{m}) = 1{,}5\ \text{m}$$

مثال ۴-۲۱

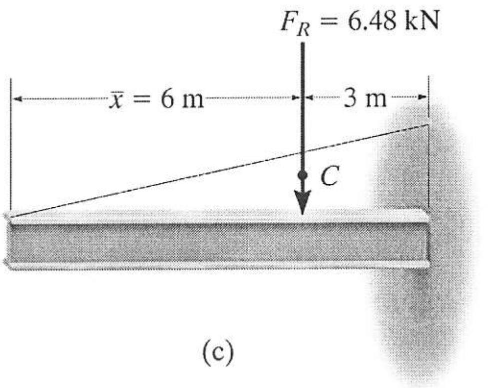
اندازه و محل نیروی برآیند هم‌ارز بار گسترده سطحی $p = (800x)$ Pa اعمال شده به سطح فوقانی تیری مطابق شکل(a) را تعیین کنید.



(a)



(b)



(c)

حل:

از آنجایی‌که شدت بار در عرض تیر ثابت است، می‌توان آن را مطابق شکل(b) یک بار گسترده طولی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$w = (800x\ \text{N/m}^2)(0{,}2\ \text{m}) = (160x)\ \text{N/m}$$

در $x = 9$ m مقدار بار طولی $w = 1440$ N/m است. اگرچه می‌توان مسئله را به روش انتگرال‌گیری حل نمود، اما استفاده از جدول آسانتر است. اندازه نیروی برآیند برابر است با مساحت مثلث.

$$F_R = \frac{1}{2}(9\ \text{m})(1440\ \text{N/m}) = 6480\ \text{N} = 6{,}48\ \text{kN}$$

راستای نیروی $\vec{F}_R$ از مرکز هندسی این مثلث، یعنی نقطه C در شکل(c) میگذرد. بنابراین:

$$\bar{x} = 9\ \text{m} - \frac{1}{3}(9\ \text{m}) = 6\ \text{m}$$

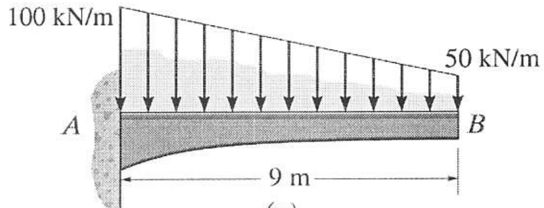
این نتیجه در شکل(c) نشان داده شده است.

تذکر: می‌توان نیروی برآیند $\vec{F}_R$ را طوری در نظر گرفت که از مرکز حجم نمودار بارگذاری $p = p(x)$ در شکل(a) بگذرد. در این صورت $\vec{F}_R$ صفحه $x-y$ را در نقطه $(6\ \text{m}, 0)$ قطع خواهد کرد. به علاوه اندازه $\vec{F}_R$ با حجم زیر نمودار بارگذاری برابر است، یعنی:

$$F_R = V = \frac{1}{2}(7200\ \text{N/m}^2)(9\ \text{m})(0{,}2\ \text{m}) = 6480\ \text{N} = 6{,}48\ \text{kN}$$

مثال ۴-۲۲

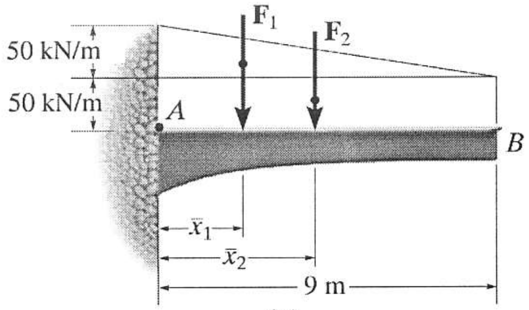
توزیع مواد دانه‌ای بر روی تیری مطابق شکل(a) بار گسترده‌ای را بر تیر اعمال می‌کند. اندازه و محل نیروی برآیند هم‌ارز با این بار گسترده را تعیین کنید.



(a)

حل:

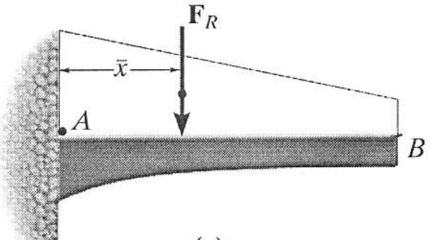
سطح زیر بار گسترده ذوزنقه‌ای شکل است و می‌توان اندازه و مرکز هندسی این سطح را از جداول به‌دست آورد. این مسئله را می‌توان همچنین با استفاده از جایگزینی کردن سطح مرکب ذوزنقه با دو سطح ساده‌تر مثلث و مستطیل (شکل(b)) و یا دو سطح ساده مثلثی (شکل(d)) حل نمود. اندازه نیرویی که توسط هر یک از این سطوح ساده بارگذاری‌ها اعمال می‌شود با اندازه سطح متناظر آن مساوی است. اگر از حالت اول استفاده شود (دو سطح ساده مثلث و مستطیل):



(b)

$$F_1 = \frac{1}{2}(9\text{ m})(50\text{ kN/m}) = 225\text{ kN}$$

$$F_2 = (9\text{ m})(50\text{ kN/m}) = 450\text{ kN}$$

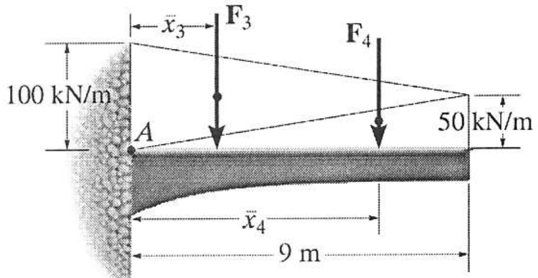


(c)

خط اثر این نیروها از مرکز هندسی دو سطح مثلث و مستطیل گذشته و تیر را در نقاط زیر قطع می‌کنند:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(9\text{ m}) = 3\text{ m}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(9\text{ m}) = 4{,}5\text{ m}$$



(d)

اکنون می‌توان دو نیروی موازی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در شکل(b) را با یک نیروی برآیند $\vec{F}_R$ جایگزین نمود (شکل(c)). اندازه $\vec{F}_R$ برابر است با:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \quad \Rightarrow \quad F_R = 225 + 450 = 675\text{ kN}$$

محل $\vec{F}_R$ با توجه به این اصل به‌دست می‌آید، که بایستی گشتاور دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ با گشتاور $\vec{F}_R$ حول هر نقطه دلخواه، مثلاً نقطه A برابر باشند:

$$\circlearrowleft+ (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad \Rightarrow \quad \bar{x}\,(675) = 3(225) + 4{,}5(450) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 4\text{ m}$$

تذکر: می‌توان همان‌طورکه در بالا نیز اشاره شد سطح ذوزنقه‌ای را با دو سطح ساده مثلثی (شکل(d)) جایگزین نمود:

$$F_3 = \frac{1}{2}(9\text{ m})(100\text{ kN/m}) = 450\text{ kN}$$
$$F_4 = \frac{1}{2}(9\text{ m})(50\text{ kN/m}) = 225\text{ kN}$$
$$\Rightarrow F_R = 675\text{ kN}$$

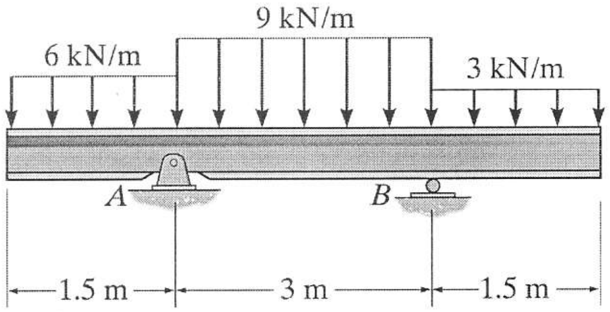
و

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(9\text{ m}) = 3\text{ m}$$
$$\bar{x}_4 = 9\text{ m} - \frac{1}{3}(9\text{ m}) = 6\text{ m}$$

برای تعیین محل $\vec{F}_R$ نیز همانند بالا عمل می‌شود:

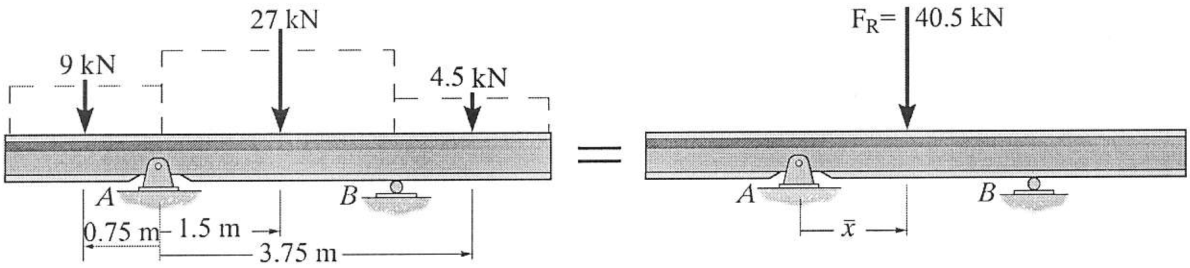
$$\circlearrowleft+ (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad \Rightarrow \quad \bar{x}\,(675) = 3(450) + 6(225) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 4\text{ m}$$

تمرین ۴-۳۷



مطلوب است تعیین نیروی برآیند حاصل از بارگذاری گسترده تیری مطابق شکل و فاصله نقطه اثر این نیروی برآیند از A .

حل:

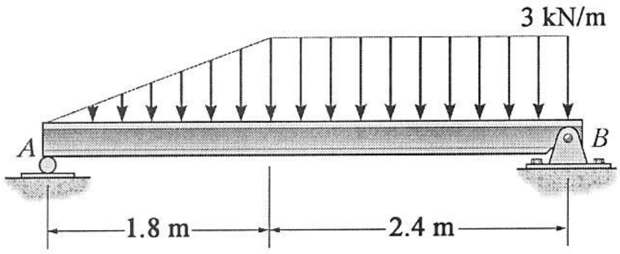


$$+\downarrow F_R = \Sigma F = (6\cdot1{,}5)\,kN + (9\cdot3)\,kN + (3\cdot1{,}5)\,kN \;\Rightarrow\; F_R = 9kN + 27kN + 4{,}5kN \;\Rightarrow\; F_R = 40{,}5\ kN$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma(M)_A;\ \Rightarrow$$

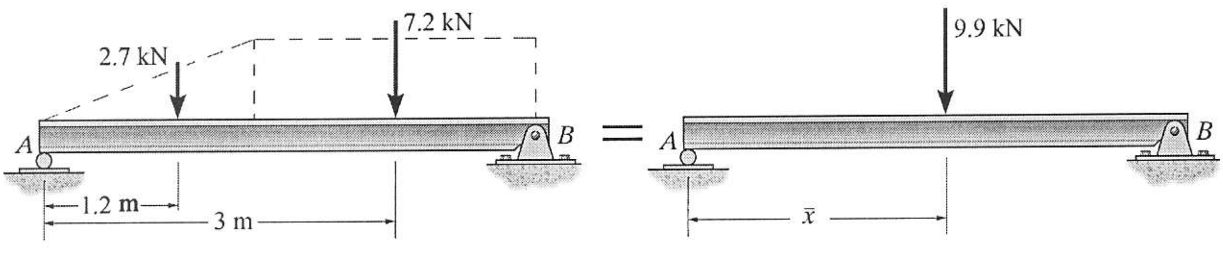
$$(40{,}5\cdot \bar{x})\,kNm = -(9\cdot0{,}75)\,kNm + (27\cdot1{,}5)\,kNm + (4{,}5\cdot3{,}75)\,kNm \;\Rightarrow\; \bar{x} = 1{,}25\ m$$

تمرین ۴-۳۸



مطلوب است تعیین نیروی برآیند حاصل از بارگذاری گسترده تیری مطابق شکل و فاصله نقطه اثر این نیروی برآیند از A .

حل:



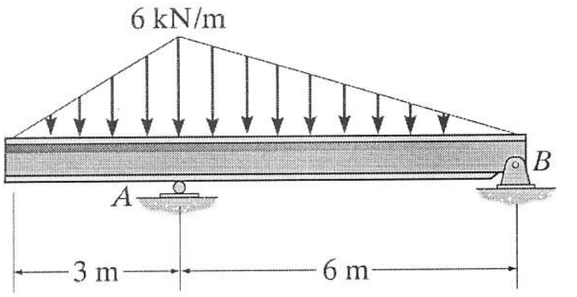
$$+\downarrow F_R = \Sigma F = (\frac{1}{2}\cdot3\cdot1{,}8)\,kN + (3\cdot2{,}4)\,kN \;\Rightarrow\; F_R = 2{,}7kN + 7{,}2kN \;\Rightarrow\; F_R = 9{,}9\ kN$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma(M)_A;\ \Rightarrow$$

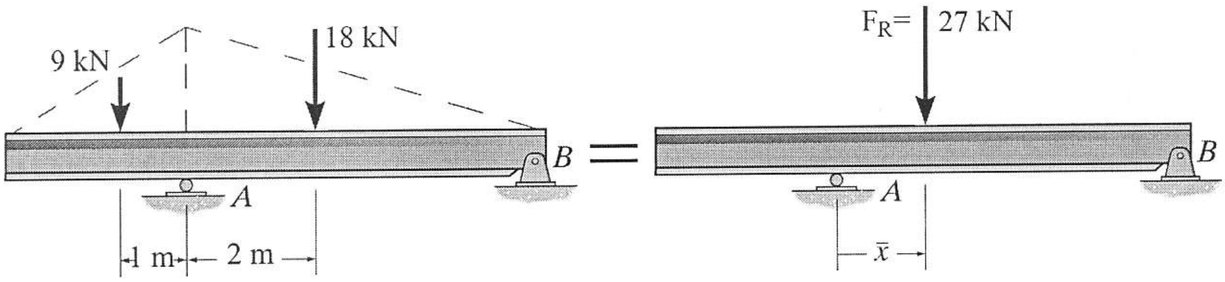
$$(9{,}9\cdot \bar{x})\,kNm = -(2{,}7\cdot1{,}2)\,kNm + (7{,}2\cdot3)\,kNm \;\Rightarrow\; \bar{x} = 2{,}509\ m$$

تمرین ۴-۳۹

مطلوب است تعیین نیروی برآیند حاصل از بارگذاری تیری مطابق شکل و فاصله نقطه اثر این نیروی برآیند از A .



حل:



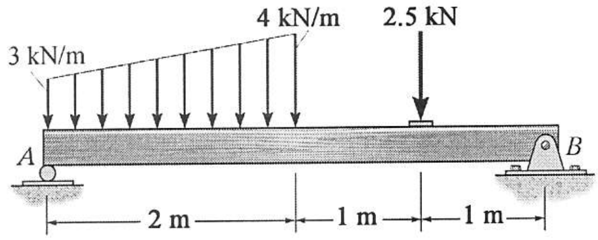
$$+\downarrow F_R = \Sigma F = (\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3)\,kN + (\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6)\,kN \;\Rightarrow\; F_R = 9kN + 18kN \;\Rightarrow\; F_R = 27\ kN$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma(M)_A; \;\Rightarrow$$

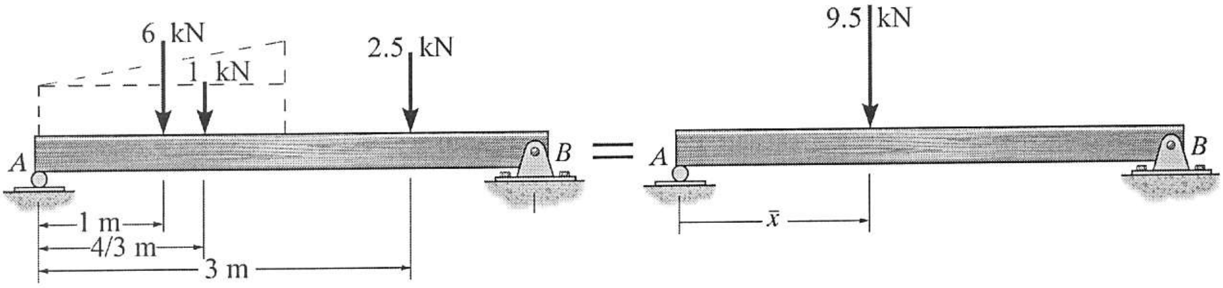
$$(27\cdot \bar{x})\,kNm = -(9\cdot 1)\,kNm + (18\cdot 2)\,kNm \;\Rightarrow\; \bar{x} = 1\ m$$

تمرین ۴-۴۰

مطلوب است تعیین نیروی برآیند حاصل از بارگذاری تیری مطابق شکل و فاصله نقطه اثر این نیروی برآیند از A .



حل:



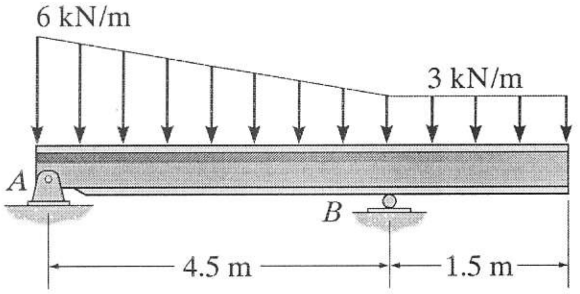
$$+\downarrow F_R = \Sigma F = (\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2)\,kN + (3\cdot 2)\,kN + 2{,}5\,kN \;\Rightarrow\; F_R = 1kN + 6kN + 2{,}5kN \;\Rightarrow\; F_R = 9{,}5\ kN$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma(M)_A; \;\Rightarrow$$

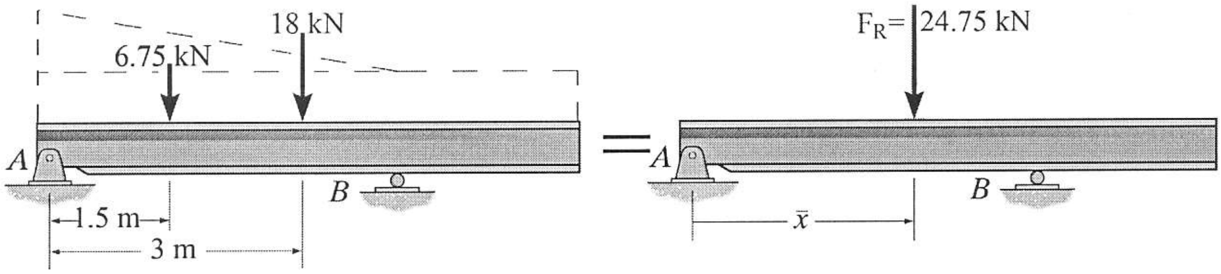
$$(9{,}5\cdot \bar{x})\,kNm = (6\cdot 1)\,kNm + (1\cdot \frac{4}{3})\,kNm + (2{,}5\cdot 3) \;\Rightarrow\; \bar{x} = 1{,}561\ m$$

تمرین ۴-۴۱

مطلوب است تعیین نیروی برآیند حاصل از بارگذاری تیری مطابق شکل و فاصله نقطه اثر این نیروی برآیند از A .



حل:



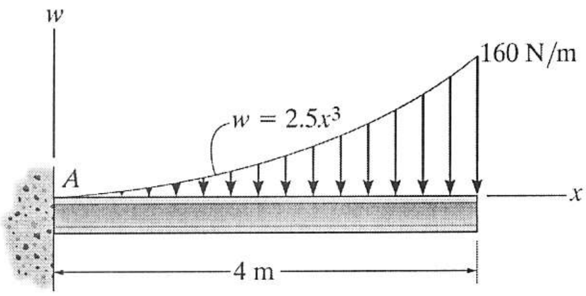
$$+\downarrow F_R = \Sigma F = (\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4{,}5)\,kN + (3\cdot 6)\,kN \;\Rightarrow\; F_R = 6{,}75\,kN + 18\,kN \;\Rightarrow\; F_R = 24{,}75\ kN$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma (M)_A; \;\Rightarrow$$

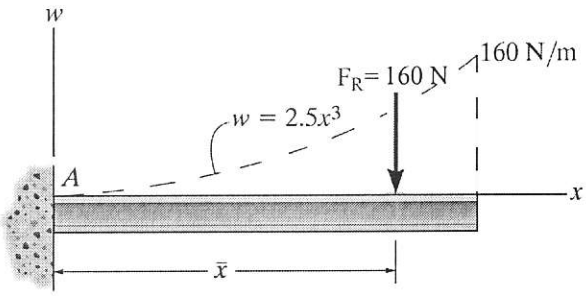
$$(24{,}75\cdot \bar{x})\,kNm = (6{,}75\cdot 1{,}5)\,kNm + (18\cdot 3)\,kNm \;\Rightarrow\; \bar{x} = 2{,}59\ m$$

تمرین ۴-۴۲

مطلوب است تعیین نیروی برآیند حاصل از بارگذاری تیری مطابق شکل و فاصله نقطه اثر این نیروی برآیند از A .



حل:



$$+\downarrow F_R = \int_0^{4m} w\,dx = \int_0^{4m} 2{,}5\,x^3 = \frac{2{,}4}{4}x^4\Big|_0^{4m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; F_R = 160\ N$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma (M)_A; \;\Rightarrow$$

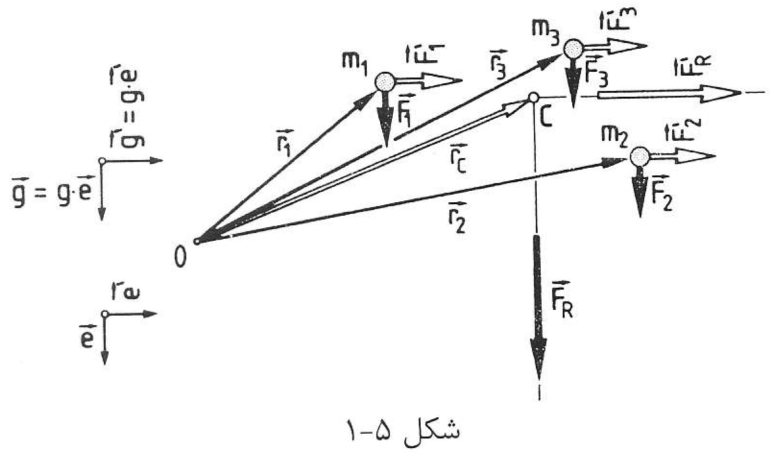
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{4m} x\,w(x)\,dx}{\int_0^{4m} w(x)\,dx} = \frac{\int_0^{4m} 2{,}5\,x^4}{\int_0^{4m} 2{,}5\,x^3} = \frac{\frac{2{,}5}{5}\,x^5\Big|_0^{4m}}{160\ N} \;\Rightarrow\; \bar{x} = 3{,}2\ m$$

۵ مرکز نیروها و مرکز ثقل

۵-۱) مرکز نیروهای حاصل از نیروهای منفرد، مرکز ثقل جرمهای منفرد

مرکز نیروها وقتی حائز اهمیت است، که آن نیروها موازی هم بوده، راستای غیرقابل تغییری داشته و هم چنان موازی یکدیگر مانده و نقطه اثرشان را حفظ کنند. در ادامه نشان داده خواهد شد که برآیند این نیروها نیز نقطه اثر ثابتی داشته و به‌همراه دیگر نیروها می‌چرخد. به این نقطه اثر، مرکز نیروها گفته می‌شود.

سیستمی متشکل از چندین نیروی منفرد ناپیوسته را می‌توان به‌طور تقریبی بدین‌گونه ایجاد نمود، که چندین گوی صلب را به یکدیگر متصل نموده و در این حال جرم اجزاء اتصال را در مقایسه با جرم گوی‌ها بسیار کوچک نمود. در میدان جاذبه زمین در مرکز هر گوی نیروهای وزنی اثر می‌کنند، که به صورت منفرد نسبت به هم موازی هستند. حال چنانچه مجموعه گوی‌ها چرخانده شود، همان‌طور که در شکل ۵-۱ نیز نشان‌داده شده است نیروهای وزنی نیز نسبت به مجموعه جهت دیگر پیدا کرده، اما در عین حال این اجسام نقطه اثر ثابت خود را حفظ می‌کنند.



شکل ۵-۱

در ابتدا فرض می‌شود که سیستم نشان‌داده شده در شکل ۵-۱ در حالتی است که هر یک از نیروهای منفرد دارای راستای $\vec{e}$ می‌باشند و برای این جهت‌گیری، قانون برآیند گشتاور فورموله می‌شود. طبق این قانون، گشتاور نیروی برآیند $\vec{F}_R$ حول هر نقطه مرجع دلخواه O با جمع گشتاورهای هر یک از نیروهای منفرد حول همان نقطه برابر است:

$$(\vec{M}_R)_O = \Sigma(\vec{M}_i)_O \qquad (۵-۱-۱)$$

$$\vec{r}_C \times \vec{F}_R = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

که در آن $\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i$ است.

با کاربرد بردار یکّه $\vec{e}$ می‌توان نیروها را به‌صورت زیر نوشت:

$$\vec{F}_i = F_i \vec{e} \quad \text{و} \quad \vec{F}_R = F_R \vec{e} \qquad (۵-۱-۲)$$

در نتیجه معادله ۵-۱-۱ را می‌توان به‌صورت زیر فورموله نمود:

$$\vec{r}_C \times \vec{e}\, F_R = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{e}\, F_i)$$

با بیرون آوردن بردار ثابت یکّه $\vec{e}$ از داخل پرانتز نتیجه می‌شود:

$$F_R\, \vec{r}_C \times \vec{e} = (\Sigma\, F_i\, \vec{r}_i) \times \vec{e}$$

$$(F_R\, \vec{r}_C - \Sigma\, F_i\, \vec{r}_i) \times \vec{e} = 0 \qquad (۵-۱-۳)$$

اگر سیستم مورد نظر به اندازه φ چرخانده شود (در شکل ۵-۱-۱، $\varphi = 90°$ انتخاب شده است)، نیروها نیز نسبت به سیستم به اندازه همان زاویه چرخیده شده و در راستایی که با بردار یکّه $\vec{e}'$ مشخص می‌گردد قرار می‌گیرند. حال چنانچه قانون برآیند گشتاور مجدداً فورموله گردد، مشابه رابطه ۵-۱-۴ نتیجه می‌شود:

$$(F_R\, \vec{r}_C - \Sigma\, F_i\, \vec{r}_i) \times \vec{e}' = 0 \qquad (۵-۱-۴)$$

دو رابطه ۵-۱-۳ و ۵-۱-۴ در صورتی به طور همزمان برآورده می‌شوند که یا کمیت برداری $F_R\, \vec{r}_C - \Sigma\, F_i\, \vec{r}_i$ هم به‌موازات $\vec{e}$ و هم به‌موازات $\vec{e}'$ باشد، چیزی که ممکن نیست، زیرا $\vec{e}$ و $\vec{e}'$ بردارهای یکّه با راستاهای دلخواه هستند و یا آنکه کمیت برداری مذکور صفر باشد. از این شرط نتیجه می‌شود:

$$F_R\, \vec{r}_C = \Sigma\, F_i\, \vec{r}_i$$

فرم برداری

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\Sigma\, F_i\, \vec{r}_i}{\Sigma F_i}} \qquad (۵-۱-۵)$$

فرم مؤلفه‌ای

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma\, F_i\, x_i}{\Sigma F_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma\, F_i\, y_i}{\Sigma F_i} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma\, F_i\, z_i}{\Sigma F_i}}$$

این معادلات موقعیت نقطه اثر نیروی برآیند $\vec{F}_R$، یعنی بردار مکان $\vec{r}_C = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ را کاملاً مشخص می‌کنند. به این نقطه اثر، مرکز نیروها گفته می‌شود.

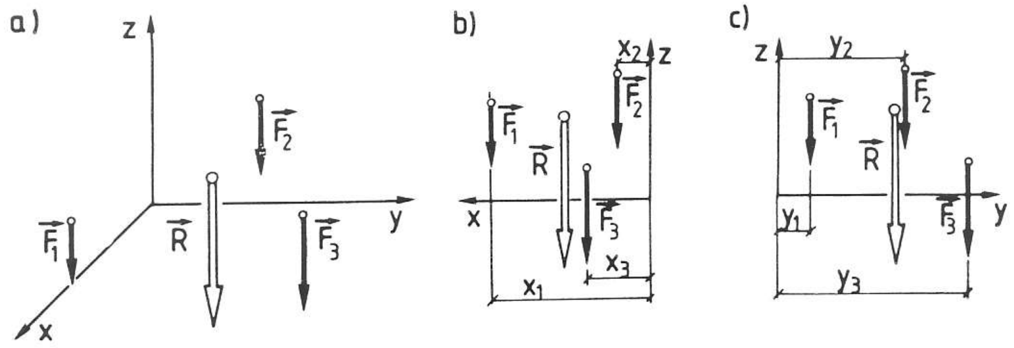
چنانچه این نیروها، نیروهای وزنی (سنگینی یا ثقلی) باشند، این مرکز، مرکز ثقل (G) نیز نامیده می‌شود. در این صورت می‌توان این اصل را در نظر گرفت که نیروهای وزنی گوی‌ها با جرم آنها متناسبند ($F_i = m_i\, g$) و به این ترتیب معادله (۵-۱-۵) به فرم زیر در می‌آید:

$$\vec{r}_C = \frac{\Sigma\, m_i\, g\, \vec{r}_i}{\Sigma m_i\, g} = \frac{\Sigma\, m_i\, \vec{r}_i}{m} \qquad (۵-۱-۶)$$

که در آن $m = \Sigma\, m_i$ جرم کل مجموعه گوی‌ها می‌باشد.

از آنجایی‌که در معادله (۵-۱-۶) فقط جرمها قرار دارند، به نقطه بدست آمده از این رابطه مرکز جرم نیز گفته می‌شود (در مرکز جرم نه فقط برآیند نیروهای وزنی، بلکه نیروهای دیگر متناسب با جرم نیز، مانند نیروهای اینرسی اثر می‌کنند. بنابراین مرکز جرم یک مفهوم کلی‌تری است).

معادله (۵-۱-۶) برای تعیین مرکز ثقل، که در اینجا به‌روش ساده‌ای بدست آمده است را می‌توان همچنین به صورتی قابل فهم نیز تعیین نمود، به این ترتیب که یک دستگاه مختصات دکارتی ثابت به همراه جسم در فضا به گونه‌ای در نظر گرفته شود که نیروها در راستای محورهای آن قرار گیرند.



شکل ۵-۲

شکل۵-۲ یک چنین دستگاه مختصاتی نشان‌داده شده است که محور- z آن به سمت بالا و نیروهای وزنی نیز در جهت منفی محور- z آن نشانه رفته است. در شکل۵-۲ (a نمایش پرسپکتیوی نیروها و در شکلهای ۵-۲ (b و (c نماهایی از آنها در راستای محورهای- x و - y به‌نمایش گذاشته شده‌اند.

حال اگر قانون گشتاور برآیند برای گشتاورهایی که حول محور- y به وجود می‌آیند و در شکل۵-۲ (b نشان داده شده‌اند فورموله شود، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x}\,F_R = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma\, x_i\, F_i}{F_R} = \frac{\Sigma\, x_i\, F_i}{\Sigma F_i}$$

اگر قانون گشتاور برآیند برای گشتاورهایی هم که حول محور- x به وجود می‌آیند و در شکل۵-۲ (c نشان داده شده‌اند فورموله شود، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{y}\,F_R = y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma\, y_i\, F_i}{F_R} = \frac{\Sigma\, y_i\, F_i}{\Sigma F_i}$$

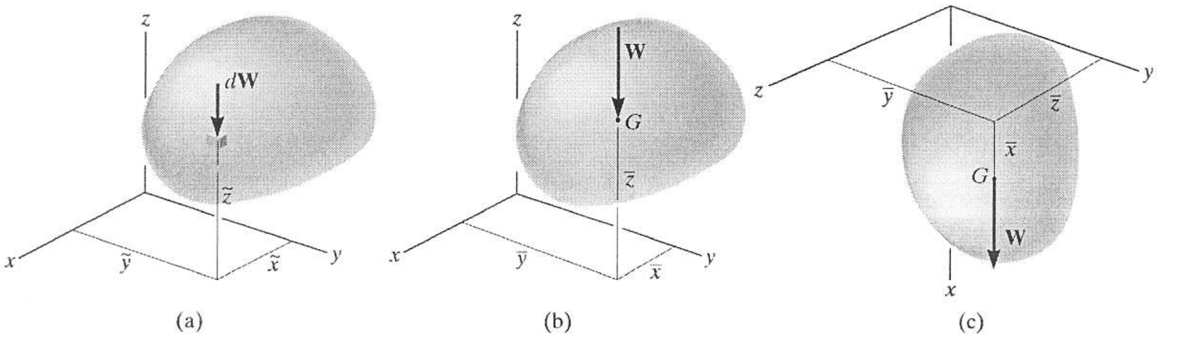
به این ترتیب موقعیت مرکز ثقل مستقیماً با توجه به این اصل بدست می‌آید، که نیروی برآیند و نیروهای منفرد بایستی گشتاورهای یکسانی حول محورهای دستگاه مختصات به‌کار رفته داشته باشند.

۵-۲) اجسام با توزیع پیوسته جرم

تعیین مرکز ثقل معمولاً برای اجسامی است که پکپارچه بوده و توزیع جرم پیوسته‌ای دارند. در نتیجه می‌توان روش فوق در مورد این اجسام را نیز به‌کار برد، به این صورت که جسم را به ذرات بسیار کوچک در مقایسه با ابعاد کلی جسم تجزیه نموده و سپس ابعاد این ذرات را به سمت صفر سوق داد (شکل۵-۳). در این حال فرض می‌شود که نیروهای وزنی ذرات ($\Delta\vec{W}_i = \Delta m_i\, \vec{g}$) به مکانی در داخل ذرات اثر می‌کنند. خطای صورت گرفته در حالت مرزی ذرات نیز به سمت صفر سو ق می‌کند ($\Delta\vec{W} \rightarrow d\vec{W}$). به این ترتیب معادلات ۵-۱-۵ و ۵-۱-۶ به صورت زیر در می‌آیند:

$$\vec{r}_C = \frac{\Sigma\, \Delta W_i\, \vec{r}_i}{W} \qquad \text{و یا} \qquad \vec{r}_C = \frac{\Sigma\, \Delta m_i\, g\, \vec{r}_i}{m\, g} = \frac{\Sigma\, \Delta m_i\, \vec{r}_i}{m} \qquad (۵-۲-۱)$$

که در آنها $W = \Sigma \Delta W_i$ وزن کل جسم و $m = \Sigma \Delta m_i$ جرم کل آن می‌باشند.



شکل ۵-۳

وقتی ابعاد ذرات به سمت صفر میل کنند، حالت جمع به حالت انتگرال تبدیل می‌گردد و در نتیجه:

مرکز ثقل یک جسم (G):

فرم برداری مرکز ثقل یک جسم

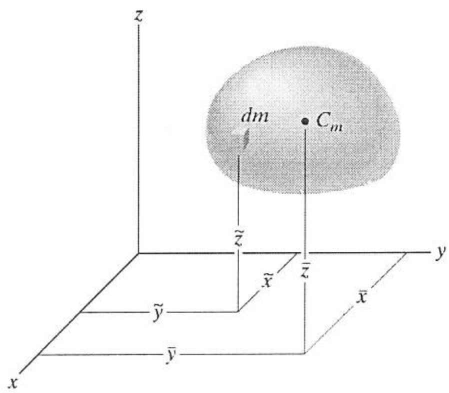
$$\vec{r}_G = \frac{\int_W \vec{r}_i \, dW}{\int_W dW} = \frac{\int_W \vec{r}_i \, dW}{W}$$

(۵-۲-۲)

فرم مؤلفه‌ای مرکز ثقل یک جسم

$$\bar{x} = \frac{\int_W \tilde{x} \, dW}{W} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int_W \tilde{y} \, dW}{W} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\int_W \tilde{z} \, dW}{W}$$

مرکز جرم یک جسم (C_m):



شکل۵-۴

فرم برداری مرکز جرم یک جسم با چگالی ثابت

$$\vec{r}_{C_m} = \frac{\int_m \vec{r}_i \, dm}{\int_m dm} = \frac{\int_m \vec{r}_i \, dm}{m}$$

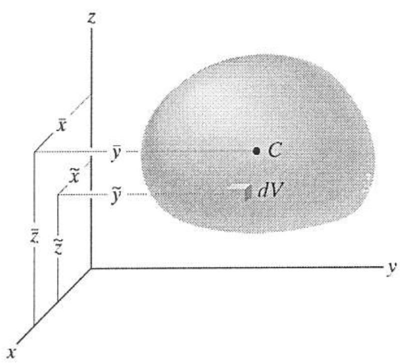
(۵-۲-۳)

فرم مؤلفه‌ای مرکز جرم یک جسم با چگالی ثابت

$$\bar{x} = \frac{\int_m \tilde{x} \, dm}{m} \; ; \; \bar{y} = \frac{\int_m \tilde{y} \, dm}{m} \; ; \; \bar{z} = \frac{\int_m \tilde{z} \, dm}{m}$$

برای یک جسم همگن با چگالی ثابت (ρ) با توجه به رابطه $dm = \rho dV$

مرکز حجم یا مرکز هندسی یک جسم (C):



شکل۵-۵

فرم برداری مرکز حجم یک جسم همگن با چگالی ثابت

$$\vec{r}_C = \frac{\int_V \vec{r}_i \, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V \vec{r}_i \, dV}{V}$$

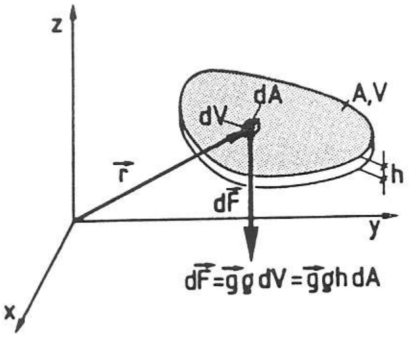
(۵-۲-۴)

فرم مؤلفه‌ای مرکز حجم یک جسم همگن با چگالی ثابت

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} \, dV}{V} \; ; \; \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} \, dV}{V} \; ; \; \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} \, dV}{V}$$

در روابط بالا $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ مختصات مرکز ثقل، مرکزجرم و مرکز حجم یک جسم و $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ مختصات هر ذره از آن میباشند.
یک رابطه اختصاصی دیگر برای یک جسم سطحی شکل همگن با چگالی ثابت ρ و ضخامت ثابت h از روابط بالا بدست می‌آید. اگر A مساحت سطح میانی (چنانچه h بسیار کوچکتر از سایر ابعاد جسم باشد، می‌توان روابط زیر را برای یک جسم غیر مسطح نیز به‌کار برد) و h ضخامت دیواره سطح باشد، حجم آن $V=h\cdot A$ و برای المان حجمی $dV=h\cdot dA$ برقرار است و در نتیجه:

مرکز سطح یک جسم سطحی شکل همگن با چگالی و ضخامت ثابت:



شکل ۵-۶

فرم برداری مرکز سطح یک جسم سطحی با ρ و h ثابت

$$\boxed{\vec{r}_C=\frac{\int_A h\,\vec{r}\,dA}{\int_A h\,dA}=\frac{\int_A \vec{r}\,dA}{A}} \qquad (۵-۲-۵)$$

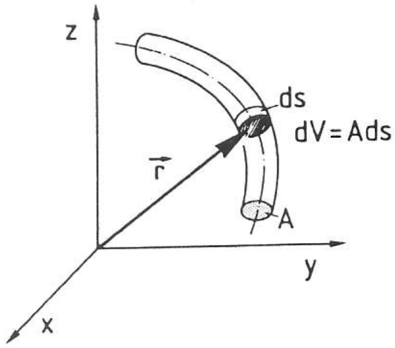
فرم مؤلفه‌ای مرکز سطح یک جسم سطحی با ρ و h ثابت

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{A}\ ;\ \ \bar{y}=\frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{A}\ ;\ \ \bar{z}=\frac{\int_A \tilde{z}\,dA}{A}}$$

در روابط بالا $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ مختصات مرکز سطح یک جسم سطحی‌شکل همگن با چگالی و ضخامت ثابت و $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ مختصات هر المان سطح (dA) از آن میباشند.

روابط (۵-۲-۵) موقعیت مرکز سطح را بیان می‌دارند. روابط مشابهی را هم می‌توان برای یک جسم میله‌ای شکل با سطح مقطع ثابت A، در صورتی‌که ابعاد سطح مقطع آن بسیار کوچکتر از سایر ابعاد جسم میله‌ای شکل باشد بدست آورد. در این حال اگر طول کل میله L و طول قسمت بینهایت کوچک (المان دیفرانسیلی) از آن ds ، $V=A\cdot L$ حجم کل میله و $dV=A\cdot ds$ حجم المان کوچک دیفرانسیلی از میله باشند، معادلات (۵-۲-۴) به صورت زیر در می‌آیند:

مرکز خط یک جسم میله‌ای شکل همگن با چگالی و سطح مقطع ثابت:



شکل ۵-۷

فرم برداری مرکز خط یک جسم همگن با چگالی ثابت

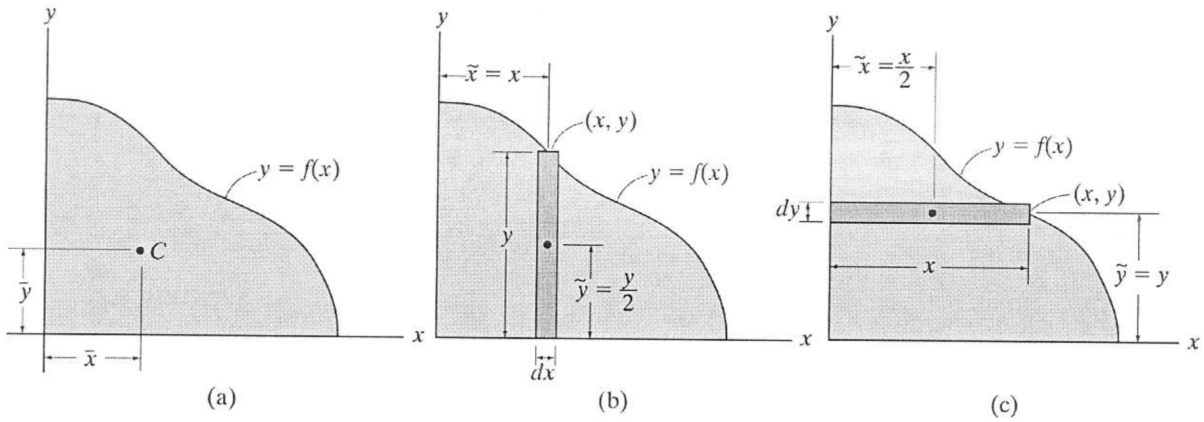
$$\boxed{\vec{r}_C=\frac{\int_L \vec{r}\,A\,ds}{\int_L A\,ds}=\frac{\int_L \vec{r}\,ds}{L}} \qquad (۵-۲-۶)$$

فرم مؤلفه‌ای مرکز خط یک جسم همگن با چگالی ثابت

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\int_L \tilde{x}\,ds}{L}\ ;\ \ \bar{y}=\frac{\int_L \tilde{y}\,ds}{L}\ ;\ \ \bar{z}=\frac{\int_L \tilde{z}\,ds}{L}}$$

در روابط بالا $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ مختصات مرکز خط یک جسم میله‌ای‌شکل همگن با چگالی و ضخامت ثابت و $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ مختصات هر المان طول (ds) از آن میباشند.

۵-۳) مرکز هندسی سطوح و منحنیهای مسطح



شکل۵-۸

مرکز سطح یک سطح مسطح:

چنانچه سطح یا سطح مقطعی با مساحتی برابر A در یک صفحه، مثلاً در صفحه $x-y$ واقع باشد، می‌توان مرکز آن سطح را با انتگرال‌هایی شبیه معادلات (۵-۲-۵) به صورت زیر بدست آورد:

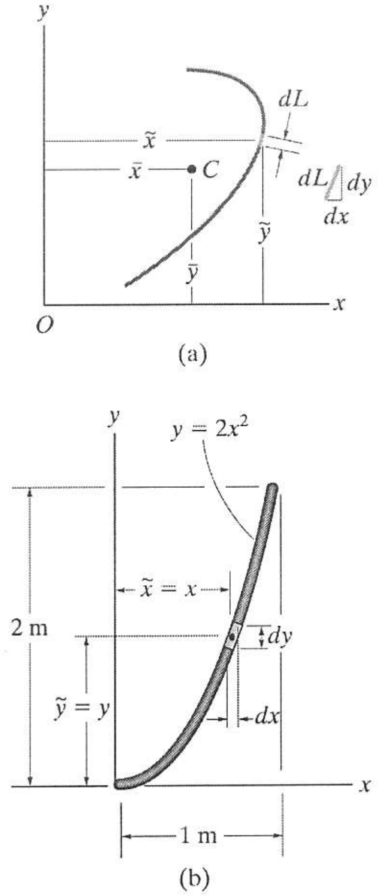
$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{A} \; ; \; \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{A}} \qquad (۵-۱-۷)$$

مثلاً مرکز سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و محورهای مختصات در ربع اول (شکل۵-۸ (a)) را می‌توان با یک بار انتگرال‌گیری محاسبه نمود. برای این کار از یک المان دیفرانسیلی نواری شکل عمودی و یا افقی (شکل۵-۸ (c)) استفاده می‌شود. مثلاً اگر از المان نواری عمودی استفاده شود (شکل۵-۸ (b))، مساحت المان نواری برابر $dA = y \cdot dx$ و مختصات مرکز سطح این المان $\tilde{x} = x$ و $\tilde{y} = y/2$ خواهد بود و چنانچه از المان نواری افقی استفاده شود (شکل۵-۸ (c))، مساحت المان نواری برابر $dA = x \cdot dy$ و مختصات مرکز سطح آن $\tilde{x} = x/2$ و $\tilde{y} = y$ می‌شود.

مرکز خط یک منحنی مسطح:

اگر پاره‌خط یا منحنی مسطحی به طول L در یک صفحه، مثلاً در صفحه $x-y$ و فرم کلی $y = f(x)$ واقع باشد، می‌توان مرکز آن خط یا منحنی را با انتگرال‌هایی شبیه معادلات (۵-۲-۶) به صورت زیر بدست آورد:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{L} \; ; \; \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{L}} \qquad (۵-۱-۸)$$



شکل۵-۹

dL طبق شکل۵-۹ (a) از قضیه فیثاغورث به‌دست می‌آید:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

عبارت فوق را می‌توان به یکی از دو فرم زیر نیز نوشت:

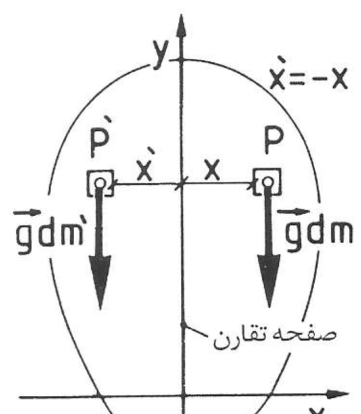
$$dL = \sqrt{(\frac{dx}{dx})^2\, dx^2 + (\frac{dy}{dx})^2\, dx^2} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

و یا

$$dL = \sqrt{(\frac{dx}{dy})^2\, dy^2 + (\frac{dy}{dy})^2\, dy^2} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right) dy$$

از این دو فرم بهتر است از فرمی، که محاسبات انتگرال‌گیری را ساده‌تر می‌کند استفاده گردد. مثلاً اگر میله شکل۵-۹ (b) که در دستگاه مختصات $x-y$ با تابع $y = 2x^2$ بیان می‌شود در نظر گرفته شود، طول جزء دیفرانسیلی میله برابر $dL = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\cdot dx$ است و چون $dy/dx = 4x$ می‌باشد، در نتیجه $dL = \sqrt{1+(4x)^2}\cdot dx$ است. مختصات مرکز جزء دیفرانسیلی طول در $\tilde{x} = x$ و $\tilde{y} = y$ قرار دارند.

۵-۴) اجسام و سطوح متقارن



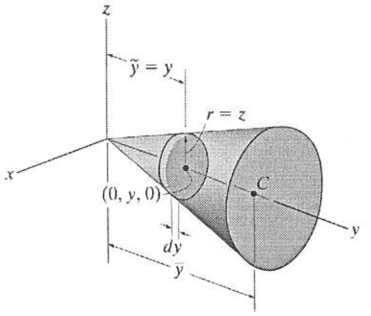
شکل۵-۱۰

چنانچه جسمی (سطحی) متقارن باشد، تعیین مرکز ثقل (مرکز سطح) آن ساده می‌گردد. یک جسم (یا یک سطح) را وقتی نسبت به یک صفحه تقارن (یا محور تقارن) متقارن می‌گویند، که برای هر نقطه P از جسم (یا سطح) یک نقطه 'P وجود دارد، طوری‌که خط فاصل $\overline{PP'}$ عمود بر صفحه تقارن (محور تقارن) قرار گیرد و توسط آن سطح تقارن (محور تقارن) به دو قسمت مساوی تقسیم گردد. این قاعده برای مرکز تقارن هم برقرار است، اما بدون شرط عمود بودن این خط فاصل.

اگر قانون گشتاور برآیند نسبت به محور- z برای جسم نشان‌داده شده در شکل۵-۱۰ که دارای صفحه تقارن است فورموله شود، نتیجه می‌شود:

$$\bar{x}\, m = \int x\, dm = \underbrace{x\, dm + x'\, dm'}_{0} + \underbrace{\ldots}_{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$$

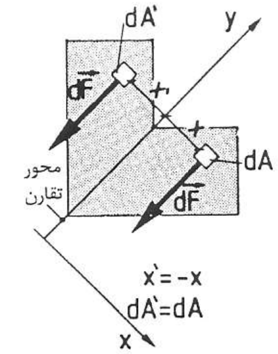
اگر جسمی دارای یک صفحه تقارن باشد، گشتاورهای حاصل از المانهای جرمی در هر دو طرف صفحه تقارن یکدیگر را خنثی می‌کنند. به عبارت دیگر مرکز ثقل جسم در صفحه تقارن واقع است.



شکل۵-۱۱

چنانچه جسمی دارای دو صفحه تقارن باشد، بایستی مرکز ثقل آن جسم در فصل مشترک هر دو صفحه تقارن (خط تلاقی دو صفحه) قرار داشته باشد. جسم مخروطی شکل۵-۱۱ دارای دو صفحه تقارن است. فصل مشترک این دو صفحه بر محور- y منطبق است.

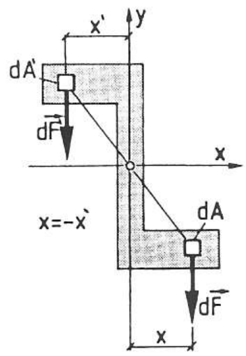
اگر جسمی دارای سه سطح تقارن باشد، که یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، مرکز ثقل آن جسم در این نقطه تلاقی واقع است. همین امر برای اجسام سطحی و سطوح با محورهای تقارن و یا مرکز تقارن نیز معتبر است. شکل ۵-۱۲ حالت یک سطح (یا جسمی سطحی شکل) با یک محور تقارن را نشان می‌دهد. در اینجا هم از قانون گشتاور برآیند نسبت به محور- z (برآیند گشتاور در محور تقارن قرار داده می شود) نتیجه می‌شود:



شکل۵-۱۲

$$\bar{x}\, A = \int x\, dA = \underbrace{x\, dA + x'\, dA'}_{0} + \underbrace{\dots}_{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$$

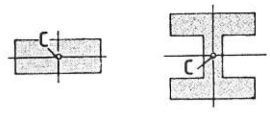
به عبارت دیگر تعاریف ارائه شده برای سطوح (ویا همچنین اجسام سطحی شکل) هم معتبرند. شکل۵-۱۳ یک سطح (یا جسم سطحی شکل) با مرکز تقارن را نشان می‌دهد. از قانون گشتاور برآیند نسبت به محور- z نتیجه می‌شود:



شکل۵-۱۳

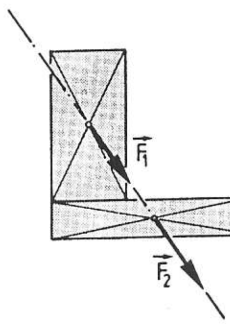
$$\bar{x}\, A = \int x\, dA = \underbrace{x\, dA + x'\, dA'}_{0} + \underbrace{\dots}_{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$$

اگر این سطح به اندازه $90°$ چرخانده شود، $\bar{y} = 0$ خواهد شد. به عبارت دیگر مرکز ثقل این سطح در مرکز تقارن آن واقع است. شکل۵-۱۴ موقعیت مرکز ثقل دو سطح با دو سطح تقارن را نشان می‌دهد.



شکل۵-۱۴

چنانچه جسمی از دو قسمت با مرکز ثقل معلوم تشکیل شده باشد، در آن صورت مرکز ثقل کل جسم بر روی خط واصل مراکز ثقل این دو قسمت واقع است. این موضوع با توجه به شکل۵-۱۵ وقتی قابل درک است که نیروها به گونه‌ای چرخانده شوند که بر خط واصل مراکز ثقل منطبق گردند.



شکل۵-۱۵

۵-۵) اجسام مرکب

بیشتر اجسام از تعدادی جسم ساده‌تر تشکیل شده‌اند. در این‌حال اگر وزن (و یا همچنین جرم، حجم، سطح و منحنی) و مرکز ثقل (و یا همچنین مرکز جرم، مرکز حجم، مرکز سطح و مرکز منحنی) این اجسام ساده معلوم باشند، می توان وزن (و یا همچنین جرم، حجم، سطح و منحنی) هر یک از اجسام ساده را در مرکز ثقل (و یا همچنین مرکز جرم، مرکز حجم، مرکز سطح و مرکز منحنی) آن جسم ساده در نظر گرفت. به این ترتیب برای بدست آوردن مرکز ثقل جسم مرکب می‌توان به‌جای انتگرالگیری از روابطی مشابه معادلات ۵-۱-۵ استفاده نمود، که در آن $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ مرکز ثقل (و یا همچنین مرکز جرم، مرکز حجم، مرکز سطح و مرکز منحنی) جسم مرکب و $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ مختصات مرکز ثقل (و یا همچنین مرکز جرم، مرکز حجم، مرکز سطح و مرکز منحنی) اجسام ساده تشکیل‌دهنده جسم مرکب می‌باشند.

مختصات مرکز ثقل جسم مرکب:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i W_i}{\Sigma W_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i W_i}{\Sigma W_i} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i W_i}{\Sigma W_i}}$$

مختصات مرکز جرم جسم مرکب:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i m_i}{\Sigma m_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i m_i}{\Sigma m_i} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i m_i}{\Sigma m_i}}$$

مختصات مرکز حجم جسم مرکب:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i V_i}{\Sigma V_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i V_i}{\Sigma V_i} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i V_i}{\Sigma V_i}}$$

مختصات مرکز سطح جسم مرکب:

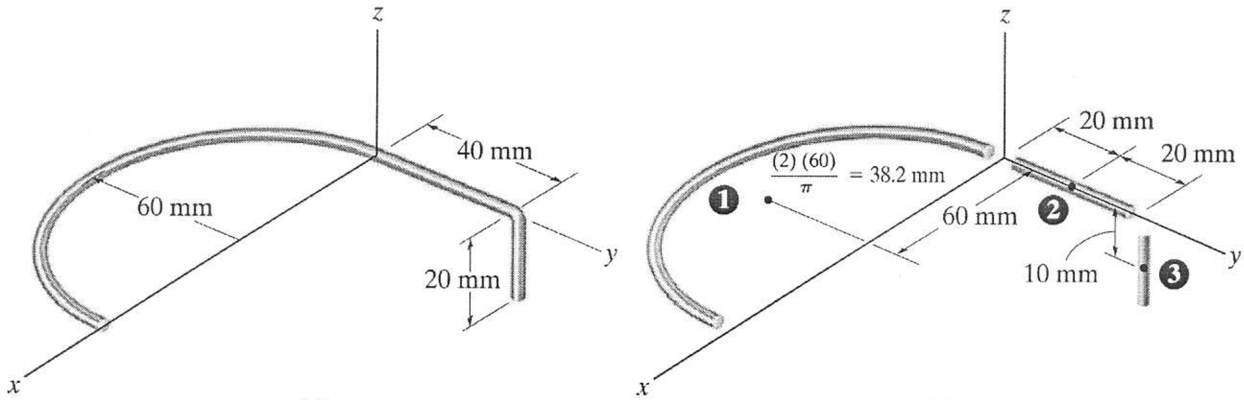
$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i A_i}{\Sigma A_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i A_i}{\Sigma A_i} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i A_i}{\Sigma A_i}}$$

مختصات مرکز خط جسم مرکب:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i L_i}{\Sigma L_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i L_i}{\Sigma L_i} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i L_i}{\Sigma L_i}}$$

مثال ۵-۱

مرکز هندسی سیمی مطابق شکل (a) را تعیین کنید.



(a) (b)

حل :

این سیم از سه قسمت ساده مطابق شکل (b) تشکیل شده است.

مرکز هندسی هر قسمت را تعیین کرده و در شکل بر روی هر قسمت مشخص می‌کنیم. به‌ویژه مرکز هندسی قسمت 1 را با انتگرالگیری و یا با استفاده از جدول پایان کتاب بدست می‌آوریم.

برای سهولت کار بهتر است محاسبات به صورت جدول انجام گیرد:

قسمت	L_i (mm)	$\tilde{x}_i$ (mm)	$\tilde{y}_i$ (mm)	$\tilde{z}_i$ (mm)	$\tilde{x}_i L_i$ (mm^2)	$\tilde{y}_i L_i$ (mm^2)	$\tilde{z}_i L_i$ (mm^2)
1	$\pi \cdot 60 = 188{,}5$	60	$-38{,}2$	0	11310	-7200	0
2	40	0	20	0	40	800	0
3	20	0	40	-10	40	800	-200
	$\Sigma L_i = 248{,}5$				$\Sigma \tilde{x}_i L_i = 11310$	$\Sigma \tilde{y}_i L_i = -5600$	$\Sigma \tilde{z}_i L_i = -200$

بنابراین:

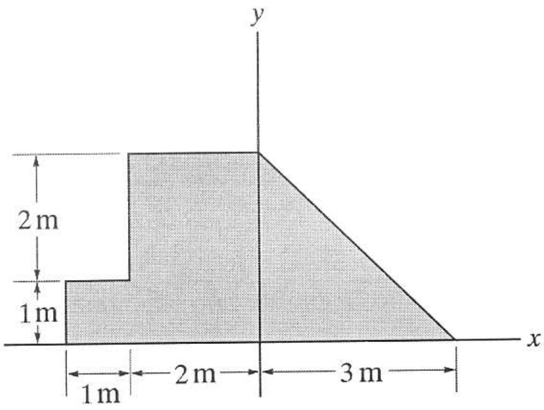
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{11310}{248{,}5} = 45{,}5 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{-5600}{248{,}5} = -22{,}5 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{-200}{248{,}5} = -0{,}805 \text{ mm}$$

مثال ۵-۲

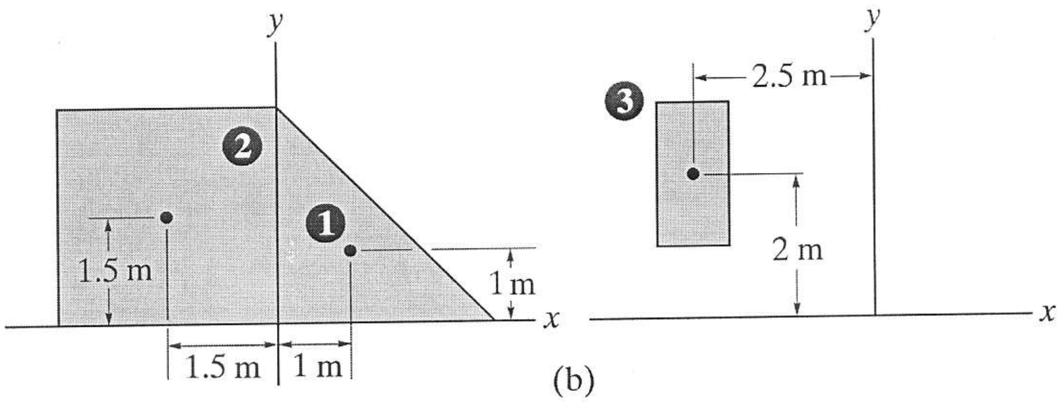
مرکز سطح شکل مرکب مقابل را تعیین کنید.



(a)

حل:

شکل سطح کل (سطح مرکب) را می‌توان متشکل از مجموع دو سطح ساده مثلث ❶ و مربع ❷ در نظر گرفت که سومین سطح ساده مستطیلی ❸ از آن کم شده است.



(b)

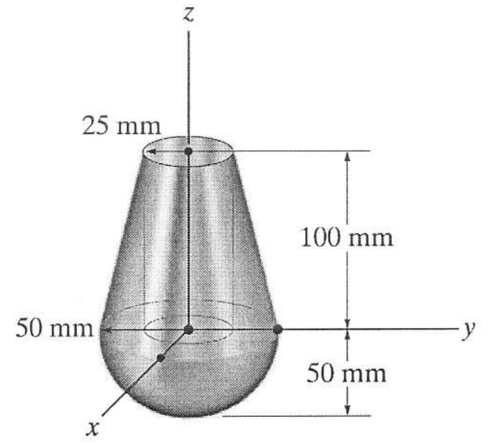
قسمت i	$\tilde{x}_i$ (m)	$\tilde{y}_i$ (m)	A_i (m^2)	$\tilde{x}_i \cdot A_i$ (m^3)	$\tilde{y}_i \cdot A_i$ (m^3)
❶	1	1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4{,}5$	4,5	4,5
❷	−1,5	1,5	$(3)(3) = 9$	−13,5	13,5
❸	−2,5	2	$-(1)(2) = -2$	5	−4
			$A = \Sigma A_i = 11{,}5$	$\Sigma\, \tilde{x}_i \cdot A_i = -4$	$\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i = 14$

$$C = (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\Sigma \tilde{x}_i \cdot A_i}{\Sigma A_i} = \dfrac{-4}{11{,}5} = 0{,}348 \text{ m} \\ \bar{y} = \dfrac{\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i}{\Sigma A_i} = \dfrac{14}{11{,}5} = 1{,}22 \text{ m} \end{cases}$$

مثال ۵-۳

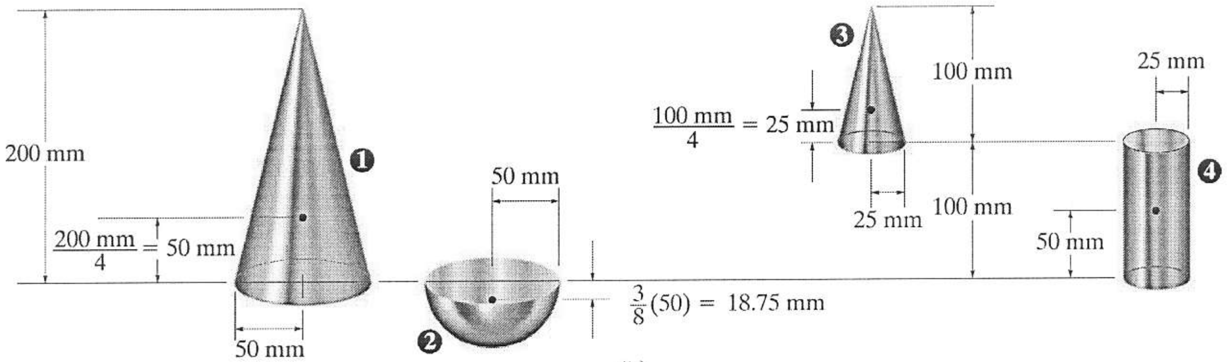
مرکز جرم قطعه مرکب شکل (a) را تعیین کنید. چگالی مخروط ناقص $\rho_c = 8000\ kg/m^3$ و چگالی نیم‌کره $\rho_c = 4000\ kg/m^3$ است. وسط مخروط ناقص استوانه‌ای به شعاع 25 mm ایجاد شده است.

$(1\ kg/m^3 = 10^{-9}\ kg/mm^2)$



(a)

حل :



(b)

این قطعه را می‌توان متشکل از چهار قسمت ساده مطابق شکل (b) دانست. برای به‌دست آوردن شکل مرکب اصلی بایستی قسمتهای ❸ و ❹ را از مجموع جسم مرکب حاصل از ❶ و ❷ کم نمود، زیرا این قسمتها حجم منفی هستند. با استفاده از جدول پایان کتاب نحوه محاسبات مربوط به تعیین $\tilde{z}$ مرکز حجم هر قسمت در شکل (b) نشان داده شده است. با توجه به این‌که تمام قسمتها و در نتیجه کل قطعه تقارن دورانی دارند: $\bar{x} = \bar{y} = 0$

چون g و به این ترتیب $W = mg$ ثابت است، در نتیجه: $\bar{z} = \dfrac{\Sigma \tilde{z}_i \cdot m_i}{\Sigma m_i}$ می‌باشد. جرم هر قسمت را می‌توان از رابطه $m_i = \rho_i V_i$ به‌دست آورد و در محاسبات به‌کار برد.

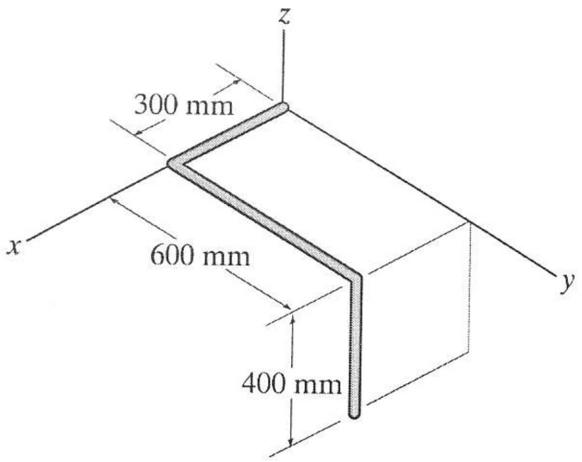
قسمت i	$\tilde{z}_i$ (mm)	m_i (kg)	$\tilde{z}_i \cdot m_i$ (kg·mm)
❶	50	$8000(10^{-9})(\frac{1}{3})\pi(50)^2(200) = 4{,}189$	209,440
❷	−18,75	$4000(10^{-9})(\frac{2}{3})\pi(50)^3 = 1{,}047$	−19,635
❸	100 + 25 = 125	$-8000(10^{-9})(\frac{1}{3})\pi(25)^2(100) = -0{,}524$	−65,450
❹	50	$-8000(10^{-9})\pi(25)^2(100) = -1{,}571$	−78,540
		$\Sigma m_i = 3{,}142$	$\Sigma \tilde{z}_i \cdot m_i = 45{,}815$

بنابراین:

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i \cdot m_i}{\Sigma m_i} = \frac{45{,}815}{3{,}142} = 14{,}6\ mm$$

تمرین ۵-۱

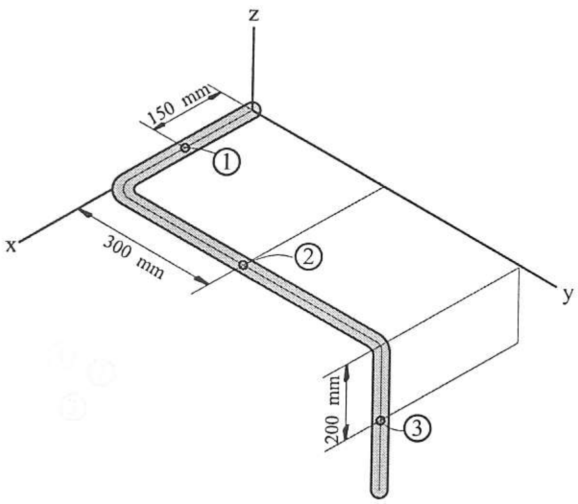
مطلوب است مختصات $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ مرکز هندسی سیمی که مطابق شکل مقابل خم شده است.



حل :

این سیم از سه قسمت ساده مطابق شکل‌مقابل تشکیل شده است.

مرکز هندسی هر قسمت را تعیین کرده و در شکل بر روی هر قسمت مشخص می‌کنیم



قسمت	L_i (mm)	$\tilde{x}_i$ (mm)	$\tilde{y}_i$ (mm)	$\tilde{z}_i$ (mm)	$\tilde{x}_i L_i$ (mm^2)	$\tilde{y}_i L_i$ (mm^2)	$\tilde{z}_i L_i$ (mm^2)
①	300	150	0	0	45000	0	0
②	600	300	300	0	180000	180000	0
③	400	300	600	−200	12000	240000	−80000
	$\Sigma L_i =$ 1300				$\Sigma \tilde{x}_i L_i =$ 345000	$\Sigma \tilde{y}_i L_i =$ 420000	$\Sigma \tilde{z}_i L_i =$ −80000

بنابراین:

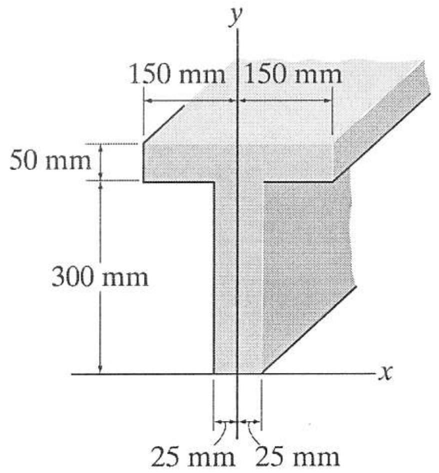
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{345000}{1300} = 265{,}385 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{420000}{1300} = 323{,}077 \text{ mm}$$

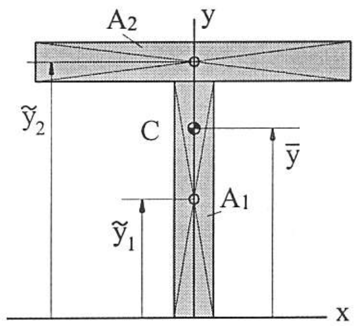
$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{-80000}{1300} = -61{,}583 \text{ mm}$$

تمرین ۵-۲

مطلوب است تعیین مختص $\bar{y}$ مرکز سطح مقطع تیر شکل مقابل.



حل:

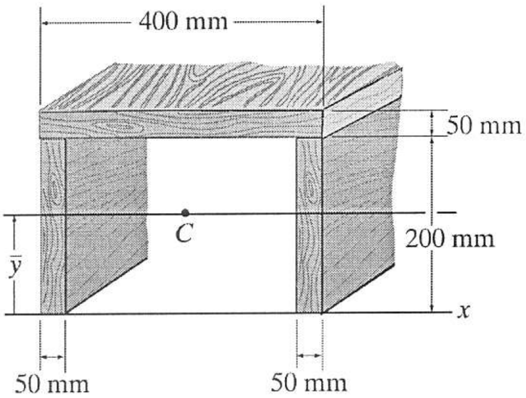


قسمت i	$\tilde{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\tilde{y}_i \cdot A_i$ (mm^3)
1	150	15000	2250000
2	325	15000	4875000
		$A = \Sigma A_i =$ 30000	$\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i =$ 7125000

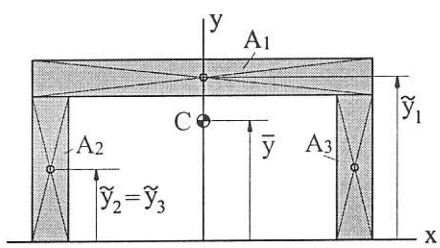
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{7125000}{30000} = 237{,}5 \text{ mm}$$

تمرین ۵-۳

مطلوب است تعیین مختص $\bar{y}$ مرکز سطح مقطع تیر شکل مقابل.

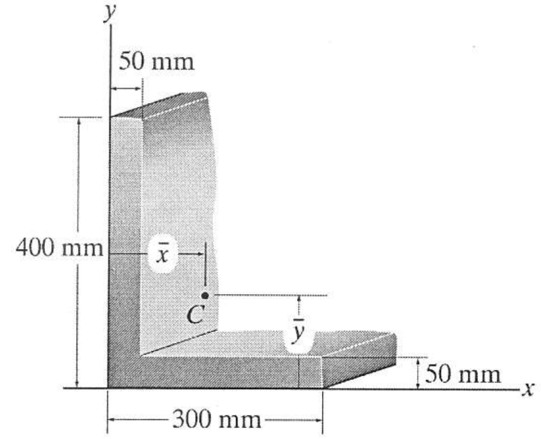


حل:



قسمت i	$\tilde{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\tilde{y}_i \cdot A_i$ (mm^3)
1	225	20000	4500000
2	100	10000	1000000
3	100	10000	1000000
		$A = \Sigma A_i =$ 40000	$\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i =$ 6500000

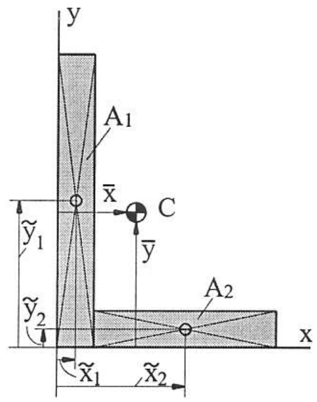
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{6500000}{40000} = 162{,}5 \text{ mm}$$



تمرین ۵-۴

مطلوب است مختصات $(\bar{x},\bar{y})$ مرکز سطح مقطع تیری مطابق شکل مقابل.

حل:



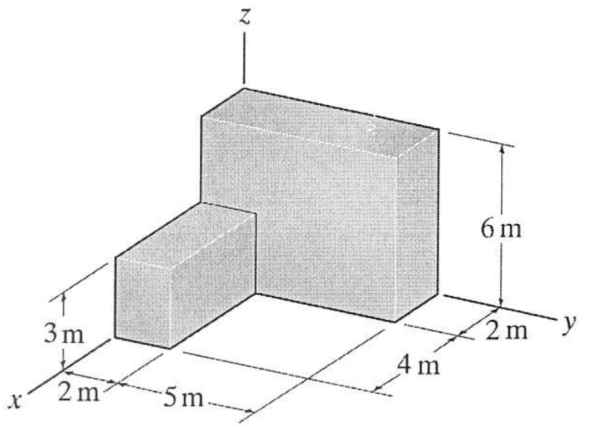
قسمت i	$\tilde{x}_i$ (mm)	$\tilde{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\tilde{x}_i A_i$ (mm^3)	$\tilde{y}_i A_i$ (mm^3)
1	25	200	20000	500000	4000000
2	175	25	12500	2187500	312500
مرکز سطح: $C(\bar{x},\bar{y})$			$\Sigma A_i =$ 32500	$\Sigma \tilde{x}_i A_i =$ 2687500	$\Sigma \tilde{y}_i A_i =$ 4312500

بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{2687500}{32500} = 82{,}692 \text{ mm}$$

و

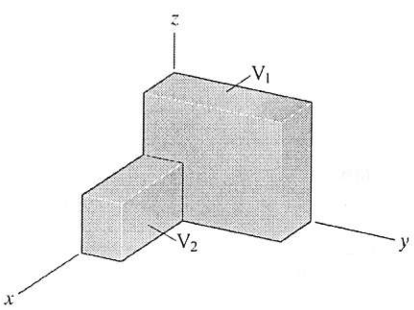
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{4312500}{32500} = 132{,}692 \text{ mm}$$



تمرین ۵-۵

مطلوب است مختصات $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ مرکز جرم قطعه توپُر همگنی مطابق شکل مقابل.

حل:



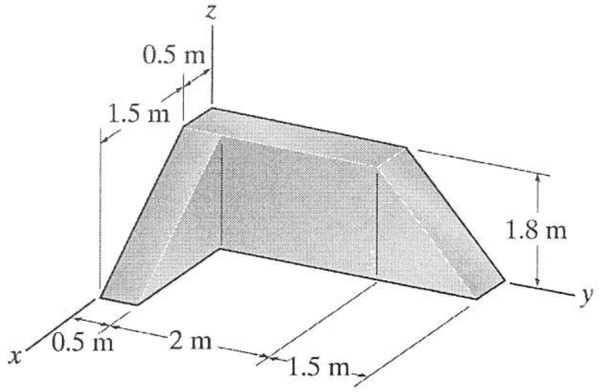
قسمت i	$\tilde{x}_i$ (m)	$\tilde{y}_i$ (m)	$\tilde{z}_i$ (m)	V_i (m^3)	$\tilde{x}_i V_i$ (m^4)	$\tilde{y}_i V_i$ (m^4)	$\tilde{z}_i V_i$ (m^4)
1	1	3,5	3	84	84	294	252
2	4	1	1,5	24	96	24	36
				$\Sigma V_i =$ 108	$\Sigma \tilde{x}_i V_i =$ 180	$\Sigma \tilde{y}_i V_i =$ 318	$\Sigma \tilde{z}_i V_i =$ 288

بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i V_i}{\Sigma V_i} = 1{,}667 \text{ m} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i V_i}{\Sigma V_i} = 2{,}944 \text{ m} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i V_i}{\Sigma V_i} = 2{,}667 \text{ m}$$

تمرین ۵-۶

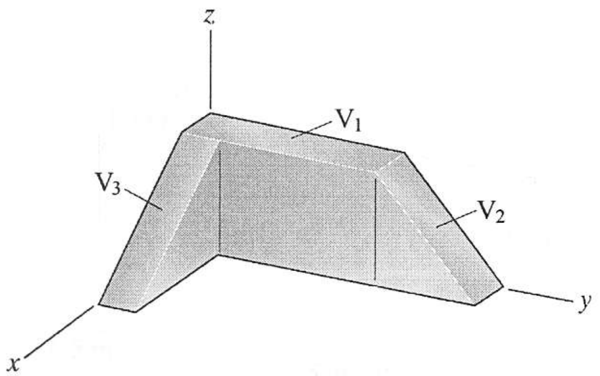
مطلوب است مختصات ($\bar{x},\bar{y},\bar{z}$) مرکز جرم قطعه توپُر همگنی مطابق شکل مقابل.



حل :

حل :

این قطعه از سه قسمت ساده مطابق شکل‌مقابل تشکیل شده است.



قسمت i	$\tilde{x}_i$ (m)	$\tilde{y}_i$ (m)	$\tilde{z}_i$ (m)	V_i (m^3)	$\tilde{x}_i V_i$ (m^4)	$\tilde{y}_i V_i$ (m^4)	$\tilde{z}_i V_i$ (m^4)
1	0,25	1,25	0,9	2,25	0,5625	2,8125	2,025
2	0,25	3	0,6	0,675	0,16875	2,025	0,405
3	1	0,25	0,6	0,675	0,675	0,16875	0,405
				$\Sigma V_i =$ 3,6	$\Sigma \tilde{x}_i V_i =$ 1,40625	$\Sigma \tilde{y}_i V_i =$ 5,00625	$\Sigma \tilde{z}_i V_i =$ 2,835

بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}_i V_i}{\Sigma V_i} = \frac{1{,}40625}{3{,}6} = 0{,}391\ \text{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i V_i}{\Sigma V_i} = \frac{5{,}00625}{3{,}6} = 1{,}391\ \text{m}$$

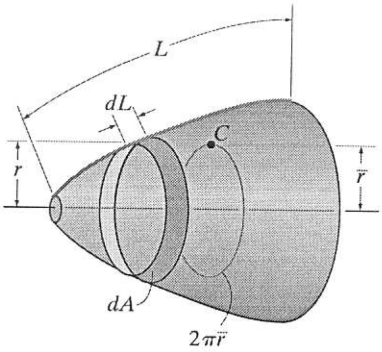
$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}_i V_i}{\Sigma V_i} = \frac{2{,}835}{3{,}6} = 0{,}7875\ \text{m}$$

۵-۶) قاعده گلدین (قضایای پاپوس و گلدینوس)

از این قاعده برای تعیین مساحت و حجم اجسامی که از دوران یک منحنی مسطح (منحنی مولد سطح دورانی) و یا یک سطح مسطح (سطح مولد حجم دورانی) حول محوری واقع در صفحه‌ای که منحنی یا سطح مسطح قرار دارند استفاده می‌شود.

۱- مساحت سطح دورانی

چنانچه سطحی از دوران یک منحنی مسطح به طول $L = L_{plan}$ حول محوری واقع در صفحه آن منحنی مسطح به‌وجود آید، (شکل۵-۱۶) اندازه مساحت سطح دوران کرده $A = A_{rot}$ به اندازه زاویه $\theta \le 2\pi$ برحسب رادیان به صورت زیر بدست می‌آید:

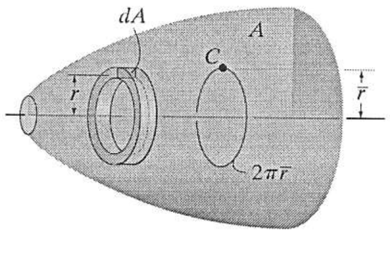


شکل۵-۱۶

$$dA = \theta \cdot r \cdot dL \;;\; A = \int_A dA = \theta \cdot \int_L r \cdot dL \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \theta \cdot \bar{r} \cdot L}$$

۲- حجم دورانی

چنانچه حجمی از دوران یک سطح مسطح به مساحت $A = A_{plan}$ حول محوری واقع در صفحه آن سطح مسطح به‌وجود آید، (شکل۵-۱۷) اندازه حجم دوران کرده $V = V_{rot}$ به اندازه زاویه $\theta \le 2\pi$ برحسب رادیان به صورت زیر بدست می‌آید:



شکل۵-۱۷

$$dV = \theta \cdot r \cdot dA \;;\; V = \int_V dV = \theta \cdot \int_A r \cdot dA \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \theta \cdot \bar{r} \cdot A}$$

۳- سطوح و حجم‌های دورانی مرکب

چنانچه منحنی و سطوح مولد سطوح و حجم‌های حاصل از دوران از چند قسمت ساده‌تر تشکیل شده باشد، در این صورت می‌توان به‌جای انتگرالگیری از مجموع سطوح و حجم‌ها استفاده نمود، که در آن $\tilde{r}_i$ مرکز هندسی هر قسمت از شکل مرکب، L_i طول و A_i مساحت آن قسمت است.

سطح دورانی حاصل از یک منحنی مسطح مرکب:

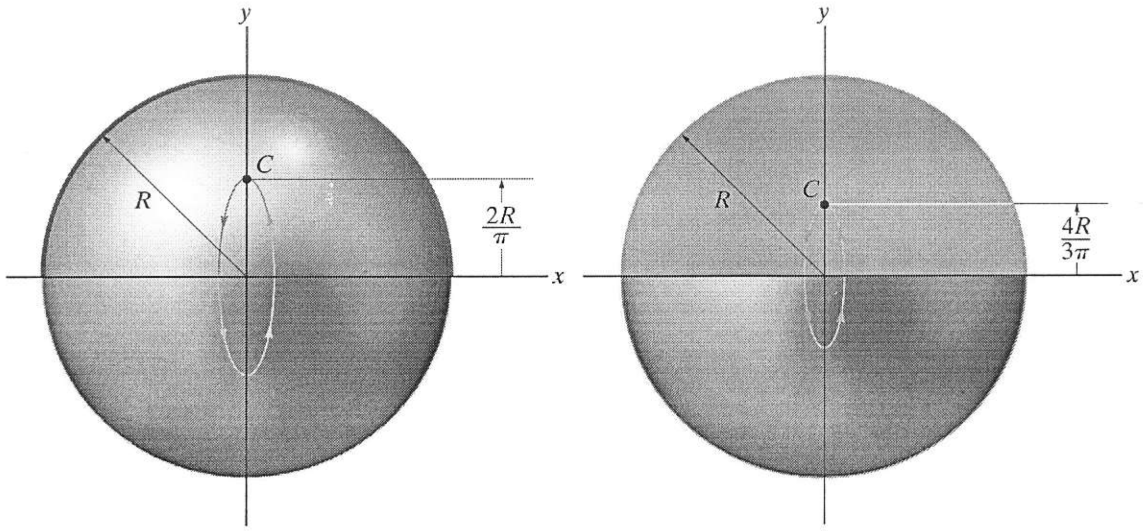
$$\boxed{A = \theta \Sigma (\tilde{r}_i \cdot L_i)}$$

حجم دورانی حاصل از یک سطح مسطح مرکب:

$$\boxed{V = \theta \Sigma (\tilde{r}_i \cdot A_i)}$$

مثال ۵-۴

نشان دهید که مساحت سطح کُره $A = 4\pi R^2$ و حجم آن $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ است.



(a) (b)

حل :

مساحت سطح کُره: مساحت سطح کُره نشان‌داده شده در شکل (a) از دوران کمان نیم‌دایره‌ای حول محور x به‌دست می‌آید. طبق جدول پایان کتاب مرکز این کمان به فاصله $\bar{r} = 2R/\pi$ از محور دوران (در اینجا محور x) قرار دارد. این مرکز بایستی به اندازه زاویه $\theta = 2\pi$ رادیان دوران کند تا سطح کُره به‌وجود آید، در نتیجه:

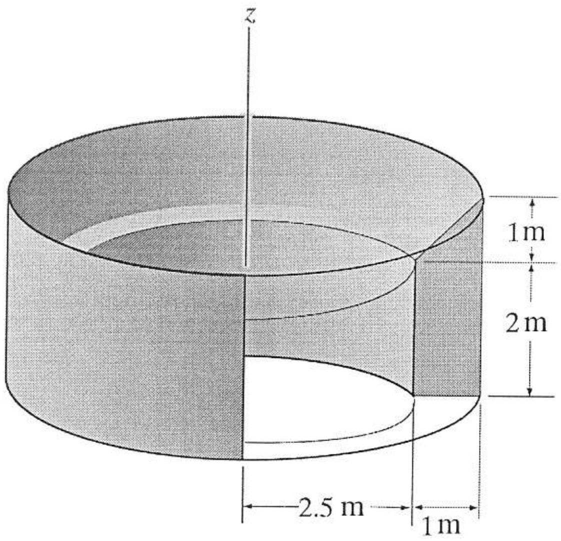
$$A = \theta \bar{r} L \,; \qquad A = 2\pi\left(\frac{2R}{\pi}\right)\pi R \;=\; 4\pi R^2$$

حجم کُره: حجم کُره از دوران سطح نیم‌دایره‌ای شکل(b) حول محور x به‌دست می‌آید. طبق جدول پایان کتاب مرکز این سطح نیم‌دایره‌ای به فاصله $\bar{r} = 4R/3\pi$ از محور دوران (در اینجا محور x) قرار دارد. این مرکز بایستی به اندازه زاویه $\theta = 2\pi$ رادیان دوران کند تا حجم کُره به‌وجود آید، در نتیجه:

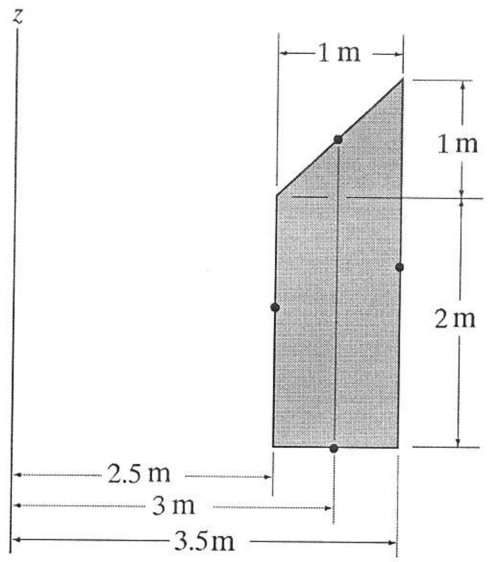
$$V = \theta \bar{r} A \,; \qquad V = 2\pi\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \;\frac{4}{3}\pi R^3$$

مثال ۵-۵

مطلوب است مساحت سطح و حجم جسم کامل نشان‌داده شده در شکل (a).



(a)



(b)

حل :

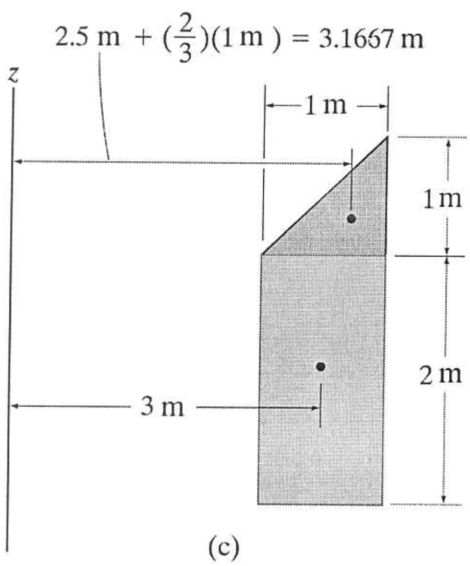
مساحت سطح: سطح مورد نظر از دوران چهار پاره‌خط نشان‌داده شده در شکل (b) به اندازه زاویه $\theta = 2\pi$ رادیان حول محور z به‌دست می‌آید. فاصله مرکز هر پاره خط تا محور z نیز در شکل (b) نشان‌داده شده است. در نتیجه:

$$A = \theta \Sigma(\tilde{r}_i L_i) = 2\pi[(2{,}5\,m)(2\,m) + (3\,m)(\sqrt{(1m)^2 + (1m)^2}\,) + (3{,}5\,m)(3\,m) + (3\,m)(1\,m)] = 143\,m^2$$

حجم جسم: حجم این جسم از دوران دو سطح نشان‌داده شده در شکل (c) به اندازه زاویه $\theta = 2\pi$ رادیان حول محور z به‌دست می‌آید. فاصله مراکز هر یک از این دو سطح تا محور z نیز در شکل (c) نشان‌داده شده است. در نتیجه:

$$V = \theta \Sigma(\tilde{r}_i A_i) = 2\pi\{(3{,}1667\,m)[\tfrac{1}{2}(1m)(1m)] + (3\,m)[(2\,m)(1\,m)]\}$$

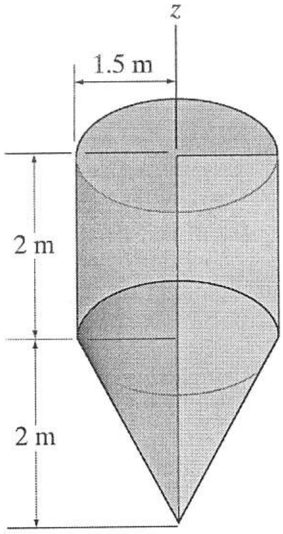
$$V = 47{,}6\ m^3$$



(c)

تمرین ۵-۷

مطلوب است تعیین مساحت سطح خارجی و حجم جسمی مطابق شکل مقابل، که از دوران پروفیل مشخص شده به اندازه زاویه $360°$ ($\theta = 2\pi$ رادیان) حول محور z به‌دست می‌آید.



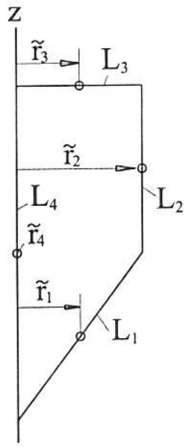
حل :

سطح خارجی جسم:

$$A = \theta \Sigma(\tilde{r}_i L_i) = 2\pi(\tilde{r}_1 L_1 + \ldots + \tilde{r}_4 L_4)$$

$$A = 2\pi(0{,}75 \cdot 2{,}5 + 1{,}5 \cdot 2 + 0{,}75 \cdot 1{,}5 + 0)\,m^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A = 37{,}699\ m^2}$$



$\tilde{r}_1 = 0{,}75\,m$; $L_1 = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5\,m$

$\tilde{r}_2 = 1{,}5\,m$; $L_2 = 2\,m$

$\tilde{r}_3 = 0{,}75\,m$; $L_3 = 1{,}5\,m$

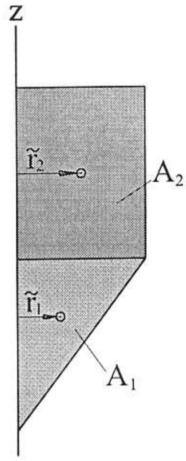
$\tilde{r}_4 = 0$; $L_4 = 4\,m$

حجم جسم:

$$V = \theta \Sigma(\tilde{r}_i A_i) = 2\pi(\tilde{r}_1 A_1 + \tilde{r}_2 A_2)$$

$$V = 2\pi(0{,}5 \cdot 1{,}5 + 0{,}75 \cdot 3)\ m^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{V = 18{,}850\ m^3}$$

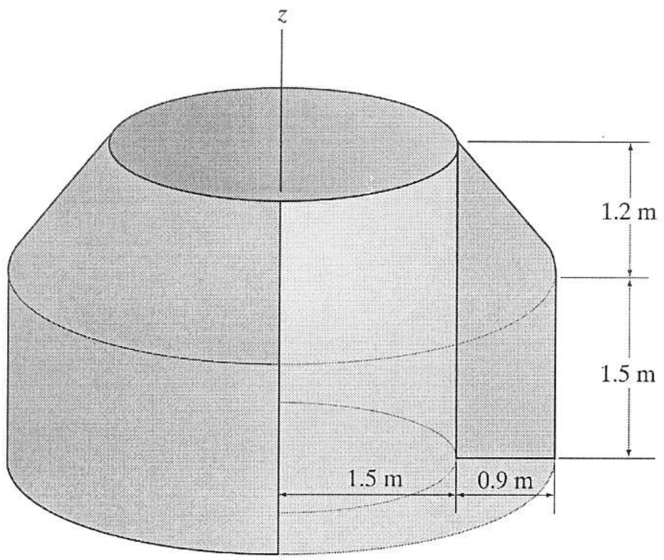


$\tilde{r}_1 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}5 = 0{,}5\,m$

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 1{,}5\,m^2$

$\tilde{r}_2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 = 0{,}75\,m$

$A_2 = 1{,}5 \cdot 2 = 3\,m^2$

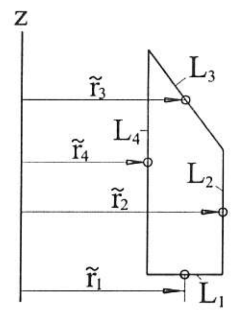


تمرین ۵-۸

مطلوب است تعیین مساحت سطح خارجی و حجم جسمی مطابق شکل مقابل، که از دوران پروفیل مشخص شده به اندازه زاویه $360°$ ($\theta=2\pi$ رادیان) حول محور z به‌دست می‌آید.

حل :

سطح خارجی جسم:



$$A=\theta\Sigma(\tilde{r}_i L_i)=2\pi(\tilde{r}_1 L_1+\ldots+\tilde{r}_4 L_4)$$

$$A=2\pi(1{,}95\cdot 0{,}9+2{,}4\cdot 1{,}5+1{,}95\cdot 1{,}5+1{,}5\cdot 2{,}7)\,m^2$$

$$\boxed{A=77{,}472\ m^2}$$

$\tilde{r}_1=1{,}5+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=1{,}95m$

$L_1=0{,}9m$

$\tilde{r}_2=1{,}5+0{,}9=2{,}4m$

$L_2=1{,}5m$

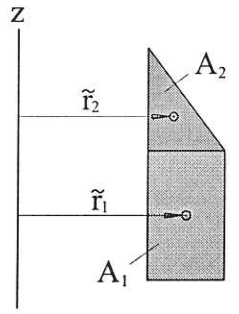
$\tilde{r}_3=1{,}5+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=1{,}95m$

$L_3=\sqrt{1{,}2^2+0{,}9^2}=1{,}5m$

$\tilde{r}_4=1{,}5m$

$L_4=1{,}2+1{,}5=2{,}7m$

حجم جسم:



$$V=\theta\Sigma(\tilde{r}_i A_i)=2\pi(\tilde{r}_1 A_1+\tilde{r}_2 A_2)$$

$$V=2\pi(1{,}95\cdot 1{,}35+1{,}8\cdot 0{,}54)\ m^3\ \Rightarrow$$

$$\boxed{V=22{,}648\ m^3}$$

$\tilde{r}_1=1{,}5+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=1{,}95m$

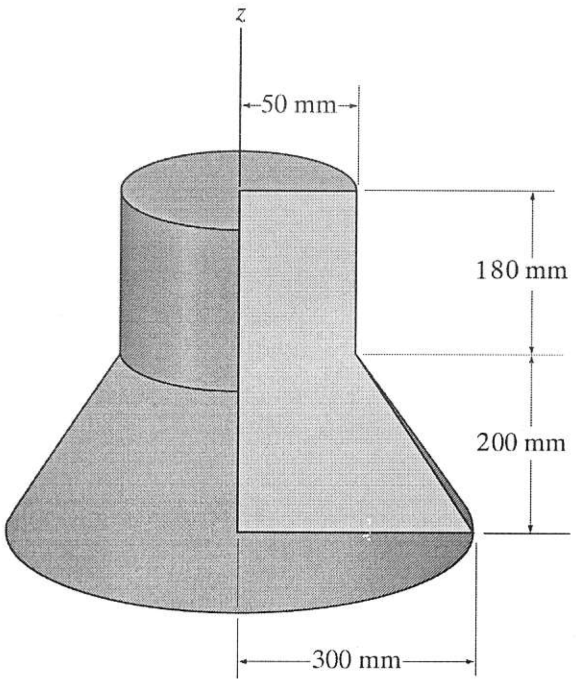
$A_1=0{,}9\cdot 1{,}5=1{,}35m^2$

$\tilde{r}_2=1{,}5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}9=1{,}8m$

$A_2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}9\cdot 1{,}2=0{,}54m^2$

تمرین ۵-۹

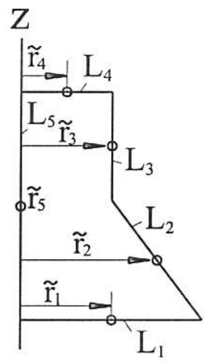
مطلوب است تعیین مساحت سطح خارجی و حجم جسمی مطابق شکل مقابل، که از دوران پروفیل مشخص شده به اندازه زاویه 360° ($\theta=2\pi$ رادیان) حول محور z به‌دست می‌آید.



حل :

سطح خارجی جسم:

$$A = \theta\Sigma(\tilde{r}_i L_i) = 2\pi(\tilde{r}_1 L_1 + \ldots + \tilde{r}_5 L_5)$$



$\tilde{r}_1 = 150$ mm

$L_1 = 300$ mm

$\tilde{r}_2 = 50 + \frac{1}{2} \cdot 150 = 225$ mm

$L_2 = \sqrt{150^2 + 200^2} = 250$ mm

$\tilde{r}_3 = 150$ mm

$L_3 = 180$ mm

$\tilde{r}_4 = \frac{1}{2} \cdot 150 = 75$ mm

$L_4 = 150$ mm

$\tilde{r}_5 = 0$

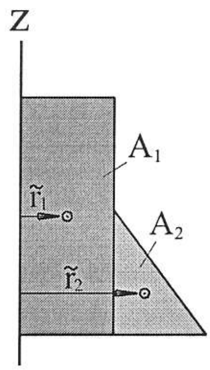
$L_5 = 180 + 200 = 380$ mm

$$A = 2\pi(150 \cdot 300 + 225 \cdot 250 + 150 \cdot 180 + 75 \cdot 150 + 0 \cdot 380)\ \text{mm}^2$$

$$\boxed{A = 876504{,}35\ \text{mm}^2}$$

حجم جسم:

$$V = \theta\Sigma(\tilde{r}_i A_i) = 2\pi(\tilde{r}_1 A_1 + \tilde{r}_2 A_2)$$



$\tilde{r}_1 = 75$ mm

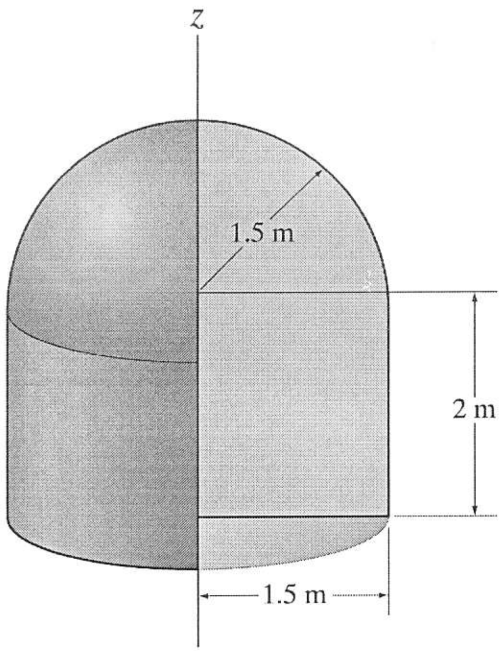
$A_1 = 150 \cdot 180 = 57000\ \text{mm}^2$

$\tilde{r}_2 = 150 + \frac{1}{3} \cdot 150 = 200$ mm

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 200 = 15000\ \text{mm}^2$

$$V = 2\pi(75 \cdot 57000 + 200 \cdot 15000)\ \text{mm}^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{V = 45710173{,}11\ \text{mm}^3}$$



تمرین ۵-۱۰

مطلوب است تعیین مساحت سطح خارجی و حجم جسمی مطابق شکل مقابل، که از دوران پروفیل مشخص شده به اندازه زاویه $360°$ ($\theta=2\pi$ رادیان) حول محور z به‌دست می‌آید.

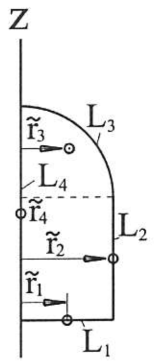
حل :

سطح خارجی جسم:

$$A = \theta\Sigma(\tilde{r}_i L_i) = 2\pi(\tilde{r}_1 L_1 + \ldots + \tilde{r}_4 L_4)$$

$$A = 2\pi(0{,}75\cdot 1{,}5 + 1{,}5\cdot 2 + 0{,}95493\cdot 2{,}356195 + 0)\,m^2$$

$$\boxed{A = 40{,}055\ m^2}$$



$\tilde{r}_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 1{,}5 = 0{,}75\ m$

$L_1 = 1{,}5\ m$

$\tilde{r}_2 = 1{,}5\ m$

$L_2 = 2\ m$

$\tilde{r}_3 = \dfrac{2r}{\pi} = 0{,}95493\ m$

$L_3 = \dfrac{1}{2}\pi r = 2{,}356195 m$

$\tilde{r}_4 = 0$

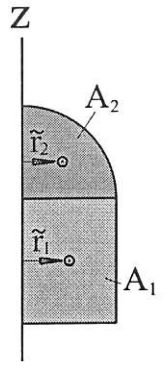
$L_4 = 1{,}5 + 2 = 2{,}5 m$

حجم جسم:

$$V = \theta\Sigma(\tilde{r}_i A_i) = 2\pi(\tilde{r}_1 A_1 + \tilde{r}_2 A_2)$$

$$V = 2\pi(0{,}75\cdot 3 + 0{,}63662\cdot 1{,}76715)\ m^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{V = 21{,}206\ m^3}$$



$\tilde{r}_1 = 0{,}75\ m$

$A_1 = 1{,}5\cdot 2 = 3\ m^2$

$\tilde{r}_2 = \dfrac{4r}{3\pi} = 0{,}63662\ m$

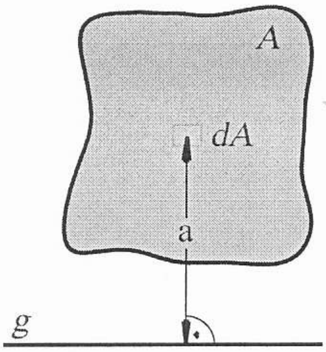
$A_2 = \dfrac{1}{4}\pi r^2 = 1{,}76715 m^2$

۶ گشتاورهای دوم سطح

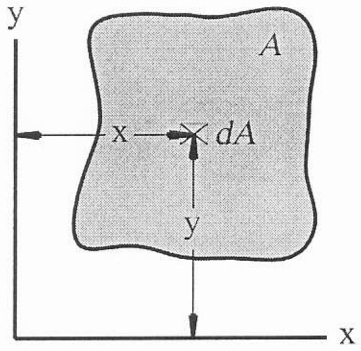
(گشتاورهای ماند و گشتاورهای انحراف سطح)

۶-۱ مفاهیم و تعاریف

برای محاسبه توزیع نیروهایی که در اثر اعمال گشتاورها در سطوح مقاطع قطعات پدید می‌آیند و تغییرات آنها خطی است به کمیتی تحت عنوان گشتاورهای دوم سطح نیاز است. این گشتاورهای دوم سطح فقط به اندازه و شکل سطح مقطع قطعه بستگی دارند.



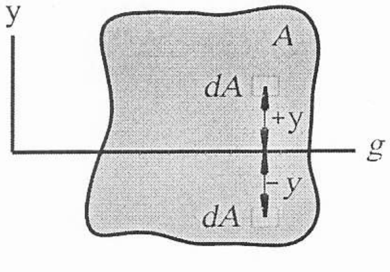
گشتاور ماند محوری یک سطح (همچنین تحت عنوان ممان اینرسی محوری و یا ممان اینرسی استوایی یک سطح نیز نامیده می شود) نسبت به یک محوری که در صفحه آن سطح قرار داشته باشد (مثلاً محور g) با عبارت $I_g = \int_A a^2 dA$ بیان می‌گردد، که در آن a فاصله عمودی عناصر هر سطح بینهایت کوچک dA تا محور g (محور ماند) می‌باشد.



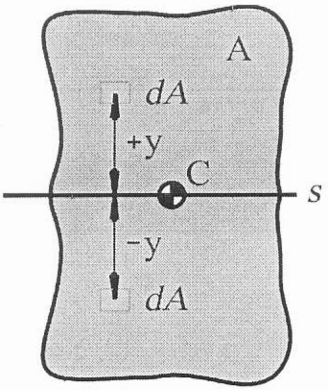
بر این مبنا می‌توان برای یک دستگاه مختصات دکارتی نوشت:

$$\boxed{I_x = \int_A y^2 dA \qquad \text{و} \qquad I_y = \int_A x^2 dA}$$

که در آنها x و y مطابق آنچه که در شکل نشان‌داده شده است مختصات عناصر سطح dA یا به عبارت دیگر فاصله این عناصر از محورهای مختصاتی است، که به عنوان اندیس داده شده‌اند. دیمانسیون گشتاور ماند سطح به خاطر ضرب کردن مجذور طول (L^2) در مساحت (L^2) با توجه به واحد طول (L) معمولاً به (m^4)، (cm^4) و یا (mm^4) بیان می‌گردد و علامت آن همواره مثبت است.



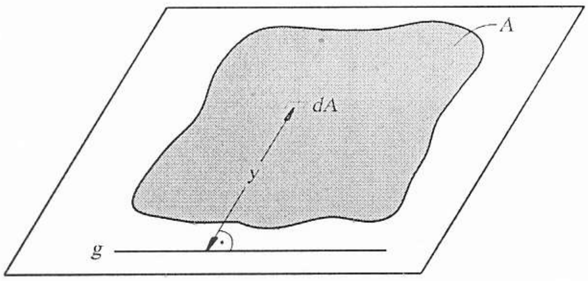
از آنجایی‌که گشتاور ماند هر سطح بسیار کوچک dA به فاصله $+y$ از محور ماند g برابر $+y^2dA$ و گشتاور ماند هر سطح بسیار کوچک dA به فاصله $-y$ از محور ماند g هم برابر $+y^2dA$ است (چون $-y$ به‌صورت مجذور ظاهر می‌گردد)، بنابراین گشتاور ماند کل یک سطح، که از جمع این مقادیر $+y^2dA$ مثبت بدست می‌آید مقداری است مثبت.

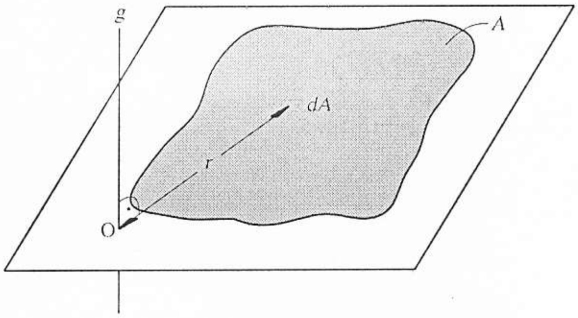


گشتاور ماند سطح نسبت به هیچ محوری صفر نیست، حتی برای محوری که از مرکز آن سطح بگذرد. چنانچه محور s از مرکز سطح C بگذرد، این سطح از عناصر سطح بسیار کوچکی تشکیل شده است، که با فاصله از محور s قرار دارند. گشتاور ماند سطح تمام این عناصر کوچک dA همواره یک مقدار مثبت است، مستقل از آنکه این عناصر دارای فاصله $+y$ و یا $-y$ باشند. به این ترتیب گشتاور ماند کل سطح A برای این محور ماند، که از مجموع عبارت‌های مثبت y^2dA تشکیل شده است هیچگاه صفر نیست.

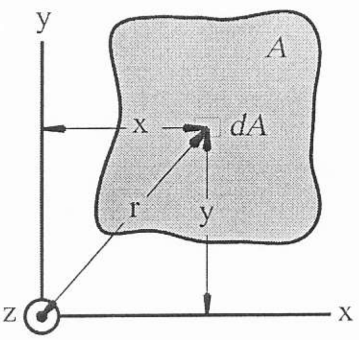
۶-۲ انواع گشتاورهای ماند سطح

برحسب آنکه محور ماند در صفحه سطح A و یا عمود بر آن باشد ممان اینرسی سطح به دو نوع محوری و قطبی تقسیم می‌شود.





۶-۳ رابطه بین گشتاورهای ماند سطح محوری و قطبی



همچنین می توان در یک دستگاه مختصات دکارتی **گشتاور ماند سطح قطبی** J_O (یا I_p) را تعریف نمود که در آن r فاصله عنصر سطح dA از مبداء مختصات (یا محور- z) است. از شکل نتیجه می‌شود :

$$J_O = \int_A r^2\,dA$$

با توجه به شکل چون $r^2 = x^2 + y^2$ است، در نتیجه:

$$J_O = \int_A r^2\,dA = \int_A (x^2+y^2)\,dA = \int_A x^2\,dA + \int_A y^2\,dA$$

به این ترتیب:

$$J_O = I_x + I_y$$

با توجه به اینکه J_O مستقل از جهات دستگاه مختصات می باشد، بایستی مجموع $J_O = (I_x + I_y)$ نیز نسبت به دوران دستگاه مختصات نامتغیر باشد.

۶-۴ گشتاورهای انحراف سطح (ممان‌های حاصلضرب)

یکی دیگر از گشتاورهای دوم سطح، گشتاور انحراف سطح است (همچنین به عنوان گشتاور گریز از مرکز یا گشتاور حاصلضرب نیز نامیده می‌شود). این گشتاور برای سطحی که در صفحه مختصات $x-y$ قرار داشته باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA$$

مقدار این گشتاور به شکل و اندازه سطح مقطع و به علاوه به موقعیت و جهت محورهای مختصات آن بستگی دارد .

برای سطوح مقاطعی که نسبت به یکی از دو محور قرینه هستند، گشتاور انحراف صفر می‌شود، زیرا برای هر یک از عناصر سطح dA با مختصات x و y در طرف دیگر محور تقارن یک عنصر سطح dA با مختصات x' و y' وجود دارد، طوری که :

$$xy\,dA = -x'y'dA$$

بوده و هر دو جزء در انتگرالگیری حذف می شوند.

۶-۵ گشتاورهای ماند سطح برای چند سطح ساده

مثالها :

سطح مقطع مستطیل شکل :

رجوع شود به شکل (a)

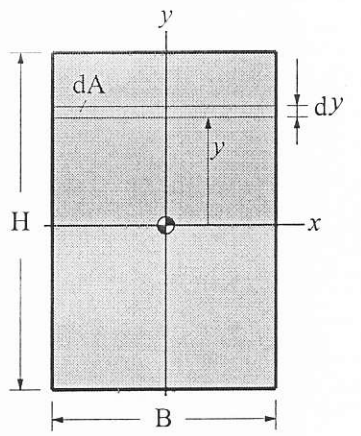
$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_{-H/2}^{+H/2} y^2 B\,dy = B\int_{-H/2}^{+H/2} y^2\,dy = B\,\frac{y^3}{3}\Big|_{-H/2}^{+H/2}$$

$$I_x = \frac{BH^3}{12}$$

و همچنین

$$I_y = \frac{HB^3}{12}\quad,\quad J_O = I_x + I_y = \frac{BH}{12}(H^2 + B^2)$$

$$I_{xy} = 0$$



شکل (a)

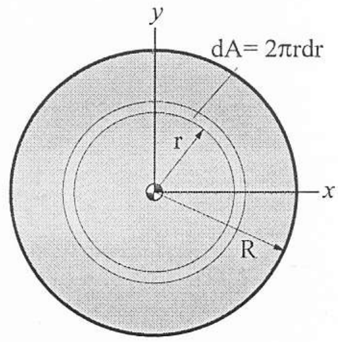
سطح مقطع دایره‌ای شکل :

$$J_O = \int_A r^2\,dA = 2\pi \int_0^R r^3\,dr = 2\pi\,\frac{R^4}{4}$$

$$J_O = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$I_x + I_y = 2I_x = J_O$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} R^4 \quad , \quad I_{xy} = 0$$



شکل (a)

حلقه دایره‌ای :

گشتاورهای ماند سطح یک حلقه دایره‌ای شکل با شعاع خارجی R_a و شعاع داخلی R_i را می توان به‌صورت انتگرال از طریق جمع گشتاورهای ماند اجزاء سطح بدست آورد، به عبارت دیگر نتیجه می شود :

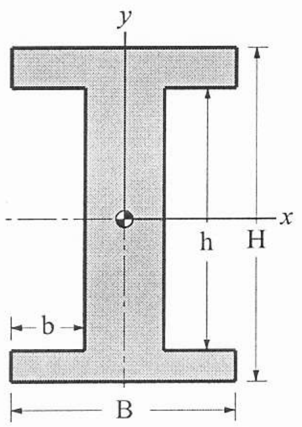
$$J_O = J_O^{(R_a)} - J_O^{(R_i)} = \frac{\pi}{2}\left(R_a^{\,4} - R_i^{\,4}\right) \;;$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}\left(R_a^{\,4} - R_i^{\,4}\right)$$

پروفیل I – شکل :

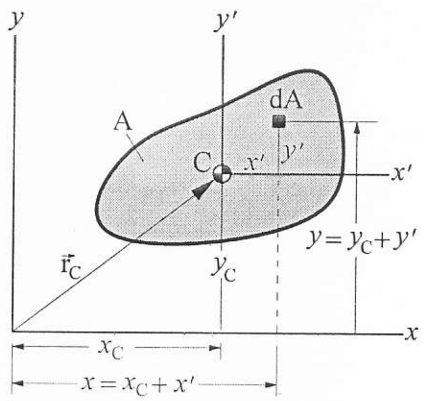
با روی هم گذاری اجزاء سطوح $B \times H$ و $b \times h$ مستقیماً نتیجه می شود :

$$I_x = \left(\frac{BH^3}{12} - 2\,\frac{bh^3}{12}\right)$$



شکل (b)

۶-۶ انتقال موازی محورهای مختصات، قضیه اشتاینر (Steiner)



شکل (a)

اکنون می خواهیم در ادامه گشتاورهای ماند برای یک دستگاه مختصات کارتزین که مبداء آن در مرکز ثقل سطح قرار دارد را با اندازه‌های حاصله برای یک دستگاه مختصاتی که به اندازه $\vec{r}_C = (x_C \,, y_C)$، که به طور موازی جابه‌جا شده است مقایسه کنیم. شکل (a) چنین حالتی را نشان می دهد.

گشتاور ماند نسبت به محور- x از دستگاه مختصات- x,y طبق تعریف عبارت است از :

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

حال می توان در اینجا y را از طریق مختصات y' مربوط به دستگاه مختصات واقع در مرکز ثقل و مختصات نسبی y_C بیان نمود ($y = y_C + y'$) که به این ترتیب می توان نوشت:

$$I_x = \int_A (y_C + y')^2 \, dA = y_C{}^2 \underbrace{\int dA}_{A} + 2 y_C \underbrace{\int y' dA}_{A y'_C = 0} + \underbrace{\int y'^2 dA}_{I_{x'} = I_{x,C}}$$

$$I_x = I_{x,C} + y_C{}^2 A \qquad (۱-۶-۶)_۱$$

این موضوع برای I_y نسبت به محور y نیز صادق است :

$$I_y = I_{y,C} + x_C{}^2 A \qquad (۱-۶-۶)_۲$$

برای گشتاور انحراف داریم :

$$I_{xy} = \int x y \, dA = \int (x_C + x')(y_C + y') \, dA$$
$$= x_C \, y_C \underbrace{\int dA}_{A} + x_C \underbrace{\int y' dA}_{0} + y_C \underbrace{\int x' dA}_{0} + \underbrace{\int x' y' dA}_{I_{x'y'} = I_{xy,C}}$$

$$I_{xy} = I_{xy,C} + x_C \, y_C \, A \qquad (۱-۶-۶)_۳$$

و برای گشتاور ماند قطبی نیز با استفاده از معادلات ۱و۲ (۶-۶-۱) داریم :

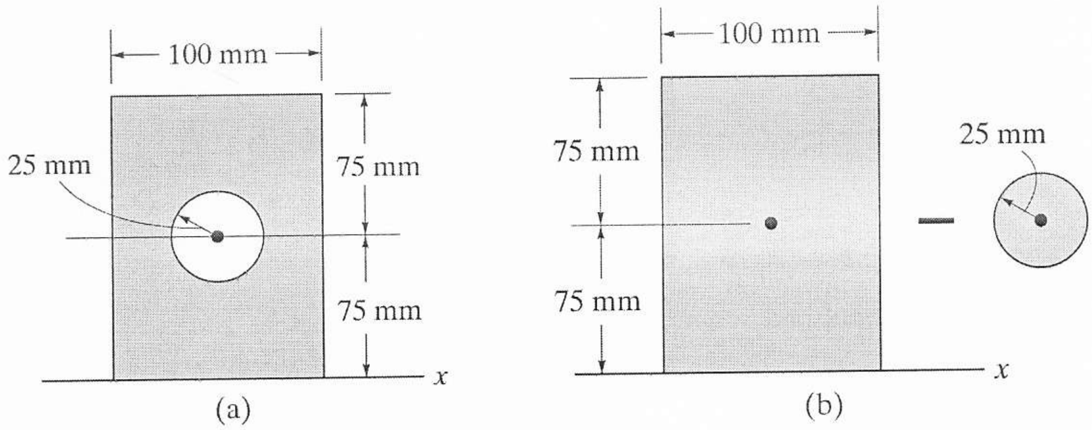
$$J_O = I_x + I_y = I_{x,C} + I_{y,C} + A(x_C{}^2 + y_C{}^2)$$

$$J_O = J_{O,C} + r_C{}^2 A \qquad (۱-۶-۶)_۴$$

معادلات ۴-۱ (۶-۶-۱) به قانون اشتاینر معروف می‌باشند. به کمک این معادلات می‌توان گشتاورهای ماند را نسبت به محورهای مختصاتی که به طور موازی جابه‌جا شده‌اند بدون انتگرالگیری مجدد محاسبه نمود. از معادلات (۶-۶-۱) می‌توان نتیجه گرفت که کمترین مقدار گشتاورهای ماند (ولی نه گشتاورهای انحراف) مربوط به محورهای مختصاتی است که از مرکز ثقل میگذرند.

مثال ۶-۱

مطلوب است تعیین ممان اینرسی سطح (گشتاور ماند سطح) نشان‌داده شده در شکل (a)، نسبت به محور- x.



حل:

قسمت‌های تشکیل‌دهنده سطح:

سطح شکل (a) را می‌توان از کم کردن سطح دایره‌ای به شعاع 25 mm از وسط مستطیلی به طول 100 mm و به عرض 150 mm به‌دست آورد (شکل (b)). مرکز هر سطح در شکل نشان‌داده شده است.

قضیه انتقال موازی محورهای مختصات (قضیه اشتاینر):

ممان‌های اینرسی سطح نسبت به محور- x با استفاده از ممان‌های اینرسی مستطیل و دایره نسبت به محور- x و قضیه انتقال موازی محورهای مختصات تعیین می‌شوند:

مستطیل

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112{,}5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

دایره

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11{,}4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

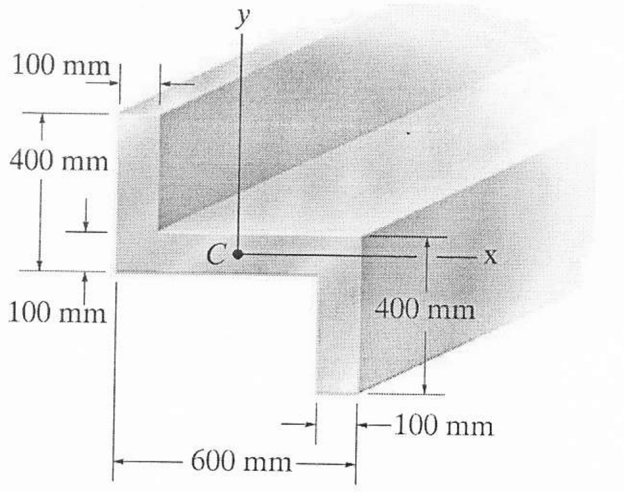
جمع:

به این ترتیب ممان اینرسی سطح مورد نظر نسبت به محور- x برابر خواهد بود با:

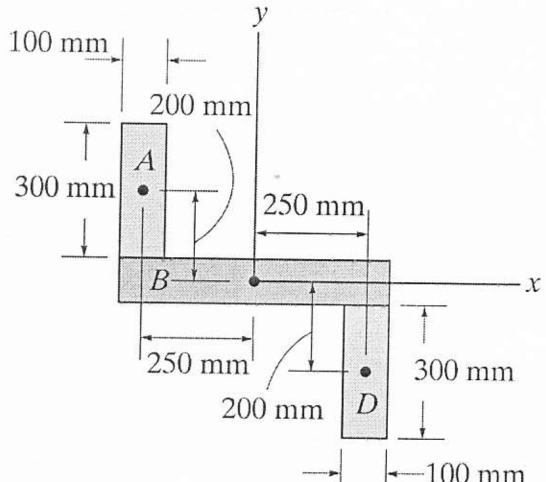
$$I_x = 112{,}5 \cdot 10^6 - 11{,}4 \cdot 10^6 = 101{,}1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

مثال ۶-۲

مطلوب است تعیین ممانهای اینرسی I_x و I_y سطح مقطع شکل مقابل نسبت به محورهای x و y که از مرکز سطح این مقطع می‌گذرند.



(a)



(b)

حل:

قسمت‌های تشکیل‌دهنده سطح:

سطح شکل (a) را می‌توان به سه سطح مستطیلی A، B و D مطابق شکل (b) تقسیم نمود. مرکز هر سطح در شکل نشان‌داده شده است.

قضیه انتقال موازی محورهای مختصات:

ممان‌های اینرسی سطح نسبت به محورهای x و y با استفاده از ممان‌های اینرسی سطوح مستطیلی نسبت به محورهای x و y و قضیه انتقال موازی محورهای مختصات تعیین می‌شوند:

$$I_x = \Sigma[(\bar{I}_{x',i})+(A_i\, d_{y,i}^2)] \quad ; \quad I_y = \Sigma[(\bar{I}_{y',i})+(A_i\, d_{x,i}^2)]$$

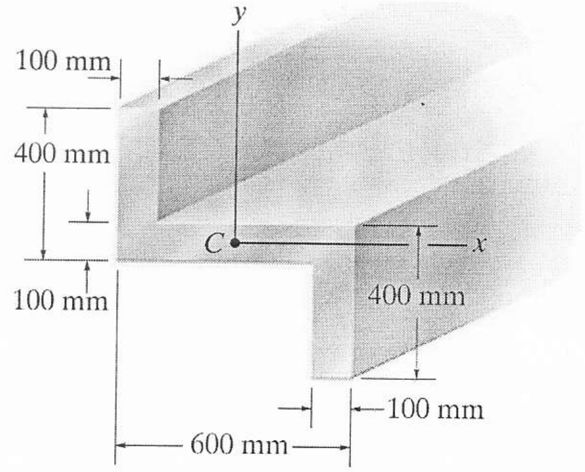
که در آن $i = A, B, D$، $A_A = A_D = 100 \cdot 300 = 30000 \text{ mm}^2$، $A_B = 600 \cdot 100 = 60000 \text{ mm}^2$، $d_{y,A} = d_{y,D} = 200 \text{ mm}$، $d_{y,B} = 0 \text{ mm}$، $d_{x,A} = d_{x,D} = 250 \text{ mm}$ و $d_{x,B} = 0 \text{ mm}$ می‌باشند. در نتیجه:

$$\begin{cases} I_x = I_{x,B} + 2I_{x,A} = [\bar{I}_{x',B} + (A_B\, d_{y,B}^2)] + 2[\bar{I}_{x',A} + (A_A\, d_{y,A}^2)] \\ I_y = I_{y,B} + 2I_{y,A} = [\bar{I}_{y',B} + (A_B\, d_{x,B}^2)] + 2[\bar{I}_{y',A} + (A_A\, d_{x,A}^2)] \end{cases}$$

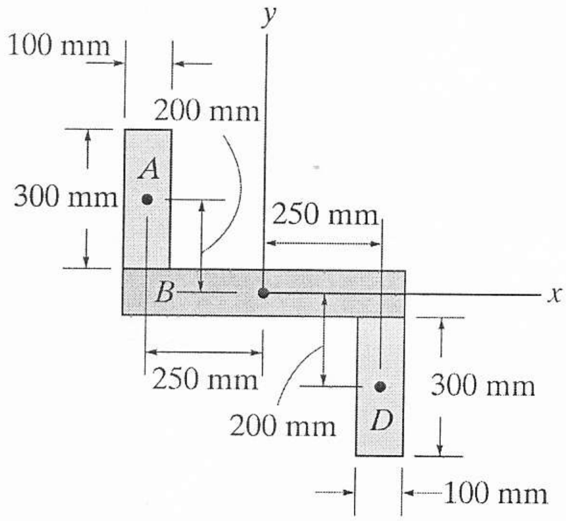
$$\begin{cases} I_x = [(\frac{1}{12} \cdot 600 \cdot 100^3) + (0)] + 2[(\frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 300^3) + (30000 \cdot 200^2)] = 2{,}9 \cdot 10^9 \quad \text{mm}^4 \\ I_y = [(\frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 600^3) + (0)] + 2[(\frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 100^3) + (30000 \cdot 250^2)] = 5{,}6 \cdot 10^9 \quad \text{mm}^4 \end{cases}$$

مثال ۶-۳

مطلوب است تعیین ممان (گشتاور) انحراف سطح (حاصلضرب اینرسی سطح) I_{xy} برای سطح مقطع شکل مقابل نسبت به محورهای x و y که از مرکز سطح این مقطع می‌گذرند.



(a)



(b)

حل:

قسمت‌های تشکیل‌دهنده سطح:

سطح شکل (a) را می‌توان مثل مثال فوق به سه سطح مستطیلی A، B و D مطابق شکل (b) تقسیم نمود. مرکز هر سطح در شکل نشان‌داده شده است.
گشتاور انحراف هر سطح مستطیل‌شکل نسبت به محورهای x′ و y′ که از مرکز آن مستطیل می‌گذرند صفر است.

قضیه انتقال موازی محورهای مختصات:

گشتاور انحراف سطح نسبت به محورهای x و y با استفاده از گشتاورهای انحراف سطوح مستطیلی نسبت به محورهای x′ و y′ که صفر است و قضیه انتقال موازی محورهای مختصات تعیین می‌شوند:

$$I_{xy} = \Sigma[(\bar{I}_{x'y',i}) + (A_i\, d_x\, d_y)]$$

که در آن $i = A, B, D$ ، $A_A = A_D = 100 \cdot 300 = 30000\ mm^2$ ، $A_B = 600 \cdot 100 = 60000\ mm^2$ ، $d_{y,A} = -d_{y,D} = 200\ mm$ ، $d_{y,B} = 0\ mm$ ، $d_{x,A} = -d_{x,D} = -250\ mm$ و $d_{x,B} = 0\ mm$ می‌باشند. در نتیجه:

$$I_{xy} = [\bar{I}_{x'y',A} + (A_A d_{x,A} d_{y,A})] + [\bar{I}_{x'y',B} + (A_B d_{x,B} d_{y,B})] + [I_{x'y',D} + (A_D d_{x,D} d_{y,D})]$$

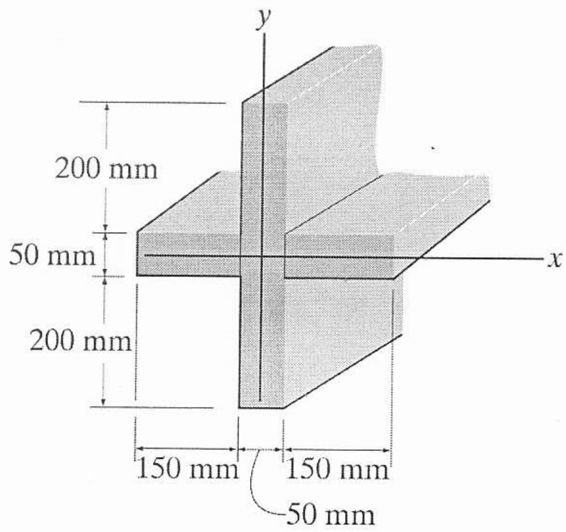
$$I_{xy} = [0 + (30000 \cdot -250 \cdot 200)] + [0 + (0)] + [0 + (30000 \cdot 250 \cdot -200)]$$
$$= -1{,}5 \cdot 10^9\ [mm^4] + 0 - 1{,}5 \cdot 10^9\ mm^4$$

$$I_{xy} = -3 \cdot 10^9\ [mm^4]$$

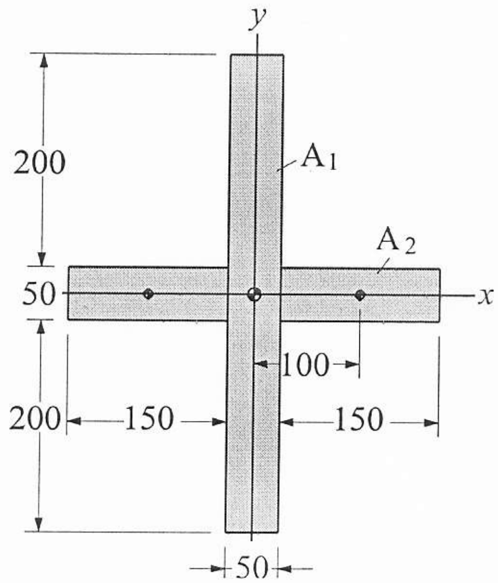
این نتیجه منفی به خاطر آن‌است که مرکزهای مستطیل‌های A و D به ترتیب مختصات x و y منفی دارند.

تمرین ۶-۱

مطلوب است تعیین ممانهای اینرسی I_x و I_y سطح مقطع شکل مقابل نسبت به محورهای x و y که از مرکز سطح این مقطع می‌گذرند.



حل:



$$I_x = \Sigma[(\bar{I}_{x',i}) + (A_i\, d_{y,i}^2)]$$

$$= [(I_{x',1}) + (A_1\, d_{y,1}^2)] + 2[(I_{x',2}) + (A_2\, d_{y,2}^2)$$

$$= [(\frac{1}{12}50\cdot 450^3) + (0)] + 2[(\frac{1}{12}150\cdot 50^3) + (0)]\ \text{mm}^4$$

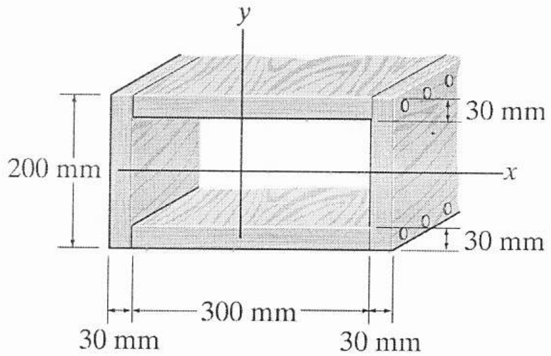
$$\Rightarrow \qquad I_x = 382812500\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \Sigma[(\bar{I}_{y',i}) + (A_i\, d_{x,i}^2)]$$

$$= [(I_{y',1}) + (A_1\, d_{x,1}^2)] + 2[(I_{y',2}) + (A_2\, d_{x,2}^2)$$

$$= [(\frac{1}{12}450\cdot 50^3) + 0] + 2[(\frac{1}{12}50\cdot 150^3) + (50\cdot 150\cdot 100^2)]\ \text{mm}^4$$

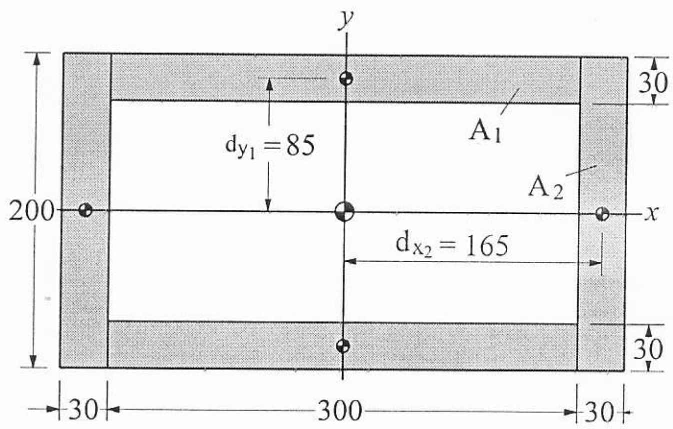
$$\Rightarrow \qquad I_y = 182812500\ \text{mm}^4$$



تمرین ۶-۲

مطلوب است تعیین ممانهای اینرسی I_x و I_y سطح مقطع شکل مقابل نسبت به محورهای x و y که از مرکز سطح این مقطع می‌گذرند.

حل:



$$I_x = \Sigma[(\bar{I}_{x',i}) + (A_i d_{y,i}^2)]$$

$$= 2[(I_{x',1}) + (A_1 d_{y,1}^2)] + 2[(I_{x',2}) + (A_2 d_{y,2}^2)$$

$$= [(\frac{1}{12} 300 \cdot 30^3) + (300 \cdot 30 \cdot 85^2)] + 2[(\frac{1}{12} 30 \cdot 200^3) + (0)] \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \qquad I_x = 171400000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \Sigma[(\bar{I}_{y',i}) + (A_i d_{x,i}^2)]$$

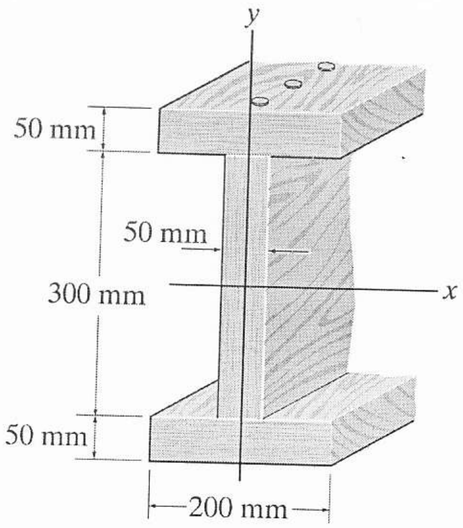
$$= 2[(I_{y',1}) + (A_1 d_{x,1}^2)] + 2[(I_{y',2}) + (A_2 d_{x,2}^2)$$

$$= 2[(\frac{1}{12} 30 \cdot 300^3) + 0] + 2[(\frac{1}{12} 200 \cdot 30^3) + (30 \cdot 200 \cdot 165^2)] \text{ mm}^4$$

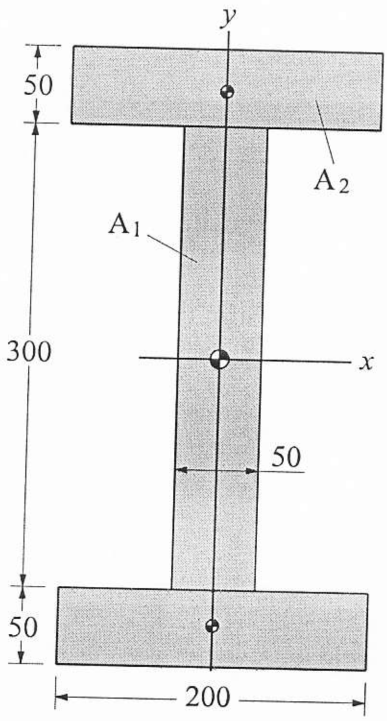
$$\Rightarrow \qquad I_y = 462600000 \text{ mm}^4$$

تمرین ۶-۳

مطلوب است تعیین ممانهای اینرسی I_x و I_y سطح مقطع شکل مقابل نسبت به محورهای x و y که از مرکز سطح این مقطع می‌گذرند.



حل:



$$I_y = \Sigma[(\bar{I}_{y',i}) + (A_i d_{x,i}^2)]$$

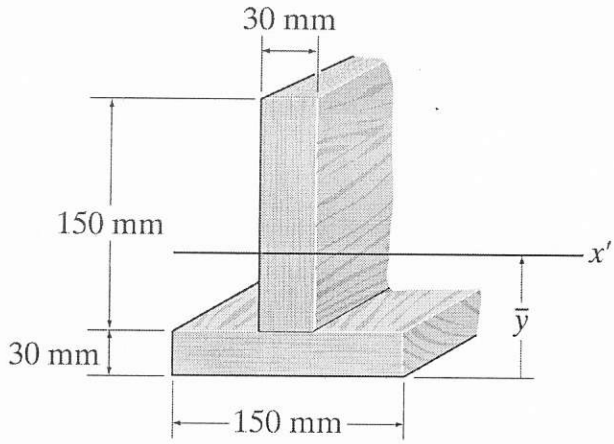
$$= [(I_{y',1}) + (A_1 d_{x,1}^2)] + 2[(I_{y',2}) + (A_2 d_{x,2}^2)$$

$$= [(\frac{1}{12}300 \cdot 50^3) + (0)] + 2[(\frac{1}{12}50 \cdot 200^3) + (0)] \text{ mm}^4$$

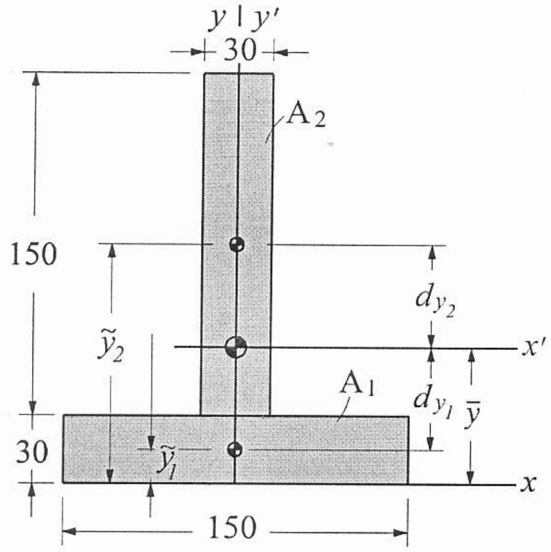
$$\Rightarrow \qquad I_y = 69791667 \text{ mm}^4$$

تمرین ۶-۴

مطلوب است تعیین ممان اینرسی $I_{x'}$ سطح مقطع شکل مقابل نسبت به محور x' که از مرکز سطح این مقطع می‌گذرند.



حل:



قسمت i	$\tilde{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\tilde{y}_i \cdot A_i$ (mm^3)
①	15	4500	67500
②	105	4500	472500
		$A = \Sigma A_i =$ 9000	$\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i =$ 540000

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i}{\Sigma A_i} = \frac{540000}{9000} = 60 \text{ mm}$$

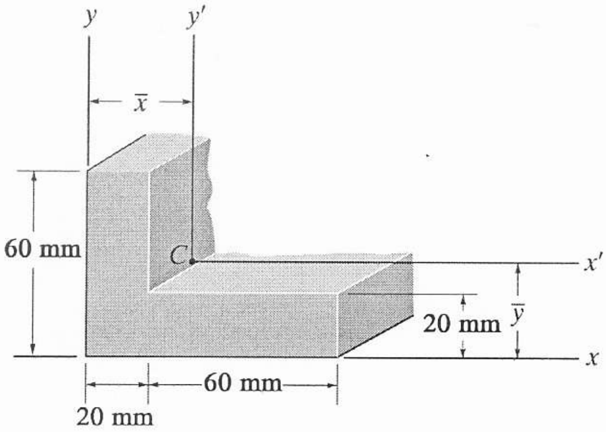
$$\Rightarrow \begin{cases} d_{y1} = 60 - 15 = 45 \text{ mm} \\ d_{y2} = 105 - 60 = 45 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\bar{I}_{x'} = \Sigma[(\bar{I}_{x,Ci}) + (A_i d_{y,i}^2)]$$

$$= [(I_{x,C1}) + (A_1 d_{y1}^2)] + [(I_{x,C2}) + (A_2 d_{y2}^2)]$$

$$= [(\frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 30^3) + (4500 \cdot 45^2)] + [(\frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 150^3) + (4500 \cdot 45^2)] \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \quad \bar{I}_{x'} = 27 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



تمرین ۶-۵

برای سطح مقطع پروفیل شکل مقابل مطلوب است تعیین :

۱) مختصات مرکز سطح مقطع پروفیل $C: (\bar{x}, \bar{y})$ در دستگاه مختصات $x-y$.

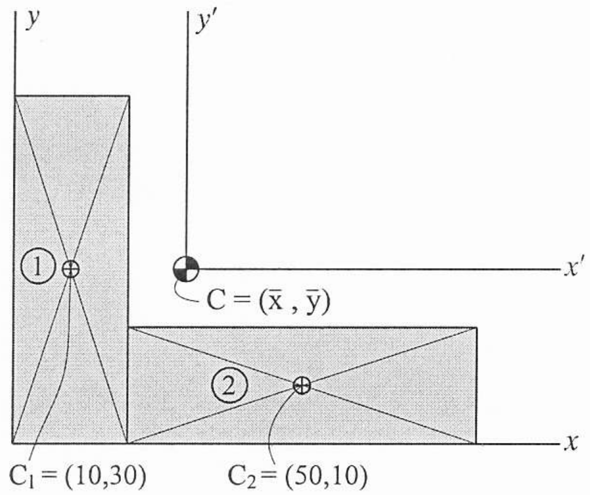
۲) ممان اینرسی سطح مقطع پروفیل (I_x , I_y) نسبت به محورهای x و y .

۳) ممان اینرسی سطح مقطع پروفیل $(\bar{I}_{x'} , \bar{I}_{y'})$ نسبت به محورهای x' و y'، که از مرکز سطح $C: (\bar{x}, \bar{y})$ می‌گذرند .

حل:

۱)

قسمت i	$\tilde{x}_i$ (mm)	$\tilde{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\tilde{x}_i \cdot A_i$ (mm^3)	$\tilde{y}_i \cdot A_i$ (mm^3)
1	10	30	1200	12000	36000
2	50	10	1200	60000	12000
			$A = \Sigma A_i = 2400$	$\Sigma \tilde{x}_i \cdot A_i = 72000$	$\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i = 48000$



$$C = (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\Sigma \tilde{x}_i \cdot A_i}{\Sigma A_i} = 30 \text{ mm} \\ \bar{y} = \dfrac{\Sigma \tilde{y}_i \cdot A_i}{\Sigma A_i} = 20 \text{ mm} \end{cases}$$

۲)

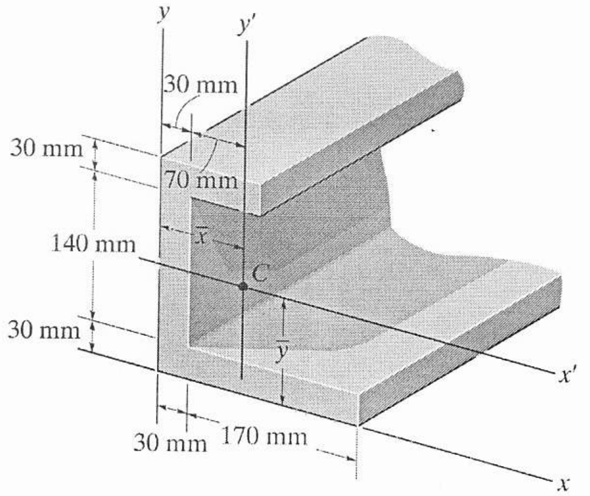
$$I_x = \Sigma[(\bar{I}_{xi}) + (A_i \cdot \tilde{y}_i^2)] = [(\frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 60^3) + (1200 \cdot 30^2)] + [(\frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 20^3) + (1200 \cdot 10^2)] = 1\,600\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \Sigma[(\bar{I}_{yi}) + (A_i \cdot \tilde{x}_i^2)] = [(\frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 20^3) + (1200 \cdot 10^2)] + [(\frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 60^3) + (1200 \cdot 50^2)] = 3\,520\,000 \text{ mm}^4$$

۳)

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A \cdot \bar{y}^2 \Rightarrow \bar{I}_{x'} = I_x - A \cdot \bar{y}^2 \Rightarrow \bar{I}_{x'} = 640\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A \cdot \bar{x}^2 \Rightarrow \bar{I}_{y'} = I_y - A \cdot \bar{x}^2 \Rightarrow \bar{I}_{y'} = 1\,360\,000 \text{ mm}^4$$



تمرین ۶-۶

برای سطح مقطع پروفیل شکل مقابل مطلوب است تعیین :

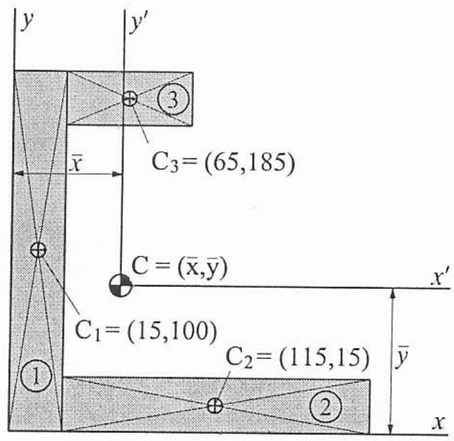
۴) مختصات مرکز سطح مقطع پروفیل $C:(\bar{x}\,,\bar{y})$ در دستگاه مختصات $x-y$.

۵) ممان اینرسی سطح مقطع پروفیل $(I_x\,,I_y)$ نسبت به محورهای x و y .

۶) ممان اینرسی سطح مقطع پروفیل $(\bar{I}_{x'}\,,\bar{I}_{y'})$ نسبت به محورهای x' و y'، که از مرکز سطح $C:(\bar{x}\,,\bar{y})$ می‌گذرند .

حل: ۱)

قسمت i	$\tilde{x}_i$ (mm)	$\tilde{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\tilde{x}_i\cdot A_i$ (mm^3)	$\tilde{y}_i\cdot A_i$ (mm^3)
1	15	100	6000	90000	600000
2	115	15	5100	586500	76000
3	65	185	2100	136500	388500
			$A=\Sigma A_i=13200$	$\Sigma\,\tilde{x}_i\cdot A_i=813000$	$\Sigma\tilde{y}_i\cdot A_i=1\,065000$



$$C=(\bar{x},\bar{y})\ \Rightarrow\ \begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\Sigma\tilde{x}_i\cdot A_i}{\Sigma A_i}=61{,}591\text{ mm}\\[2mm] \bar{y}=\dfrac{\Sigma\tilde{y}_i\cdot A_i}{\Sigma A_i}=80{,}682\text{ mm}\end{cases}$$

۲)

$$I_x=\Sigma[(\bar{I}_{xi})+(A_i\cdot\tilde{y}_i^2)]=[(\frac{1}{12}\cdot30\cdot200^3)+(6000\cdot100^2)]+[(\frac{1}{12}\cdot170\cdot30^3)+(5100\cdot15^2)]+$$

$$+\ [(\frac{1}{12}\cdot70\cdot30^3)+(2100\cdot185^2)]\qquad\Rightarrow\qquad I_x=153\,560\,000\text{ mm}^4$$

$$I_y=\Sigma[(\bar{I}_{yi})+(A_i\cdot\tilde{x}_i^2)]=[(\frac{1}{12}\cdot200\cdot30^3)+(6000\cdot15^2)]+[(\frac{1}{12}\cdot30\cdot170^3)+(5100\cdot115^2)]+$$

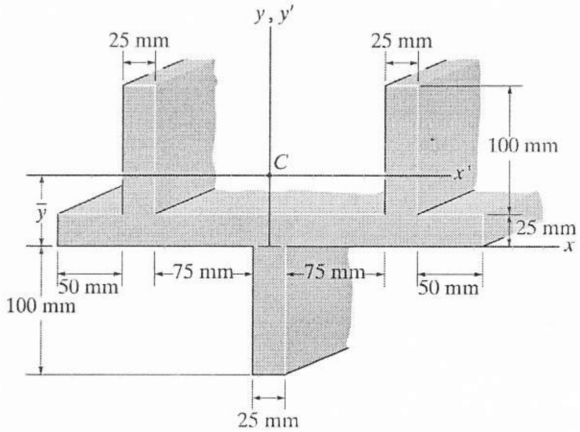
$$+[(\frac{1}{12}\cdot30\cdot70^3)+(2100\cdot65^2)]\qquad\Rightarrow\qquad I_y=91\,260\,000\text{ mm}^4$$

۳)

$$I_x=\bar{I}_{x'}+A\cdot\bar{y}^2\ \Rightarrow\ \bar{I}_{x'}=I_x-A\cdot\bar{y}^2\ \Rightarrow\ \bar{I}_{x'}=\ 67633\,864\text{ mm}^4$$

$$I_y=\bar{I}_{y'}+A\cdot\bar{x}^2\ \Rightarrow\ \bar{I}_{y'}=I_y-A\cdot\bar{x}^2\ \Rightarrow\ \bar{I}_{y'}=\ 41\,186\,591\text{ mm}^4$$

تمرین ۶-۷



برای سطح مقطع پروفیل شکل مقابل مطلوب است تعیین :

۱) مختصات مرکز سطح مقطع پروفیل $C:(\bar{x}\,,\bar{y})$ در دستگاه مختصات $x-y$.

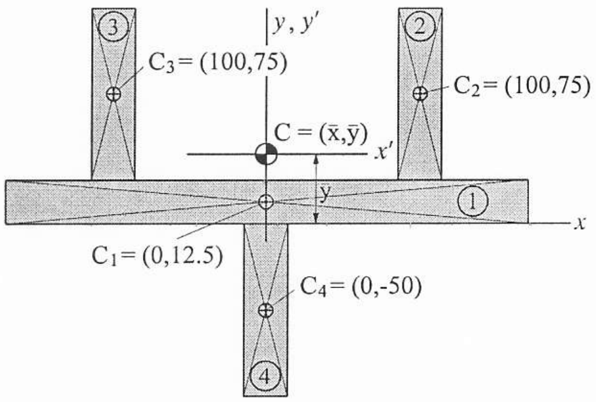
۲) ممان اینرسی سطح مقطع پروفیل $(I_x\,,I_y)$ نسبت به محورهای x و y .

۳) ممان اینرسی سطح مقطع پروفیل $(\bar{I}_{x'}\,,\bar{I}_{y'})$ نسبت به محورهای x' و y'، که از مرکز سطح $C:(\bar{x}\,,\bar{y})$ می‌گذرند .

حل:

۱)

قسمت i	$\tilde{x}_i$ (mm)	$\tilde{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\tilde{x}_i\cdot A_i$ (mm^3)	$\tilde{y}_i\cdot A_i$ (mm^3)
1	0	12,5	8125	0	101562,5
2	100	75	2500	250000	187500
3	−100	75	2500	−250000	187500
4	0	−50	2500	0	−125000
			$A=\Sigma A_i=15625$	$\Sigma\,\tilde{x}_i\cdot A_i=0$	$\Sigma\,\tilde{y}_i\cdot A_i=351562{,}5$



$$C=(\bar{x},\bar{y}) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \bar{x}=\dfrac{\Sigma\,\tilde{x}_i\cdot A_i}{\Sigma\,A_i} = \;\; 0\text{ mm} \\ \bar{y}=\dfrac{\Sigma\,\tilde{y}_i\cdot A_i}{\Sigma\,A_i} = 22{,}5\text{ mm} \end{cases}$$

۲)

$$I_x=\Sigma[(\bar{I}_{xi})+(A_i\cdot\tilde{y}_i^2)]=[(\frac{1}{12}\cdot 325\cdot 25^3)+(8125\cdot 12{,}5^2)]+2\cdot[(\frac{1}{12}\cdot 25\cdot 100^3)+(2500\cdot 75^2)]+$$

$$+[(\frac{1}{12}\cdot 25\cdot 100^3)+(2500\cdot(-50^2))] \qquad\Rightarrow\qquad I_x=42\,317\,708\text{ mm}^4$$

$$I_y=\Sigma[(\bar{I}_{yi})+(A_i\cdot\tilde{x}_i^2)]=[(\frac{1}{12}\cdot 25\cdot 325^3)+0)]+2\cdot[(\frac{1}{12}\cdot 100\cdot 25^3)+(2500\cdot 100^2)]+$$

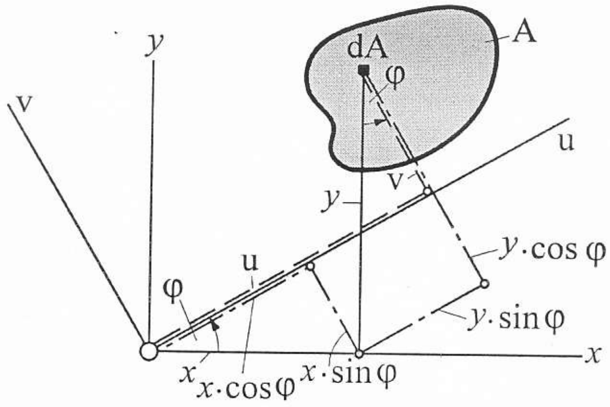
$$+[(\frac{1}{12}\cdot 100\cdot 25^3)+0] \qquad\Rightarrow\qquad I_y=121\,907\,552\text{ mm}^4$$

۳)

$$I_x=\bar{I}_{x'}+A\cdot\bar{y}^2 \;\Rightarrow\; \bar{I}_{x'}=I_x-A\cdot\bar{y}^2 \;\Rightarrow\; \bar{I}_{x'}=34\,407\,552\text{ mm}^4$$

$$I_y=\bar{I}_{y'}+A\cdot\bar{x}^2 \;\Rightarrow\; \bar{I}_{y'}=I_y-A\cdot\bar{x}^2 \;\Rightarrow\; \bar{I}_{y'}=121\,907\,552\text{ mm}^4$$

۶-۷ دوران دستگاه مختصات، دایره ماند مور



شکل (a)

اگر دستگاه مختصاتی را که گشتاورهای ماند نسبت به محورهای آن محاسبه شده‌اند دوران دهیم، در آن صورت این گشتاورها نیز تغییر می‌کنند. اکنون می‌توان اندازه گشتاورهای دستگاه دوران داده شده را بر اساس مقادیر به‌دست آمده برای دستگاه مختصات اولیه محاسبه نمود و بنابراین لزومی ندارد که برای محورهای چرخیده شده مجدداً انتگرالگیری کنیم. برای اینکه این روابط را بدست آوریم از مؤلفه‌های مختصات مکان عنصر سطح dA، که در شکل (a) نشانداده شده است استفاده می‌کنیم. از شکل می توان روابط زیر را بین مختصات اولیه x و y و مختصات u و v در دستگاه مختصاتی که به اندازه زاویه φ دوران داده شده است استخراج نمود :

$$u = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$v = y\cos\varphi - x\sin\varphi$$

که اگر آنها را در انتگرال گشتاورها قرار دهیم نتیجه می شود :

$$I_u = \int_A v^2\,dA = \int (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2\,dA$$
$$= \cos^2\varphi \underbrace{\int y^2\,dA}_{I_x} + \sin^2\varphi \underbrace{\int x^2\,dA}_{I_y} - 2\cos\varphi\sin\varphi \underbrace{\int xy\,dA}_{I_{xy}}$$

$$I_v = \int_A u^2\,dA = \int (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2\,A$$
$$= \cos^2\varphi \int x^2\,dA + \sin^2\varphi \int y^2\,dA + 2\sin\varphi\cos\varphi \int xy\,dA$$

$$I_{uv} = \int_A uv\,dA = \int (x\cos\varphi + y\sin\varphi)(y\cos\varphi - x\sin\varphi)\,dA$$
$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\int xy\,dA - \sin\varphi\cos\varphi \int x^2\,dA + \sin\varphi\cos\varphi \int y^2\,dA$$

بنابراین نتیجه می شود :

$$I_u = I_x\cos^2\varphi + I_y\sin^2\varphi - 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$I_v = I_y\cos^2\varphi + I_x\sin^2\varphi + 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (۶-۷-۱)$$
$$I_{uv} = (I_x - I_y)\sin\varphi\cos\varphi + I_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، یعنی :

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) \quad , \qquad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) \quad , \qquad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$

نتیجه می شود :

$$\boxed{\begin{aligned} I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi \\ I_v &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi \\ I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}} \qquad (۶-۷-۲)$$

از این روابط و همچنین قضیه اشتاینر می‌توان گشتاورهای ماند و انحراف برای هر دستگاه مختصات دلخواه را از گشتاورهای ماند و انحراف مربوط به دستگاه مختصات دیگر محاسبه نمود، به شرطی‌که این گشتاورها برای دستگاه مختصات اولیه و به علاوه مساحت و مختصات مرکز ثقل آن سطح معلوم باشند.

گشتاورهای ماند (ممان اینرسی) اصلی

معادلات ۶-۷-۲ نشان می‌دهند که I_u, I_v, I_{uv} تابعی از زاویه دوران φ دستگاه مختصات uv نسبت به دستگاه مختصات xy هستند. در یک زاویه دوران خاص (در شرایطی که $\frac{dI_u}{d\varphi}=0$ و $\frac{dI_v}{d\varphi}=0$ باشند)، گشتاورهای ماند ماکزیمم و مینیمم می‌شوند. این ممان‌های اینرسی خاص را ممان اینرسی اصلی $I_{1,2}$،($I_{min,max}$)، دستگاه مختصات مربوطه را دستگاه اصلی و محورهایش را نیز محورهای اصلی می نامند. به‌طور کلی برای هر مبداء مختصات انتخابی O یک دستگاه مختصات اصلی وجود دارد.

زاویه‌ای که جهت دستگاه مختصات اصلی را مشخص می‌کند با مشتق‌گیری از معادله اول و یا دوم نسبت به φ و مساوی قرار دادن آن با صفر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\sin 2\varphi - 2I_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

بنابراین به‌ازای $\varphi = \varphi_p$:

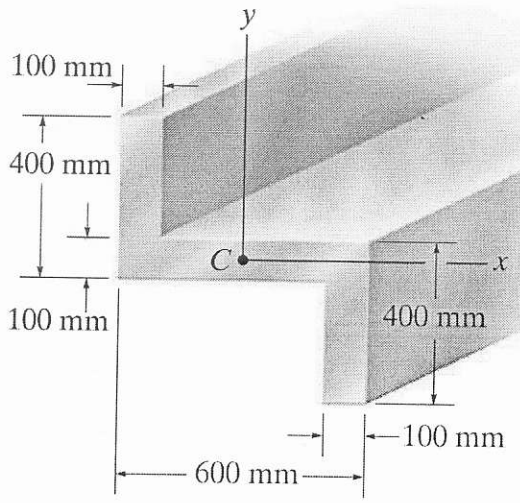
$$\boxed{\tan 2\varphi_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}} \qquad (۶-۷-۳)$$

دو ریشه φ_{p1} و φ_{p2} این معادله $90°$ با هم فاصله دارند و در نتیجه هر کدام زاویه دوران یکی از محورهای اصلی را مشخص می‌کند. برای به‌دست آوردن ممان‌های اینرسی اصلی سطح (ممان‌های اینرسی ماکزیمم و مینیمم سطح) می‌توان از معادلات زیر استفاده نمود:

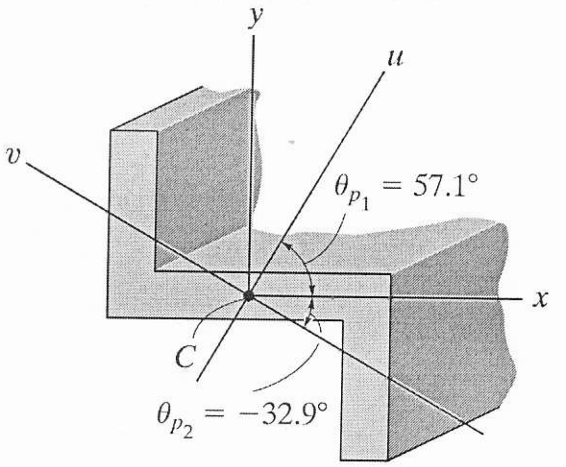
$$\boxed{I_{min,max} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \qquad (۶-۷-۴)$$

مثال ۶-۴

مطلوب است تعیین ممان‌های اینرسی سطح (گشتاورهای ماند سطح) $I_{min,max} = I_{1,2}$ برای سطح مقطع شکل مقابل (a) نسبت به محورهایی که از مرکز سطح این مقطع می‌گذرند و همچنین جهت این محورها.



(a)



(b)

حل:

گشتاورهای ماند و انحراف سطح این مقطع نسبت به محورهای x و y در مثال‌های ۶-۲ و ۶-۳ محاسبه شده‌اند. نتایج عبارتند از:

$I_x = 2{,}9 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

$I_y = 5{,}6 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

$I_{xy} = -3 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

با استفاده از معادله (۶-۷-۳) ، زوایای چرخش محورهای دستگاه اصلی نسبت به محورهای دستگاه xy به‌دست می‌آیند:

$$\tan 2\varphi_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{-(-3 \cdot 10^9)}{(2{,}9 \cdot 10^9 - 5{,}6 \cdot 10^9)/2}$$

$$\tan 2\varphi_p = -2{,}22 \quad \Rightarrow \begin{array}{l} 2\varphi_{p1} = 114{,}2° \\ 2\varphi_{p2} = -65{,}8° \end{array}$$

بنابراین با بررسی شکل (b) نتیجه می‌شود:

$$\varphi_{p1} = 57{,}1° \ , \ \varphi_{p2} = -32{,}9°$$

ممان‌های اینرسی اصلی نسبت به این محورها از روابط (۶-۷-۴) به‌دست می‌آیند:

$$I_{min,max} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{2{,}9 \cdot 10^9 + 5{,}6 \cdot 10^9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}9 \cdot 10^9 - 5{,}6 \cdot 10^9}{2}\right)^2 + (-3 \cdot 10^9)^2}$$

$$I_{min,max} = I_{1,2} = 4{,}25 \cdot 10^9 \pm 3{,}29 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_{min} = 0{,}96 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \quad , \quad I_{max} = 7{,}54 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

تذکر:

ممان اینرسی اصلی ماکزیمم $I_{max} = I_2 = 7{,}54 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$ نسبت به محور u ایجاد می‌شود، زیرا مشاهده می شود که بخش اعظم مقطع بیشترین فاصله را از این محور دارد.

دایره ماند مور

معادله‌های (۶-۷-۲) تا (۶-۷-۴) راه حلی ترسیمی دارند که استفاده از آنها راحت است و به‌آسانی به‌خاطر سپرده می‌شوند. با مجذور کردن اولین و سومین معادله از معادله‌های (۶-۷-۲) و جمع کردن آنها معادله دایره‌ای به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

در این رابطه I_y , I_x و I_{xy} معلومند و می‌توان رابطه بالا را به فرم کلی زیر نوشت:

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

که در آن نقطه $(a\ ,0)$ مختصات مرکز دایره‌ای در دستگاه مختصات است $\left(a = \dfrac{I_x + I_y}{2}\right)$ که محور افقی آن گشتاورهای ماند (ممان اینرسی) I و محور عمودی آن گشتاورهای انحراف I_{xy} را مشخص می‌کنند و $R = \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$ شعاع دایره است. هر نقطه از این دایره معرف گشتاورهای ماند و انحراف سطح نسبت به یک محور چرخیده شده است.

برای طراحی دایره ماند مور می‌توان دستورات زیر را، طوری‌که شکل‌های (a) و (b) نشان می‌دهند به‌کار برد:

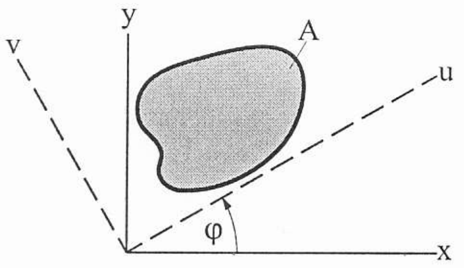
۱-) برای دستگاه مختصات اولیه-$x\ ,y$ انتگرالهای $I_x = \int y^2\,dA$, $I_y = \int x^2\,dA$ و $I_{xy} = \int x\,y\,dA$ را محاسبه کرده و یا از جداول تعیین می‌گردند.

۲-) اندازه زوجهای $(\ I_x\ ,I_{xy}\ )$ و $(\ I_y\ ,-I_{xy}\ )$ را در دستگاه مختصات-$I\ ,I_{xy}$ تعیین نموده و به این ترتیب از این نقاط دایره ماند مور، که مرکز آن روی محور- I قرار دارد به دست می‌آید.

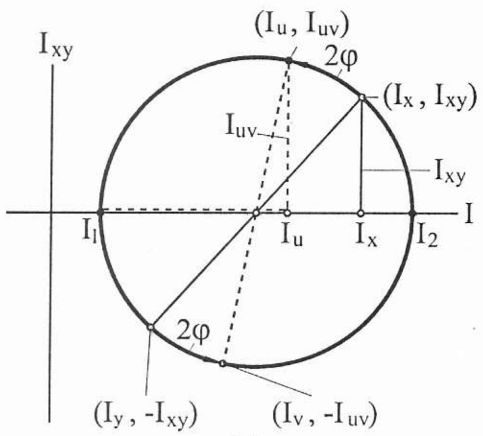
۳-) هر یک از دو اندازه زوج اولیه در روی محیط دایره به اندازه 2φ جابه‌جا می‌شوند و در عین حال این تبدیل‌ها انجام می‌شوند :

$(\ I_x\ ,I_{xy}\ )$ به $(\ I_u\ ,I_{uv}\ )$ و

$(\ I_y\ ,-I_{xy}\ )$ به $(\ I_v\ ,-I_{uv}\ )$



(a)

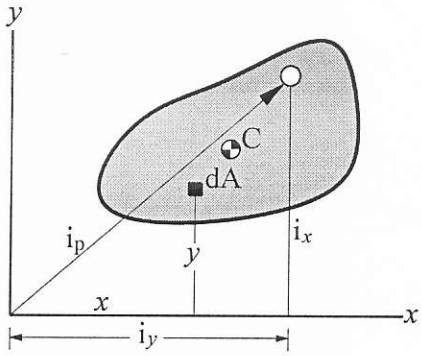


(b)

اگر $I_1 = I_2$ و یا نیز $I_x = I_y$ باشد، در آن صورت دایره ماند مور به یک نقطه تبدیل می‌شود و بنابراین برای هر دستگاه مختصات دوران داده شده $I_{xy} = 0$ می‌باشد. بر این اساس هر محور مختصاتی را که در نظر بگیریم محور اصلی است. اگر سطحی یک محور تقارن داشته باشد، در آن صورت برای آن محور $I_{xy} = 0$ خواهد بود و یا به عبارت دیگر هر محور تقارنی همیشه یک محور اصلی است. دومین محور اصلی مربوط به آن سطح، محوری است عمود بر آن. همان‌طورکه روش تعیین روابط تبدیلی (۶-۷-۲) نشان می‌دهند تمام این محاسبات برای دستگاههای مختصات قائم با هر مبداء اختیاری معتبر می‌باشند.

شعاع ماند (شعاع ژیراسیون)

شعاع ماند مشابه مختصات مرکز ثقل تعریف می‌شود. در بررسی مرکز ثقل این اصل را در نظر گرفتیم که گشتاور مرکز ثقل سطح بایستی با برآیند گشتاورهای عناصر سطح برابر باشد یعنی : $A y_C = \int y\, dA$



شکل (a)

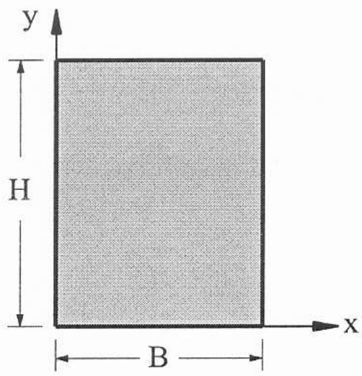
شعاع ماند i نیز فاصله‌ای از محورهای مختصات تعریف می‌شود، که در آن فاصله، سطح را متمرکز در نظر گرفته، طوری‌که گشتاورهای ماند همان اندازه‌های اولیه را دارا باشند :

$$A i_x^2 = \int y^2\, dA = I_x$$

$$i_x^2 = I_x / A$$

$$i_y^2 = I_y / A \qquad (۶-۷-۵)$$

$$i_p^2 = J_O / A = i_x^2 + i_y^2$$



تمرین ۶-۸

مطلوب است تعیین ممانهای اینرسی I_x، I_y و I_{xy} سطح مقطع شکل مقابل نسبت به محورهای x و y و ممان‌های اینرسی اصلی و جهت آن‌ها. $B = 0{,}03\ m$ و $H = 0{,}05\ m$.

حل:

$$I_x = [(\bar{I}_{x'}) + (A d_y^2)] = [\frac{1}{12} BH^3 + BH\,(\frac{H}{2})^2] = \frac{1}{3} BH^3 = 12{,}5 \cdot 10^{-7}\ (m^4)$$

$$I_y = [(\bar{I}_{y'}) + (A d_x^2)] = [\frac{1}{12} HB^3 + BH(\frac{B}{2})^2] = \frac{1}{3} HB^3 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}\ (m^4)$$

$$I_{xy} = [(\bar{I}_{x'y'}) + (A d_x d_y)] = [0 + BH\,(\frac{B}{2} \cdot \frac{H}{2})] = \frac{1}{4} B^2H^2 = 5{,}625 \cdot 10^{-7}\ (m^4)$$

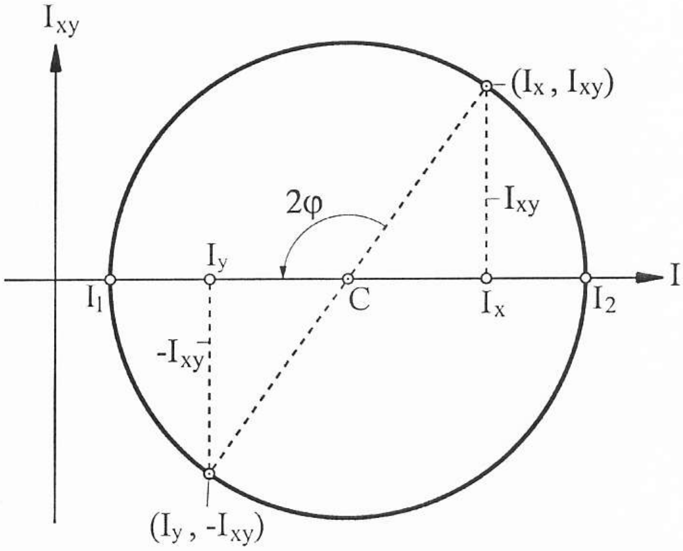
ممان‌های اینرسی اصلی و جهت آن‌ها از دایره ماند مور استخراج می‌گردد:

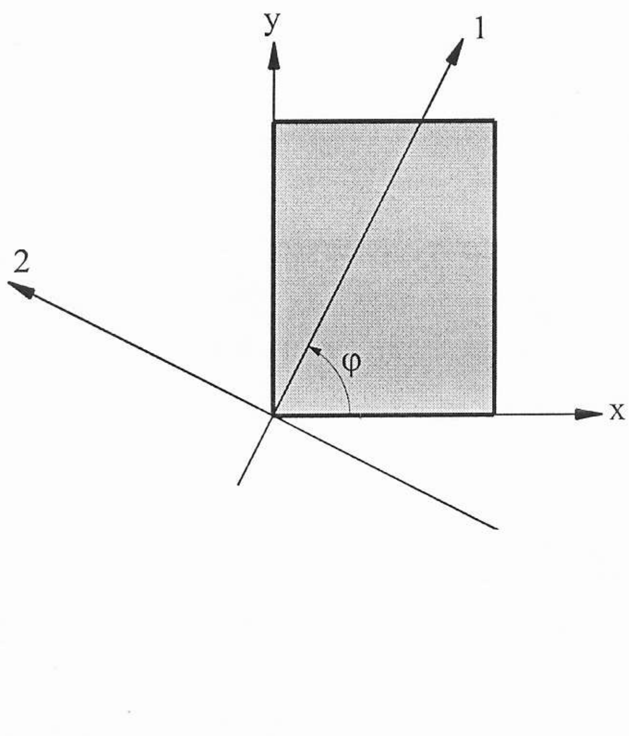
$I_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ (m^4)$

$I_2 = 156{,}4 \cdot 10^{-6}\ (m^4)$

$2\varphi = 126 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 63^\circ$

در خلاف جهت عقربه‌های ساعت



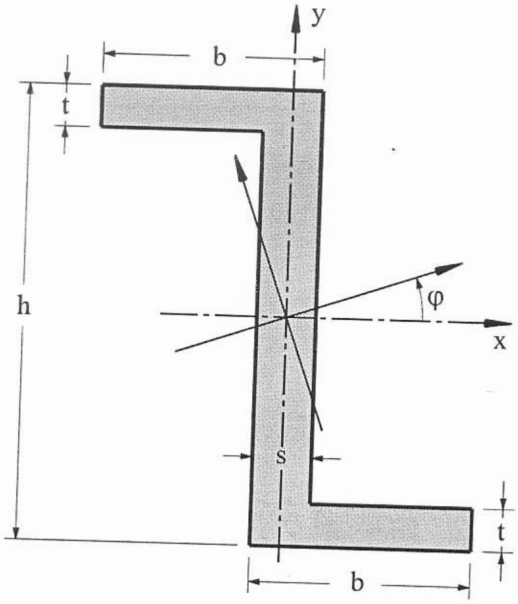


تمرین ۶-۹

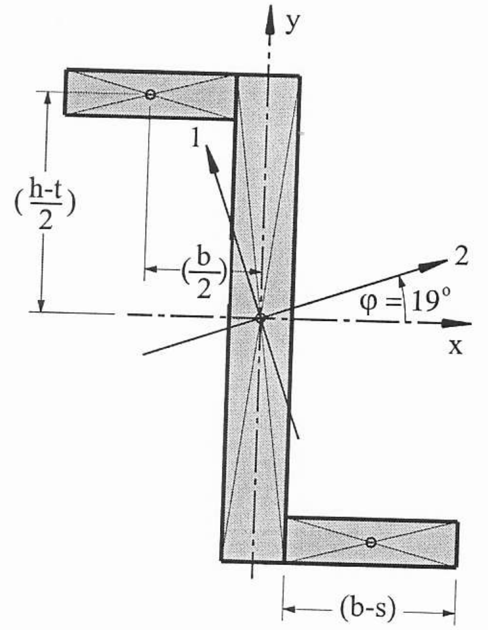
مقطع یک پروفیل Z-شکل طبق DIN1027 با داده‌های زیر معلوم است:

$h=0{,}2\ (m),\ \ b=0{,}085\ (m),\ \ s=0{,}01\ (m),\ \ t=0{,}013\ (m)$

مطلوب است تعیین ممانهای اینرسی اصلی I_1 و I_2 نسبت به محورهایی که از مرکز سطح مقطع پروفیل می‌گذرند و همچنین جهت این محورهای اصلی (زاویه φ) به کمک دایره ماند مور.



حل:



$$I_x = \Sigma[(\bar{I}_{x',i})+(A_i\,d_{y,i}^2)] =$$

$$= \left[\frac{sh^3}{12} + 2\left(\frac{(b-s)\,t^3}{12} + \left(\frac{h-t}{2}\right)^2 \cdot t\,(b-s)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad I_x = 23{,}742 \cdot 10^{-6}\ (m^4)$$

$$I_y = \Sigma[(\bar{I}_{y',i})+(A_i\,d_{x,i}^2)] =$$

$$= \left[\frac{hs^3}{12} + 2\left(\frac{t(b-s)^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot t\,(b-s)\right)\right]$$

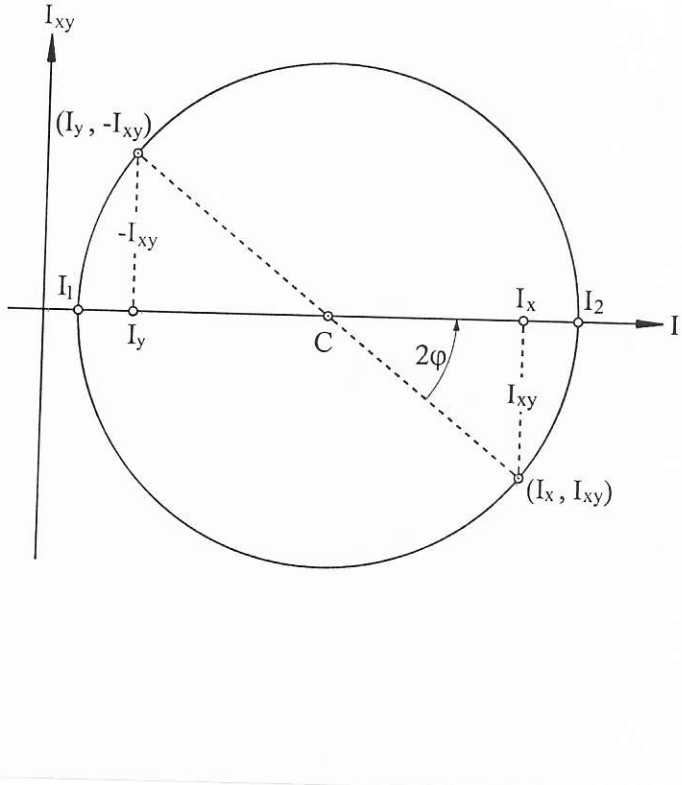
$$\Rightarrow \quad I_x = 4{,}453 \cdot 10^{-6}\ (m^4)$$

$$I_{xy} = \Sigma[(\bar{I}_{x'y',i})+(A_i\,d_{x,i}d_{y,i})] =$$

$$= -2\left(\frac{h-t}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) \cdot t(b-s)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xy} = -7{,}749 \cdot 10^{-6}\ (m^4)$$

ممان‌های اینرسی اصلی و جهت آن‌ها از دایره ماند مور استخراج می‌گردد:



$I_1 = 1{,}726 \cdot 10^{-6}\ (m^4)$

$I_2 = 26{,}469 \cdot 10^{-6}\ (m^4)$

$2\varphi = 38 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 19°$

در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

۷ تعادل جسم صُلب

۷-۱ شرایط تعادل

ما در فصل ۳ برای نیروهای وارد بر یک ذره و یا به طور کلی برای نیروهای هم‌رَس مشاهده کردیم که اگر به یک ذره و یا یک جسم نیروهایی هم‌رَس اثر کنند، در آن صورت جسم وقتی در تعادل خواهد ماند که فقط مجموع نیروهای وارد بر آن صفر باشند : $\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i = 0$

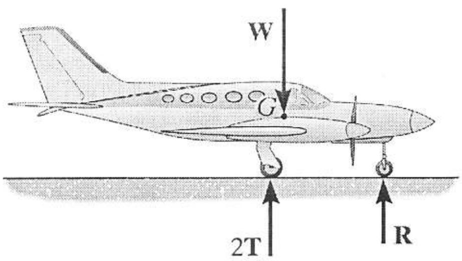
در فصل ۴ نیز مشاهده کردیم که می‌توان در حالت کلی بارهای وارد بر یک جسم صُلب را به یک نیروی برآیند $\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i$ و یک گشتاور برآیند $\vec{M}_{O,res} = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \Sigma \vec{M}_j$ در یک نقطه دلخواه O خلاصه نمود.

اکنون اگر $\vec{F}_R = 0$ بوده ولی $\vec{M}_{O,res} \neq 0$ باشد، به عبارت دیگر یک گشتاور کوپل برآیند باقی بماند، جسم قطعاً در تعادل نخواهد ماند (در دینامیک خواهیم دید که نقطه O، مثلاً مرکز ثقل در حالت سکون باقی خواهد ماند، اما جسم به چرخش در می‌آید). در نتیجه اقتضای شرط تعادل در این حالت آن است که همچنین $\vec{M}_{O,res} = 0$ باشد. اگر این دو شرط در یک نقطه دلخواه برقرار باشند، در هر نقطه دیگر نیز برقرار خواهند بود. بنابراین:

یک جسم صُلب وقتی در تعادل است که برآیند نیروها و برآیند گشتاورها در یک نقطه دلخواه صفر باشد:

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_{O,res} = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \Sigma \vec{M}_j = 0$$



۷-۲ تعادل در دو بُعد

چنانچه نیروهای وارد بر یک جسم صُلب در یک صفحه قرار داشته و یا بتوان آنها را در یک صفحه تصویر نمود و در نتیجه گشتاورهای وارد بر جسم بر صفحه نیروها عمود باشند، به آن سیستم نیروی دو بُعدی و یا هم‌صفحه می‌گویند (مانند شکل مقابل).

۷-۳ نمودار جسم آزاد

طرحی از یک جسم که آن را به صورت جدا شده و آزاد از پیرامونش نشان دهد، به‌گونه‌ای که تمام آثار پیرامونش به صورت نیرو و گشتاور در نظر گرفته شوند را نمودار جسم آزاد می‌گویند.

برای ترسیم نمودار جسم آزاد بایستی جسم از تکیه‌گاههای آن آزاد شده و به‌جای آنها نیروها و گشتاورهایی جایگزین گردند، تا همان آثار را بر جسم داشته باشند.

۴-۷ تکیه‌گاهها

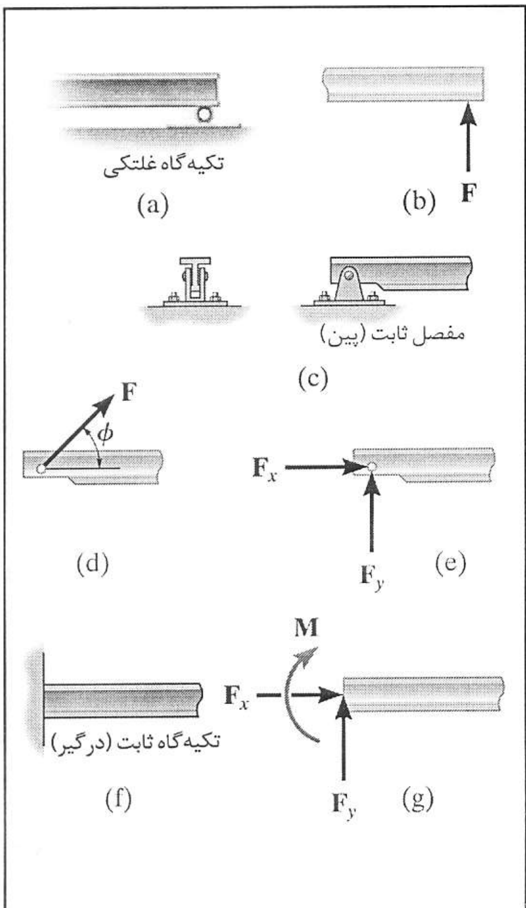
تکیه‌گاهها باعث محدودیت در حرکت می‌گردند، به عبارت دیگر تعداد درجات آزادی را کاهش می‌دهند. هرجا یک درجه آزادی توسط یک تکیه‌گاه گرفته شود، یک واکنش تکیه‌گاهی جای آن را می‌گیرد. ترکیب تکیه‌گاهها می‌تواند با عملکرد یکسان متفاوت باشد. یک مجموعه از اجسام معمولاً در چند نقطه تکیه دارد.

درجات آزادی، واکنش‌های تکیه‌گاهی

	در سطح	در فضا
درجات آزادی	انتقال در جهت- x و - y چرخش حول محور- z	انتقال در جهت- x ، - y ، - z چرخش حول محورهای- x ، - y ، - z
تعداد درجات آزادی	3	6
نیروها و گشتاورهایی که پدید می‌آیند	۳ مؤلفه $\left.\begin{matrix} F_{ix}, F_{iy} \\ M_{jz} \end{matrix}\right\}$	۶ مؤلفه $\left.\begin{matrix} F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} \\ M_{jx}, M_{jy}, M_{jz} \end{matrix}\right\}$
شرایط تعادل	۳ $\left.\begin{matrix} \Sigma F_{ix}=0 \\ \Sigma F_{iy}=0 \end{matrix}\right\}$ و $\Sigma M_{jz}=0\}$	۶ $\left.\begin{matrix} \Sigma F_{ix}=0 \\ \Sigma F_{iy}=0 \\ \Sigma F_{iz}=0 \end{matrix}\right\}$ و $\left.\begin{matrix} \Sigma M_{jx}=0 \\ \Sigma M_{jy}=0 \\ \Sigma M_{jz}=0 \end{matrix}\right\}$

برای رسم نمودار جسم آزاد بایستی جسم را از تکیه‌گاههای آن آزاد نمود. قاعده کلی چنین است:

- هرگاه تکیه‌گاهی مانع انتقال جسم در یک امتداد گردد، نیرویی در آن امتداد در جسم پدید می‌آید.
- اگر از چرخش جلوگیری شود، گشتاور کوپلی بر جسم وارد می‌شود.

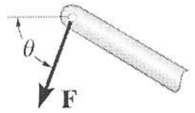
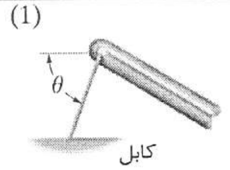
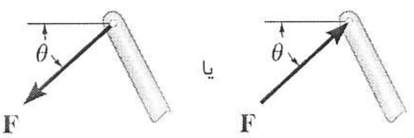
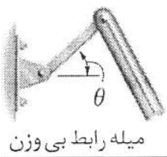
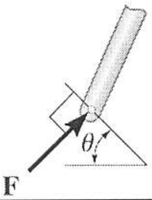
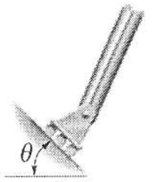
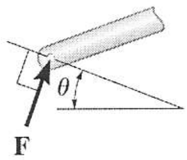
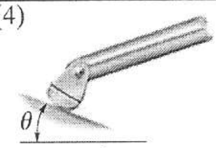
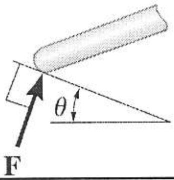
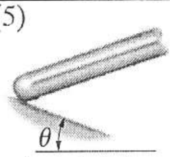
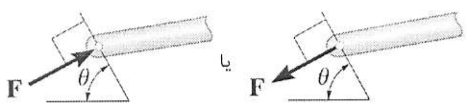
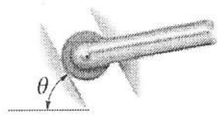
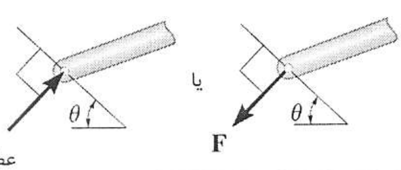
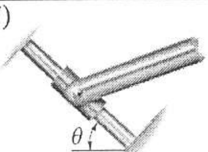
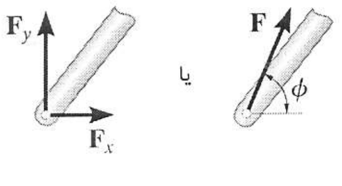
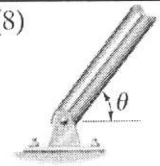


انواع تکیه‌گاهها در حالت دو بُعدی

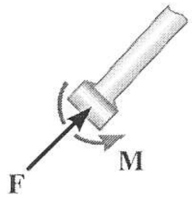
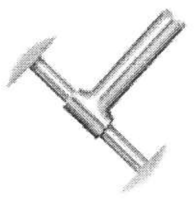
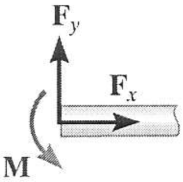
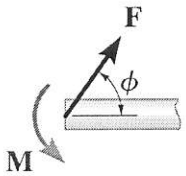
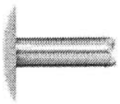
	درجات آزادی که هنوز موجود است			واکنش‌های تکیه‌گاهی		
	انتقال	چرخش	مجموع	نیرو	گشتاور	مجموع
مفصل ثابت	0	1	1	2	0	2
مفصل غلتکی	1	1	2	1	0	1
درگیر	0	0	0	2	1	3

جدول ۷-۱ تکیه‌گاههای اجسام صُلب،که در معرض نیروهای دو بُعدی قرار می‌گیرند و نحوه آزادسازی آنها را نشان می‌دهد.

جدول ۷-۱

تعداد مجهول‌ها	واکنش (عکس‌العمل)	نوع اتصال
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی کششی است که در امتداد کابل از جسم دور می‌شود.		(1)  کابل
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی کششی یا فشاری است که در امتداد محور میله رابط عمل می‌کند.		(2)  میله رابط بی وزن
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی است که عمود بر سطح نقطه تماس عمل می‌کند.		(3)  غلتک
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی است که عمود بر سطح نقطه تماس عمل می‌کند.		(4)  غلتک گهواره‌ای
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی است که عمود بر سطح نقطه تماس عمل می‌کند.		(5)  سطح تماس صاف
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی است که عمود بر شیار هادی عمل می‌کند.		(6)  غلتک با پین در شیار صاف محدود
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی است که عمود بر میله عمل می‌کند.		(7)  عضو با پین به‌ساق میله صاف متصل شده
دو مجهول. عکس‌العمل‌ها عبارتند از: دو مؤلفه نیرو یا اندازه نیروی برآیند F و امتدا آن φ. توجه شود که φ و θ لزوماً برابر نیستند. (معمولاً این دو برابر نیستند، مگر میله نشان داده شده مانند میله رابط (2) باشد).		(8)  مفصل ثابت یا پین صاف

جدول ۷-۱ (ادامه)

تعداد مجهول‌ها	واکنش (عکس‌العمل)	نوع اتصال
دو مجهول. عکس‌العمل‌ها گشتاور کوپل و نیرویی هستند که عمود بر میله عمل می‌کنند.		(9)  عضو ثابت متصل شده به میله صاف
سه مجهول. عکس‌العمل‌ها گشتاور کوپل و دو مؤلفه نیرو، یا گشتاور کوپل و اندازه نیروی برآیند و امتداد آن می باشند.	 یا 	(10)  تکیه‌گاه ثابت (درگیر)

۷-۵ معادلات تعادل در دو بُعد

شرایط تعادل در حالت دو بُعدی را می‌توان به صورت‌های مختلف بیان نمود:

۱) اگر نیروهای واقع در صفحه به مؤلفه‌های افقی- x و عمودی- y تجزیه شوند، در نتیجه شرایط تعادل در حالت دو بُعدی عبارتند از سه معادله مستقل:

$$\Sigma F_{ix} = 0 \;\; ; \;\; \Sigma F_{iy} = 0 \;\; ; \;\; \Sigma M_O = 0$$

که در آن ΣF_{ix} و ΣF_{iy} به ترتیب جمع جبری مؤلفه‌های x و y همه نیروهای وارد بر جسم هستند و ΣM_O جمع جبری گشتاورهای کوپل همه مؤلفه‌های نیرو حول محور- z است که بر صفحه x−y عمود بوده و از نقطه اختیاری O می‌گذرد.

۲) همچنین می‌توان از سه معادله مستقل دیگر استفاده نمود:

$$\Sigma F_{ix} = 0 \;\; ; \;\; \Sigma M_A = 0 \;\; ; \;\; \Sigma M_B = 0$$

به شرطی که خطی که از A و B می‌گذرد با محور- y موازی نباشد.

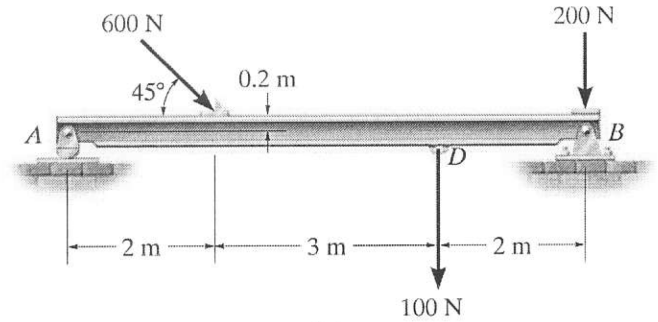
۳) و بالاخره شرایط تعادل در دو بُعد را می‌توان به این صورت فورموله نمود که گشتاورها حول سه نقطه در صفحه که در یک راستا قرار ندارند صفر باشد:

$$\Sigma M_A = 0 \;\; ; \;\; \Sigma M_B = 0 \;\; ; \;\; \Sigma M_C = 0$$

توصیه می‌شود در هر حالت ترتیب این سه معادله به گونه‌ای باشد که با نوشتن هر معادله مستقیماً یک مجهول به‌دست آید.

مثال ۷-۱[1]

مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی عکس‌العملی‌هایی که مفصل ثابت (پین صاف) B و غلتک گهواره‌ای A، مطابق شکل ایجاد می‌کنند. از وزن تیر می‌توان صرفنظر نمود.

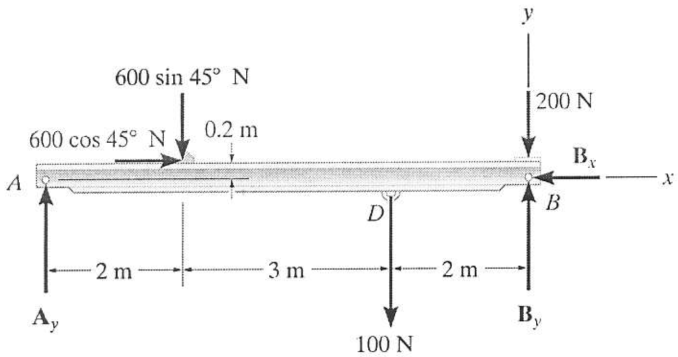


(a)

حل :

نمودار جسم آزاد:

در غلتک گهواره‌ای A یک واکنش عمودی و در مفصل ثابت B دو واکنش افقی و عمودی به‌وجود می‌آیند.برای ساده شدن کار نیز نیروی 600 N به دو مؤلفه افقی و عمودی تجزیه می‌گردد.



(b)

معادلات تعادل:

از جمع نیروها در امتداد x نتیجه می‌شود:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_{ix} = 0 : \quad 600\cos 45^\circ\, N - B_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_x = 424 N$$

با استفاده از معادله گشتاور $\Sigma M_B = 0$ حول نقطه B می‌توان A_y را مستقیماً به‌دست آورد:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \qquad [100 \cdot 2]\ Nm + [600 \sin 45^\circ \cdot 5]\ Nm - [600\ \cos 45^\circ \cdot 0{,}2]\ Nm - [A_y \cdot 7]\ Nm = 0$$

$$\Rightarrow \qquad A_y = 319\ N$$

از جمع نیروها در امتداد y نیز نتیجه می‌شود:

$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad 319\ N - 600 \sin 45^\circ\ N - 100\ N - 200\ N + B_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_y = 405\ N$$

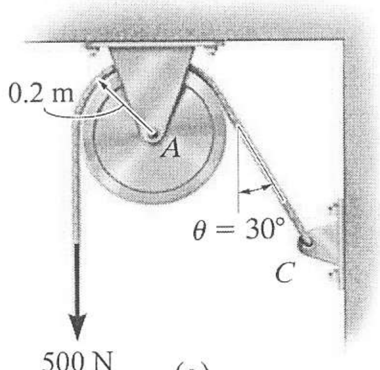
توضیح :

می‌توان با جمع بستن گشتاورها حول نقطه A نیز به همین نتیجه رسید:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -[600 \sin 45^\circ \cdot 2]\ Nm - [600\ \cos 45^\circ \cdot 0{,}2]\ Nm - [100 \cdot 5]\ Nm - [200 \cdot 7]\ Nm + [B_y \cdot 7]\ Nm = 0$$

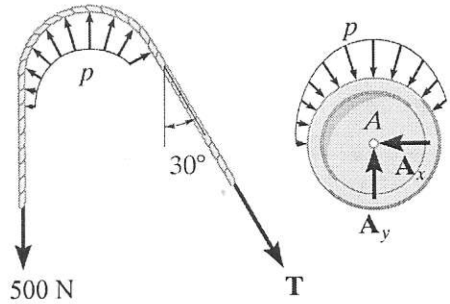
$$\Rightarrow \qquad B_y = 405\ N$$

مثال ۷-۲



(a)

طنابی مطابق شکل (a) از روی یک قرقره بدون اصطکاک می‌گذرد و تحت نیروی 500 N قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین کشش طناب در نقطه C و مؤلفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل در مفصل ثابت (پین) A.

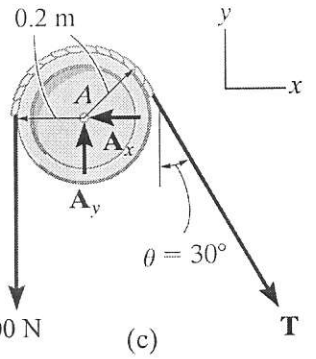


(b)

حل:

نمودارهای جسم آزاد:

در شکل (b) نمودارهای جسم آزاد طناب و قرقره نشان داده شده‌اند. در هر دو نمودار عکس‌العمل‌های مجهول قرقره نسبت به طناب و بالعکس طناب نسبت به قرقره به صورت دو توزیع گسترده نیروی طولی مساوی و مخالف هم p در سطح تماس قرقره و طناب ظاهر می‌شوند، که کار را پیچیده می‌کند. اما راه حل ساده‌تر آن است که نمودار جسم آزاد قرقره و آن قسمت از طناب که تحت این توزیع گسترده بار قرار می‌گیرد با هم تلفیق شده و در نتیجه توزیع گسترده بار به صورت بار داخلی درآمده و نیازی به محاسبه آن نباشد (شکل (c)).



(c)

معادلات تعادل:

با جمع بستن گشتاورها حول نقطه A (گشتاور نیروهای A_x و A_y در این نقطه صفر است) نتیجه می‌شود:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad [500 \cdot 0{,}2]\ \text{Nm} - [T \cdot 0{,}2]\ \text{Nm} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = 500\ \text{N}$$

از جمع نیروها در امتداد x نتیجه می‌شود:

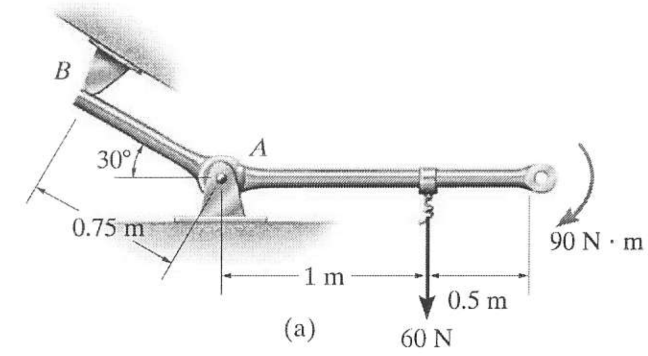
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_{ix} = 0: \quad -A_x + 500 \sin 30^\circ\ \text{N} = 0 \qquad \Rightarrow \quad A_x = 250\ \text{N}$$

از جمع نیروها در امتداد y نیز نتیجه می‌شود:

$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad A_y - 500\ \text{N} - 500 \cos 30^\circ\ \text{N} = 0 \qquad \Rightarrow \quad A_y = 933\ \text{N}$$

مثال ۷-۳

عضوی مطابق شکل (a)در A اتصال مفصل پینی دارد و در B به تیغه صافی متکی است.
مطلوب است تعیین عکس‌العملهای تکیه‌گاهی در مفصل ثابت A و در تیغه صاف B .

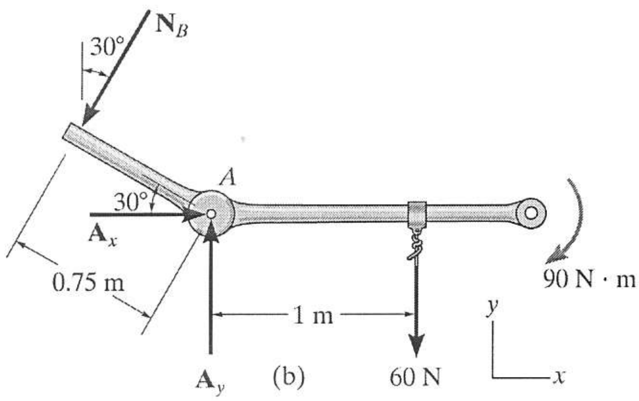


(a)

حل

نمودار جسم آزاد:

شکل (b) نمودار جسم آزاد عضو را نشان می دهد. واکنش N_B در نقطه B به صورت عمودی است و مؤلفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل تکیه‌گاه مفصل ثابت A در شکل نشان داده شده‌اند.



(b)

معادلات تعادل:

با توجه به تعادل گشتاورها حول نقطه A :

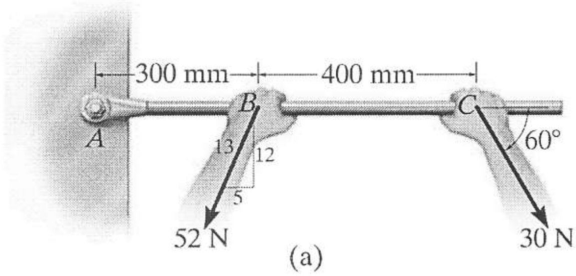
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: -(90\ N\cdot m) - (60\ N\cdot 1\ m) + (N_B \cdot 0{,}75\ m) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = 200\ N$

همچنین با توجه به تعادل نیروها:

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 ;\ \ A_x - N_B \sin 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad A_X = 100\ N$

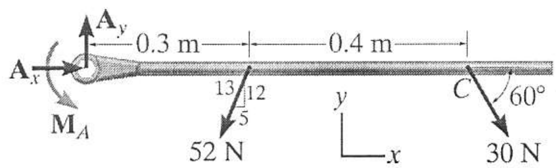
$+\uparrow \Sigma F_y = 0 ;\ \ -N_B \cos 30^\circ + A_y - 60\ N = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 233\ N$

مثال ۷-۴



(a)

یک آچار رینگی مطابق شکل (a) به‌منظور سفت کردن مهره A مورد استفاده قرار می‌گیرد. با فرض این‌که آچار هنگام اعمال نیرو به دسته‌اش نچرخد، مطلوب است تعیین نیرو و گشتاوری که از طرف مهره به آچار اعمال می‌شود.



(b)

حل :

نمودار جسم آزاد:

شکل (b) نمودار جسم آزاد آچار را نشان می‌دهد. از آن‌جایی که مهره مانند تکیه‌گاه گیردار عمل می‌کند، مؤلفه‌های افقی A_x و عمودی A_y و همچنین گشتاور M_A در نقطه A بر آچار اعمال می‌شود.

معادلات تعادل:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_{ix} = 0: \quad A_x - 52\left(\frac{5}{13}\right)N + 30\cos 60^\circ\, N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_x = 5{,}0\ N$$

$$+\uparrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad A_y - 52\left(\frac{12}{13}\right)N - 30\sin 60^\circ\ N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_y = 74{,}0\ N$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad M_A - [52\left(\frac{12}{13}\right)\cdot 0{,}3]\ Nm - [30\sin 60^\circ \cdot 0{,}7]\ Nm = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 32{,}6\ Nm$$

این نکته قابل توجه است که بایستی M_A را در جمع بستن گشتاورها لحاظ نمود. این گشتاور برداری است آزاد و مقاومت پیچشی مهره را در برابر آچار نشان می‌دهد. طبق قانون سوم نیوتن، آچار گشتاور مساوی و مخالفی را بر مهره اعمال می‌کند.

همچنین نیروی برآیند وارد بر آچار برابر است با:

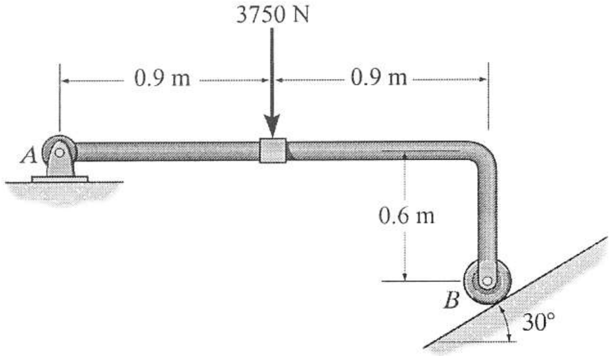
$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{5{,}0^2 + 74{,}0^2} = 74{,}1\ N$$

توضیح :

هر چند برای هر جسم صُلب در حالت دو بُعدی فقط سه معادله تعادل مستقل می‌توان نوشت، اما بهتر است با استفاده از معادله تعادل چهارم صحت محاسبات را کنترل نمود. مثلاً با جمع بستن گشتاورها حول نقطه C می‌توان از درستی محاسبات اطمینان حاصل کرد.

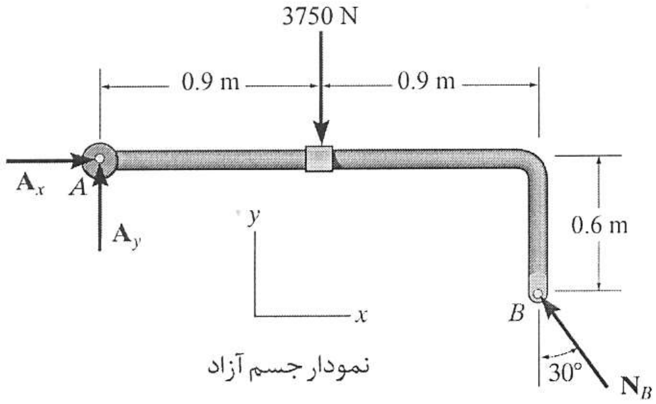
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad 32{,}6\ Nm - [74{,}0 \cdot 0{,}7]\ Nm + [52\left(\frac{12}{13}\right)\cdot 0{,}4]\ Nm \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad 32{,}6\ Nm - 51{,}8\ Nm + 19{,}2\ Nm = 0$$



مثال ۷-۵

مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل تکیه‌گاه مفصل ثابت پینی A و عکس‌العمل قائم غلتک B،که در اثر اعمال نیروی 3750 N بر قطعه L-شکل اعمال می‌شوند.



حل :

نمودار جسم آزاد:

شکل مقابل نمودار جسم آزاد قطعه را نشان می‌دهد. تکیه‌گاه پینی A دو مؤلفه عکس‌العمل A_x و A_y را بر قطعه اعمال می‌کند.

معادلات تعادل:

عکس‌العمل N_B را می‌توان مستقیماً با جمع بستن گشتاورها حول نقطه A به‌دست آورد، زیرا A_x و A_y حول نقطه A گشتاور ایجاد نمی‌کنند.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad [N_B \cos 30° \cdot 1,8]\ \text{Nm} - [N_B \sin 30° \cdot 0,6]\ \text{Nm} - [3750 \cdot 0,9]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = 2681\ \text{N}$$

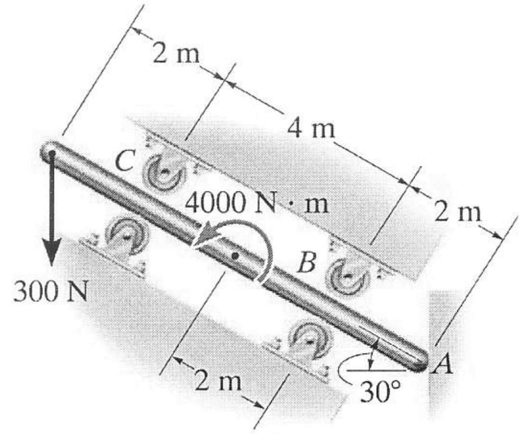
در ادامه با استفاده از این نتیجه می‌توان نوشت:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad A_x - N_B \sin 30° = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 1340,5\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 3750\ \text{N} + N_B \cos 30° = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 1428,2\ \text{N}$$

مثال ۷-۶

یک میله صاف و یکنواخت مطابق شکل (a) در معرض یک نیرو و گشتاور کوپل قرار دارد. چنانچه این میله در نقطه A به دیواری صاف و در نقاط B و C از دو طرف مطابق شکل به دو غلتک تکیه داشته باشد، مطلوب است تعیین عکس‌العمل‌ها در این تکیه‌گاه‌ها. از وزن میله می‌توان صرفنظر نمود.

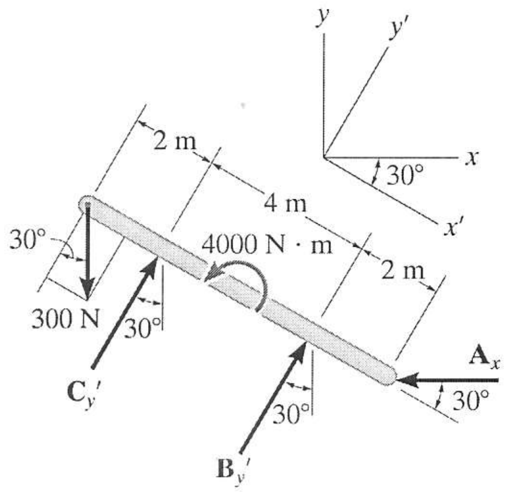


(a)

حل :

نمودار جسم آزاد:

در شکل (b) نمودار جسم آزاد میله نشان داده شده است. همه تکیه‌گاه‌ها بر سطوح تماس عمودند، زیرا این سطوح صاف هستند. عکس‌العمل‌های B و C در امتداد مثبت y' نشان داده شده‌اند، چون در این‌جا فرض شده است که غلتک‌های واقع در زیر میله نقش تکیه‌گاه را دارند.



(b)

معادلات تعادل:

با استفاده از دستگاه مختصات x,y در شکل (b) می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad C_{y'} \sin 30° + B_{y'} \sin 30° - A_x = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -300\text{ N} + C_{y'} \cos 30° + B_{y'} \cos 30° = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -[B_{y'} \cdot 2]\text{ Nm} + 4000\text{ Nm} - [C_{y'} \cdot 6] + [300 \cos 30° \cdot 8]\text{ Nm} = 0 \qquad (3)$$

باید توجه داشت که راستای مؤلفه $300 \sin 30°\text{ N}$ از نقطه A می‌گذرد و بنابراین در معادله (3) گشتاوری حول نقطه A ایجاد نمی‌کند.

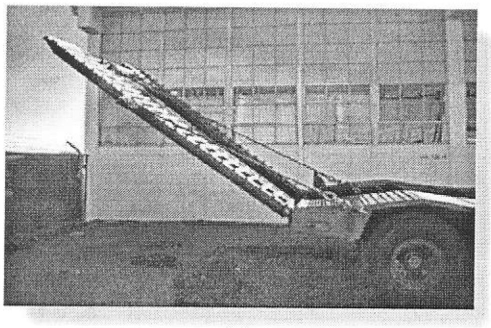
با حل دستگاه معادلات (2) و (3) نتیجه می‌شود: $B_{y'} = -1000\text{ N} = -1\text{ kN} \quad ; \quad C_{y'} = 1346{,}4\text{ N} = 1{,}35\text{ kN}$

چون $B_{y'}$ اسکالری منفی است، جهت آن مخالف جهت رسم شده است. بنابراین غلتک بالایی واقع در نقطه B به صورت تکیه‌گاه عمل می‌کند و نه تکیه‌گاه پایینی. با حفظ علامت منفی برای $B_{y'}$ و جایگزینی نتایج در معادله (1) نتیجه می‌شود:

$$1346{,}4 \sin 30°\text{ N} + (-1000 \sin 30°\text{ N}) - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 173\text{ N}$$

مثال ۷-۷

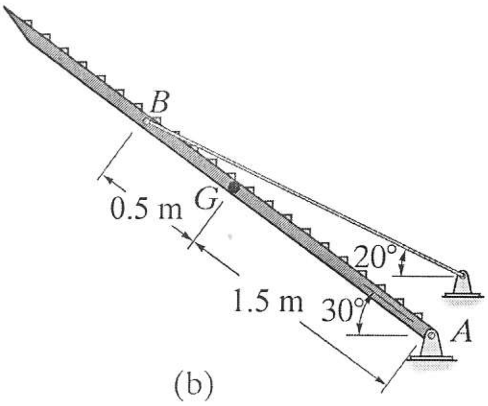
سکوی شیبدار و یکنواخت کامیونی مطابق شکل (a) وزنی برابر 1600 N دارد و از دو طرف از طریق مفصل ثابت پینی به بدنه کامیون متصل شده و توسط دو عدد کابل در وضعیتی مطابق شکل نگه داشته شده است. مطلوب است تعیین کشش در کابل‌ها



(a)

حل :

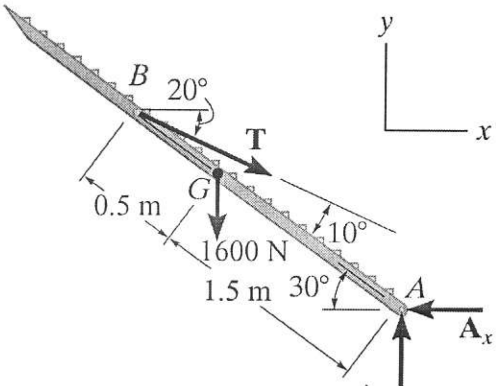
شکل (b) مدل ایده‌آل سازی شده این سکو، که همه ابعاد ضروری و تکیه‌گاه‌ها در آن آورده شده‌اند را نشان می‌دهد. در این‌جا به دلیل یکنواخت بودن سکو مرکز گرانش بر مرکز هندسی آن منطبق فرض شده است.



(b)

نمودار جسم آزاد:

در شکل (c) نمودار جسم آزاد این سکو با استفاده از مدل ایده‌آل سازی شده نشان داده شده است.



(c)

معادلات تعادل:

با جمع بستن گشتاورها حول نقطه A،جواب مستقیمی برای کشش کابل به‌دست می‌آید. با استفاده از اصل گشتاورها چندین راه برای تعیین گشتاور T حول نقطه A وجود دارد. چنانچه از مختصات x و y استفاده شود، نتیجه می‌شود:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -[T\cos 20° \cdot 2\sin 30°]\ \mathrm{Nm} + [T\sin 20° \cdot 2\cos 30°] + [1600\mathrm{N} \cdot 1{,}5\cos 30°]\ \mathrm{Nm} = 0$$

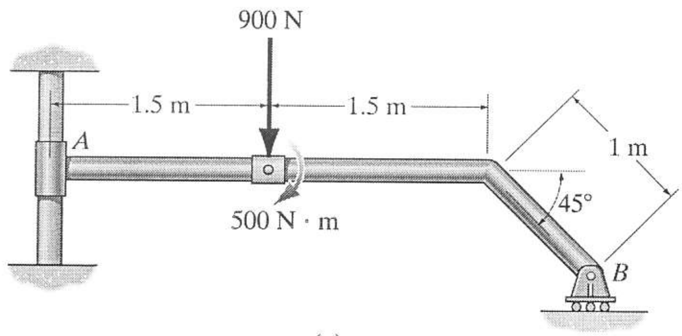
$$\Rightarrow \quad T = 5985\ \mathrm{N}$$

ساده‌ترین راه برای تعیین گشتاور T حول نقطه A تجزیه آن به مؤلفه‌هایی در امتداد سکو و عمود بر آن است. گشتاور مؤلفه نیرو در امتداد سکو حول نقطه A در این حالت صفر خواهد بود و بنابراین:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -[T\sin 10° \cdot 2]\ \mathrm{Nm} + [1600\mathrm{N} \cdot 1{,}5\cos 30°]\ \mathrm{Nm} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = 5985\ \mathrm{N}$$

مثال ۷-۸

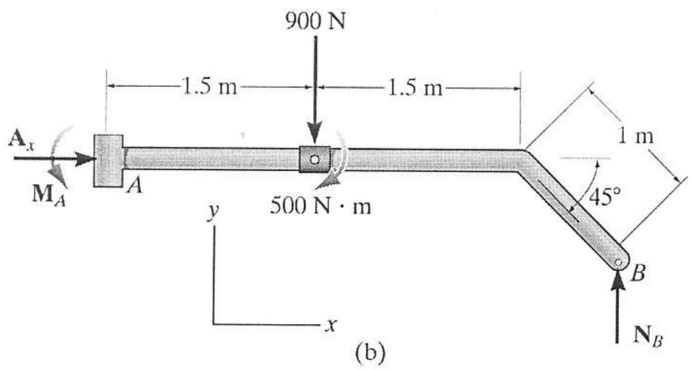


(a)

عضوی مطابق شکل دارای تکیه‌گاه غلتشی B در سمت راست است و در سمت چپ به بوش A جوش داده شده، که قادر است در امتداد ستونی بلغزد. این عضو با نیروی 900 N و گشتاور ساعتگرد 500 Nm بارگذاری می‌گردد. مطلوب است تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی A و B.

حل:

نمودار جسم آزاد:



(b)

شکل مقابل نمودار جسم آزاد عضو را نشان می‌دهد. از طرف ستون به بوش متصل به عضو نیروی افقی A_x و گشتاور پادساعتگرد M_A اعمال می‌گردد. در سمت راست نیز واکنش قائم N_B به عضو اثر می‌کند.

معادلات تعادل:

با استفاده از معادلات تعادل نیروها :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_X = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\ ;\ N_B - 900\ \text{N} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_B = 900\ \text{N}$$

و با توجه به تعادل گشتاورها حول هر یک از نقاط A و یا B :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0:\ M_A - 900\ \text{N} \cdot 1{,}5\ \text{m} - 500\ \text{Nm} + N_B \cdot (3 + 1 \cdot \cos 45^\circ)\ \text{Nm} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A = -1486\ \text{Nm}$$

و یا :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0:\ M_A + 900\ \text{N} \cdot (1{,}5 + 1 \cdot \cos 45^\circ)\text{m} - 500\ \text{Nm} - A_x \cdot \sin 45^\circ\ \text{Nm} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A = -1486\ \text{Nm}$$

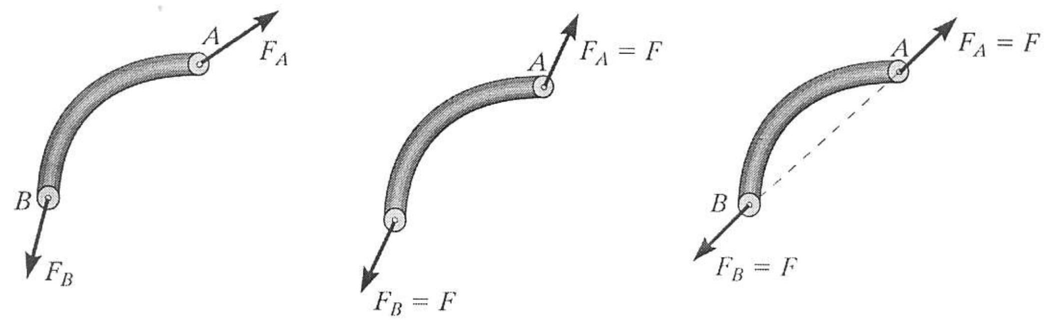
علامت منفی M_A بیانگر آن‌است که جهت در نظر گرفته شده برای آن در نمودار جسم آزاد معکوس جهت واقعی آن می‌باشد.

۶-۷ عضوهای دو نیرویی و سه نیرویی

شناخت عضوهایی که تحت اثر دو و یا سه نیرو قرار می‌گیرند، می‌تواند در ساده‌تر شدن حل بعضی از مسائل کمک کند.

عضوهای دو نیرویی:

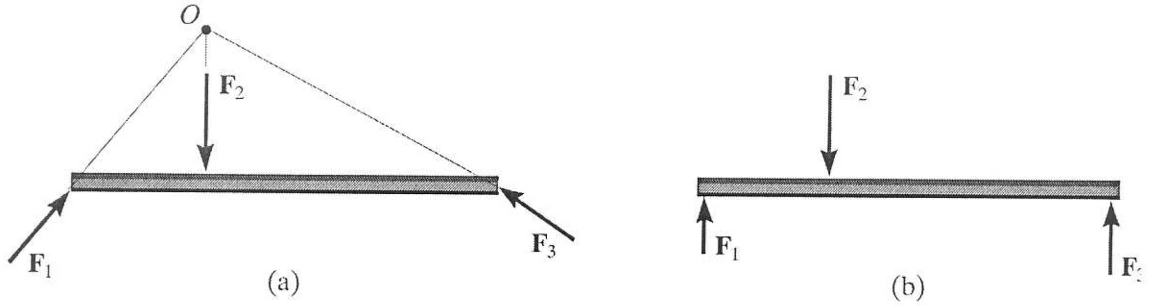
نیروها در این عضوها فقط در دو نقطه به عضو اعمال می‌شوند. شکل‌های (a)، (b) و (c) در زیر نمونه‌ای از یک عضو دو نیرویی را نشان می‌دهند. در شکل (a) شرط تعادل نیروها و گشتاورها برقرار نیست، در شکل (b) شرط تعادل نیروها برقرار است، اما عضو خواهد چرخید. فقط در شکل (c) است که هم نیروها و هم گشتاورها در تعادلند. بنابراین برای آن‌که یک عضو دو نیرویی در تعادل باشد بایستی دو نیروی وارد بر آن مساوی بوده، در امتداد هم و در خلاف جهت یکدیگر اثر کنند (شکل (c)).



(a) (b) (c)

عضوهای سه نیرویی:

اگر به عضوی سه نیرو در سه نقطه متفاوت اعمال شود به آن عضو سه نیرویی می‌گویند. تعادل گشتاور در این عضوها مستلزم آن است که این سه نیرو هم‌رَس (شکل (a)) بوده و یا موازی هم (شکل (b)) باشند.

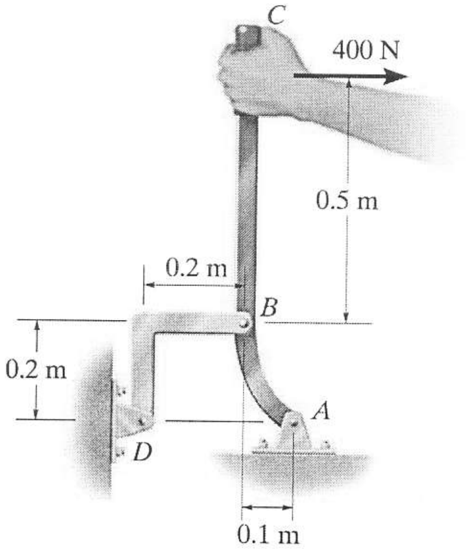


(a) (b)

مثال ۷-۹

اهرم ABC دارای یک تکیه‌گاه مفصلی پینی در A بوده و در مفصل پینی B نیز به یک میله کوتاه BD مطابق شکل (a) متصل است.

چنانچه از وزن عضوها بتوان صرفنظر نمود، مطلوب است تعیین نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه پینی A که به اهرم اعمال می‌شود.

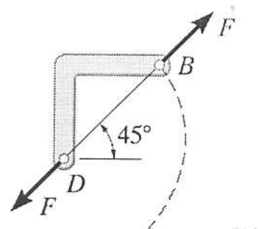


(a)

حل :

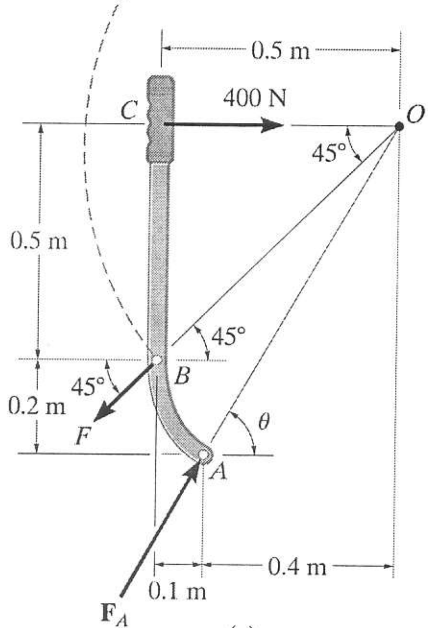
نمودارهای جسم آزاد:

عضو BD مطابق شکل (b) عضو دونیرویی است. در نتیجه نیروهای وارد بر پینهای B و D در یک امتداد، مساوی و مخالف هم می‌باشند. هرچند اندازه این دو نیرو معلوم نیست، اما راستای آنها معلوم و در امتداد خط $\overline{BD}$ است.



(b)

اهرم ABC طبق شکل (c) یک عضو سه نیرویی است و بنابراین برای برقراری تعادل گشتاورها بایستی سه نیروی وارد بر آن یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، یا به عبارت دیگر در نقطه O هم‌رَس باشند. توجه داشته باشید که نیروی $\vec{F}$ که از طرف عضو BD در نقطه B به اهرم ABC اثر می کند، عکس‌العمل نیروی مساوی و مخالف $\vec{F}$ است که از طرف اهرم ABC به عضو BD اعمال می‌شود.



(c)

معادلات تعادل:

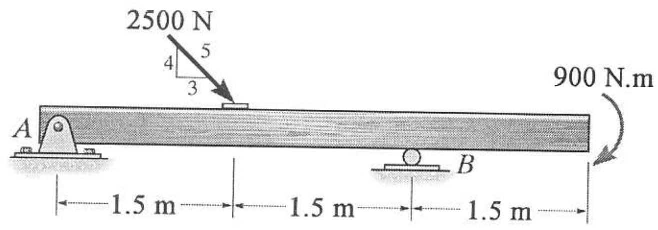
با توجه به هم‌رَس بودن نیروها ($\Sigma M=0$) بایستی راستای نیروی $\vec{F}_A$ از نقطه تلاقی نیروی افقی 400 N و نیروی $\vec{F}$، یعنی O نیز بگذرد. با استفاده از روابط مثلثاتی در شکل:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0,7}{0,4}\right) = 60,3^\circ$$

و با کاربرد معادلات تعادل نیروها در راستای محورهای x و y :

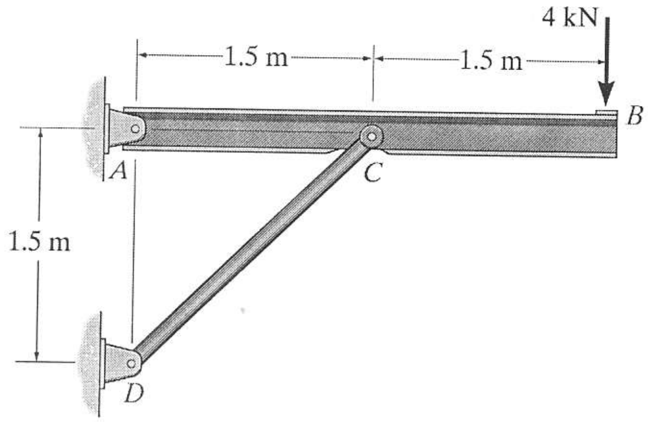
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0\ ;\ F_A \cos 60,3^\circ - F\cos 45^\circ + 400\,N = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 1,07\ kN$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\ ;\ F_A \sin 60,3^\circ - F\sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 1,32\ kN$$



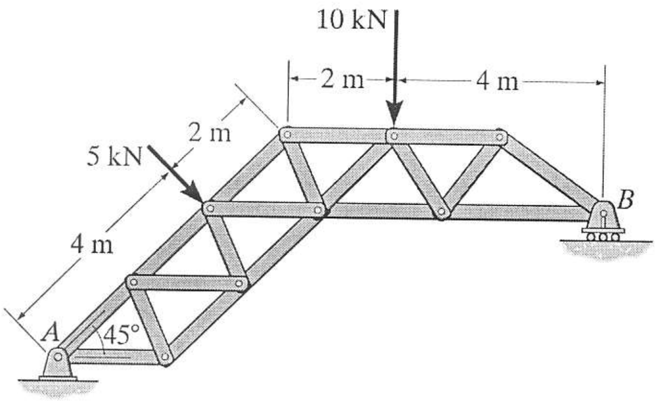
تمرین ۷-۱

مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی واکنش در تکیه‌گاه‌های A و B.
از ضخامت تیر می‌توان چشم‌پوشی نمود.



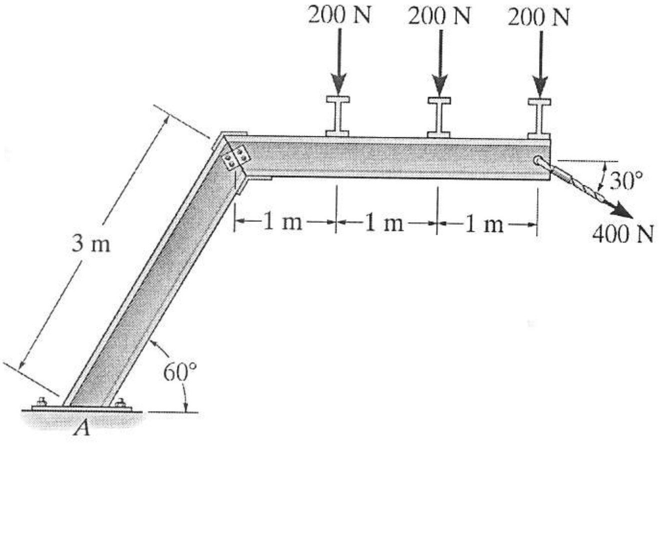
تمرین ۷-۲

مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی واکنش در مفصل پینی A و واکنش وارد بر تیر در نقطه C.



تمرین ۷-۳

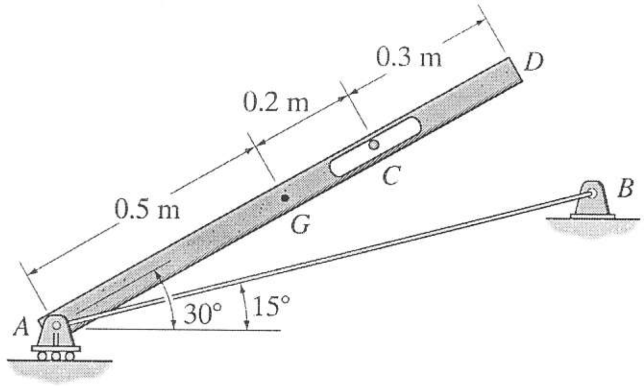
خرپایی مطابق شکل دارای یک تکیه‌گاه مفصل پینی در A و یک تکیه‌گاه غلتکی در B است. مطلوب است تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در A و B.



تمرین ۷-۴

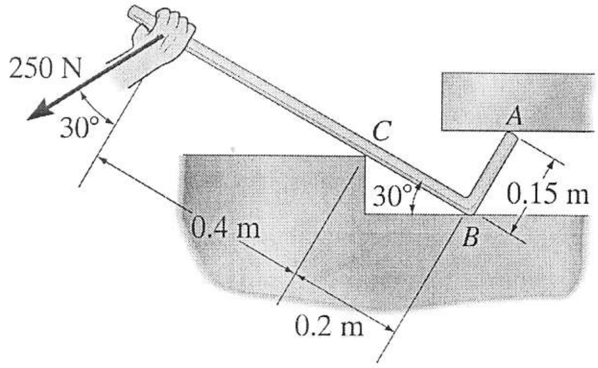
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های عکس‌العمل در تکیه-گاه گیردار A. از ضخامت تیر می‌توان چشم‌پوشی نمود.

تمرین ۷-۵



میله‌ای به جرم 25 kg و مرکز جرم G مطابق شکل داده شده است. با فرض این‌که این میله به میخ صافی در C، غلتکی در A و طناب AB متکی باشد، مطلوب است تعیین عکس‌العمل در این تکیه‌گاه‌ها.

تمرین ۷-۶



دیلمی مطابق شکل در نقاط صاف A ، B و C تماس دارد. مطلوب است تعیین عکس‌العمل در این نقاط تماس.

۷-۷ تعادل در سه بُعد

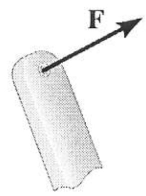
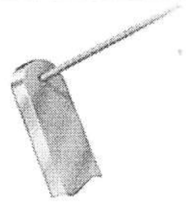
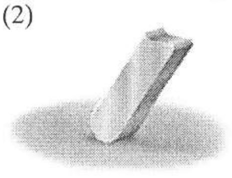
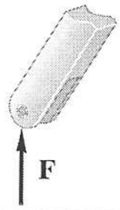
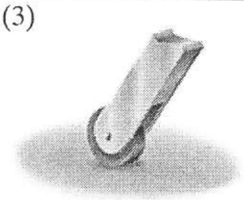
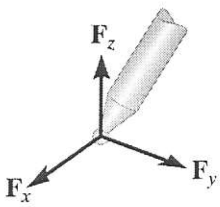
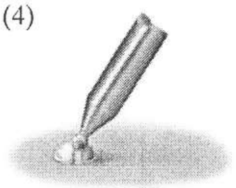
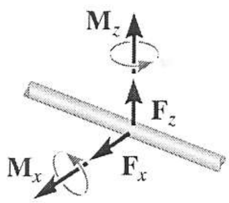
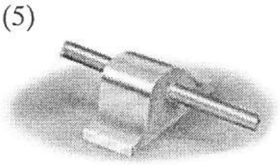
نمودارهای جسم آزاد:

همانند تعادل در دو بُعد، ترسیم نمودار جسم آزاد در حالت سه بُعدی نیز نخستین گامی است که بایستی انجام شود.

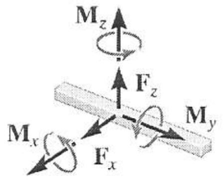
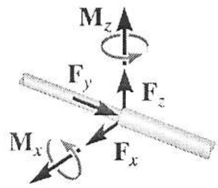
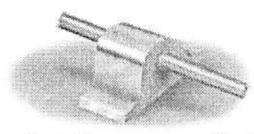
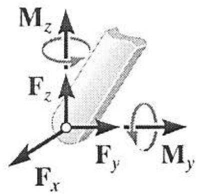
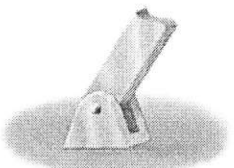
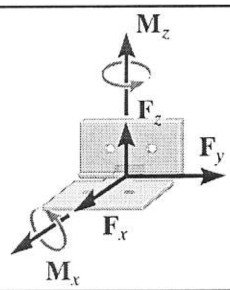
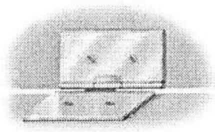
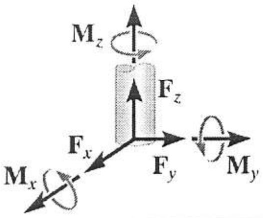
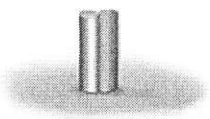
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی:

جدول ۷-۲ تکیه‌گاه‌های اجسام صُلب،که در معرض نیروهای سه بُعدی قرار می‌گیرند و نحوه آزادسازی آنها را نشان می‌دهد.

جدول ۷-۲

تعداد مجهول‌ها	واکنش (عکس‌العمل)	نوع اتصال
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی کششی است که در امتداد معلوم کابل از جسم دور می‌شود.		(1)  کابل
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی است که عمود بر سطح نقطه تماس عمل می‌کند.		(2)  تکیه گاه سطح صاف
یک مجهول. عکس‌العمل نیروی است که عمود بر سطح نقطه تماس عمل می‌کند.		(3)  غلتک
سه مجهول. عکس‌العمل‌های سه مؤلفه نیروهای عمود بر مفصل هستند.		(4)  مفصل کروی (کاسه و ساچمه)
چهار مجهول. عکس‌العمل‌ها دو نیرو و دو گشتاور عمود بر محور می‌باشند. **توجه:** چنانچه جسم (محور) به نقطه دیگری هم تکیه داشته باشد، معمولاً گشتاور کوپل ایجاد نمی‌شود. به مثال‌ها رجوع شود.		(5)  تک یاتاقان شعاعی (بوشی)

جدول ۷-۲ (ادامه)

تعداد مجهول‌ها	واکنش (عکس‌العمل)	نوع اتصال
پنج مجهول. عکس‌العمل‌ها شامل دو نیروی عمود بر محور و سه مؤلفه گشتاور کوپل می‌باشند. **توجه:** چنانچه جسم (محور) به نقطه دیگری هم تکیه داشته باشد، معمولاً گشتاور کوپل ایجاد نمی شود. به مثال‌ها رجوع شود.		(6)  تک یاتاقان شعاعی (بوشی) با محور چهار پر
پنج مجهول. عکس‌العمل‌ها شامل سه مؤلفه نیرو و دو مؤلفه گشتاور کوپل می‌باشند. **توجه:** چنانچه جسم (محور) به نقطه دیگری هم تکیه داشته باشد، معمولاً گشتاور کوپل ایجاد نمی شود. به مثال‌ها رجوع شود.		(7)  تک یاتاقان محوری (کف گرد)
پنج مجهول. عکس‌العمل‌ها شامل سه مؤلفه نیرو و دو مؤلفه گشتاور کوپل می‌باشند. **توجه:** چنانچه جسم (محور) به نقطه دیگری هم تکیه داشته باشد، معمولاً گشتاور کوپل ایجاد نمی شود. به مثال‌ها رجوع شود.		(8)  تک مفصل پینی
پنج مجهول. عکس‌العمل‌ها شامل سه مؤلفه نیرو و دو مؤلفه گشتاور کوپل می‌باشند. **توجه:** چنانچه جسم (محور) به نقطه دیگری هم تکیه داشته باشد، معمولاً گشتاور کوپل ایجاد نمی شود. به مثال‌ها رجوع شود.		(9)  تک لولا
شش مجهول. عکس‌العمل‌ها شامل سه مؤلفه نیرو و سه مؤلفه گشتاور کوپل می‌باشند.		(10)  تکیه گاه ثابت (درگیر)

۷-۸ معادلات تعادل در سه بُعد

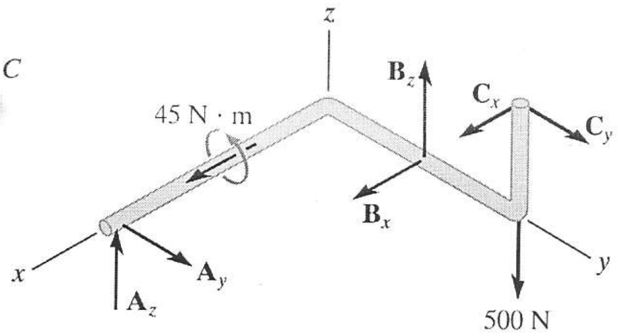
معادلات بُرداری تعادل: $\Sigma\vec{F} = 0 \quad ; \quad \Sigma\vec{M}_O = 0$

معادلات اسکالر تعادل:

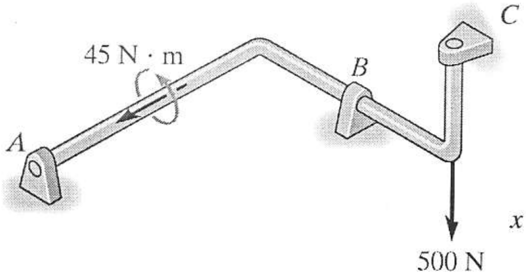
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

مثال ۷-۱۰

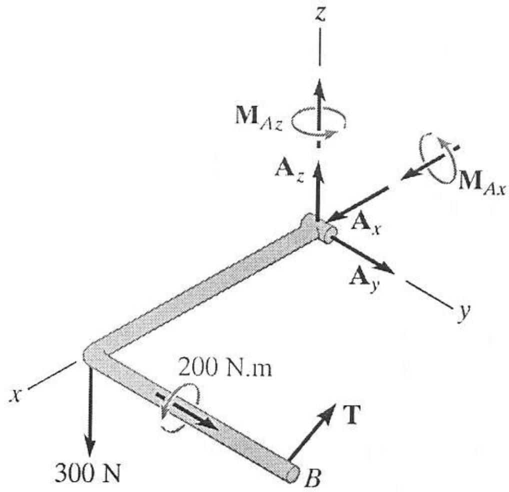
دو میله و یک صفحه شکل زیر را در نظر بگیرید، که همراه با نمودارهای جسم آزاد آن‌ها نشان داده شده‌اند. محورهای x، y، z در نمودار تعیین شده و مؤلفه‌های عکس‌العمل مجهول در جهت مثبت فرض می‌شوند. از وزن عضوها صرفنظر می‌شود.



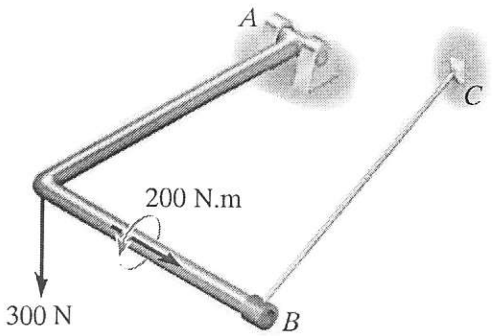
نیروهای عکس‌العمل ایجاد شده در تکیه‌گاهها برای تعادل کافی هستند، زیرا از چرخش میله حول هر یک از محورهای مختصات جلوگیری به‌عمل می‌آورند.
گشتاور کوپل در هیچ یک از یاتاقانها به وجود نمی‌آید.



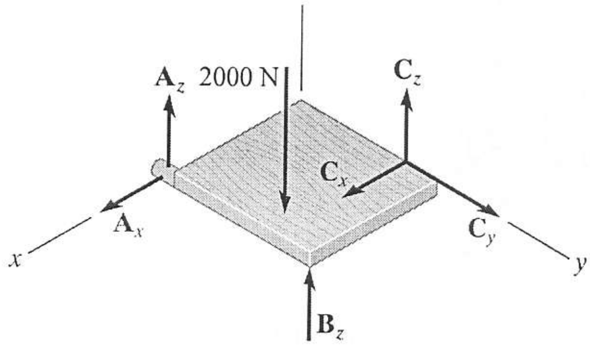
یاتاقانهای بوشی (یاتاقانهای ژورنال) در A، B، C، که به طور صحیح هم راستا شده‌اند.



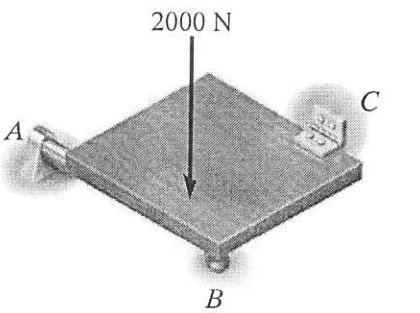
مؤلفه‌های گشتاور توسط پین به میله اعمال می‌شوند، تا از چرخش آن حول محورهای x و z جلوگیری کنند.



پین در A و کابل BC

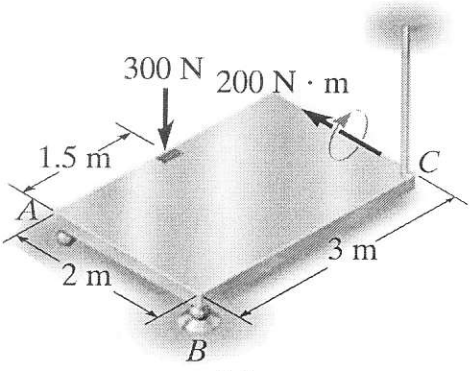


ایجاد عکس‌العمل یاتاقان و لولا به صفحه برای جلوگیری از چرخش حول هر یک از محورها فقط به‌صورت نیرو است. در لولا هیچ گشتاوری ایجاد نمی‌گردد.



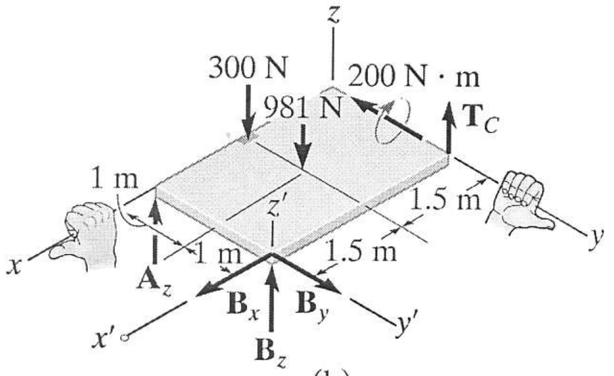
یاتاقان بوشی (ژورنال) کاملاً هم راستا شده در A و لولا در C. غلتک در B.

مثال ۷-۱۱



(a)

ورقی همگن 100 kg جرم دارد و در معرض نیرو و گشتاور کوپلی مطابق شکل (a) در امتداد لبه‌های خود قرار می‌گیرد. چنانچه این ورق در صفحه افقی در نقطه A به غلتک ساچمه‌ای، در نقطه B به مفصل کروی و در نقطه C به یک طناب متکی باشد، مطلوب است تعیین مؤلفه‌های عکس‌العمل در این تکیه‌گاه‌ها.



(b)

حل (تحلیل اسکالر):

نمودار جسم آزاد:

به ورق مطابق شکل (b) پنج عکس‌العمل مجهول تکیه‌گاهی اعمال می‌شود. فرض می‌شود همه عکس‌العمل‌ها در امتداد مثبت مختصات باشند.

معادلات تعادل:

چون هندسه سه بُعدی این مسئله نسبتاً ساده است، با تحلیل اسکالر جواب مستقیمی برای این مسئله به‌دست می‌آید. از مجموع نیروها در امتداد هر سه محور نتیجه می‌شود:

$\Sigma F_x = 0: \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$

$\Sigma F_y = 0: \quad \Rightarrow \quad B_y = 0$

$\Sigma F_z = 0: \quad \Rightarrow \quad A_z + B_z + T_C - 300\ \text{N} - 981\ \text{N} = 0 \qquad (1)$

یادآوری می‌شود که گشتاور یک نیرو حول هر محور برابر است با حاصل‌ضرب اندازه نیرو در فاصله عمودی (بازوی گشتاور) از خط اثر نیرو تا آن محور. به‌علاوه نیروهایی که با محور موازی‌اند و یا آن را قطع می‌کنند هیچ گشتاوری حول آن محور ایجاد نمی‌کنند. بنابراین از جمع بستن گشتاورها حول محورهای مثبت x و y نتیجه می‌شود:

$\Sigma M_x = 0: \quad [T_C \cdot 2]\ \text{Nm} - [981 \cdot 1]\ \text{Nm} + [B_z \cdot 2]\ \text{Nm} = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_y = 0: \quad [300 \cdot 1{,}5]\ \text{Nm} + [981 \cdot 1{,}5]\ \text{Nm} - [B_z \cdot 3]\ \text{Nm} - [A_z \cdot 3] - 200\ \text{Nm} = 0 \qquad (3)$

همچنین می‌توان مؤلفه‌های عکس‌العمل در B را حذف کرد، به‌شرط آن‌که گشتاورها حول محورهای مثبت x′ و y′ جمع بسته شوند.

$\Sigma M_{x'} = 0: \quad [981 \cdot 1]\ \text{Nm} + [300 \cdot 2]\ \text{Nm} - [A_z \cdot 2]\ \text{Nm} = 0 \qquad (4)$

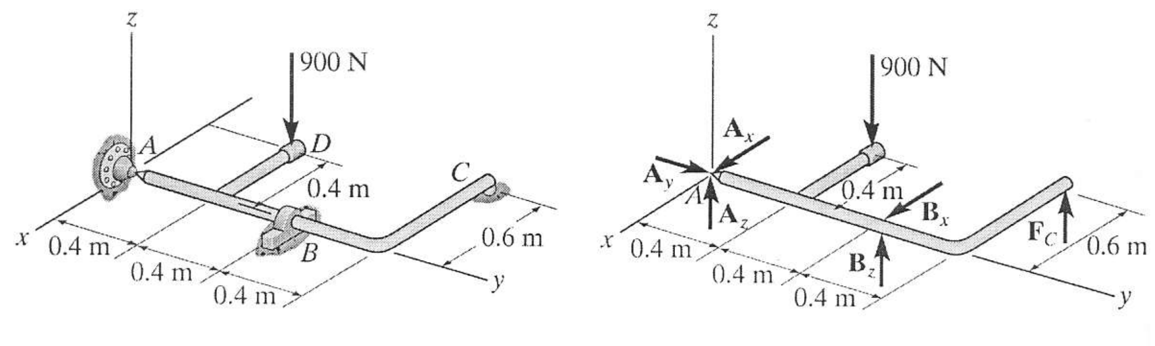
$\Sigma M_{y'} = 0: \quad -[300 \cdot 1{,}5]\ \text{Nm} - [981 \cdot 1{,}5]\ \text{Nm} + [T_C \cdot 3]\ \text{Nm} - 200\ \text{Nm} = 0 \qquad (5)$

با حل معادله‌های (1)، (2) و (3) و یا معادله‌های راحت‌تر (1)، (4) و (5) نتیجه می‌شود:

$A_z = 790\ \text{N} \quad ; \quad B_z = -217\ \text{N} \quad ; \quad T_C = 707\ \text{N}$

مثال ۷-۱۲

میله‌ای مطابق شکل (a) داده شده است. این میله دارای یک تکیه‌گاه مفصل کروی در A، یک یاتاقان بوشی در B و یک تکیه‌گاه غلتک ساچمه‌ای در C است. به این میله همچنین در نقطه D یک نیروی 900 N اعمال می‌شود. مطلوب است تعیین مؤلفه‌های عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌ها.



(a) (b)

حل:

نمودار جسم آزاد:

شکل (b) نمودار جسم آزاد میله را نشان می‌دهد. نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها مانع چرخش میله حول محورهای مختصات خواهند شد و بنابراین تک یاتاقان شعاعی (بوشی) B فقط دو نیروی عکس‌العمل بر میله وارد می‌کند.

معادلات تعادل:

از مجموع نیروها در راستای محور- y جواب مستقیمی برای A_y به‌دست می‌آید:

$$\Sigma F_y = 0: \qquad \Rightarrow \quad A_y = 0$$

نیروی F_C را می‌توان مستقیماً با جمع بستن گشتاورها حول محور- y به‌دست آورد:

$$\Sigma M_y = 0: \quad [F_C \cdot 0{,}6]\ \text{Nm} - [900 \cdot 0{,}4]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_C = 600\ \text{N}$$

نیروی B_z را نیز می‌توان مستقیماً با جمع بستن گشتاورها حول محور- x به‌دست آورد:

$$\Sigma M_x = 0: \quad [B_z \cdot 0{,}8]\ \text{Nm} + [600 \cdot 1{,}2]\ \text{Nm} - [900 \cdot 0{,}4]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z = -450\ \text{N}$$

علامت منفی بیانگر آن‌است که B_z به سمت پایین اثر می‌کند. همچنین نیروی B_x را می‌توان مستقیماً با جمع بستن گشتاورها حول محور- z به‌دست آورد:

$$\Sigma M_z = 0: \quad -[B_x \cdot 0{,}8]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

اکنون از مجموع نیروها در راستای محور- x جواب مستقیمی برای A_x به‌دست می‌آید:

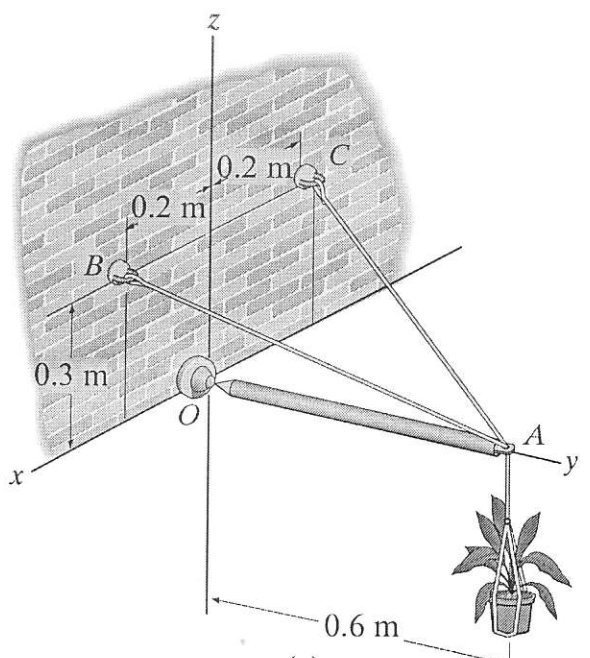
$$\Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

و بالاخره با استفاده از نتایج B_z و F_C نتیجه می‌شود:

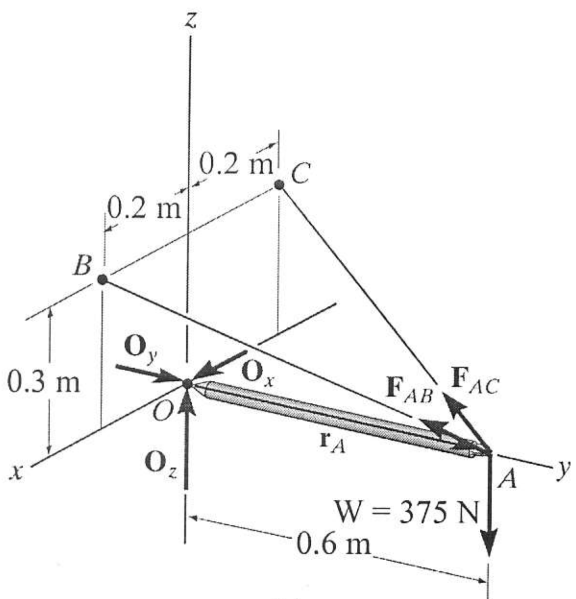
$$\Sigma F_z = 0: \quad A_z - 450\ \text{N} + 600\ \text{N} - 900\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = 750\ \text{N}$$

مثال ۷-۱۳

از یک بازویی مطابق شکل (a) برای نگه‌داشتن گلدانی به وزن $375\ \text{N}(\approx 37,5\ \text{kg})$ استفاده می‌شود. مطلوب است تعیین نیروی کششی که در سیم‌های AB و AC ایجاد می‌شود.



(a)



(b)

حل:

نمودار جسم آزاد:

شکل (b) نمودار جسم آزاد این بازویی را نشان می‌دهد.

معادلات تعادل:

از تحلیل بُرداری استفاده می‌شود.

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\left(\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = F_{AB}\left(\frac{\{0,2\,\vec{i} - 0,6\,\vec{j} + 0,3\,\vec{k}\}}{\sqrt{(0,2)^2 + (-0,6)^2 + (0,3)^2}}\right) = \frac{F_{AB}}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{C}\left(\frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = F_{AC}\left(\frac{\{-0,2\,\vec{i} - 0,6\,\vec{j} + 0,3\,\vec{k}\}}{\sqrt{(-0,2)^2 + (-0,6)^2 + (0,3)^2}}\right) = \frac{F_{AC}}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

با نوشتن معادله بُرداری تعادل گشتاورها حول نقطه O نیروهای عکس‌العمل در O در معادله وارد نمی‌شوند:

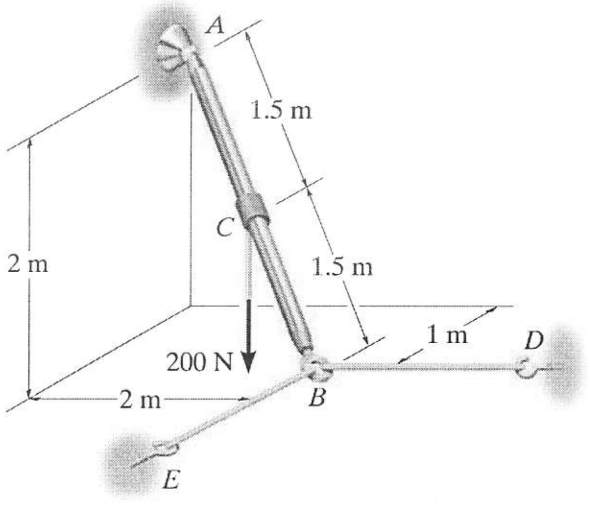
$$\Sigma\vec{M}_O = 0: \qquad \vec{r}_A \times (\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{W}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \times \left(\begin{pmatrix} 2F_{AB}/7 \\ -6F_{AB}/7 \\ 3F_{AB}/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2F_{AC}/7 \\ -6F_{AC}/7 \\ 3F_{AC}/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -375 \end{pmatrix}\right) \text{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,6 & 0 \\ \frac{2}{7}(F_{AB} - F_{AC}) & -\frac{6}{7}(F_{AB} + F_{AC}) & \frac{3}{7}(F_{AB} + F_{AC}) - 375 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1,8}{7}F_{AB} + \frac{1,8}{7}F_{AC} - 225 \\ 0 \\ -\frac{1,2}{7}F_{AB} + \frac{1,2}{7}F_{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1,8}{7}F_{AB} + \frac{1,8}{7}F_{AC} - 225 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{1,2}{7}F_{AB} + \frac{1,2}{7}F_{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{AB} = F_{AC} = 437,5\ \text{N}$$

مثال ۷-۱۴

میله AB مطابق شکل (a) در نقطه A به یک مفصل کروی، و در نقطه B به دو کابل BD و BE متکی است. این میله همچنین در نقطه C با نیروی 200 N بارگذاری می‌گردد. مطلوب است تعیین مؤلفه‌های عکس‌العمل در تکیه‌گاه A و نیروی کشش در کابل‌های BD و BE.

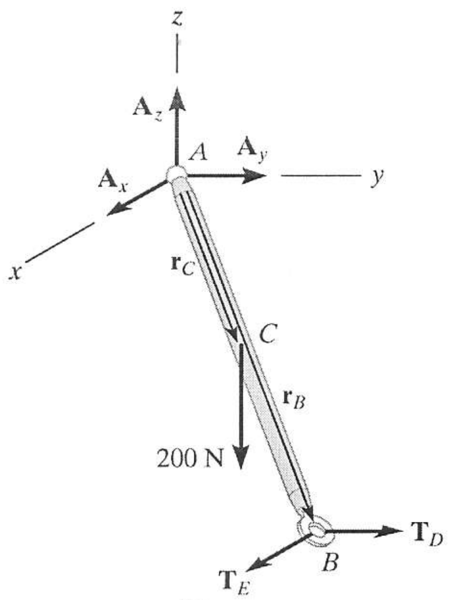


(a)

حل:

نمودار جسم آزاد:

شکل (b) نمودار جسم آزاد این میله را نشان می‌دهد.



(b)

معادلات تعادل: (تحلیل بُرداری)

نیروهای وارد بر میله (به صورت دکارتی) عبارتند از:

$$\vec{F}_A=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix};\ \vec{T}_D=\begin{pmatrix}0\\T_D\\0\end{pmatrix};\ \vec{T}_E=\begin{pmatrix}T_E\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\0\\-200\end{pmatrix}N$$

از جمع بُرداری نیروها نتیجه می‌شود:

$$\Sigma\vec{F}=0;\quad \vec{F}_A+\vec{T}_D+\vec{T}_E+\vec{F}=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\T_D\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}T_E\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-200\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Sigma F_x=0:\qquad A_x+T_E=0\qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=0:\qquad A_y+T_D=0\qquad (2)$$

$$\Sigma F_z=0:\qquad A_z-200=0\qquad (3)$$

از جمع بُرداری گشتاورها حول نقطه A نیز نتیجه می‌شود:

$$\Sigma\vec{M}_A=0:\qquad \vec{r}_C\times\vec{F}+\vec{r}_B\times(\vec{T}_E+\vec{T}_D)=0$$

که در آن $\vec{r}_B=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}m$ و $\vec{r}_C=\frac{1}{2}\vec{r}_B=\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\-1\end{pmatrix}m$ هستند. در نتیجه:

$$\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\-1\end{pmatrix}m\times\begin{pmatrix}0\\0\\-200\end{pmatrix}N+\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}m\times\left(\begin{pmatrix}T_E\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\T_D\\0\end{pmatrix}\right)N=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0{,}5&1&-1\\0&0&-200\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-2\\T_E&T_D&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

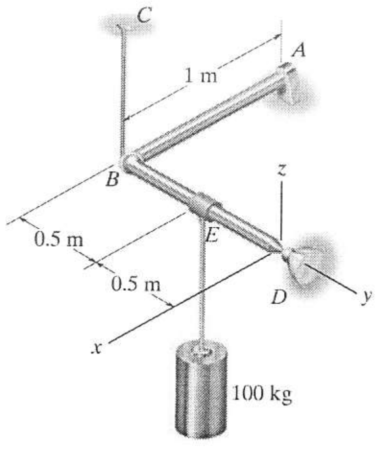
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-200\\100\\0\end{pmatrix}Nm+\begin{pmatrix}2T_D\\-2T_E\\T_D-2T_E\end{pmatrix}Nm=\begin{pmatrix}-200+2T_D\\100-2T_E\\T_D-2T_E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-200+2T_D=0 & (4)\\100-2T_E=0 & (5)\\T_D-2T_E=0 & (6)\end{cases}$$

از حل معادله‌های (1) تا (5) نتیجه می‌شود:

$$T_D=100\text{ N};\quad T_E=50\text{ N};\quad A_x=-50\text{ N};\quad A_y=-100\text{ N};\quad A_z=200\text{ N}$$

مثال ۷-۱۵

میله خمیده شکل (a) به یک یاتاقان شعاعی در نقطه A ، به یک مفصل کروی در نقطه D و به کابل BC در نقطه B تکیه دارد. به این میله در نقطه E یک وزنه 100 kg نیز آویزان می‌گردد. با استفاده از فقط یک معادله تعادل، جواب مستقیمی برای کشش کابل BC به‌دست آورید.
یاتاقان A می‌تواند فقط درامتدادهای y و z نیرو وارد کند، زیرا به طور صحیح با میله هم‌راستا شده است. به عبارت دیگر گشتاور کوپلی در یاتاقان ایجاد نمی‌شود.

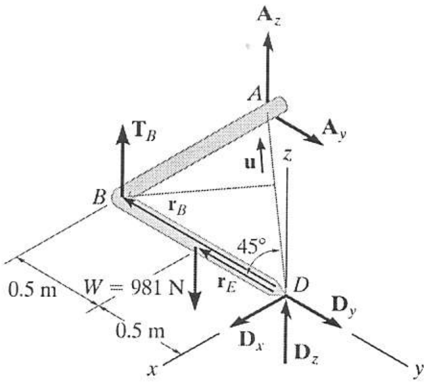


(a)

حل(تحلیل بُرداری):

نمودار جسم آزاد:

شکل (b) نمودار جسم آزاد این میله را نشان می‌دهد.



(b)

معادلات تعادل:

کشش T_B در کابل را می‌توان مستقیماً و با جمع بستن گشتاورها حول محوری که از D به طرف A می‌گذرد به‌دست آورد. اگر امتداد این محور با $\vec{u}$ تعریف شود:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_{DA}}{r_{DA}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}7071\\-0{,}7071\\0\end{pmatrix}$$

شرط تعادل گشتاورها حول محور DA ایجاب می‌کند که:

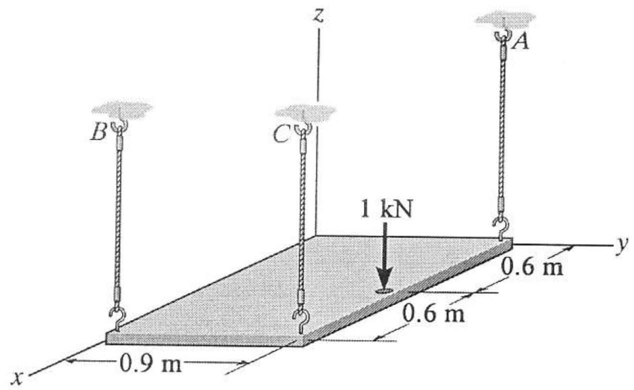
$$\Sigma M_{DA} = 0: \quad \vec{u}\cdot\Sigma(\vec{r}\times\vec{F}) = \vec{u}\cdot(\vec{r}_B\times\vec{T}_B + \vec{r}_E\times\vec{W}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-0{,}7071\\-0{,}7071\\0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\T_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-0{,}5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\-981\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-0{,}7071\\-0{,}7071\\0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & T_B\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\0 & -0{,}5 & 0\\0 & 0 & -981\end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-0{,}7071\\-0{,}7071\\0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-T_B\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}490{,}5\\0\\0\end{pmatrix}\right) = -0{,}7071(-T_B+490{,}5) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_B = 490{,}5\ \text{N}$$

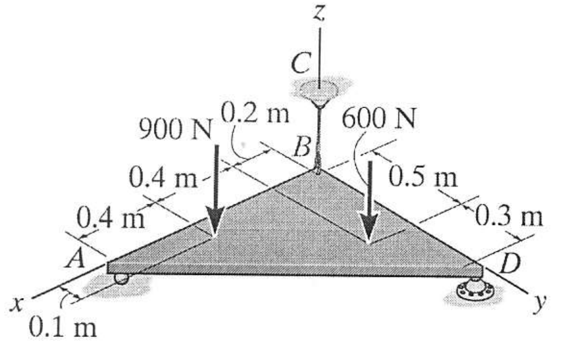
چون بازوهای گشتاور از محور DA تا $\vec{T}_B$ و $\vec{W}$ به‌آسانی تعیین می‌شود، می‌توان این نتیجه را با تحلیل اسکالر نیز به‌دست آورد:

$$\Sigma M_{DA} = 0: \quad \vec{T}_B(1\sin 45^\circ) - 981(0{,}5\sin 45^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_B = 490{,}5\ \text{N}$$



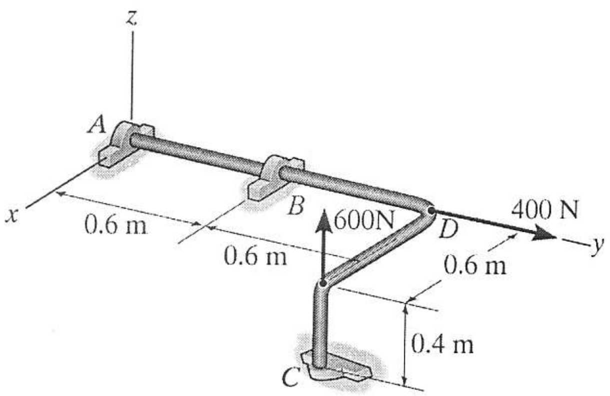
تمرین ۷-۷

ورقی یکنواخت به وزن 2,5 kN داده شده است. مطلوب است تعیین کشش در هر یک از کابل‌های نگهدارندهٔ آن.



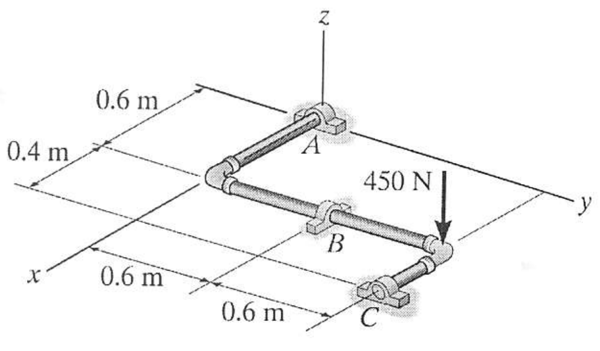
تمرین ۷-۸

ورقی بی‌وزن مطابق شکل داده شده است. مطلوب است تعیین عکس‌العمل‌ها در تکیه‌گاه غلتک ساچمه‌ای A، مفصل کروی D و کشش در کابل BC.



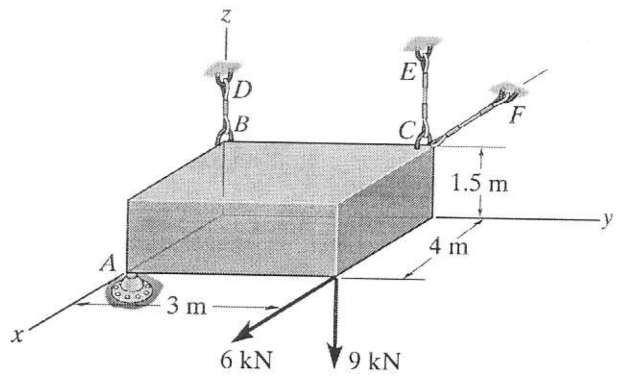
تمرین ۷-۹

میله شکل مقابل به یاتاقان‌های شعاعی در نقاط A، B و C متکی بوده و دو نیرو نیز مطابق شکل به آن اعمال می‌شوند. مطلوب است تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی.



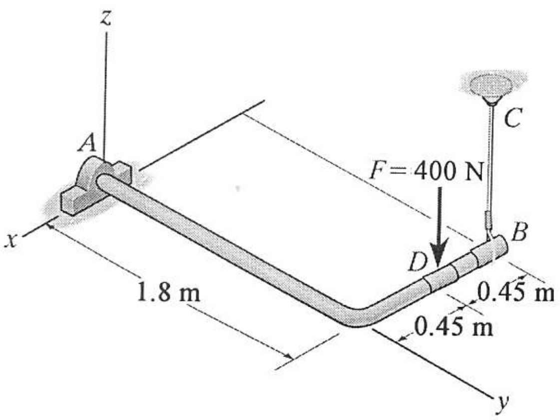
تمرین ۷-۱۰

مجموعه لوله‌ای شکل مقابل به یاتاقان‌های شعاعی در نقاط A، B و C متکی بوده و یک نیروی 450 N نیز مطابق شکل به آن اعمال می‌شود. مطلوب است تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی.



تمرین ۷-۱۱

مطلوب است تعیین کشش‌های ایجاد شده در طناب‌های BD، CE و CF و همچنین عکس‌العمل‌هایی که تکیه‌گاه مفصل کروی A بر قطعه شکل مقابل ایجاد می‌کند .

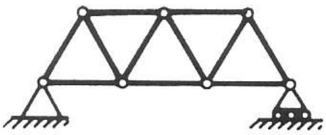


تمرین ۷-۱۲

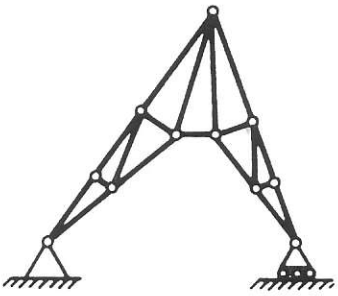
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های عکس‌العمل‌هایی که تک یاتاقان محوری (کف‌گرد) A و کابل BC بر میله‌ای مطابق شکل اعمال می‌کنند.

۸ تحلیل سازه‌ای

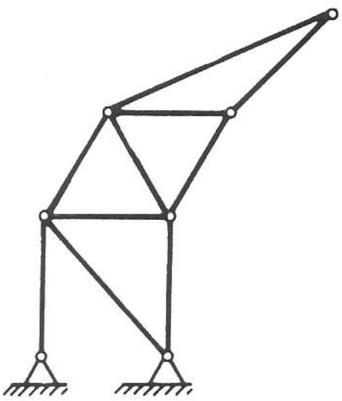
۸-۱ خرپاهای ساده



s=11
n= 7



s=19
n=11



s=9
n=6

خرپا سازه‌ای است (گروهی متشکل از چند عضو به هم متصل شده) مرکب از چندین پروفیل، که فرض‌های زیر در مورد آن‌ها صدق کند.

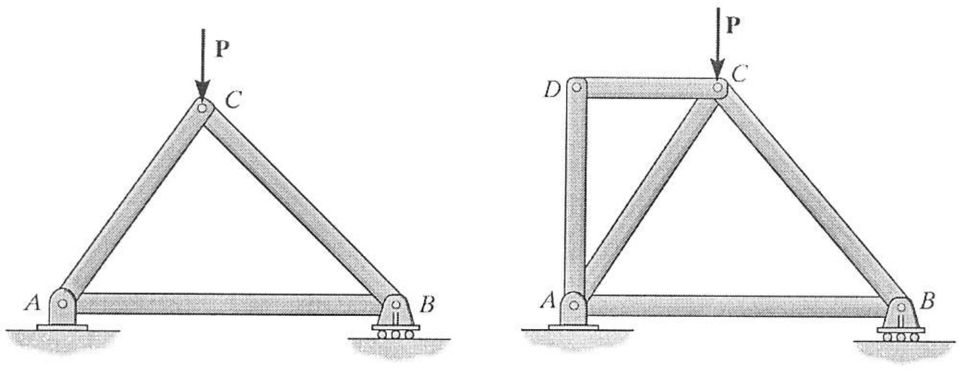
۱) پروفیل‌ها را می‌توان به عنوان میله‌هایی که به صورت مفصلی به هم متصل شده‌اند در نظر گرفت، بدون آن‌که سازه ویژگی خود را، یعنی داشتن رفتاری همانند یک جسم صُلب از دست بدهد.

۲) بارها (نیروها) فقط به نقاط گره (مفصل‌ها) اثر می‌کنند.

۳) به میله‌ها فقط نیروهای کششی و یا فشاری اعمال می‌شود. این شرط چنانچه فرض‌های ۱) و ۲) برآورده شوند برقرار می‌باشد.

۴) نیروهایی که بینهایت بزرگ باشند پدید نمی‌آیند (خرپاهای استثنایی مستثنی هستند)

این سازه‌ها به این صورت تشکیل می‌شوند که سرهای سه عضو (میله) با اتصال مفصل پینی به هم متصل شده و یک خرپای مثلثی صُلب را به وجود آورند (شکل (a)). با اضافه کردن دو عضو دیگر و متصل کردن آن‌ها به مفصل جدید، خرپای بزرگتری تشکیل می شود. این کار را می‌توان تکرار نمود و خرپاهای باز هم بزرگتری ساخت.



شکل (a)

اگر تعداد میله‌ها را s و تعداد مفصل‌ها (گره‌ها) را n در نظر بگیریم $s = 3 + 2(n - 3)$ است.

در رابطه فوق اولین عبارت سه میله را بیان می‌دارد که با سه مفصل اول یک مثلث را می‌سازند و دومین عبارت میله‌هایی را بیان می‌دارد، که با چهارمین، پنجمین، . . . و n امین مفصل اضافه می‌شوند.

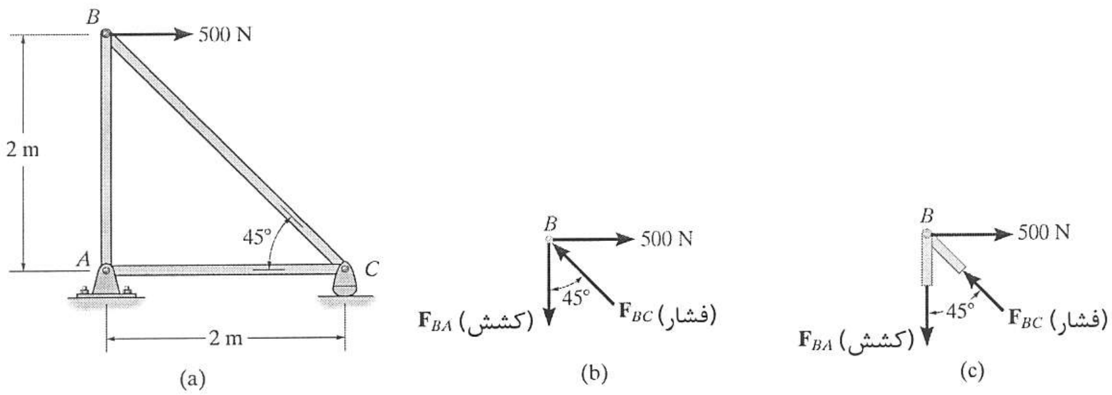
اگر خرپا از نظر استاتیکی معین باشد، بایستی بتوان نیروی میله‌ها و سه واکنش تکیه‌گاهی را از $2n$ معادله شرایط تعادل به‌دست آورد:

$$\boxed{s + 3 = 2n}$$

چنانچه همه n مفصل در تعادل باشند، خرپا نیز در تعادل است. در این حال شرایط تعادل برای کل سیستم نیز برقرار خواهد بود.

۸-۲ روش مفصل‌ها

برای تحلیل یا طراحی خرپا بایستی نیروی هر عضو مشخص گردد. یکی از راه‌های انجام این کار استفاده از روش مفصل‌هاست و مبتنی بر آن است که اگر کل خرپا در تعادل باشد، همه مفصل‌ها نیز در تعادلند.
بنابراین اگر نمودار جسم آزاد هر مفصل را در نظر بگیریم می‌توانیم از دو معادله تعادل برای به‌دست آوردن نیروی عضوها استفاده کنیم. مثلاً به پین مفصل B در خرپای شکل (a) سه نیرو وارد می‌شوند. نیروی $500\ N$ و نیروهای ایجاد شده توسط عضوهای BA و BC. شکل (b) نمودار جسم آزاد پین را نشان می‌دهد. در این‌جا F_{BA} پین را "می‌کشد"، یعنی عضو BA تحت کشش است، اما نیروی F_{BC} پین را "هل می‌دهد" و در نتیجه عضو BC در فشار است. با مجزا کردن مفصل و قسمت‌های کوچک از عضوهای متصل به پین می‌توان این موضوع را به وضوح نشان داد (شکل (c))

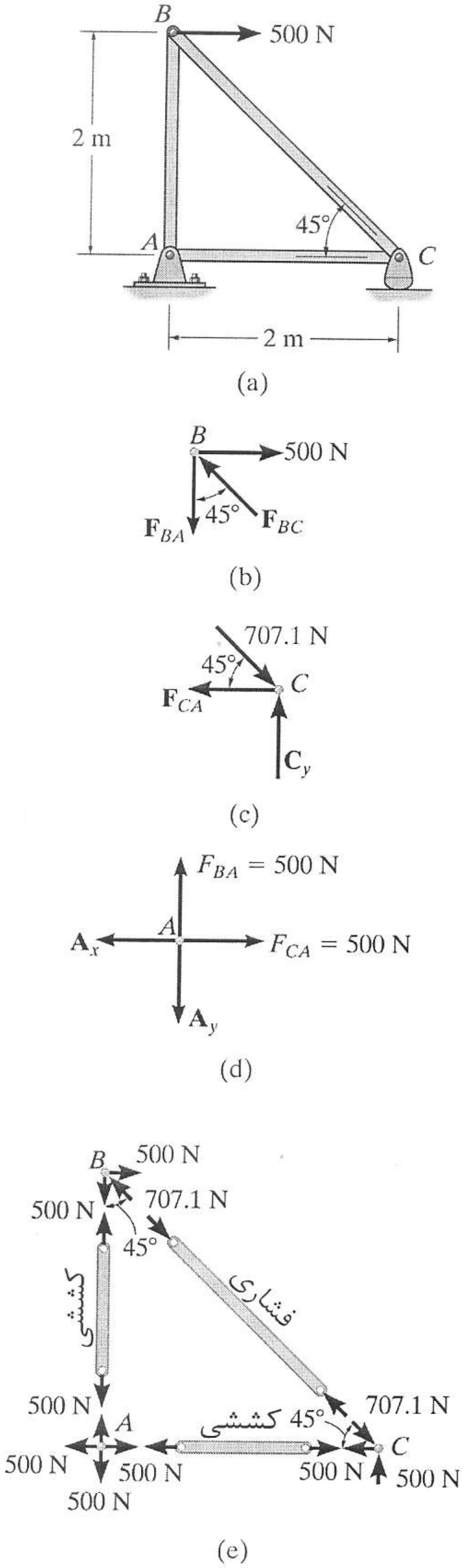


در هنگام استفاده از روش مفصل‌ها بایستی همواره از مفصلی شروع کنیم که حداقل یک نیروی معلوم و حداکثر دو نیروی مجهول داشته باشد. موقع کاربرد این معادله‌ها، جهت صحیح نیروی عضو مجهول را می توان به یکی از دو روش ممکن به‌دست آورد:

- در خیلی از موارد می‌توان جهت صحیح نیروی اعضای مجهول را با بررسی و بدون محاسبه تعیین کرد. مثلاً F_{BC} در شکل (b) بایستی پین را هل دهد (فشاری) تا مؤلفه افقی آن نیروی $500\ N$ را خنثی کند. به همین ترتیب F_{BA} نیروی کششی است زیرا بایستی مؤلفه عمودی F_{BC} را خنثی کند. در موارد پیچیده‌تر می‌توان یک جهت برای نیروی مجهول فرض نمود. پس از حل معادله‌های تعادل می‌توان درستی جهت فرض شده را بر اساس نتایج عددی بررسی نمود. جواب مثبت نشانه صحیح بودن فرض است و جواب منفی به معنی آن است که باید جهت نشان داده شده روی نمودار جسم آزاد را معکوس نمود.
- در این حال فرض می‌شود که نیروهای مجهول اعضای وارد بر مفصل، همه کششی‌اند. در این صورت جواب عددی معادله‌های تعادل برای عضوهای کششی مثبت و برای عضوهای فشاری منفی خواهد بود.

مثال ۸-۱

مطلوب است تعیین نیرو در هر عضو خرپای شکل (a)، کششی یا فشاری بودن هر عضو را مشخص کنید.



حل :

چون در مفصل B حداقل یک معلوم و حداکثر دو مجهول داریم، تحلیل را از این مفصل آغاز می‌کنیم.

مفصل B :

شکل (b) نمودار جسم آزاد مفصل B را نشان می‌دهد. با استفاده از معادله‌های تعادل در این مفصل داریم:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad 500 - F_{BC} \sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 707{,}1 \text{ N(C)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BA} = 500 \text{ N(T)}$$

اکنون که نیروی عضو BC محاسبه شده است، می توان به تحلیل مفصل C پرداخت و نیروی عضو CA و عکس‌العمل تکیه‌گاه گهواره‌ای را تعیین کرد.

مفصل C :

از نمودار جسم آزاد مفصل C در شکل (c) نتیجه می‌شود:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad -F_{CA} + 707{,}1 \cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CA} = 500 \text{ N(T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - 707{,}1 \sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 500 \text{ N}$$

مفصل A :

اگرچه این کار ضرورت ندارد، می‌توان مؤلفه‌های عکس‌العمل تکیه‌گاه در مفصل A را نیز با استفاده از نتایج F_{CA} و F_{BA} به‌دست آورد. از نمودار جسم آزاد در شکل (d) نتیجه می‌شود:

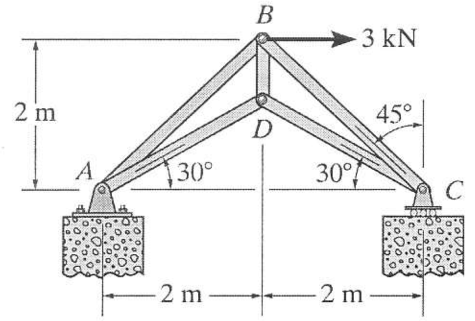
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad 500 - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 500 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 500 - A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 500 \text{ N}$$

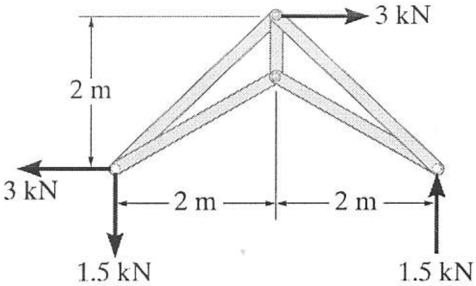
نتایج این تحلیل در شکل (e) آورده شده است. توجه داشته باشید که نمودار جسم آزاد هر مفصل (یا پین) آثار همه عضوهای متصل شده و نیروهای خارجی اعمال شده به مفصل را نشان می‌دهد، اما نمودار جسم ازاد هر عضو فقط آثار مفصل‌های انتهایی عضو را نشان می‌دهد.

مثال ۸-۲

مطلوب است تعیین نیروهای به وجود آمده در همه عضوهای خرپای شکل (a).



(a)



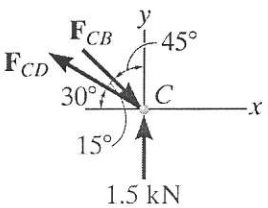
(b)

حل :

بررسی نشان می‌دهد که در همه مفصل‌ها بیشتر از دو مجهول وجود دارد. در نتیجه بایستی ابتدا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین گردند. شکل (b) نمودار جسم آزاد کل خرپا را نشان می‌دهد، که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن به‌دست آمده‌اند. اکنون می‌توان تحلیل را از مفصل C آغاز نمود.

مفصل C :

از نمودار جسم آزاد شکل (c) نتیجه می‌شود:

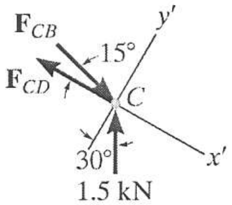


(c)

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad -F_{CD}\cos 30^\circ + F_{CB}\sin 45^\circ = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 1{,}5 + F_{CD}\sin 30^\circ - F_{CB}\cos 45^\circ = 0$$

این دو معادله دو مجهولی بایستی به طور همزمان حل گردند. البته باید توجه داشت که حل مستقیم یکی از مجهولات را می‌توان با استفاده از جمع نیروها در امتداد محوری عمود بر جهت نیروی مجهول دیگر به‌دست آورد. مثلاً جمع نیروها در امتداد محور y' که عمود بر جهت F_{CD} در شکل (d) است جواب مستقیمی برای F_{CB} به‌دست می‌دهد.



(d)

$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0: \quad 1{,}5\cos 30^\circ - F_{CB}\sin 15^\circ = 0$$

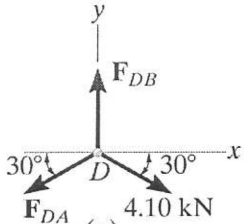
$$\Rightarrow \quad F_{CB} = 5{,}019 \text{ kN (C)}$$

$$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0: \quad -F_{CD} + 5{,}019\cos 15^\circ - 1{,}5\sin 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 4{,}10 \text{ kN (T)}$$

مفصل D :

اکنون می‌توان مفصل D را تحلیل نمود. از نمودار جسم آزاد در شکل (e) نتیجه می‌شود:



(e)

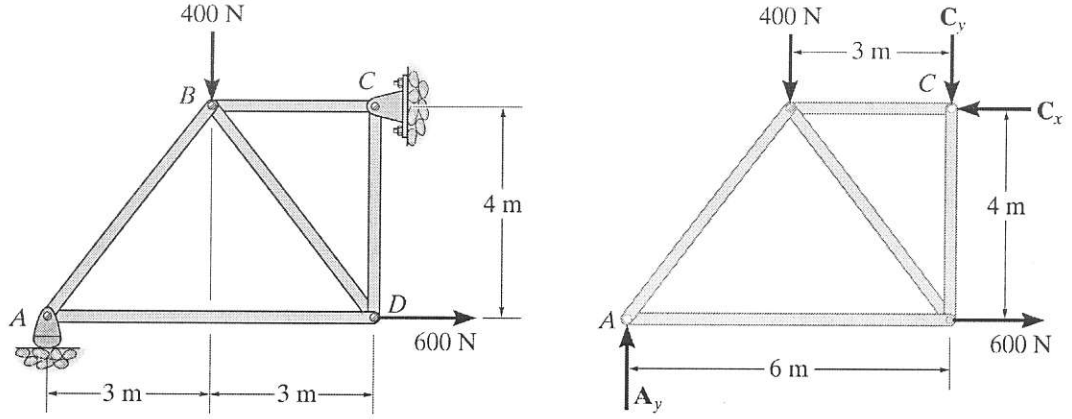
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \; -F_{DA}\cos 30^\circ + 4{,}10\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DA} = 4{,}10 \text{ kN (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{DB} - 2(4{,}10\sin 30^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DB} = 4{,}10 \text{ kN (T)}$$

نیروی آخرین عضو، یعنی F_{BA} را می‌توان از مفصل B و یا از مفصل A به‌دست آورد. به عنوان تمرین نمودار جسم آزاد مفصل B را رسم کرده، مجموع نیروها در جهت افقی را نوشته و نشان دهید که $F_{BA} = 0{,}776$ kN (C) است.

مثال ۸-۳

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای خرپای شکل (a)، کششی یا فشاری بودن عضوها را نشان دهید.



(a) (b)

حل :

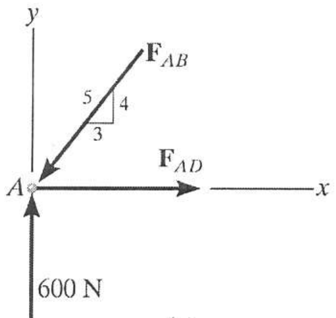
قبل از تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نمی‌توان هیچ مفصلی را تحلیل نمود، زیرا به همه مفصل‌ها بیش از دو نیروی مجهول اعمال می‌شود. شکل (b) نمودار جسم آزاد کل خرپا را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلات تعادل:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \;\; 600\text{ N} - C_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 600 \text{ N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \; -(A_y \cdot 6\text{ m}) + (400\text{ N}\cdot 3\text{ m}) + (600\text{ N}\cdot 4\text{ m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 600\text{ N}$$

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0; \;\; 600\text{ N} - 400\text{ N} - C_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 200\text{ N}$$

اکنون می توان تحلیل را از مفصل A و یا مفصل C آغاز نمود، زیرا هر یک از این مفصل‌ها حداقل یک نیروی معلوم و حداکثر دو نیروی مجهول دارند.



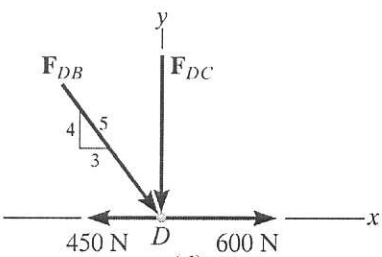
(c)

مفصل A :

مطابق نمودار جسم آزاد شکل (c) فرض می‌شود F_{AB} فشاری و F_{AD} کششی است. در نتیجه:

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0: \;\; 600\text{ N} - \frac{4}{5}F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 750\text{ N (C)}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \;\; F_{AD} - \frac{3}{5}(750\text{ N}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} = 450\text{ N (T)}$$



(d)

مفصل D :

طبق نمودار جسم آزاد مفصل D در شکل (d) و با استفاده از نتیجه به‌دست آمده برای F_{AD} و جمع بستن نیروها در امتداد افقی داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \;\; -450\text{ N} + \frac{3}{5}F_{DB} + 600\text{ N} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DB} = -250\text{ N}$$

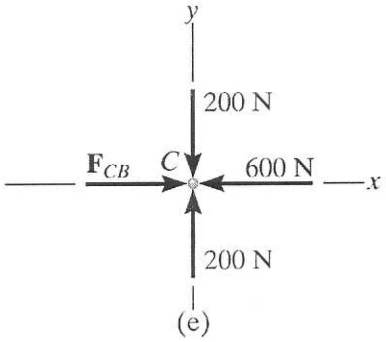
علامت منفی بیانگر آن است که جهت F_{DB} خلاف جهت نشان‌داده شده در شکل (d) است. بنابراین:

$$F_{DB} = 250\text{ N (T)}$$

برای تعیین F_{DC} می توان جهت F_{DB} را روی نمودار جسم آزاد تصحیح کرد و سپس معادله $\Sigma F_y = 0$ را به‌کار برد و یا این‌که در معادله علامت منفی را همچنان برای F_{DB} در نظر می‌گیریم، در نتیجه:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_y = 0: \quad -F_{DC} - \frac{4}{5}(-250\ N) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC} = 200\ N\ (C)$$

مفصل C:



(e)

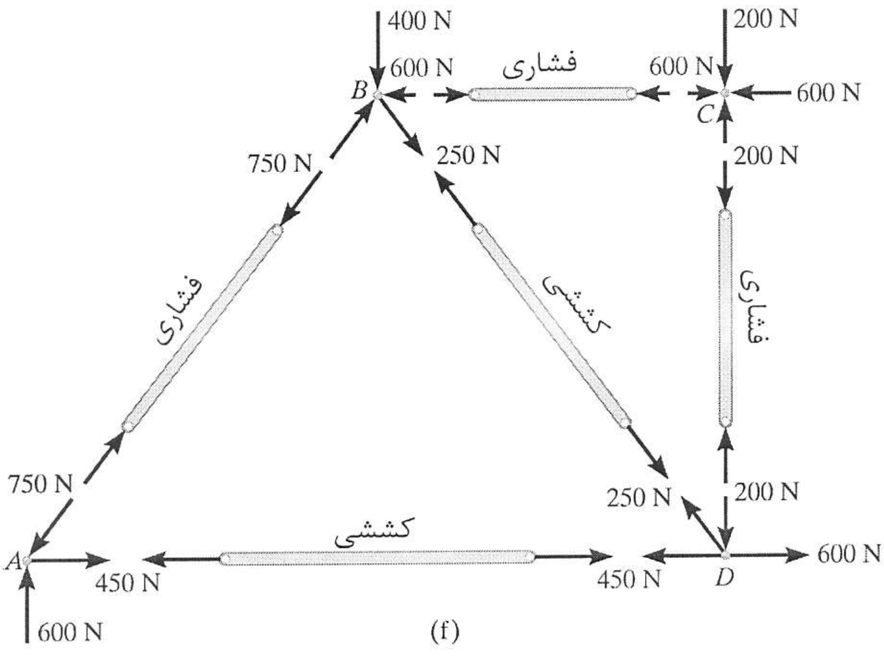
مطابق نمودار جسم آزاد شکل (e):

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad F_{CB} - 600\ N = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = 600\ N\ (C)$$

جهت کنترل محاسبات:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 200\ N - 200\ N = 0$$

این محاسبات در شکل (f) خلاصه شده است. در شکل همچنین نمودار جسم آزاد هر یک از مفصل‌ها و عضوها نشان‌داده شده است.



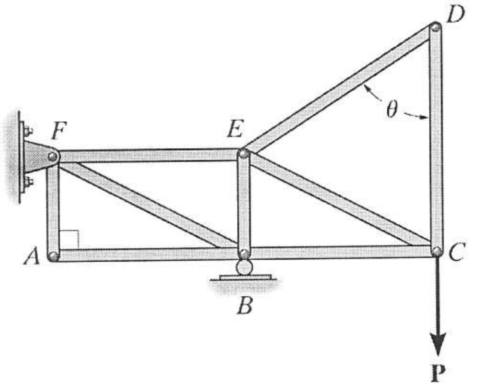
(f)

۳-۸ عضوهای با نیروی صفر

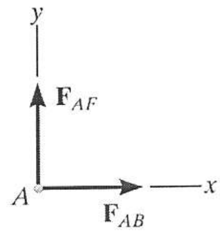
چنانچه عضوهایی که به آن‌ها در اثر بارگذاری نیرویی وارد نمی‌شود شناسایی شوند، تحلیل خرپا با استفاده از روش مفصل‌ها بسیار ساده خواهد شد. این عضوها برای افزایش پایداری خرپا در حین ساخت و تأمین تکیه‌گاه اضافی در صورت تغییر بارگذاری به‌کار می‌روند.

> اگر یک مفصل فقط دو عضو غیر همراستا داشته باشد و بار خارجی یا واکنش تکیه‌گاهی به این مفصل اعمال نشود، در آن صورت هر دو عضو بایستی عضوهای با نیروی صفر باشند.

مثلاً در خرپای شکل (a) چنانچه نمودار جسم آزاد مفصل A رسم شود (شکل (b))، مشاهده می‌شود که عضوهای AB و AF عضوهای با نیروی صفرند (اگر نمودار جسم آزاد مفصل‌های F یا B را در نظر می‌گرفتیم به این نتیجه نمی‌رسیدیم). به ترتیبی مشابه اگر نمودار جسم آزاد مفصل D در نظر گرفته شود (شکل (c))، دیده می‌شود که DC و DE عضوهای با نیروی صفرند. بنابراین بار وارد بر خرپا فقط توسط پنج عضو خرپای شکل (d) تحمل می‌شود.

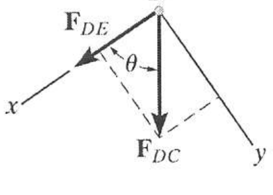


(a)



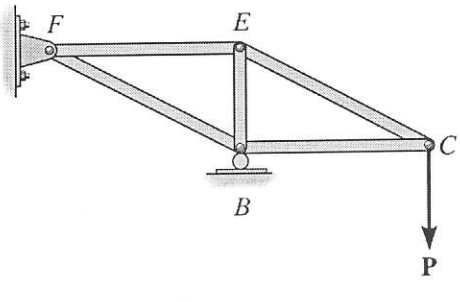
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\ F_{AB} = 0$
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ F_{AF} = 0$

(b)



$+\searrow \Sigma F_y = 0;\ F_{DC}\sin\theta = 0;\quad F_{DC} = 0$ زیرا $\sin\theta \neq 0$
$+\swarrow \Sigma F_x = 0;\ F_{DE} + 0 = 0;\quad F_{DE} = 0$

(c)

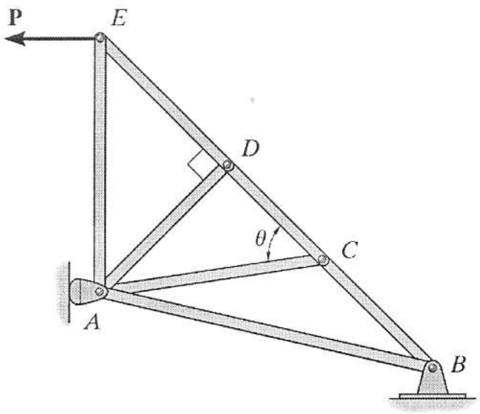


(d)

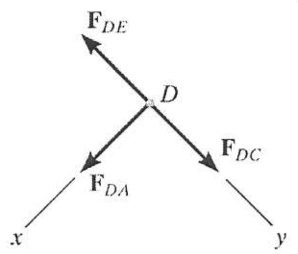
همچنین اگر خرپای شکل (a) را در نظر گرفته، نمودار جسم آزاد مفصل D در شکل (b) رسم شود، با قرار دادن محور y در امتداد عضوهای DC و DE و محور x در امتداد عضو DA، مشاهده می‌شود که DA عضوی با نیروی صفر است. این نکته در مورد عضو CA با در نظر گرفتن مفصل C نیز صادق است (شکل (c)). پس بنابراین به طور کلی:

> هرگاه خرپایی فقط سه عضو داشته باشد، که دو تای آن‌ها هم‌خط باشند، عضو سوم عضوی با نیروی صفر است.

بنابراین خرپای نشان داده شده در شکل (d) برای تحمل بار P معادل خرپای شکل (a) است.



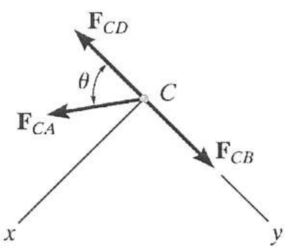
(a)



$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{DA} = 0$

$+\searrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{DC} = F_{DE}$

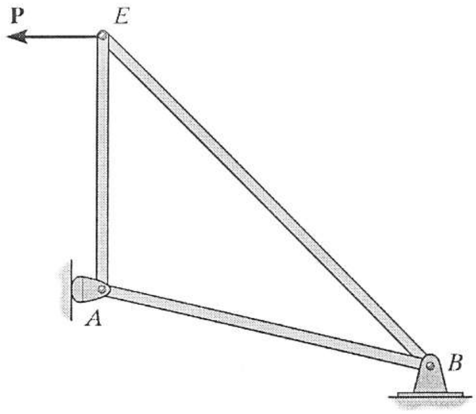
(b)



$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{CA} \sin\theta = 0; \quad F_{CA} = 0$ زیرا $\sin\theta \neq 0;$

$+\searrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CB} = F_{CD}$

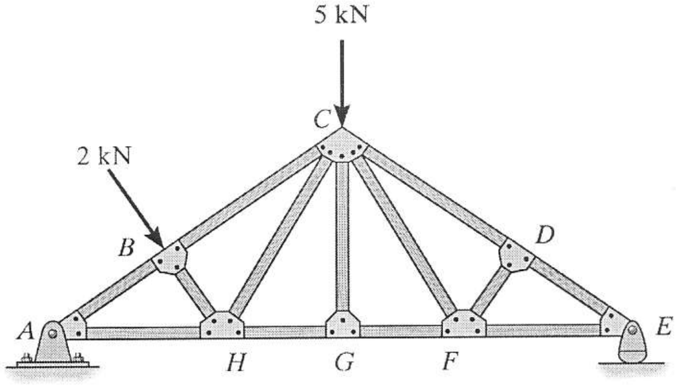
(c)



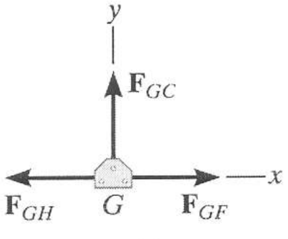
(d)

مثال ۸-۴

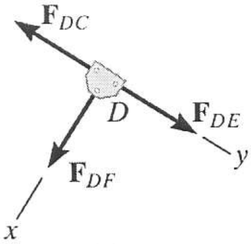
با استفاده از روش مفصل‌ها، همه عضوهای با نیروی صفر خرپای نشان داده شده در شکل (a) را تعیین کنید. همه نقاط گره را مفصل پینی فرض کنید.



(a)



(b)



(c)

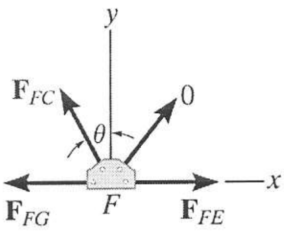
حل :

مفصل‌های G ، D و F دارای سه عضو هستند که دو تای آن‌ها هم‌خط می‌باشند:

مفصل G : شکل (b):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\,; \qquad \Rightarrow \qquad F_{GC} = 0$$

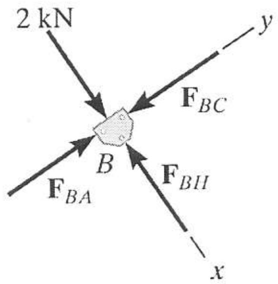
با در نظر گرفتن مفصل C ، که پنج عضو دارد، نمی‌توانستیم نتیجه‌گیری کنیم که GC عضوی با نیروی صفر است. این‌که GC عضوی با نیروی صفر است به این معنی است که بار 5 kN در مفصل C بایستی توسط عضوهای CB، CH، CF و CD تحمل شود.



(d)

مفصل D : شکل (c):

$$+\swarrow \Sigma F_x = 0\,; \qquad \Rightarrow \qquad F_{DF} = 0$$



(e)

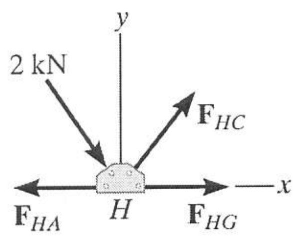
مفصل F : شکل (d):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\,; \quad F_{FC}\cos\theta = 0 \;\; (\theta \neq 90^\circ) \qquad \Rightarrow \qquad F_{FC} = 0$$

تذکر :

چنانچه مفصل B تحلیل شود (شکل (e)) نتیجه می‌شود:

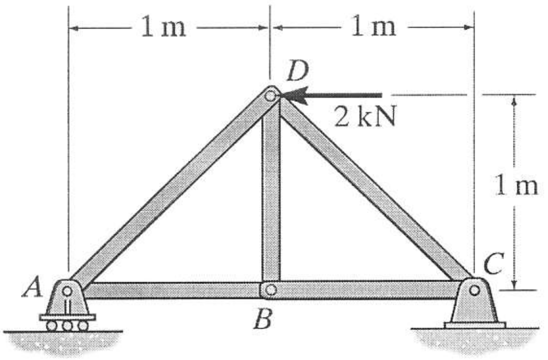
$$+\searrow \Sigma F_x = 0: \;\; 2\text{ kN} - F_{BH} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{BH} = 2\text{ kN (C)}$$



(f)

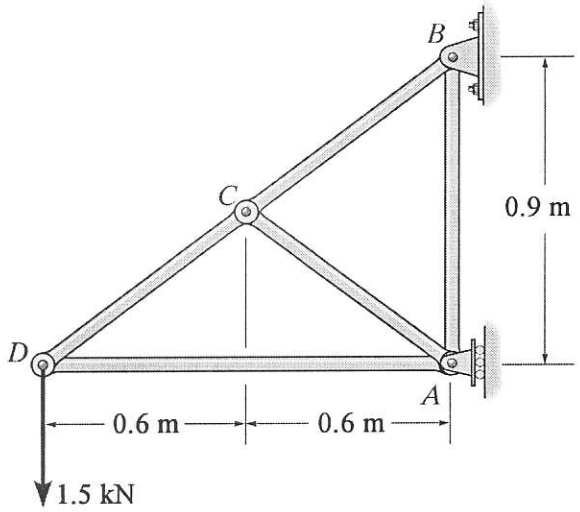
علاوه بر این بایستی F_{HC} در معادله $\Sigma F_y = 0$ صدق کند (شکل (f))، و بنابراین HC عضوی با نیروی صفر نیست.

تمرین ۸-۱



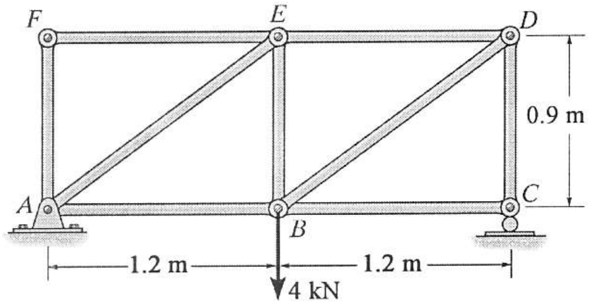
مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای خرپای شکل مقابل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نشان دهید.

تمرین ۸-۲



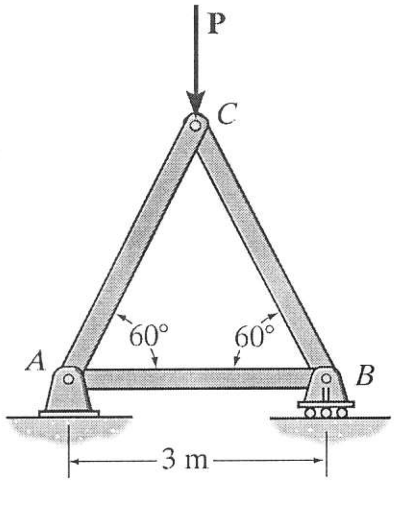
مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای خرپای شکل مقابل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نشان دهید.

تمرین ۸-۳

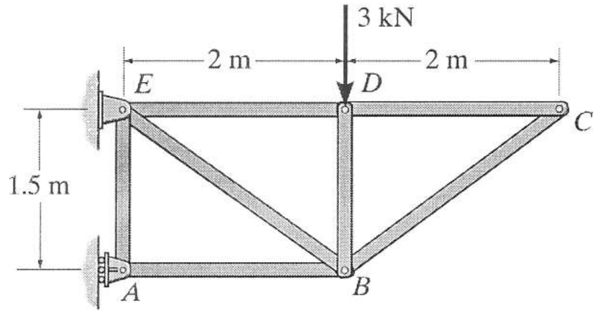


مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای AE و DC شکل مقابل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نشان دهید.

تمرین ۸-۴

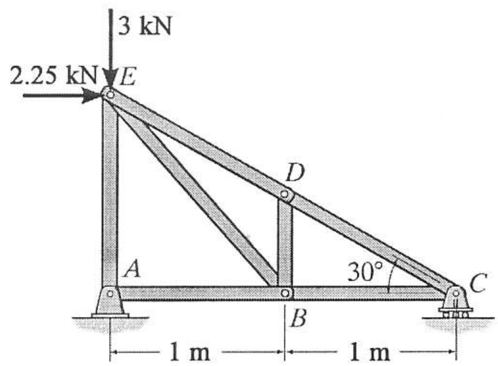


مطلوب است تعیین بیشترین نیروی P که می‌توان بر خرپا وارد کرد، طوری‌که هیچ‌یک از عضوهای خرپا در معرض نیرویی بیشتر از 2 kN در کشش و یا 1,5 kN در فشار قرار نگیرد.



تمرین ۸-۵

عضوهای با نیروی صفر خرپای شکل مقابل را تعیین کنید.



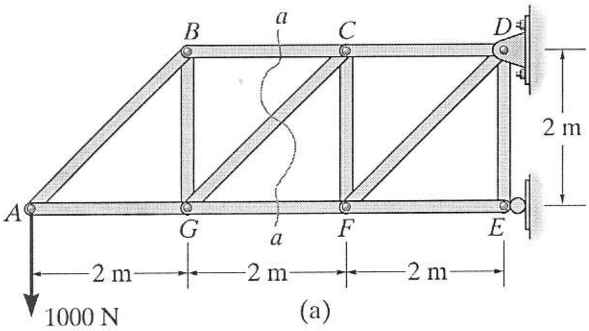
تمرین ۸-۶

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای خرپای شکل مقابل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نشان دهید.

۴-۸ روش مقاطع

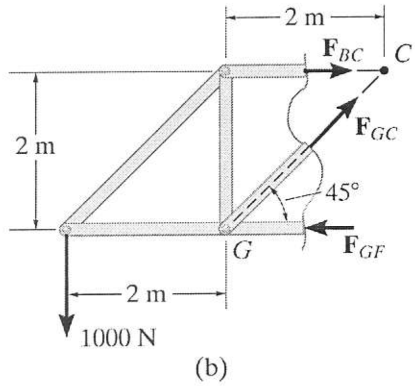
اگر قرار باشد که فقط چند عضو یک خرپا تعیین شوند، می‌توان از روش مقاطع استفاده نمود. این روش مبتنی بر اصل برش است. بر این اساس اگر یک خرپا در تعادل باشد، هر جزء آن نیز در تعادل خواهد بود. به این ترتیب برای تعیین چند عضو یک خرپا می‌توان آن را به طور فرضی به‌گونه‌ای برش داد که آن عضوها بریده شده و نیروهای داخلی آن‌ها در نمودار جسم آزاد هر بخش به صورت نیروهای خارجی نمایان گردند.

> از آن‌جایی‌که در خرپاهای دو بُعدی می‌توان فقط از سه معادله تعادل مستقل استفاده نمود، بایستی برش به گونه‌ای باشد، که بیش از سه عضو خرپا با نیروهای مجهول بریده نشوند.

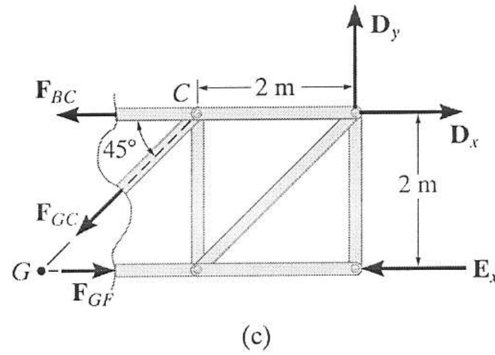


(a)

مثلاً در خرپای شکل (a) اگر تعیین سه عضو GC ، BC و GF مطلوب باشند، آن‌گاه مقطع aa مناسب خواهد بود. شکل‌های (b) و (c) نمودارهای جسم آزاد دو بخش برش خورده را نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که خط اثر هر نیروی عضو بر اساس شکل هندسی خرپا تعیین می شود، زیرا نیرو در هر عضو در امتداد محور آن عضو است. به علاوه نیروهای عضوها در یک بخش خرپا باید با نیروهای متناظر بخش دیگر مساوی و در جهت مخالف آن‌ها باشند (قانون سوم نیوتن).



(b)



(c)

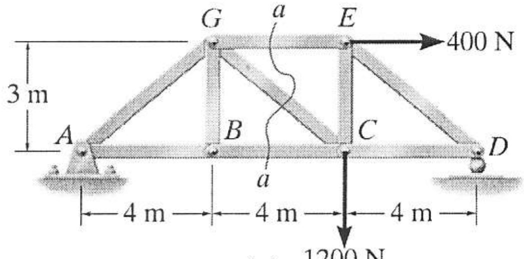
سه نیروی مجهول عضوها، یعنی F_{BC}، F_{GC} و F_{GF} را می توان با استفاده از سه معادله تعادل در مورد نمودار جسم آزاد شکل (b) تعیین نمود. اما اگر نمودار جسم آزاد (c) در نظر گرفته شود، بایستی قبل از آن سه واکنش تکیه‌گاهی D_x، D_y و E_x را از سه معادله تعادل در کل خرپا به‌دست آورده و سپس سه نیروی مجهول عضوها را از سه معادله تعادل نمودار جسم آزاد (c) تعیین نمود.

در هنگام کاربرد معادله‌های تعادل باید توجه داشت تا جواب مستقیم برای هر یک از مجهول‌ها به‌دست آید و نیازی به حل دستگاه معادلات نباشد. مثلاً با توجه به شکل (b) می‌توان با جمع بستن گشتاورها حول نقطه C، جواب مستقیمی برای F_{GF} به‌دست آورد، زیرا گشتاور نیروهای F_{BC} و F_{GC} حول نقطه C صفر می‌باشند. همچنین F_{BC} را می‌توان مستقیماً با جمع بستن گشتاورها حول نقطه G تعیین نمود و بالاخره F_{GC} را مستقیماً با جمع بستن نیروها در امتداد عمودی به‌دست آورد، زیرا F_{GF} و F_{BC} مؤلفه عمودی ندارند.

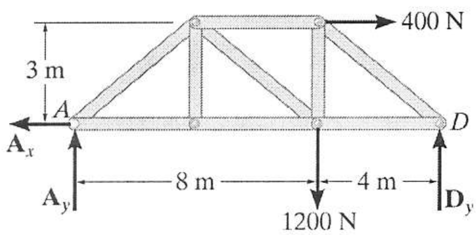
- در خیلی از موارد می‌توان جهت صحیح نیروی اعضای مجهول را با بررسی و بدون محاسبه تعیین کرد. مثلاً F_{BC} در شکل (b) صفحه قبل به صورت کششی نشان داده شده است، زیرا تعادل گشتاورها حول نقطه G مستلزم آن است که F_{BC} گشتاوری مخالف جهت گشتاور نیروی 1000 N ایجاد کند. همچنین F_{GC} کششی است، زیرا مؤلفه عمودی آن باید با نیروی رو به پایین 1000 N مقابله کند. در موارد پیچیده‌تر می‌توان یک جهت برای نیروی مجهول فرض نمود. پس از حل معادله‌های تعادل می‌توان درستی جهت فرض شده را بر اساس نتایج عددی بررسی نمود. جواب مثبت نشانه صحیح بودن فرض است و جواب منفی به معنی آن است که باید جهت نشان داده شده روی نمودار جسم آزاد را معکوس نمود.
- در این حال فرض می‌شود که نیروهای مجهول اعضای وارد بر مفصل، همه کششی‌اند. در این صورت جواب عددی معادله‌های تعادل برای عضوهای کششی مثبت و برای عضوهای فشاری منفی خواهد بود.

مثال ۸-۵

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای GC ،GE و BC از خرپایی مطابق شکل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نیز مشخص کنید.



(a)



(b)

حل:

مقطع aa از آن رو انتخاب شده است که سه مجهول مورد نظر را قطع می‌کند. برای استفاده از روش مقاطع بایستی ابتدا واکنشها در تکیه‌گاه A یا D معلوم باشند. با توجه به نمودار جسم آزاد (b):

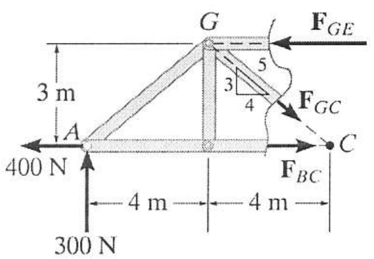
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 : 400 - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 400\ \text{N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0 : \ -1200 \cdot 8 - 400 \cdot 3 + D_y \cdot 12 = 0$$

$$\Rightarrow \quad D_y = 900\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 ;\ A_y - 1200 + 900 = 0 \ \Rightarrow \ A_y = 300\ \text{N}$$

برای تحلیل از نمودار جسم آزاد از قسمت چپ خرپای مقطع خورده (شکل (c)) استفاده می‌شود. شرط $\Sigma M_C = 0$ ایجاب می‌کند که F_{GE} فشاری، شرط $\Sigma F_y = 0$ ایجاب می کند که F_{GC} کششی و شرط $\Sigma M_G = 0$ ایجاب می‌کند که F_{BC} نیز کششی باشد.



(c)

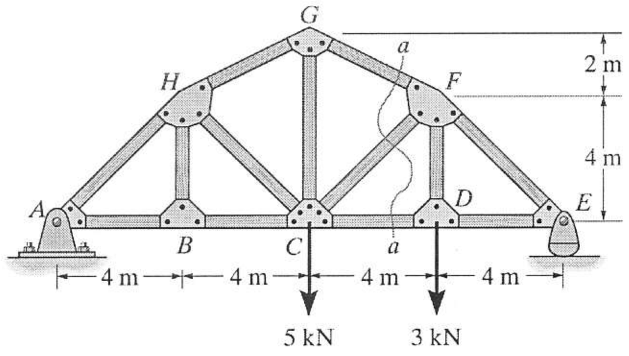
$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0 : \quad F_{BC} \cdot 3 - 400 \cdot 3 - 300 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 800\ \text{N (T)}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0 : \quad F_{GE} \cdot 3 - 300 \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GE} = 800\ \text{N(C)}$$

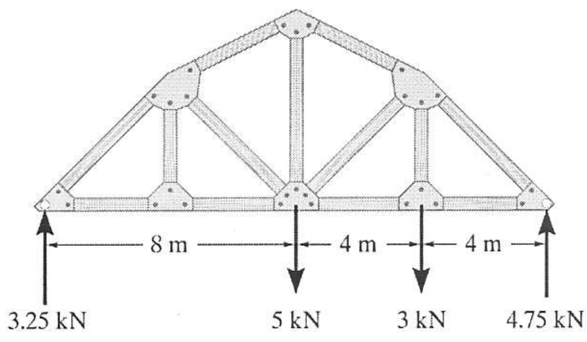
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 : \quad 300 - \left(\frac{3}{5}\right) F_{GC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GC} = 500\ \text{N(T)}$$

مثال ۸-۶

نیروی عضو CF از خرپای نشان داده شده در شکل (a) و همچنین کششی یا فشاری بودن آن‌را تعیین کنید. همه نقاط گره را مفصل پینی فرض کنید.



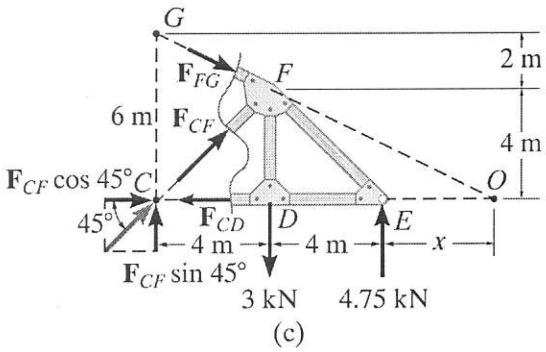
(a)



(b)

حل:

مقطع aa از آن رو انتخاب شده است که نیروی داخلی عضو مجهول CF به صورت نیروی خارجی در نمودار جسم آزاد هر دو قسمت بریده شده نمایان می‌شود. اما در ابتدا لازم است عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی هر قسمت برش خورده‌ای را که می‌خواهیم آن را تحلیل کنیم به‌دست آوریم. شکل (b) نتایج به‌دست آمده برای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نمودار جسم آزاد کل خرپا نشان داده شده است.



(c)

نمودار جسم آزاد:

قسمت برش خورده سمت راست خرپا برای تحلیل آسان‌تر است. شکل (c) نمودار جسم آزاد این قسمت را نشان می‌دهد. سه مجهول وجود دارد F_{FG} ، F_{CF} و F_{CD} .

معادلات تعادل:

برای این‌که دو مجهول F_{FG} و F_{CD} در معادله تعادل ظاهر نشوند، باید از محل تلاقی راستای این دو نیرو، یعنی نقطه O گشتاور گیری نمود. فاصله نقطه O نسبت به نقطه E را می‌توان از تناسب مثلث‌ها تعیین نمود:

$$\frac{4}{4+x}=\frac{6}{8+x} \quad \Rightarrow \quad x=4\ \text{m}$$

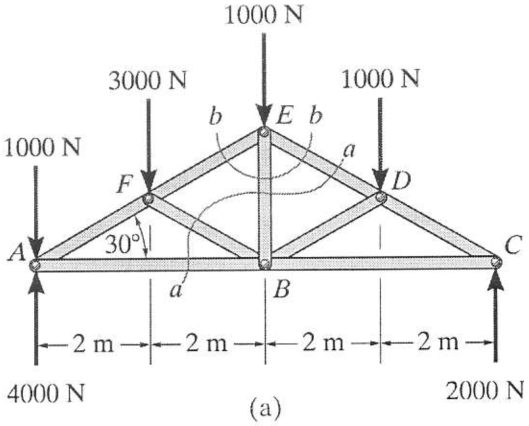
بنابراین از O تا D باید 8 m فاصله باشد. راهی آسان برای تعیین گشتاور نیروی F_{CF} حول نقطه O لغزاندن این نیرو به نقطه C و سپس تجزیه آن به دو مؤلفه افقی و عمودی است. در نتیجه:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0: \quad -(F_{CF}\sin 45°\ \text{kN}\cdot 12\ \text{m}) + (3\ \text{kN}\cdot 8\ \text{m}) - (4{,}75\ \text{kN}\cdot 4\ \text{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CF} = 0{,}589\ \text{kN (C)}$$

مثال ۸-۷

نیروی عضو EB از خرپای نشان داده شده در شکل (a) و همچنین کششی یا فشاری بودن آن‌را تعیین کنید.



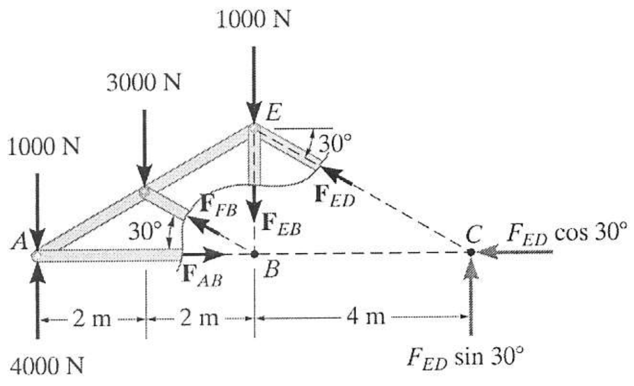
(a)

حل:

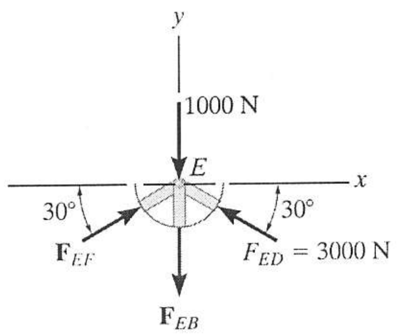
همان‌طورکه در شکل (a) مشاهده می‌شود با استفاده از روش مقاطع، هر مقطع فرضی که از عضو EB بگذرد، بیش از دو عضو مجهول را قطع خواهد کرد.

نمودار جسم آزاد:

مقطع aa از چهار عضو ED، EB، FB و AB می‌گذرد. چنانچه نمودار جسم آزاد قسمت سمت چپ این مقطع در شکل (b) نظر گرفته شود، می‌توان با جمع بستن گشتاورها حول نقطه B به‌منظور حذف سه نیروی مجهول دیگر، نیروی F_{ED} را به‌دست آورد، اما نمی‌توان با استفاده از دو معادله تعادل باقی‌مانده F_{EB} را تعیین نمود. یکی از راه‌های ممکن برای به‌دست آوردن F_{EB} این است که ابتدا F_{ED} را از طریق مقطع aa تعیین کنیم و سپس با نتیجه به‌دست آمده برای F_{ED} یک مقطع دیگر مطابق شکل (c) بزنیم. این مقطع bb همان نمودار جسم آزاد مفصل E است.



(b)



(c)

معادلات تعادل:

به‌منظور تعیین گشتاور نیروی F_{ED} حول نقطه B در شکل (b) از اصل انتقال‌پذیری نیرو استفاده کرده و نیروی F_{ED} را به نقطه C لغزانده و سپس آن‌را به دو مؤلفه افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم. بنابراین:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \quad (1000\ \text{N} \cdot 4\ \text{m}) + (3000\ \text{N} \cdot 2\ \text{m}) - (4000\ \text{N} \cdot 4\ \text{m}) + (F_{ED} \sin 30^\circ \cdot 4\ \text{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{ED} = 3000\ \text{N (C)}$$

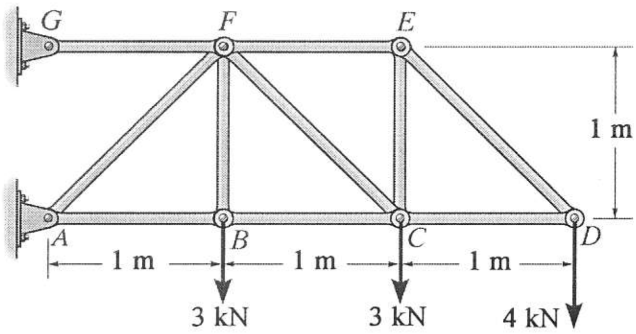
اکنون با در نظر گرفتن نمودار جسم آزاد مقطع bb در شکل (c):

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad F_{EF} \cos 30^\circ - 3000 \cos 30^\circ\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} = 3000\ \text{N (C)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2(3000 \sin 30^\circ\ \text{N}) - 1000\ \text{N} - F_{EB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EB} = 2000\ \text{N (T)}$$

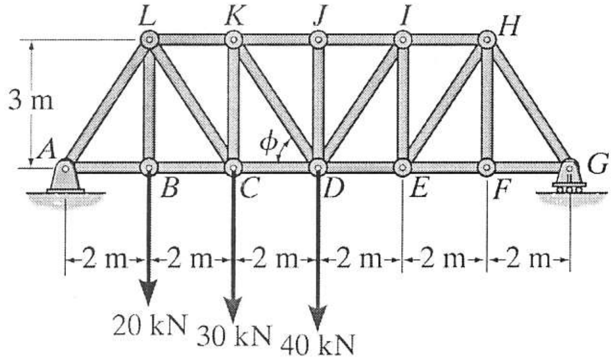
تمرین ۸-۷

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای FC ، FE و BC از خرپایی مطابق شکل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نیز مشخص کنید.



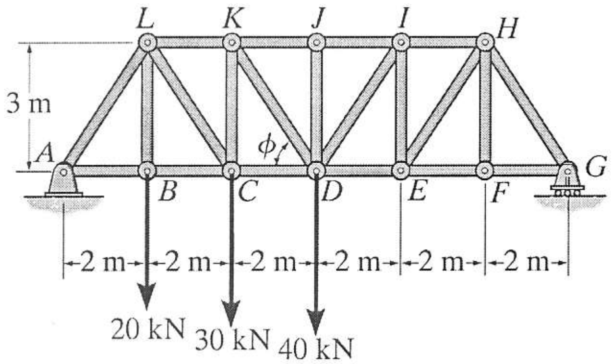
تمرین ۸-۸

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای LK ، KC و CD از خرپایی مطابق شکل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نیز مشخص کنید.



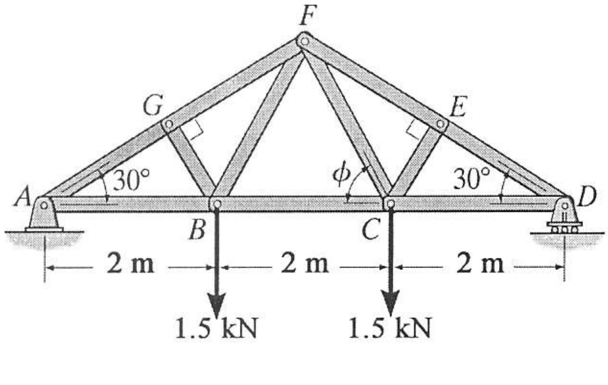
تمرین ۸-۹

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای KJ ، KD و CD از خرپایی مطابق شکل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نیز مشخص کنید.



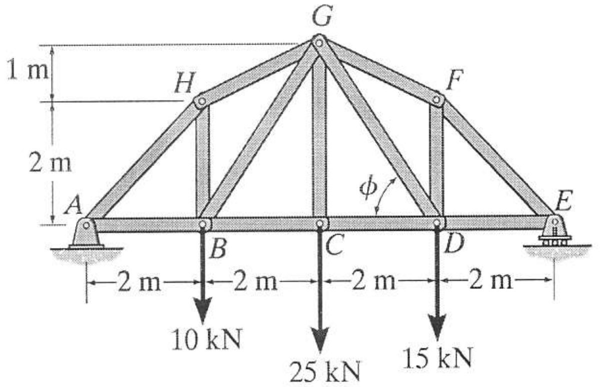
تمرین ۸-۱۰

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای EF ، CF و BC از خرپایی مطابق شکل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نیز مشخص کنید.



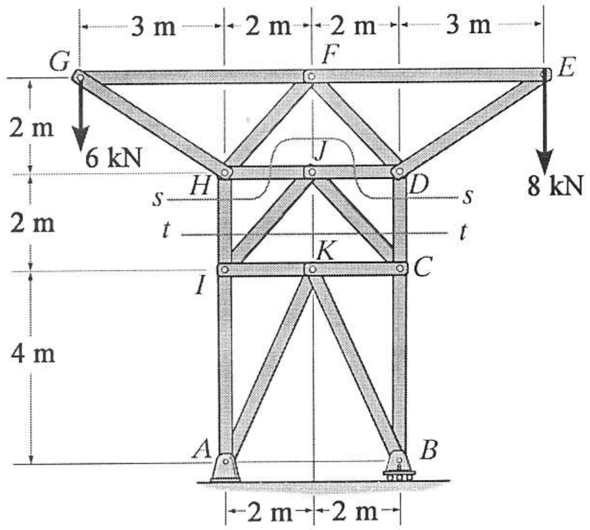
تمرین ۸-۱۱

مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای GF ، GD و CD از خرپایی مطابق شکل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نیز مشخص کنید.



تمرین ۸-۱۲

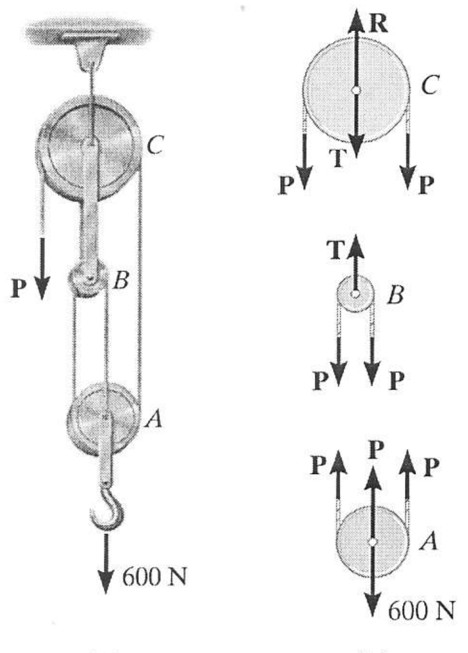
مطلوب است تعیین نیرو در عضوهای HI ، DC و JI از خرپایی مطابق شکل. کششی یا فشاری بودن عضوها را نیز مشخص کنید.



۸-۵ قاب‌ها و ماشین‌ها

قاب‌ها و ماشین‌ها سازه‌هایی هستند، که حداقل شامل یک عضو چند نیرویی می‌باشند، یعنی عضوی که تحت اثر سه نیرو یا بیشتر قرار دارد. این نیروها معمولاً در امتداد عضو نیستند و مقدار و جهت آن‌ها نامعلوم است و با دو مؤلفه مجهول نشان داده می‌شوند.

قاب‌ها را برای تحمل بار طراحی می‌کنند و معمولاً ساکن‌اند. **ماشین‌ها** سازه‌هایی هستند، که نیروها و گشتاورهای ورودی را به نیروها و گشتاورهای خروجی تبدیل می‌کنند و معمولاً قطعات متحرک دارند.



(a) (b)

مثال ۸-۸

مطلوب است نیروی کشش در کابل‌ها و نیز نیروی لازم P برای نگه‌داشتن بار 600 N با استفاده از قرقره‌های نشان داده شده در شکل (a).

حل:

نمودار جسم آزاد:

نمودار جسم آزاد هر سه قرقره شامل پین آن و بخشی از کابل اتصال در شکل (b) نشان داده شده است. چون کابل پیوسته است، کشش ثابت P در سرتا سر طول آن وجود دارد. میله‌ای که قرقره‌های B و C را به هم متصل می‌کند، عضوی دو نیرویی است و بنابراین نیروی مجهول کششی T به آن اعمال می‌شود.

توجه به این نکته ضروری است که هنگام رسم نمودارهای جسم آزاد هر قرقره بایستی اصل کنش و واکنش را در مورد نیروهای P و T رعایت نمود.

معادلات تعادل:

سه مجهول P، T و R با استفاده از تعادل نیروهای هر قرقره در امتداد محور y به‌دست می‌آیند:

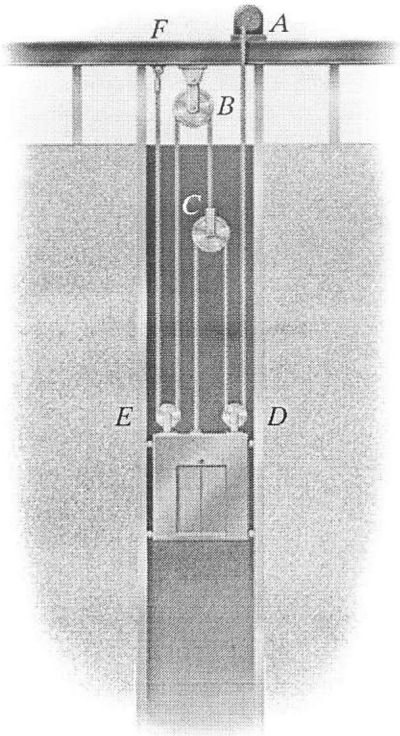
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 3P - 600\text{ N} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 200\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad T - 2P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 400\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R - 2P - T = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 800\text{ N}$$

مثال ۸-۹

کابین آسانسوری به جرم 500 kg مطابق شکل (a) توسط موتور A و به کمک مکانیزم قرقره‌های نشان داده شده به بالا کشیده می‌شود. با فرض آن‌که کابین آسانسور با سرعت ثابت حرکت کند، مطلوب است تعیین نیروی ایجاد شده در دو کابل. از جرم کابل‌ها و قرقره‌ها می‌توان صرفنظر نمود.

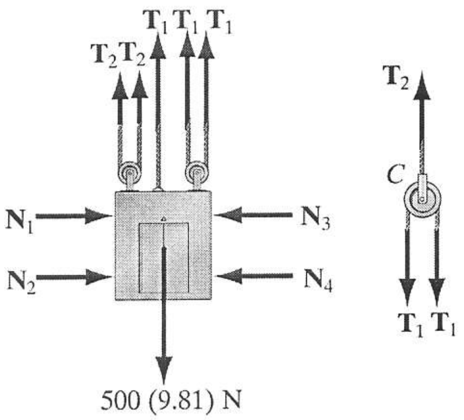


(a)

حل:

نمودار جسم آزاد:

این مسئله را می‌توان با توجه به نمودار جسم آزاد کابین آسانسور و قرقره C، که در شکل (b) نشان داده شده‌اند تحلیل نمود. در این شکل نیروهای کششی ایجاد شده در کابل‌ها با T_1 و T_2 نامگذاری شده‌اند.



(b)

معادلات تعادل:

برای قرقره C:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad T_2 - 2T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1 \qquad (1)$$

برای کابین آسانسور:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 3T_1 + 2T_2 - 50 \cdot 9{,}81\ \text{N} = 0 \qquad (2)$$

با قرار دادن معادله (1) در معادله (2) نتیجه می‌شود:

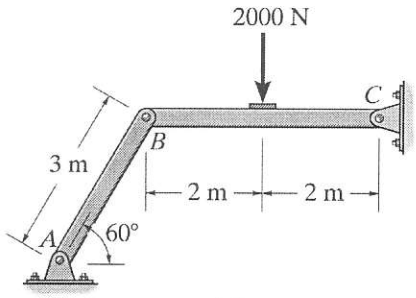
$$3T_1 + 2(2T_1) - 50 \cdot 9{,}81\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 700{,}71\ \text{N}$$

و بالاخره با قرار دادن این نتیجه در معادله (1) خواهیم داشت:

$$T_2 = 2 \cdot 700{,}71\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 1401{,}42\ \text{N}$$

مثال ۸-۱۰

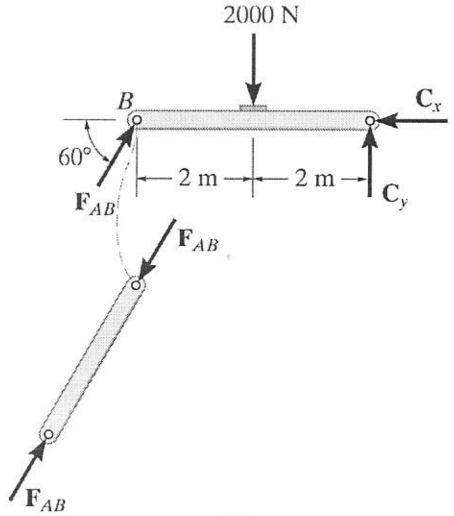
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی نیرویی که پین C به عضو BC از قابی مطابق شکل (a) اعمال می‌کند.



(a)

راه حل ۱:

همان‌طور که مشاهده می‌شود AB عضوی دو نیرویی است. نمودارهای جسم آزاد در شکل (b) نشان داده شده‌اند.



(b)

معادلات تعادل:

از سه معادله تعادل عضو BC می‌توان سه مجهول را به‌دست آورد:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \ (200\ \text{N}\cdot 2\ \text{m}) - (F_{AB}\sin 60^\circ \cdot 4\ \text{m}) = 0$$

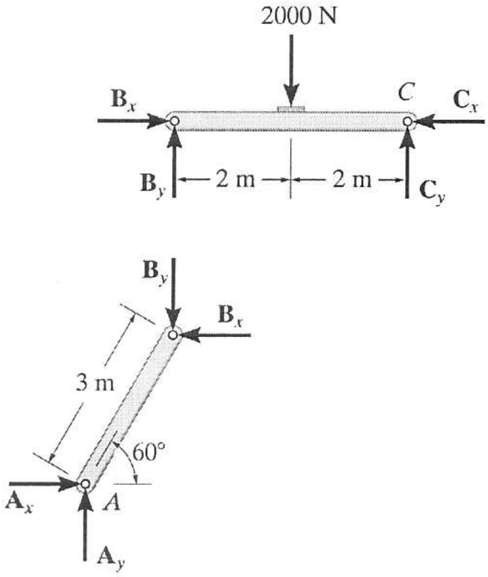
$$\Rightarrow \quad F_{AB} = 1154{,}7\ \text{N}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \ 1154{,}7\cos 60^\circ - C_x = 0 \ \Rightarrow \ C_x = 577\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ 1154{,}7\sin 60^\circ - 2000\ \text{N} + C_y = 0 \Rightarrow C_y = 1000\ \text{N}$$

راه حل ۲:

چنانچه دو نیرویی بودن عضو AB تشخیص داده نشود، حل مسئله با زحمت بیشتری صورت می‌گیرد. نمودارهای جسم آزاد در این حالت در شکل (c) نشان داده شده‌اند.



(c)

معادلات تعادل:

سه معادله تعادل برای هر عضو، جمعاً شش معادله خواهیم داشت:

عضو AB :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \ (B_x \cdot 3\sin 60^\circ\ \text{m}) - (B_y \cdot 3\cos 60^\circ\ \text{m}) = 0 \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \ A_x - B_x = 0 \qquad (2)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ A_y - B_y = 0 \qquad (3)$$

عضو BC :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \ (200\ \text{N}\cdot 2\ \text{m}) - (B_y \cdot 4\ \text{m}) = 0 \qquad (4)$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \ B_x - C_x = 0 \qquad (5)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ B_y - 2000\ \text{N} + C_y = 0 \qquad (3)$$

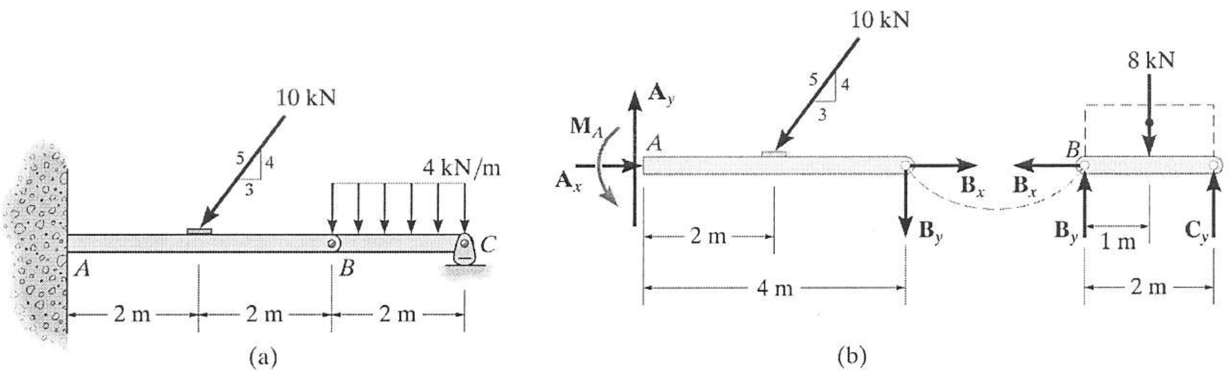
از ۶ معادله فوق می‌توان ۶ مجهول از جمله C_x و C_y را به‌دست آورد:

$$A_x = B_x = C_x = 577\ \text{N} \quad ; \quad A_y = B_y = 1000\ \text{N} \quad ; \quad C_y = 1000\ \text{N}$$

مقایسه راه‌حل ۱ و راه‌حل ۲ نشان می‌دهد که راه‌حل ۱ ساده‌تر است. با شناسایی عضوهای دو نیرویی قبل از حل مسئله می‌توان زحمت حل مسائل را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد.

مثال ۸-۱۱

مجموعه شکل (a) یک تیر مرکب را نشان‌می‌دهد، که در نقطه B اتصال پینی دارد. مطلوب است تعیین مؤلفه‌های عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌های تیر. از وزن و ضخامت تیر می‌توان صرفنظر نمود.



حل:

نمودار جسم آزاد:

اگر نمودار جسم آزاد کل تیر ABC را در نظر بگیریم، سه عکس‌العمل مجهول در A و یکی در C وجود دارند، که با سه معادله تعادل برای کل مجموعه قابل حل نیستند. بنابراین برای حل این مسئله باید مجموعه را به دو قسمت تقسیم نمود. در شکل (b) نمودار جسم آزاد این دو قسمت نشان داده شده‌اند.

معادلات تعادل :

قسمت BC :

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \ -B_x = 0$ $\qquad B_x = 0$

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \ -(8\ \text{kN}\cdot 1\ \text{m}) + (C_y \cdot 2\ \text{m}) = 0$ $\qquad C_y = 4\ \text{kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ B_y - 8\ \text{kN} + C_y = 0$ $\qquad B_y = 4\ \text{kN}$

قسمت AB :

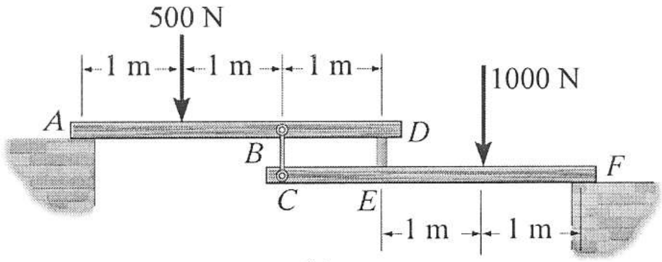
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \ A_x - \frac{3}{5} 10\ \text{kN} + B_x = 0$ $\qquad A_x = 6\ \text{kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \ M_A - (\frac{4}{5} 10\ \text{kN}\cdot 2\ \text{m}) - (B_y \cdot 4\ \text{m}) = 0$ $\qquad M_A = 32\ \text{kNm}$

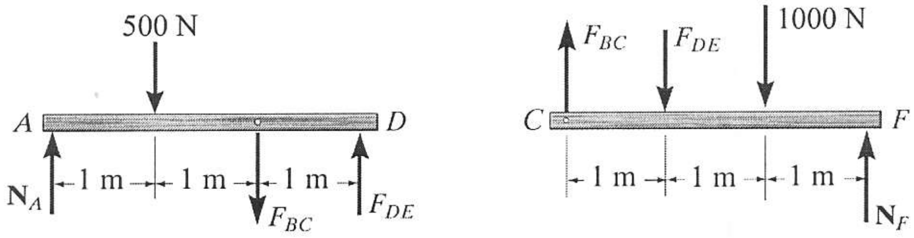
$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ A_y - \frac{4}{5} 10\ \text{kN} - B_y = 0$ $\qquad A_y = 12\ \text{kN}$

مثال ۸-۱۲[1]

مجموعه شکل (a) دو تخته را نشان‌می‌دهد، که توسط کابل BC و فاصله‌گیر DE به هم متصل شده و دو سر آن‌ها بر روی تکیه‌گاه‌های صاف A و F قرار گرفته‌اند. مطلوب است تعیین عکس‌العمل در این تکیه‌گاه‌ها و همچنین نیرویی که در کابل و فاصله‌گیر ایجاد می‌شود.



(a)



(b)

حل:

نمودارهای جسم آزاد:

نمودار جسم آزاد هر تخته در شکل (b) نشان داده شده است. در مورد نیروهای نشان‌داده شده در شکل بایستی قانون سوم نیوتن رعایت گردد.

معادلات تعادل :

برای تخته AD :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \ (F_{DE} \cdot 3\text{ m}) - (F_{BC} \cdot 2\text{ m}) - (500\text{ N} \cdot 1\text{ m}) = 0$$

برای تخته CF :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_F = 0: \ (F_{DE} \cdot 2\text{ m}) - (F_{BC} \cdot 3\text{ m}) + (1000\text{ N} \cdot 1\text{ m}) = 0$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق نتیجه می‌شود:

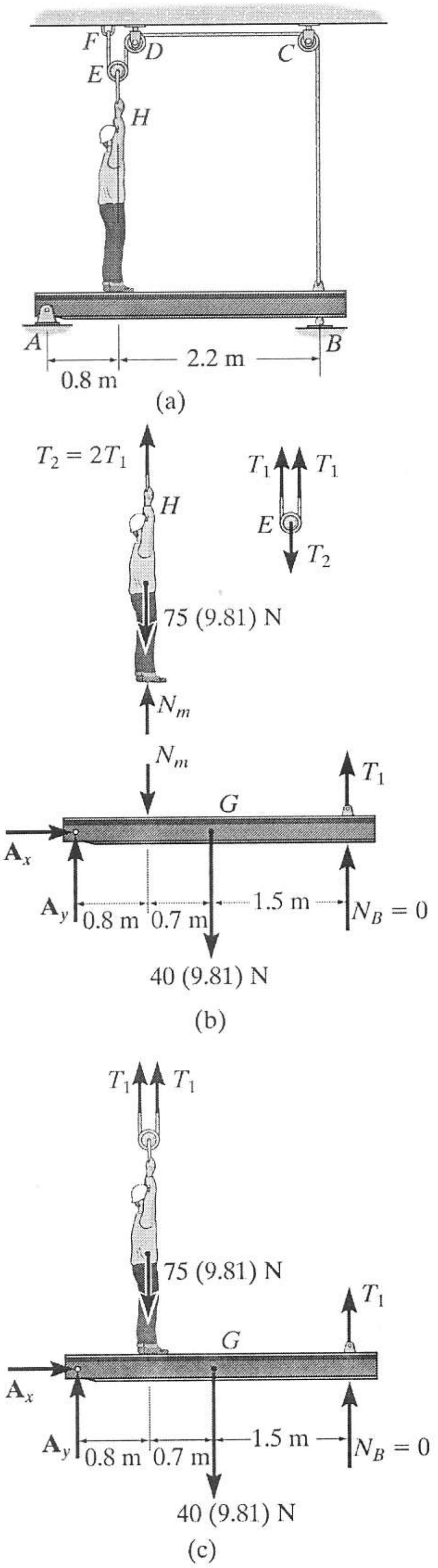
$$F_{DE} = 700\text{ N} \qquad ; \qquad F_{BC} = 800\text{ N}$$

با استفاده از این نتایج در مورد تخته AD خواهیم داشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ N_A + 700\text{ N} - 800\text{ N} - 500\text{ N} = 0 \qquad N_A = 600\text{ N}$$

و برای تخته CF نیز داریم:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ N_F + 800\text{ N} - 700\text{ N} - 1000\text{ N} = 0 \qquad N_F = 900\text{ N}$$



مثال ۸-۱۳

مردی به جرم 75 kg مطابق شکل (a) سعی می‌کند تیر یکنواختی به جرم 40 kg را از تکیه‌گاه غلتکی B جدا کرده و بالا بکشد. مطلوب است تعیین کشش ایجاد شده در کابل متصل به B و عکس‌العمل قائمی که این مرد، در آستانه بلند شدن تیر به تیر وارد می‌کند.

راه حل ۱:

نمودارهای جسم آزاد:

نیروی کشش در کابل متصل به B را T_1 می‌نامیم. نمودارهای جسم آزاد قرقره E، مرد و تیر در شکل (b) نشان داده شده است. تیر با غلتک تماس ندارد و در نتیجه $N_B = 0$ است. در ترسیم نمودارها باید قانون سوم نیوتن رعایت گردد.

معادلات تعادل:

با استفاده از نمودار جسم آزاد قرقره E داریم:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2T_1 - T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1 \qquad (1)$$

با این نتیجه و نمودار جسم آزاد مرد نتیجه می‌شود:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_m + 2T_1 - (75 \cdot 9{,}81)\ \text{N} = 0 \qquad (2)$$

با جمع گشتاورها حول نقطه A بر روی تیر نتیجه می‌شود:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (T_1 \cdot 3\ \text{m}) - (N_m \cdot 0{,}8\ \text{m}) - (40 \cdot 9{,}81\ \text{N} \cdot 1{,}5\ \text{m}) = 0 \qquad (3)$$

با حل دستگاه معادلات (2) و (3) بر حسب T_1 و N_m و سپس با استفاده از معادله (1) برای تعیین T_2 نتیجه می‌شود:

$$T_1 = 256\ \text{N} \quad : \quad N_m = 224\ \text{N} \quad ; \quad T_2 = 512\ \text{N}$$

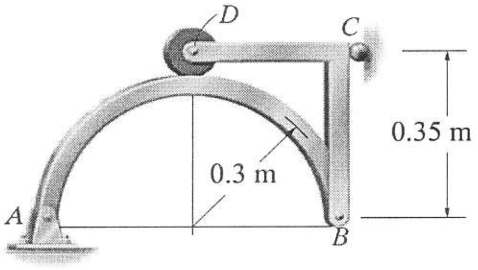
راه حل ۲:

چنانچه تیر، مرد و قرقره E به صورت یک مجموعه واحد در نظر گرفته شود، می‌توان T_1 را مستقیماً به‌دست آورد. نمودار جسم آزاد این حالت در شکل (c) نشان داده شده است. در نتیجه:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (2T_1 \cdot 0{,}8\ \text{m}) - (75 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8\ \text{m}) - (40 \cdot 9{,}81\ \text{N} \cdot 1{,}5\ \text{m}) + (T_1 \cdot 3\ \text{m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 256\ \text{N}$$

با این نتیجه می‌توان از معادله‌های (1) و (2) برای تعیین N_m و T_2 استفاده نمود.

مثال ۸-۱۴



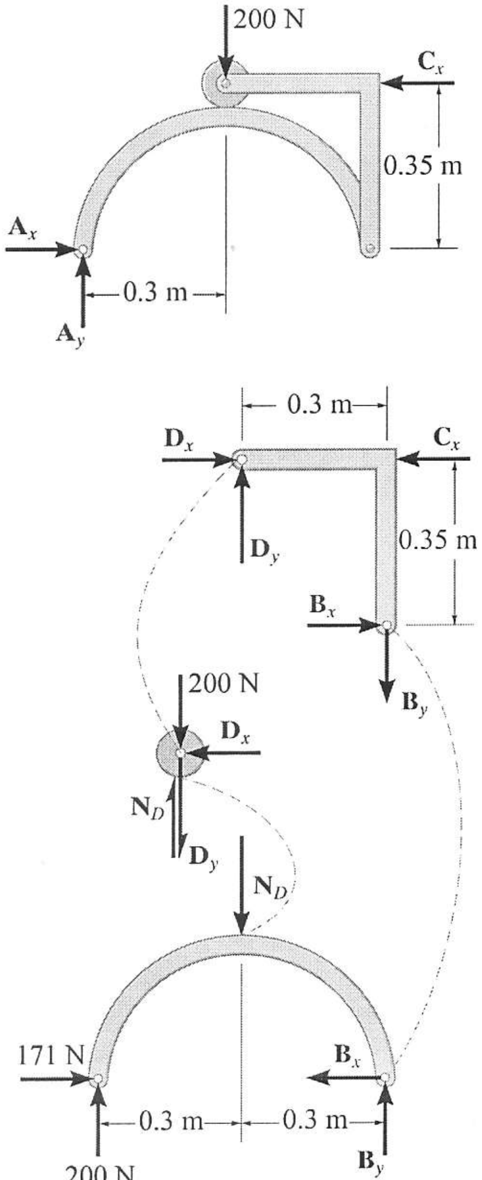
(a)

دیسک صافی به وزن 200 N در یک قابی مطابق شکل (a) در نقطه D اتصال پینی دارد. با چشم‌پوشی از وزن عضوهای دیگر، مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل در پین‌های B و D .

حل :

نمودارهای جسم آزاد:

نمودارهای جسم آزاد کل قاب و هر یک از عضوهای آن در شکل (b) نشان داده شده‌اند.



(b)

معادلات تعادل :

هشت مجهول این مسئله را می‌توان با استفاده از هشت معادله تعادل در مورد هر سه عضو — سه معادله در مورد عضو AB، سه معادله در مورد عضو BCD و دو معادله در مورد دیسک- به‌دست آورد (تعادل گشتاورها برای دیسک نیز خودبه‌خود برقرار است). برای این کار باید دستگاه معادلات چند مجهولی به‌دست آمده را حل نمود. جهت اجتناب از این کار بهتر است ابتدا سه واکنش تکیه‌گاهی قاب را تعیین کرده و سپس با نتایج به‌دست آمده پنج معادله تعادل باقیمانده را در مورد دو عضو دیگر به‌کار ببریم.

کل قاب:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -(200 \cdot 0{,}3\ \text{m}) + (C_x \cdot 0{,}35\ \text{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_x = 171\ \text{N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad A_x - 171\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 171\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 200\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 200\ \text{N}$$

عضو AB :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad 171\ \text{N} - B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 171\ \text{N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \quad -(200 \cdot 0{,}6\ \text{m}) + (N_D \cdot 0{,}3\ \text{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_D = 400\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 200\ \text{N} - 400\ \text{N} + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 200\ \text{N}$$

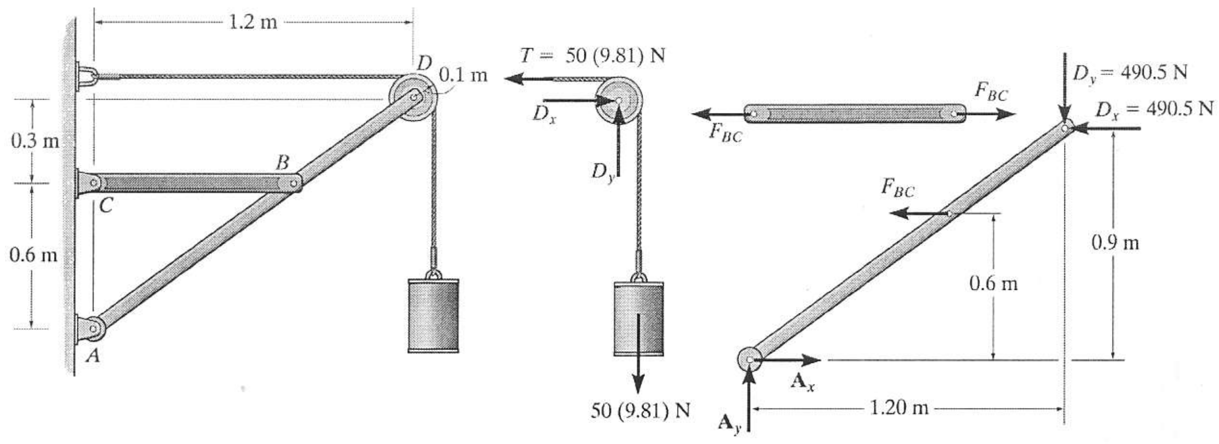
دیسک :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad D_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 400\ \text{N} - 200\ \text{N} - D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 200\ \text{N}$$

مثال ۸-۱۵

قابی مطابق شکل (a) داده شده است. از طریق کابل عبور کرده از قرقره صاف D یک وزنه استوانه‌ای به جرم 50 kg آویزان است. مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل در تکیه‌گاه A و نیرو در عضو BC .



(a) (b)

حل:

نمودارهای جسم آزاد:

در شکل (b) نمودارهای جسم آزاد قرقره D به همراه وزنه و بخشی از طناب، عضو دو نیرویی BC و همچنین عضو ABD نشان داده شده‌اند.

معادلات تعادل :

محاسبات را با تحلیل تعادل قرقره آغاز می‌کنیم. از معادله تعادل گشتاور حول محور قرقره $T=50\cdot 9{,}81\ N$ به‌دست می‌آید و در نتیجه:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad D_x - 50\cdot 9{,}81\,N = 0 \quad \Rightarrow \qquad D_x = 490{,}5\ N$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad D_y - 50\cdot 9{,}81\,N = 0 \quad \Rightarrow \qquad D_y = 490{,}5\ N$$

با استفاده از نتایج فوق می‌توان به‌کمک تعادل گشتاورها حول نقطه A در عضو ABD، نیروی F_{BC} را تعیین نمود.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (F_{BC}\cdot 0{,}6\ m) + (490{,}5\ N\cdot 0{,}9\ m) - (490{,}5\ N\cdot 1{,}2\ m) = 0$$

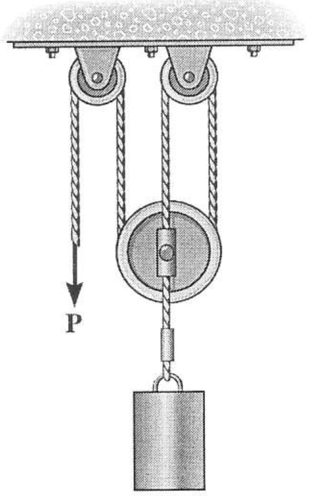
$$\Rightarrow \qquad F_{BC} = 245{,}25\ N$$

حال می‌توان از تعادل نیروها در عضو ABD، نیروهای A_x و A_y را تعیین نمود.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x - 245{,}25\ N - 490{,}5\ N = 0 \qquad A_x = 736\ N$$

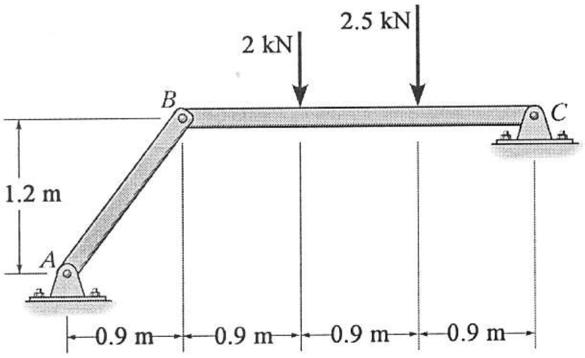
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 490{,}5\ N = 0 \qquad A_y = 490{,}5\ N$$

تمرین ۸-۱۳



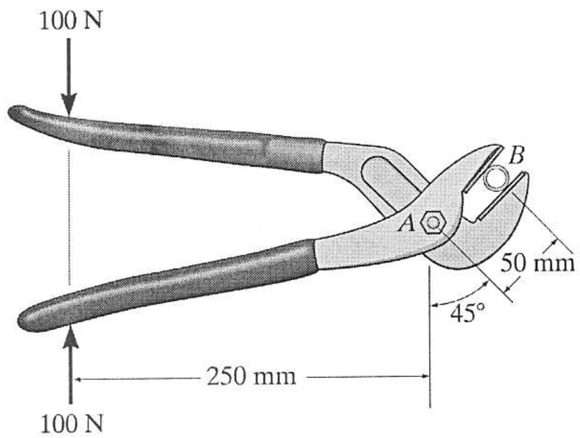
مطلوب است تعیین نیروی لازم P برای حفظ تعادل وزنه 300 N در شکل مقابل.

تمرین ۸-۱۴



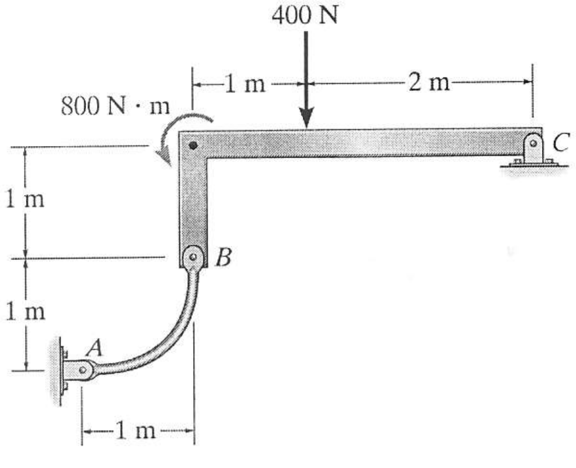
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی واکنش در تکیه‌گاه C.

تمرین ۸-۱۵

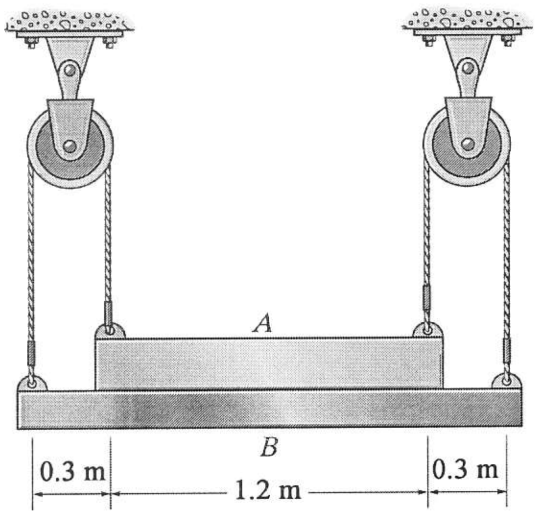


اگر بر دسته‌های یک انبردست مطابق شکل نیرویی به اندازه 100 N وارد شود، چه نیروی گیرشی به لوله صاف B اعمال می‌شود و نیز چه نیروی برآیندی به پین A اثر خواهد کرد؟

تمرین ۸-۱۶

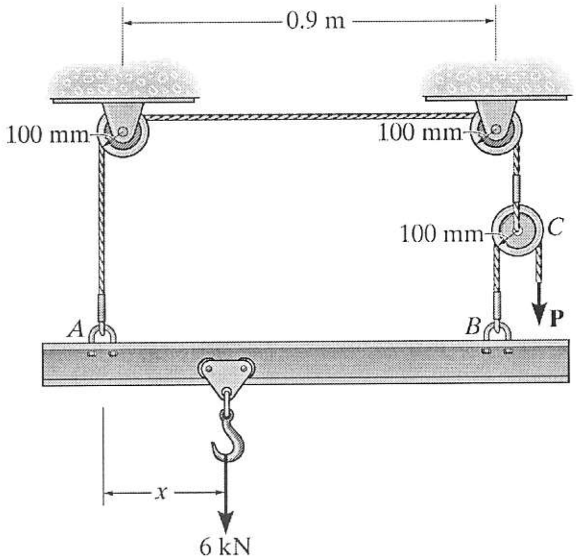


مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و عمودی واکنش در تکیه‌گاه C .



تمرین ۸-۱۷

مطلوب است تعیین نیروی قائمی که ورق A به وزن 500 N بر ورق B به وزن 150 N اعمال می‌کند.



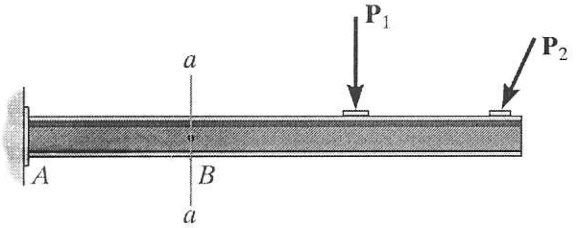
تمرین ۸-۱۸

مطلوب است تعیین نیروی لازم P برای بلند کردن بار. همچنین محل مناسب قلاب، یعنی x را چنان تعیین کنید که تعادل برقرار باشد. از وزن تیر می‌توان صرفنظر نمود.

۹ بارهای داخلی

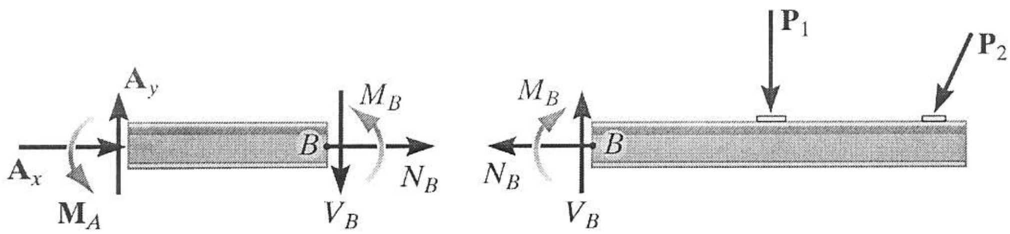
۱-۹ بارهای داخلی در عضوهای سازه‌ای

همان‌طورکه قبلاً ذکر شد، در اثر اعمال بار خارجی بر اجسام، در درون آن‌ها بارهای داخلی به‌وجود می‌آیند. این بارهای داخلی در برابر بار خارجی وارد بر آن‌ها مقاومت می‌کنند. بارهای داخلی را می‌توان با استفاده از برش فرضی در مقطع آن جسم تعیین نمود.



(a)

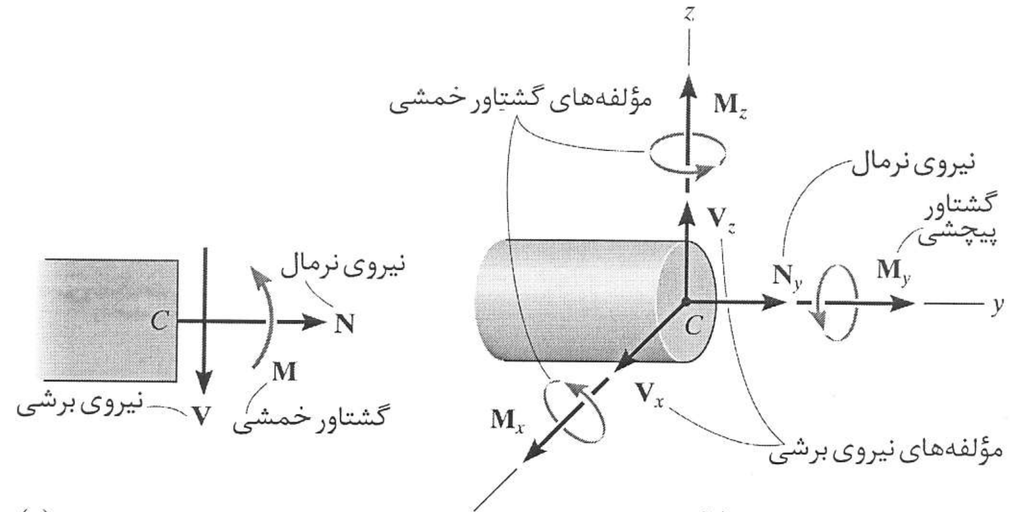
شکل (a) این روش را در مثال یک تیر یکسرگیردار نشان می‌دهد. چنانچه بارهای داخلی مقطع تیر در نقطه B مطرح باشند، بایستی یک مقطع فرضی a–a عمود بر محور تیر زده شود، طوری‌که از نقطه B بگذرد و تیر را به دو قسمت تقسیم کند. بار داخلی وارد بر B در نمودار جسم آزاد هر قسمت بار خارجی محسوب خواهد شد (شکل (b)).



(b)

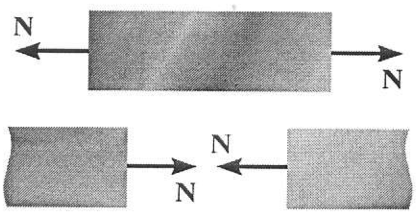
نیرو دو مؤلفه عمود بر سطح N_B (نیروی نرمال) و واقع در سطح V_B (نیروی برشی) و گشتاور نیز دو مؤلفه گشتاور عمود بر سطح (گشتاور پیچشی که در شکل نشان داده نشده است) و گشتاور واقع در سطح (گشتاور خمشی M_B) دارد. مؤلفه‌های نیرو از انتقال نسبی دو قسمت جلوگیری می‌کنند و گشتاورها مانع چرخش نسبی دو قسمت می‌شوند. برای تعیین این نیروها و گشتاورها می‌توان از معادلات تعادل در مورد نمودار جسم آزاد هر قسمت استفاده نمود.

در صفحه بعد شکل (a) حالت دو بُعدی بارهای داخلی را نشان می‌دهد. برای حالت سه بُعدی نیز یک نیروی داخلی برآیند و یک گشتاور کوپل برآیند در مرکز سطح یک مقطع در نظر گرفته می‌شود. مؤلفه‌های z, y, x این بارگذاری‌ها در شکل (b) نشان داده شده‌اند. در این‌جا N_y نیروی نرمال و V_z , V_x مؤلفه‌های نیروی برشی می‌باشند. همچنین M_y گشتاور پیچشی و M_z , M_x مؤلفه‌های گشتاور خمشی‌اند.

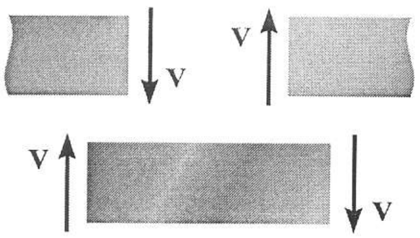


(a) (b)

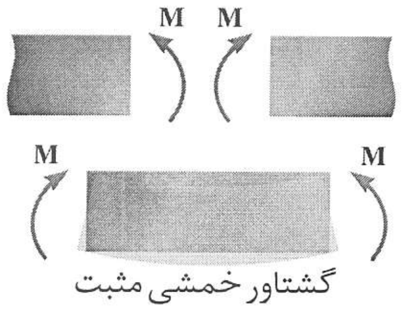
قرارداد علامت:



نیروی نرمال مثبت



نیروی برشی مثبت

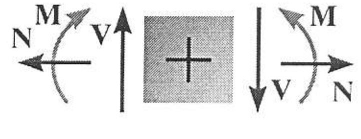


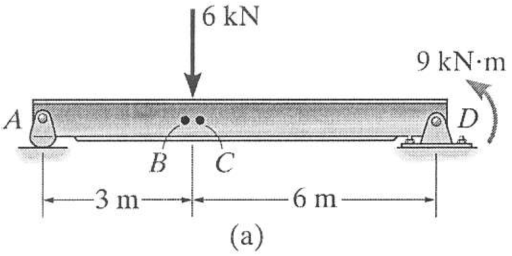
گشتاور خمشی مثبت

برای جهت مثبت بارهای داخلی معمولاً از یک قرارداد استفاده می‌شود. هرچند این قرارداد اختیاری است، اما در اینجا از قراردادی استفاده می‌شود که مرسوم است. در شکل‌های مقابل نیروی نرمال موقعی مثبت در نظر گرفته می‌شود که از سطح به بیرون نشانه رود، یعنی کششی باشد. نیروی برشی مثبت باعث می‌شود قسمتی از جسم بریده شده که این نیرو بر آن اثر می‌کند ساعت‌گَرد بچرخد و یا اگر به جهت آن نگاه کنیم آن قسمت در سمت راست نیروی برشی واقع باشد. و بالاخره گشتاور خمشی مثبت جسم را طوری تغییر شکل می‌دهد که به سمت بالا تقعر پیدا کند. بارگذاری‌های مخالف این‌ها را منفی در نظر می گیرند.

اگر عضوی در معرض بارگذاری خارجی سه بُعدی قرار گیرد، آن‌گاه جهت بارگذاری‌های داخلی با توجه به دستگاه مختصات z, y, x انتخابی (شکل (b)) بیان می‌شوند.

شکل زیر یک جزء از یک جسم (مثلاً یک تیر)، که از دو طرف برش خورده است، با بارهای مثبت وارده به دو طرف بریده شده آن نشان داده شده‌اند.





(a)

مثال ۹-۱

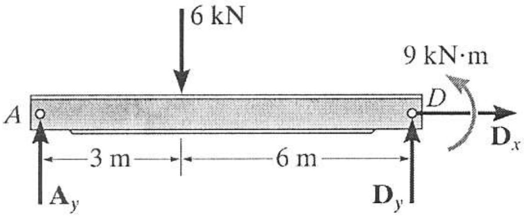
مطلوب است تعیین نیروی نرمال، نیروی برشی و گشتاور خمشی بلافاصله در سمت چپ (نقطه B) و نیز بلافاصله در سمت راست (نقطه C) نیروی 6 kN، که بر تیری مطابق شکل وارد می‌شود.

حل :

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی:

شکل زیر نمودار جسم آزاد تیر را نشان می‌دهد. برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی باید توجه داشت که گشتاور کوپل 9 kNm بردار آزاد است و در نتیجه می‌توان آن را در هر نقطه در روی نمودار جسم آزاد نشان داد. در اینجا فقط A_y تعیین می‌گردد، زیرا قسمت سمت چپ برای تحلیل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0: \ 9\ \text{kNm} + (6\ \text{kN} \cdot 6\ \text{m}) - (A_y \cdot 9\text{m}) = 0 \qquad \Rightarrow \quad A_y = 5\ \text{kN}$$

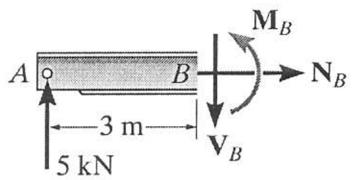


(b)

نمودارهای جسم آزاد :

نمودارهای جسم آزاد قسمت سمت چپ AB و AC در شکل (c) و شکل (d) نشان داده شده‌اند. در این نمودارها گشتاور کوپل گنجانده نشده است، زیرا باید تا بعد از مقطع زدن و جدا کردن قسمت مناسب در محل اولیه خود بماند.

معادله‌های تعادل:



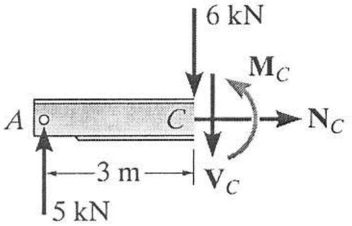
(c)

قسمت AB

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad N_B = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 5\ \text{kN} - V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 5\ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \ -(5\text{kN} \cdot 3\ \text{m}) + M_B = 0 \ \Rightarrow \ M_B = 15\ \text{kNm}$$



(d)

قسمت AC

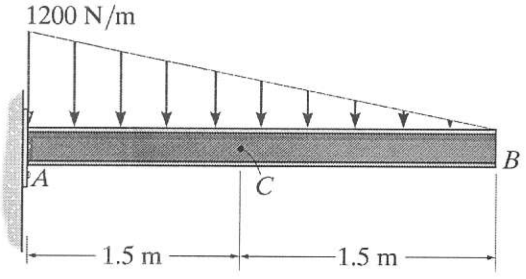
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad N_C = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 5\ \text{kN} - 6\ \text{kN} - V_C = 0 \ \Rightarrow \ V_C = -1\ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \ -(5\text{kN} \cdot 3\ \text{m}) + M_C = 0 \ \Rightarrow \ M_C = 15\ \text{kNm}$$

علامت منفی V_C نشان می‌دهد، که این نیرو در جهت مخالف با جهت نشان‌داده شده روی نمودار جسم آزاد اثر می‌کند. همچنین بازوی گشتاور نیروی 5 kN در هر دو مورد تقریباً 3 m است، زیرا B و C تقریباً بر هم منطبق‌اند.

مثال ۹-۲

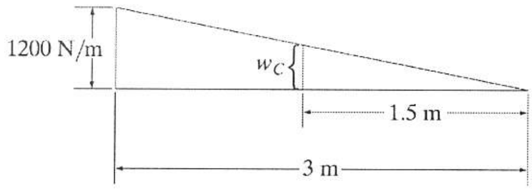


(a)

مطلوب است تعیین نیروی نرمال، نیروی برشی و گشتاور خمشی در نقطه C از تیری مطابق شکل مقابل.

حل :

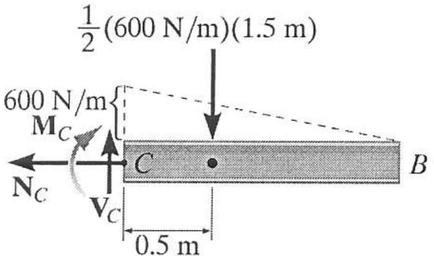
نمودار جسم آزاد :



(b)

در اینجا نیازی به تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نیست، زیرا می‌توان از قسمت BC برای تعیین بارگذاری داخلی در C استفاده نمود. توزیع بار گسترده مثلثی در نقطه C با استفاده از مثلث‌های مشابه نشان‌داده شده در شکل (b) مشخص می گردد، یعنی:

$$w_C = (1200\ \text{Nm})\left(\frac{1{,}5\ \text{m}}{3\ \text{m}}\right) = 600\ \text{N/m}$$



(c)

اکنون می‌توان بار گسترده وارد بر قسمت BC را با نیروی برآیند آن جایگزین نمود و محل آن را روی نمودار جسم آزاد نشان داد (شکل (c)).

معادلات تعادل :

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad N_C = 0$$

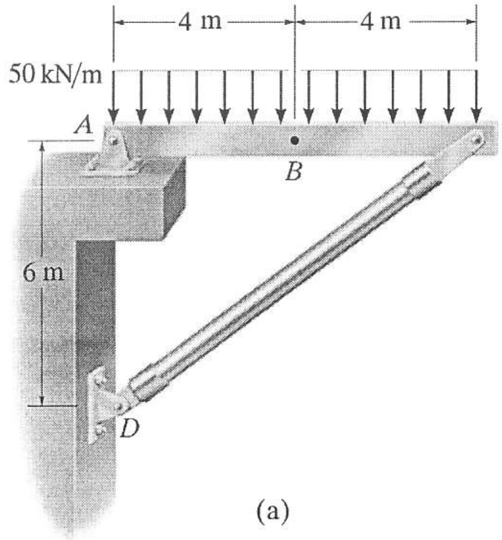
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad V_C - \frac{1}{2}(600\ \text{N/m})(1{,}5\ \text{m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 450\ \text{N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \qquad -M_C - \frac{1}{2}(600\text{N/m})(1{,}5\ \text{m})(0{,}5\ \text{m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = -225\ \text{Nm}$$

علامت منفی M_C بیانگر آن‌است که این گشتاور در جهت مخالف با جهت نشان‌داده شده روی نمودار جسم آزاد اثر می‌کند.

مثال ۹-۳

مطلوب است تعیین نیروی نرمال، نیروی برشی و گشتاور خمشی در نقطه B از قابی دو عضوی مطابق شکل (a).

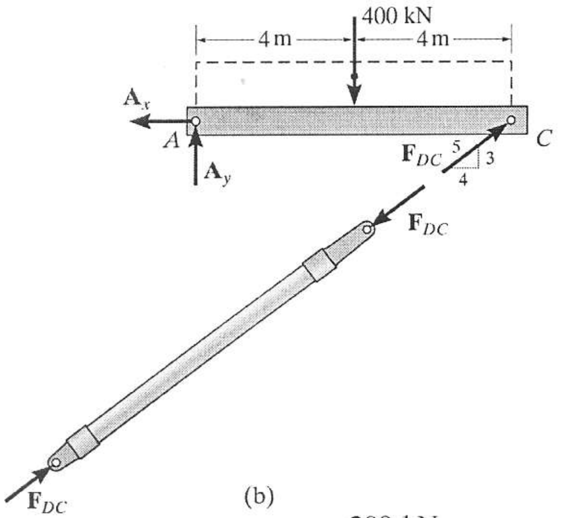


(a)

حل:

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه:

نمودار جسم آزاد هر دو عضو در شکل (b) نشان داده شده است. چون CD عضوی دو نیرویی است، معادلات تعادل را باید فقط در مورد عضو AC به کار برد.



(b)

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0:\ -(400\,kN \cdot 4\ m) + \left(\frac{3}{5}F_{DC} \cdot 8\ m\right) = 0$$

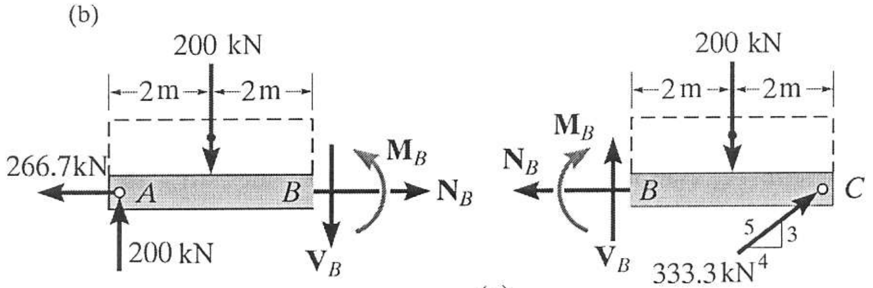
$$\Rightarrow \quad F_{DC} = 333{,}3\ kN$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0:\ -A_x + \left(\frac{4}{5} \cdot 333{,}3\ kN\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_x = 266{,}7\ kN$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:\quad A_y - 400\ kN + \left(\frac{3}{5} \cdot 333{,}3\ kN\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = 200\ kN$$



(c)

نمودار جسم آزاد:

با زدن مقطع فرضی از نقطه B و عمود بر محور عضو AC، نمودارهای جسم آزاد قسمت‌های AB و BC مطابق شکل (c) به‌دست می‌آیند. هنگام ترسیم نمودارها بایستی بار گسترده را تا بعد از مقطع زدن حفظ نمود. فقط پس از مقطع زدن می‌توان آن را با نیروی برآیند جایگزین کرد.

معادلات تعادل: با استفاده از معادلات تعادل در قسمت AB نتیجه می‌شود:

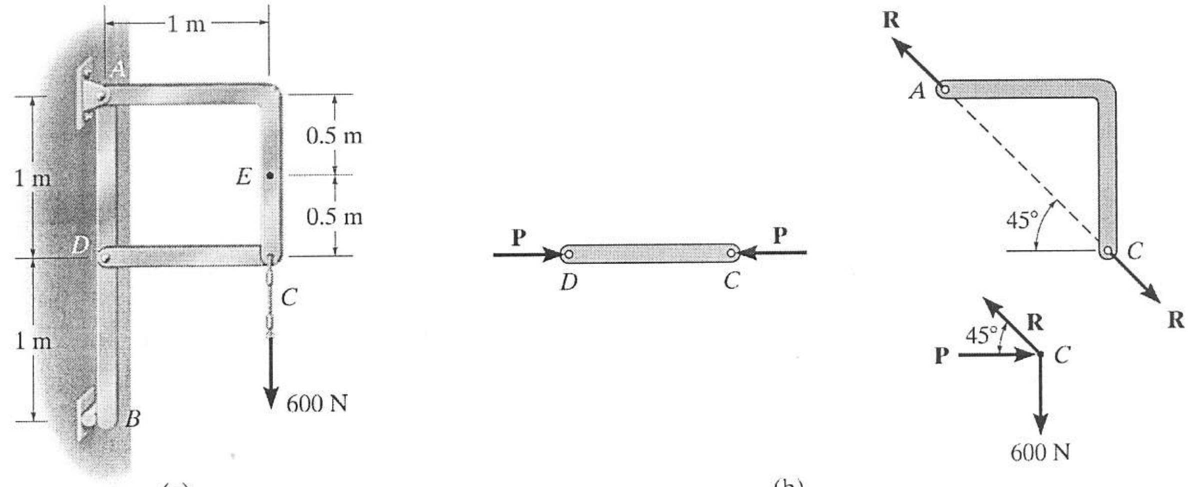
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0:\qquad N_B - 266{,}7\ kN = 0 \qquad \Rightarrow \quad N_B = 266{,}7\ kN$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:\qquad 200\ kN - 200kN - V_B = 0 \qquad \Rightarrow \quad V_B = 0$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = 0:\qquad M_B - (200kN \cdot 4\ m) + (200\ kN \cdot 2\ m) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = 400\ kNm$$

مثال ۹-۴

مطلوب است تعیین نیروی نرمال، نیروی برشی و گشتاور خمشی در نقطه E از قابی که مطابق شکل (a) بارگذاری شده است.



(a) (b)

حل :

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه :

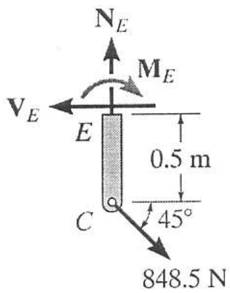
هر دو عضو AC و DC عضوهای دو نیرویی هستند، که نمودار جسم آزاد آن‌ها در شکل (b) نشان داده شده است. برای تعیین بارگذاری داخلی در E باید ابتدا نیروی R را که بر سر عضو AC اعمال می‌شود به دست آورد. برای تعیین این نیرو باید تعادل پین را در نقطه C تحلیل نمود.

با جمع بستن نیروهای اعمال شده به پین در امتداد قائم :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R\sin 45^\circ - 600\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 848{,}5\ \text{N}$$

نمودار جسم آزاد :

نمودار جسم آزاد قسمت CE در شکل (c) مشاهده می‌شود.



(c)

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad 848{,}5\cos 45^\circ\ \text{N} - V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E = 600\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -848{,}5\sin 45^\circ\ \text{N} + N_E = 0 \quad \Rightarrow \quad N_E = 600\ \text{N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0: \quad (848{,}5\cos 45^\circ\ \text{N}\cdot 0{,}5\ \text{m}) - M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad M_E = 300\ \text{Nm}$$

تذکر :

این نتایج نشان می‌دهد که طراحی ضعیف است. عضو AC باید راست و مستقیم باشد (از A تا C)، تا خمش در داخل عضو حذف گردد. در این صورت نیروی داخلی فقط سبب ایجاد کشش در عضو خواهد شد.

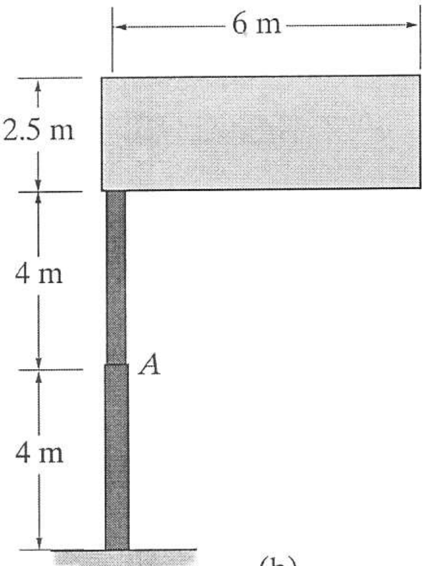
مثال ۹-۵

جرم تابلوی یکنواختی مطابق شکل (a) برابر 650 kg است و به ستونی ثابت متکی است. طبق آیین‌نامه طراحی باید این ستون بر اساس حداکثر بار باد یکنواختی به اندازه 900 Pa محاسبه گردد. مطلوب است تعیین بارگذاری‌های داخلی در وسط ستون (A).

(a)

حل :

شکل (b) مدل ایده‌آل‌سازی شده این تابلو را نشان می‌دهد. در این شکل ابعاد ضروری نیز ذکر شده‌اند. می‌توان نمودار جسم آزاد مقطعی در بالای نقطه A را در نظر گرفت، زیرا شامل عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه نخواهد شد.



(b)

نمودار جسم آزاد :

وزن تابلو $W = 650 \cdot 9{,}81\,\text{N} = 6{,}376\,\text{kN}$ است و باد نیروی برآیندی به اندازه $F_w = 900\,\text{N/m}^2 \cdot 6\,\text{m} \cdot 2{,}5\,\text{m} = 13{,}5\,\text{kN}$ بر تابلو اعمال می‌کند، که بر سطح تابلو عمود است. این بارگذاری‌ها در شکل (c) نشان داده شده‌اند.

معادلات تعادل :

چون مسئله سه بُعدی است، به صورت برداری تحلیل می‌شود:

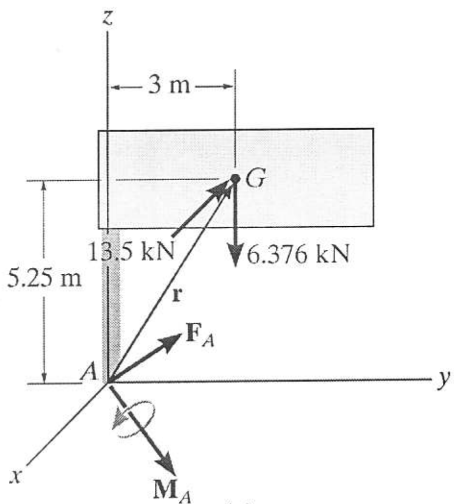
$$\Sigma \vec{F} = 0: \quad \vec{F}_A - 13{,}5\,\vec{i} - 6{,}376\,\vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_A = \{13{,}5\,\vec{i} + 6{,}376\,\vec{k}\}\,\text{kN} = \begin{pmatrix} 13{,}5 \\ 0 \\ 6{,}376 \end{pmatrix} \text{kN}$$

$$\Sigma \vec{M} = 0: \quad \vec{M}_A + \vec{r} \times (\vec{F}_w + \vec{W}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_A + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 5{,}25 \\ -13{,}5 & 0 & -6{,}376 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{M}_A = \begin{pmatrix} 19{,}1 \\ 70{,}9 \\ -40{,}5 \end{pmatrix} \text{kNm} \triangleq \{19{,}1\,\vec{i} + 70{,}9\,\vec{j} - 40{,}5\,\vec{k}\}\,\text{kNm}$$



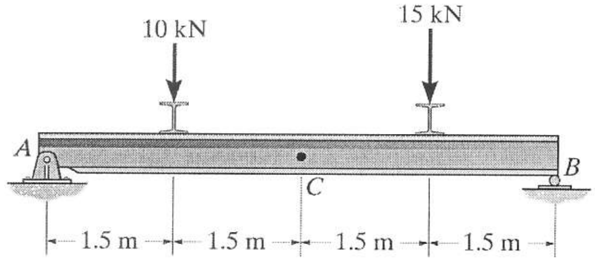
(c)

تذکر: در اینجا $\vec{F}_{Az} = \{6{,}376\vec{k}\}\,\text{kN}$ نیروی نرمال است و $\vec{F}_{Ax} = \{13{,}5\,\vec{i}\}\,\text{kN}$ نیروی برشی در مقطع می‌باشد. همچنین $\vec{M}_{Az} = \{-40{,}5\vec{k}\}\,\text{kNm}$ گشتاور پیچشی است و گشتاور خمشی با استفاده از مؤلفه‌های آن $\vec{M}_{Ax} = \{19{,}1\vec{i}\}\,\text{kNm}$ و $\vec{M}_{Ay} = \{70{,}9\,\vec{j}\}\,\text{kNm}$ تعیین می‌گردند، یعنی:

$$(M_b)_A = \sqrt{(M_A)_x^2 + (M_A)_y^2} = 73{,}4\,\text{kNm}$$

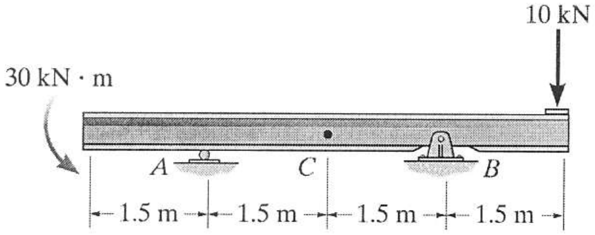
تمرین ۹-۱

مطلوب است تعیین نیروی نرمال N_C، نیروی برشی V_C و گشتاور خمشی M_C در نقطه C حاصل از بارگذاری در تیری مطابق شکل.



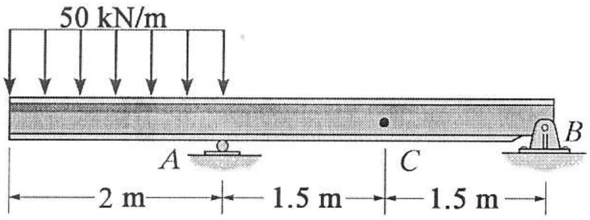
تمرین ۹-۲

مطلوب است تعیین نیروی نرمال N_C، نیروی برشی V_C و گشتاور خمشی M_C در نقطه C حاصل از بارگذاری در تیری مطابق شکل.



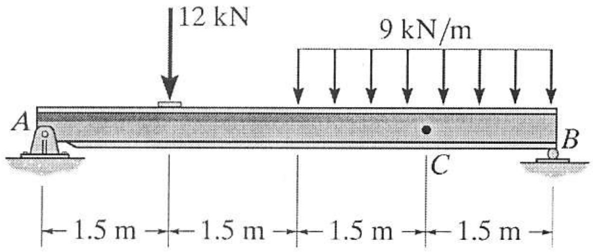
تمرین ۹-۳

مطلوب است تعیین نیروی نرمال N_C، نیروی برشی V_C و گشتاور خمشی M_C در نقطه C حاصل از بارگذاری در تیری مطابق شکل.



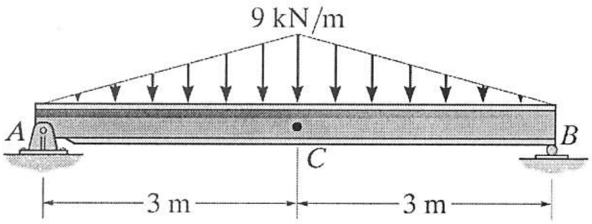
تمرین ۹-۴

مطلوب است تعیین نیروی نرمال N_C، نیروی برشی V_C و گشتاور خمشی M_C در نقطه C حاصل از بارگذاری در تیری مطابق شکل.



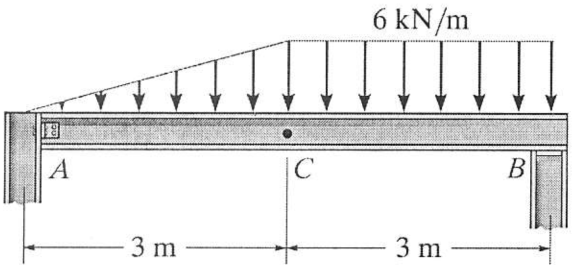
تمرین ۹-۵

مطلوب است تعیین نیروی نرمال N_C، نیروی برشی V_C و گشتاور خمشی M_C در نقطه C حاصل از بارگذاری در تیری مطابق شکل.



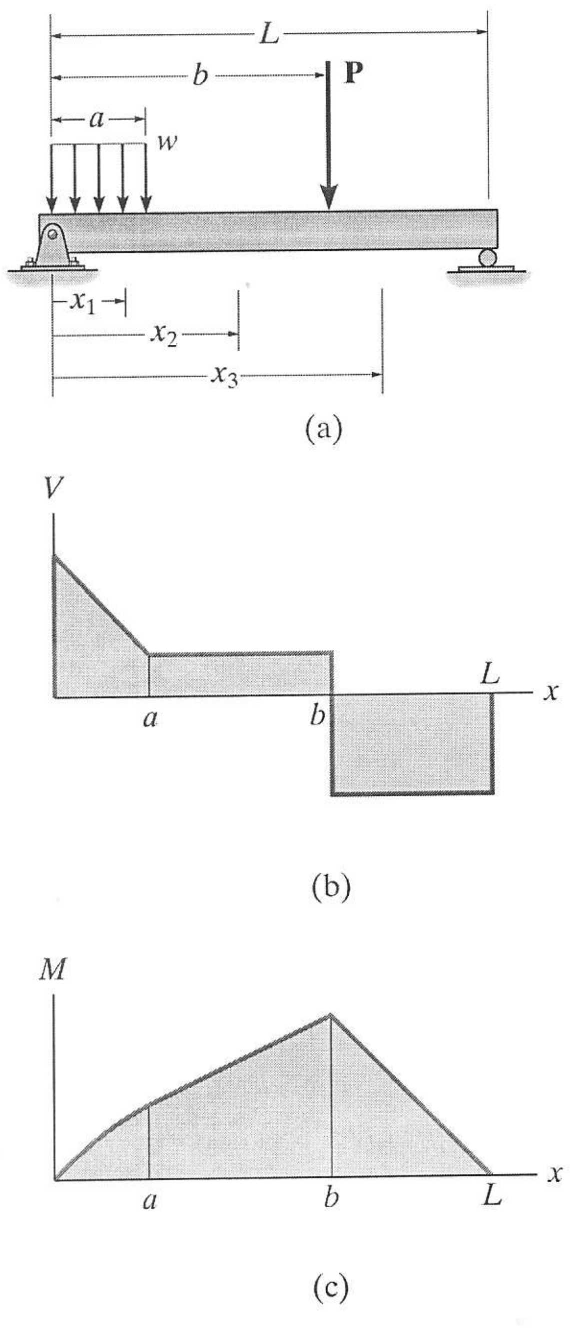
تمرین ۹-۶

مطلوب است تعیین نیروی نرمال N_C، نیروی برشی V_C و گشتاور خمشی M_C در نقطه C حاصل از بارگذاری در تیری مطابق شکل. فرض کنید A پین شده و تکیه‌گاه B غلتکی است.



۹-۲ معادله‌ها و نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی

تیرها عضوهای سازه‌ای هستند، که تحت بارهایی عمود بر محور تیر قرار می‌گیرند و در طراحی مهم می باشند. تیرها مستقیم و طویل بوده و معمولاً سطح مقطع ثابتی دارند. برای طراحی تیرها لازم است از جزئیات تغییرات نیروی برشی V و گشتاور خمشی M در هر نقطه از طول تیر اطلاع حاصل شود (نیروهای نرمال در بیشتر موارد ناچیز بوده و یا قابل اغماض می‌باشند).



(a)

(b)

(c)

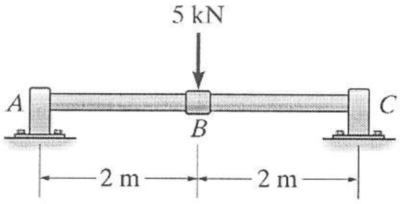
تغییرات نیروی برشی V و گشتاور خمشی M در طول تیر را می‌توان با استفاده از روش مقاطع، که در بخش ۹-۱ توضیح داده شد به‌دست آورد. در اینجا باید در فاصله دلخواه x از یک سر تیر مقطعی زده شود و پس از آن معادلات تعادل را در مورد قسمت برش خورده از تیر به طول x را به‌کار ببریم. به این ترتیب می‌توان V و M را به صورت تابعی از x به‌دست آورد.

به طور کلی توابع نیروی برشی و گشتاور خمشی در کل طول تیر ناپیوسته بوده و یا شیب آن‌ها در نقاطی که بار گسترده تغییر ناگهانی دارد و یا نیروهای متمرکز و گشتاورهای کوپل اعمال می‌شوند ناپیوسته خواهد بود. به همین دلیل هم باید این توابع را برای هر قسمت مابین هر دو ناپیوستگی تعیین نمود. مثلاً از قسمت‌هایی به طول x_1، x_2 و x_3 مطابق شکل (a) می‌توان برای توصیف تغییرات V و M در طول تیر استفاده نمود. این توابع فقط در نواحی از 0 تا a برای x_1، از a تا b برای x_2 و از b تا L برای x_3 معتبرند.

چنانچه توابع به‌دست آمده V و M بر حسب x_1، x_2 و x_3 را در زیر تیر رسم کنیم، نمودارهای به‌دست آمده را نمودار نیروی برشی (یا نمودار برش) و نمودار گشتاور خمشی می‌نامند (شکل‌های (b) و (c)).

مثال ۹-۶

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای محوری مطابق شکل (a) را رسم کنید. تکیه‌گاه A یاتاقان فشار گیر و تکیه‌گاه C یاتاقان بوشی است.

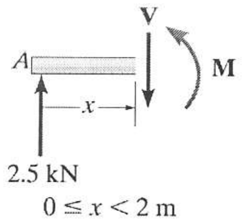


(a)

حل:

عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها :

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها در نمودار جسم آزاد محور، شکل (d) نشان داده شده‌اند.



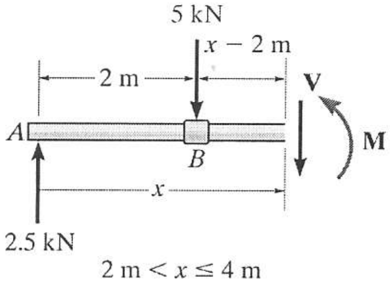
(b)

توابع نیروی برشی و گشتاور خمشی :

برای قسمت سمت چپ محور در قسمت AB به فاصله $0 \le x < 2$ m از نقطه A برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد این قسمت در شکل (b) نشان داده شده است. در این نمودار V و M در جهت مثبت طبق قرارداد علامت در سطح سمت راست قسمت بریده شده از محور وارد می‌شوند. با استفاده از معادلات تعادل نتیجه می‌شود:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad V = 2{,}5 \text{ kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \quad M - 2{,}5x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 2{,}5x \text{ kNm} \qquad (2)$$



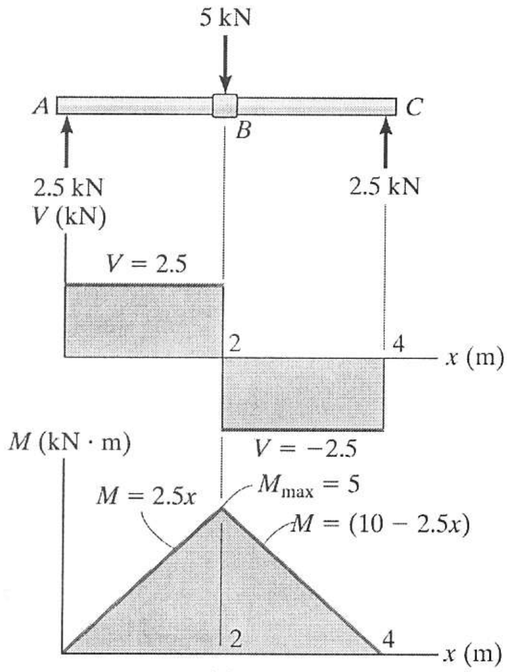
(c)

مجدداً برای قسمت سمت چپ محور در قسمت BC به فاصله $2 < x \le 4$ m از نقطه A برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد این قسمت در شکل (c) نشان داده شده است. در این نمودار نیز V و M در جهت مثبت طبق قرارداد علامت در سطح سمت راست قسمت بریده شده از محور وارد می‌شوند. بنابراین:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2{,}5 \text{ kN} - 5 \text{ kN} - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -2{,}5 \text{ kN} \qquad (3)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0: \quad M + [5 \text{ kN}(x - 2\text{m})] - 2{,}5x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad M = (10 - 2{,}5x) \text{ kNm} \qquad (4)$$

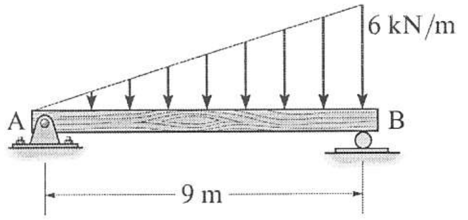


(d)

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی :

توابع (1) تا (4) در شکل (d) رسم شده‌اند. نیروی برشی درست در سمت راست نقطه B تغییر علامت می‌دهد. گشتاور خمشی به صورت خطی افزایش یافته و پس از رسیدن به ماکزیمم 5 kNm دوباره به صورت خطی تا مقدار صفر کاهش می‌یابد.

تذکر: در شکل (d) مشاهده می‌شود که نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در نقاطی که نیروی متمرکز اثر می‌کند، یعنی در نقاط A ,B و C ناپیوسته است. به همین دلیل باید هر دو تابع نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای نواحی مابین بارهای متمرکز به صورت جداگانه بیان نمود.

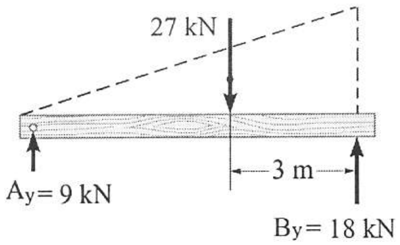


مثال ۹-۷

توابع نیروهای برشی و گشتاور خمشی را برای تیر نشان داده شده بدست آورده و سپس نمودار توزیع این بارهای داخلی را در طول تیر رسم کنید.

حل :

عکس‌العملهای تکیه‌گاهی:

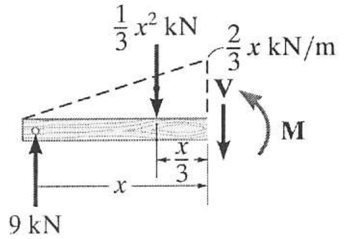


با توجه به نمودار جسم آزاد کل سیستم که بار گسترده آن با یک نیروی برآیند متمرکز و معادل 27 kN جایگزین شده است می‌توان نوشت:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \; -(A_y \cdot 9\text{m}) + (27\text{kN} \cdot 3\text{m}) = 0 \;\Rightarrow\; A_y = 9 \text{ kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow\; A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \; A_y + B_y - 27 \text{ kN} = 0 \qquad \Rightarrow\; B_y = 18 \text{ kN}$$



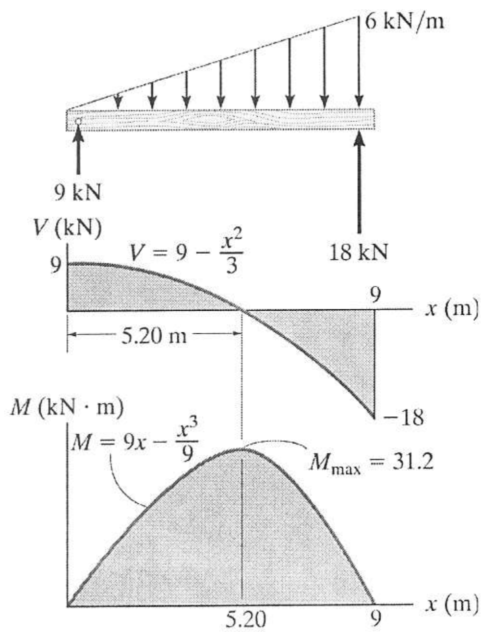
توابع نیروی برشی و لنگر خمشی:

نمودار جسم آزاد قسمت برش خورده سمت چپ تیر به طول x در شکل نشان‌داده شده است. از تشابه مثلث‌ها نتیجه می‌شود: $\frac{w}{x} = \frac{6}{9} \;\Rightarrow\; w = \frac{2}{3}x$ kN/m

بارگذاری گسترده قسمت برش خورده را نیز در نمودار جسم آزاد آن با یک نیروی برآیند متمرکز $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x \cdot x = \frac{1}{3}x^2$ kN به فاصله $\frac{1}{3}x$ از مقطع جایگزین می‌کنیم. با کاربرد دو معادله تعادل برای این جسم برش خورده نتیجه می‌شود:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 9 - \frac{1}{3}x^2 - V = 0 \;\Rightarrow\; V = (9 - \frac{x^2}{3}) \text{ kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \; M + \frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{x}{3} - 9x = 0 \;\Rightarrow\; M = (9x - \frac{x^3}{9}) \text{ kNm}$$



نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی:

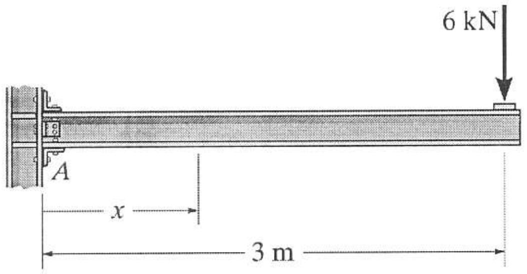
مطابق شکل مقابل این نمودارها از ترسیم معادله‌های بالا بدست آمده‌اند. نقطه‌ای از تیر که در آن نیروی برشی صفر است از معادله (1) بدست می‌آید:

$$V = 9 - \frac{x^2}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 5{,}20 \text{ m}$$

بعداً نشان خواهیم داد که در این نقطه حداکثر گشتاور خمشی ایجاد می‌شود:

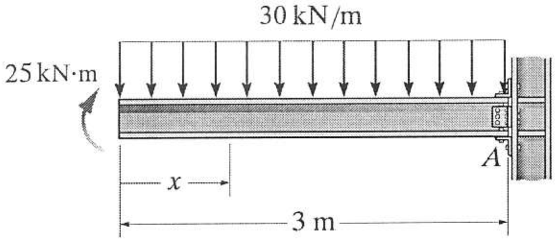
$$M_{max} = 9 \cdot 5{,}20 - \frac{5{,}20^3}{9} \text{ kNm} = 31{,}2 \text{ kNm}$$

تمرین ۹-۷



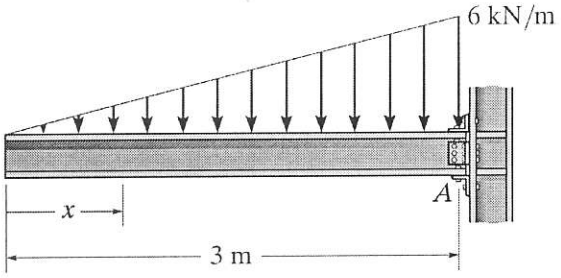
مطلوب است تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی به صورت تابعی از x و سپس رسم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیری مطابق شکل.

تمرین ۹-۸



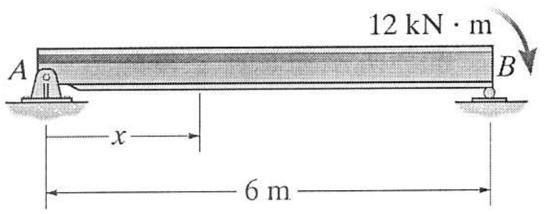
مطلوب است تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی تیری مطابق شکل به صورت تابعی از x و سپس رسم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر.

تمرین ۹-۹



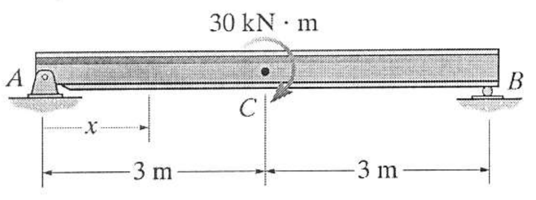
مطلوب است تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی تیری مطابق شکل به صورت تابعی از x و سپس رسم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر.

تمرین ۹-۱۰



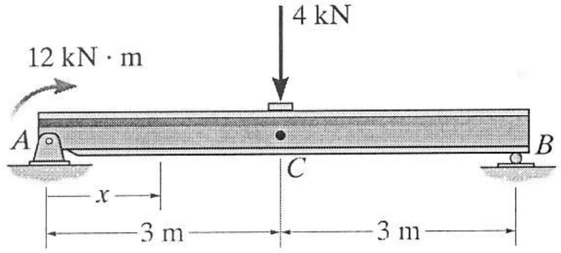
مطلوب است تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی تیری مطابق شکل به صورت تابعی از x و سپس رسم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر.

تمرین ۹-۱۱



مطلوب است تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی تیری مطابق شکل به صورت تابعی از x برای نواحی $0 < x < 3m$ و $3m < x < 6m$ و سپس ترسیم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر.

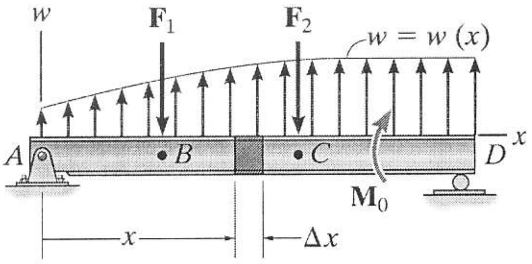
تمرین ۹-۱۲



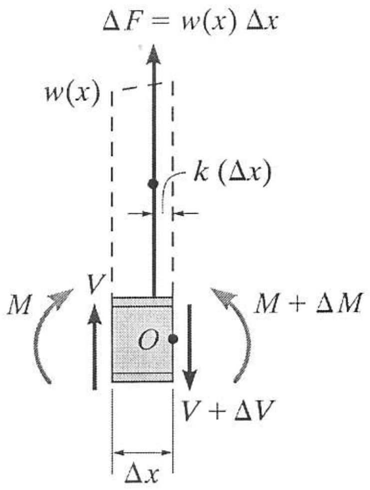
مطلوب است تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی تیری مطابق شکل به صورت تابعی از x برای نواحی $0 < x < 3m$ و $3m < x < 6m$ و سپس ترسیم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر.

۹-۳ روابط بین بارگسترده، نیروی برشی و گشتاور خمشی

یک روش ساده‌تر برای رسم نمودارهای برشی و گشتاور خمشی استفاده از روابط دیفرانسیل موجود بین بار، نیروی برشی و گشتاور خمشی است.



(a)



(b)

بارگسترده:

تیر AD شکل (a) را در نظر بگیرید. این تیر تحت اثر بار گسترده دلخواه $w=w(x)$ و تعدادی نیروی متمرکز و گشتاور کوپل قرار دارد. در ادامه بار گسترده و نیروی متمرکز وقتی به طرف بالا باشند مثبت فرض می‌شوند. نمودار جسم آزاد قسمت کوچکی از تیر به طول Δx را در نقطه x در جایی‌که در معرض بار متمرکز یا گشتاور کوپل قرار ندارد انتخاب می‌کنیم (شکل (a)). بنابراین نتیجه حاصل از آن در نقاطی‌که بارگذاری متمرکز وجود دارد صدق نمی‌کند. طبق قرارداد علامت فرض می‌شود نیروی برشی و گشتاور خمشی داخلی، که روی نمودار جسم آزاد نشان داده شده‌اند در جهت مثبت وارد می‌شوند.

نیروی برشی و گشتاور خمشی در سطح سمت راست باید به مقداری کوچک و متناهی افزایش یابند، تا بتوانند این قسمت را در حالت تعادل نگه دارند. بارگذاری گسترده با نیروی برآیند $\Delta F=w(x)\Delta x$ جایگزین شده است، که در فاصله $k\Delta x$ $(0<k<1)$ از سمت راست اثر می‌کند (برای بار گسترده یکنواخت $k=1/2$ است).

رابطه بین بارگسترده و نیروی برشی:

$$+\uparrow \Sigma F_y=0:\ V+w(x)\Delta x-(V+\Delta V)=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V=w(x)\Delta x$$

برای وقتی $\Delta x \to 0$:

$\dfrac{dV}{dx}=w(x)$		$\Rightarrow$		$\Delta V=\int w(x)\,dx$
شیب نمودار برش = شدت بار گسترده				تغییرات برش = سطح زیر منحنی بار گسترده

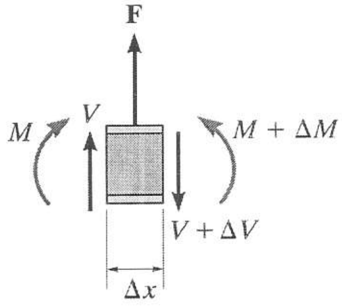
رابطه بین نیروی برشی و گشتاور خمشی:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O=0:\ (M+\Delta M)-[w(x)\Delta x]k\Delta x-V\Delta x-M=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta M=V\Delta x+k\,w(x)\underbrace{\Delta x^2}_{\approx 0}$$

برای وقتی $\Delta x \to 0$:

$\dfrac{dM}{dx}=V$		$\Rightarrow$		$\Delta M=\int V\,dx$
شیب نمودار گشتاور خمشی = نیروی برشی				تغییرات گشتاور = سطح زیر نمودار برش

نیروی متمرکز:



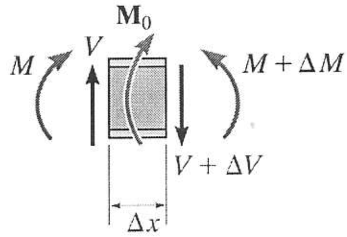
(a)

شکل (a) نمودار جسم آزاد قسمت کوچکی از تیر، که از زیر یکی از نیروهای متمرکز از شکل (a) در صفحه قبل برداشته شده است را نشان می‌دهد.
با توجه به تعادل:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad \Delta V = F$$

به این ترتیب وقتی $\vec{F}$ به سمت بالا باشد، تغییر در برش مثبت و نمودار برش به سمت بالا جهش می‌یابد. بالعکس هرگاه $\vec{F}$ به سمت پایین باشد، جهش در برش (ΔV) به سمت پایین خواهد بود.

گشتاور کوپل:



(b)

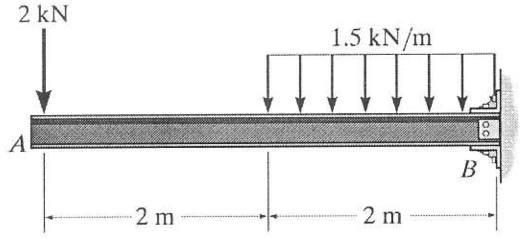
چنانچه قسمت کوچک از تیر شکل (a) در صفحه قبل را که زیر گشتاور کوپل قرار دارد برداریم، نمودار جسم آزاد آن در شکل (b) به‌دست می‌آید. از تعادل این قسمت با فرض آن‌که $\Delta x \rightarrow 0$ نتیجه می‌شود:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0: \qquad \Delta M = M_0$$

بنابراین چناچه $\vec{M_0}$ ساعتگرد باشد، تغییر در گشتاور مثبت است، به عبارت دیگر گشتاور به طرف بالا جهش می‌یابد. بالعکس اگر $\vec{M_0}$ پادساعتگرد باشد، جهش گشتاور (ΔM) به سمت پایین خواهد بود.

نتایج این بخش را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

- چنانچه بار گسترده به طرف بالا مثبت فرض شود، شیب نمودار برش در هر نقطه با شدت بار گسترده در آن نقطه برابر است، یعنی $dV/dx = w(x)$.
- اگر نیروی متمرکز به طرف بالا باشد، برش به همان اندازه به طرف بالا جهش می‌یابد.
- تغییر در برش (ΔV) بین دو نقطه برابر است با سطح زیر منحنی بار گسترده بین آن دو نقطه.
- شیب نمودار گشتاور در هر نقطه با برش در آن نقطه برابر است، یعنی $dM/dx = V(x)$.
- تغییر در گشتاور (ΔM) بین دو نقطه برابر است با سطح زیر منحنی برش بین آن دو نقطه.
- چنانچه یک گشتاور کوپل ساعتگرد به تیر وارد شود، تأثیری در برش نخواهد داشت، اما نمودار گشتاور به اندازه آن گشتاور به طرف بالا جهش می‌یابد.
- در نقاطی که برش صفر است، گشتاور ماکزیمم و یا مینیمم خواهد بود، زیرا $dM/dx = 0$.
- با توجه به این‌که بایستی از رابطه شکل (b) در صفحه قبل دو بار انتگرال گرفته شود، تا ابتدا تغییر در نیروی برش $\Delta V = \int w(x)\,dx$ و سپس تغییر در گشتاور $\Delta M = \int V\,dx$ به‌دست آید، اگر منحنی $w = w(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، در آن صورت $V = V(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n+1 و $M = M(x)$ یک منحنی از درجه n+2 خواهد بود.



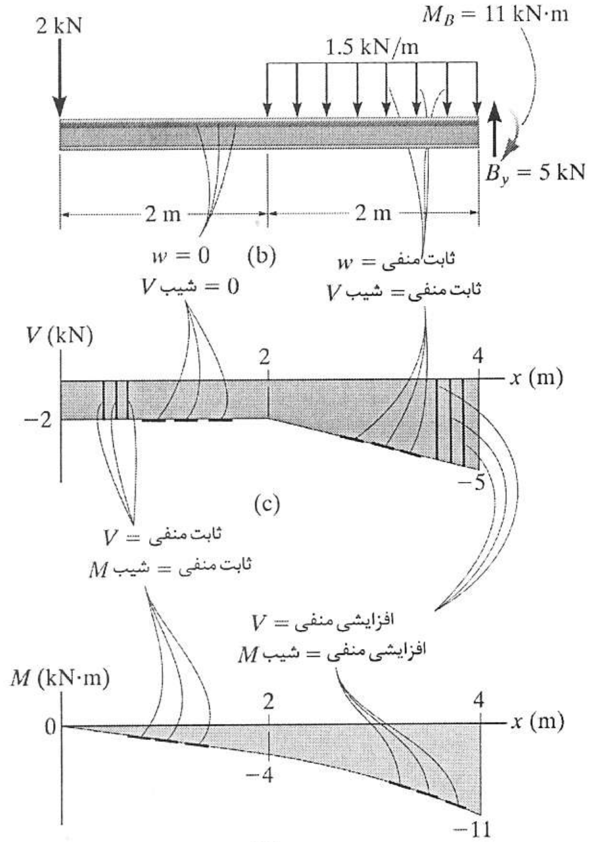
(a)

مثال ۹-۸

نمودارهای نیروهای برشی و گشتاور خمشی را برای تیر یک‌سرگیردار نشان داده شده (شکل (a)) رسم کنید.

حل :

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه گیردار B در شکل (b) نشان داده شده‌اند.



نمودار برش:

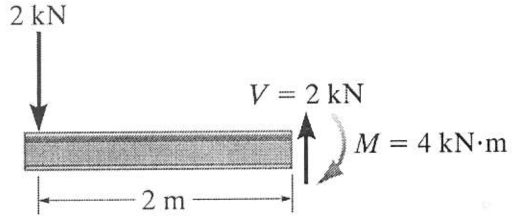
برش در ابتدای تیر (نقطه A) برابر است با: 2kN−. این مقدار در $x=0$ (شکل (c)) رسم شده است. به نحوه رسم نمودار برش از طریق دنبال کردن شیب‌های تعریف شده توسط بار گسترده w توجه کنید. برش در $x=4$ m برابر است با: 5 kN −، که همان عکس‌العمل تیر در تکیه‌گاه B است. صحت این موضوع را می‌توان با تعیین سطح زیر منحنی بار گسترده بررسی نمود، یعنی:

$$V|_{x=4\text{ m}} = V|_{x=2\text{ m}} + \Delta V$$
$$= -2\text{ kN} - (1{,}5\text{ kN/m})(2\text{ m}) = -5\text{ kN}$$

نمودار گشتاور:

گشتاور صفر در $x=0$ در شکل (d) رسم شده است. رسم نمودار گشتاور بر این اساس است که شیب نمودار گشتاور با برش در هر نقطه برابر است. تغییر گشتاور از $x=0$ تا $x=2$ m از روی سطح زیر نمودار برش به‌دست می‌آید. بنابراین گشتاور در $x=2$ m برابر است با:

$$M|_{x=2\text{ m}} = M|_{x=0} + \Delta M$$
$$= 0 + [-2\text{ kN}(2\text{ m})] = -4\text{ kN}\cdot\text{m}$$



(e)

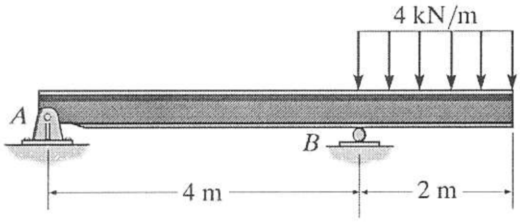
گشتاور در $x=4$ m برابر است با: 11 kNm −، که همان عکس‌العمل تیر در تکیه‌گاه B است. صحت این موضوع را می‌توان با تعیین سطح زیر منحنی برش بررسی نمود، که یک ذوزنقه است. یعنی:

$$M|_{x=4\text{ m}} = M|_{x=2} + \Delta M$$
$$= -4 + [-3{,}5\text{ kN}(2\text{ m})] = -11\text{ kN}\cdot\text{m}$$

این نتیجه را می‌توانستیم با استفاده از روش مقاطع، شکل (e) نیز به‌دست آوریم.

مثال ۹-۹

نمودارهای نیروهای برشی و گشتاور خمشی را برای تیر یک‌سرآویز نشان داده شده (شکل (a)) رسم کنید.



(a)

حل :

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها در شکل (b) نشان داده شده‌اند.

نمودار برش:

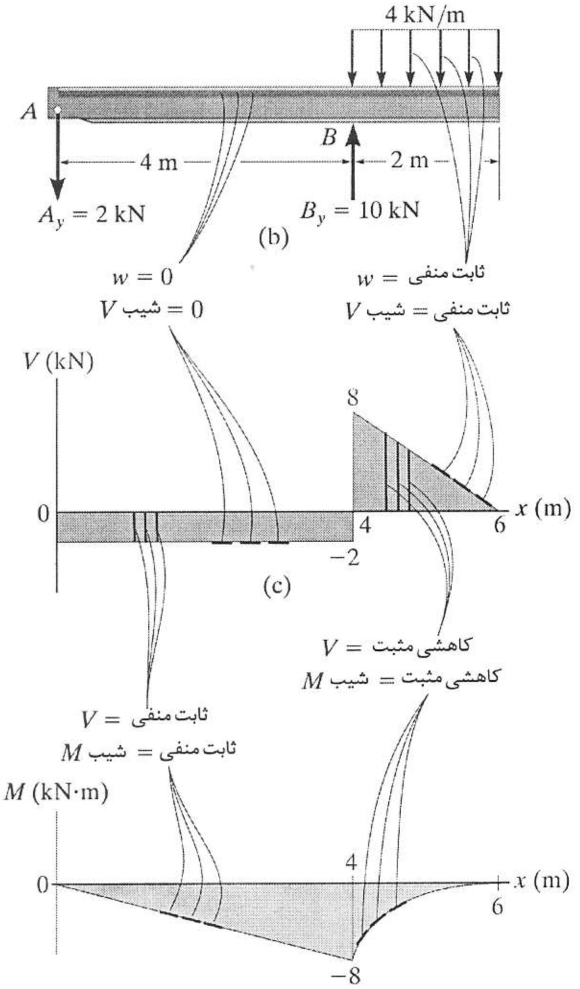
برش در ابتدای تیر (نقطه A) برابر است با: -2 kN. این مقدار در $x=0$ (شکل (c)) رسم شده است. شیب‌ها با استفاده از بارگذاری و نمودار برش رسم می‌شوند. به‌ویژه به جهش مثبت 10 kN در $x=4$ m بر اثر نیروی B_y مطابق شکل توجه شود.

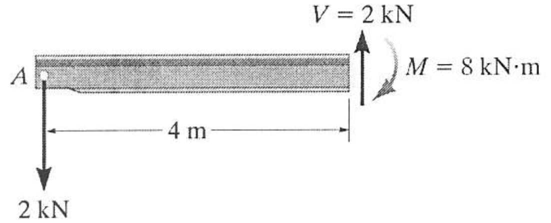
نمودار گشتاور:

گشتاور صفر در $x=0$ در شکل (d) رسم شده است. سپس با دنبال کردن رفتار شیب به‌دست آمده از نمودار برش، می‌توان نمودار گشتاور را ترسیم نمود. گشتاور در $x=4$ m با استفاده از سطح زیر نمودار برش به‌دست می‌آید.

$$M\big|_{x=4\text{ m}} = M\big|_{x=0} + \Delta M$$
$$= 0 + [-2\text{ kN}(4\text{ m})] = -8\text{ kN}\cdot\text{m}$$

این نتیجه را می‌توانستیم با استفاده از روش مقاطع، شکل (e) نیز به‌دست آوریم.

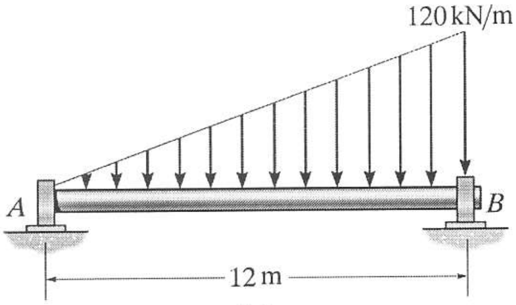




(e)

مثال ۹-۱۰

محوری مطابق شکل (a) به تکیه‌گاه فشارگیر A و یاتاقان بوشی B تکیه دارد. مطلوب است نمودارهای برش و گشتاور خمشی این محور.



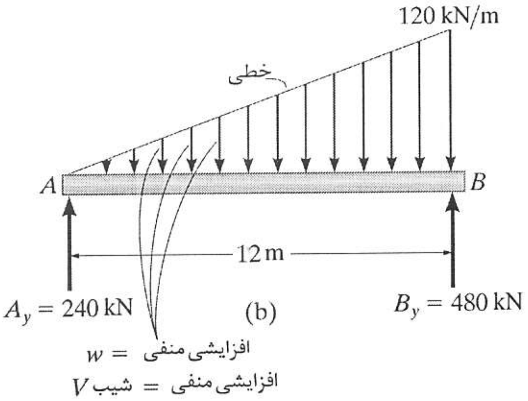
(a)

حل :

عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها در شکل (b) نشان داده شده‌اند.

نمودار برش:

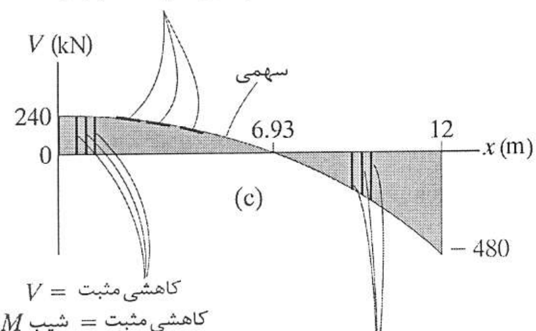
برش در ابتدای تیر (نقطه A) برابر است با: 240 kN. این مقدار در $x=0$ (شکل (c)) رسم شده است. نمودار برش از طریق دنبال کردن شیب‌های تعریف شده توسط بار گسترده w رسم می‌شود. در نقطه B اندازه برش -480 kN است. از آن‌جایی که نیروی برش تغییر علامت می‌دهد باید نقطه‌ای مابین A و B که در آن $V=0$ است پیدا شود. برای این کار از روش مقاطع استفاده می‌شود. نمودار جسم آزاد قسمتی از سمت چپ محور، که در فاصله $0 < x < 9$ m قرار دارد در شکل (e) رسم شده است. شدت بار گسترده در x از تناسب مثلث‌های مشابه به‌دست می‌آید و برابر است با: $120/12 = w/x \;\Rightarrow\; w = 10x$.



(b)

بنابراین برای $V=0$ نتیجه می‌شود:

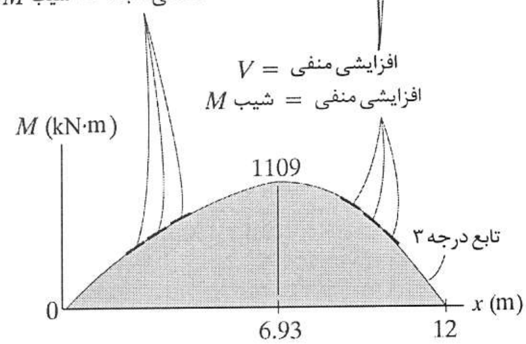
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 240 \text{ kN} - \frac{1}{2}(10x)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6{,}93 \text{ m}$$



(c)

نمودار گشتاور:

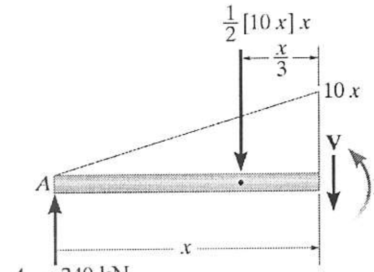
نمودار گشتاور در شکل (d) از صفر شروع می‌شود، زیرا در نقطه A هیچ گشتاوری وجود ندارد. ادامه رسم نمودار گشتاور براساس شیب نمودار برش صورت می‌گیرد. گشتاور ماکزیمم در $x = 6{,}93$ m ایجاد می‌شود، که در آن‌جا برش برابر صفر است، یعنی : $dM/dx = V = 0$. با توجه به شکل (e) :



(d)

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0: \quad M_{max} + \frac{1}{2}(10 \cdot 6{,}93) \cdot 6{,}93 \cdot \frac{1}{3} 6{,}93 - 240 \cdot 6{,}93 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_{max} = 1109 \text{ kNm}$$

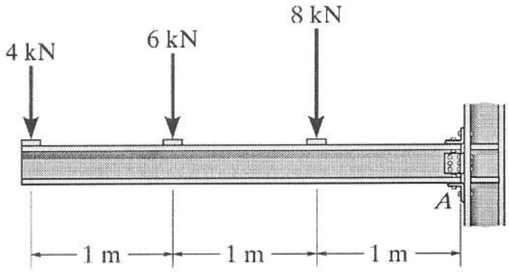


(e)

توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم، که از انتگرالگیری w، که تابعی خطی است نمودار برش سهمی شکل و از انتگرالگیری مجدد آن یک منحنی درجه ۳ برای گشتاور به‌دست می‌آید.

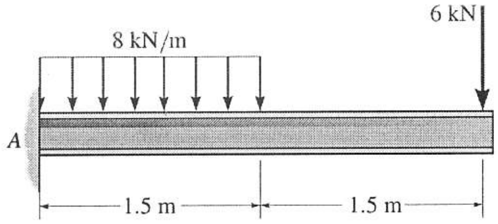
تمرین ۹-۱۳

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر شکل مقابل را برای بارگذاری داده شده رسم کنید.



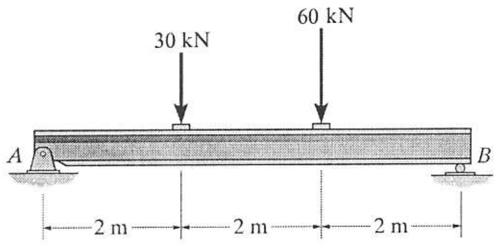
تمرین ۹-۱۴

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر شکل مقابل را برای بارگذاری داده شده رسم کنید.



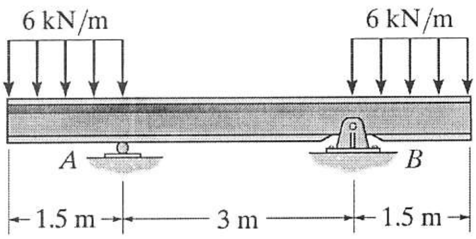
تمرین ۹-۱۵

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر شکل مقابل را برای بارگذاری داده شده رسم کنید.



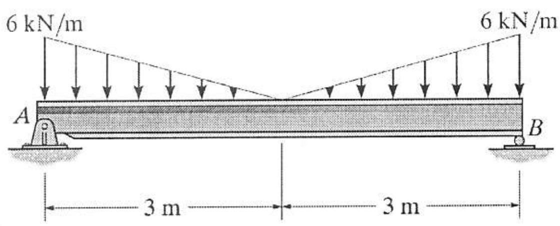
تمرین ۹-۱۶

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر شکل مقابل را برای بارگذاری داده شده رسم کنید.



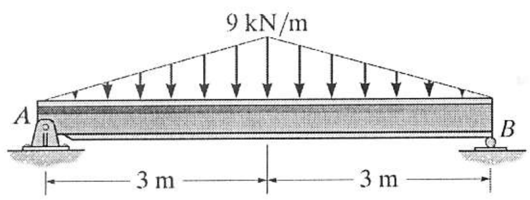
تمرین ۹-۱۷

نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر شکل مقابل را برای بارگذاری داده شده رسم کنید.



تمرین ۹-۱۸

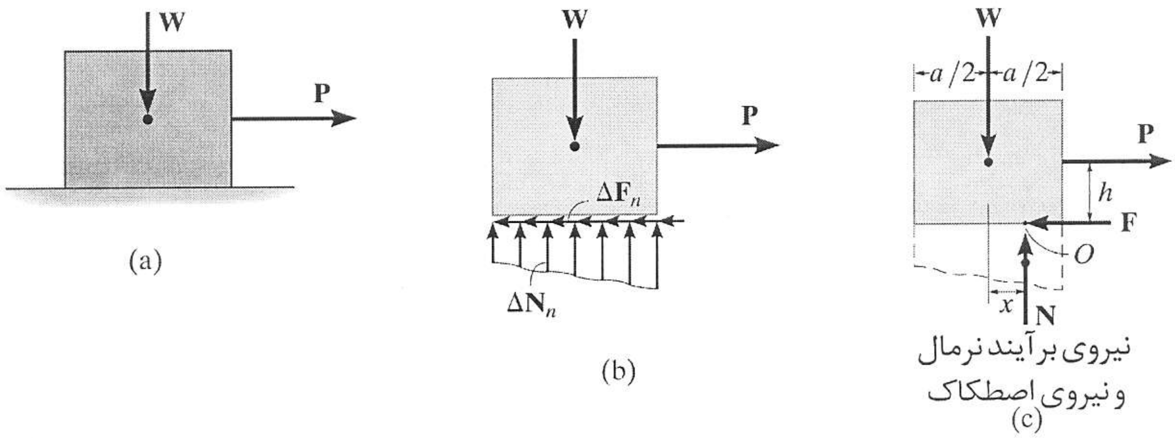
نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر شکل مقابل را برای بارگذاری داده شده رسم کنید.



۱۰ اصطکاک

نیروهای اصطکاکی همیشه در تماس بین دو جسم رخ می‌دهند. جهت نیروی اصطکاک به‌گونه‌ای است که مانع حرکت بوده و با آن مخالفت می‌کند. اصطکاک با توجه به نوع سطوح خارجی که در تماسند و ماده‌ای که تحت شرایطی به عنوان ماده لغزنده (روانساز) بین این دو سطح قرار می‌گیرد به دو نوع اصطکاک خشک و اصطکاک مایع دسته‌بندی می‌شود. فرو رفتن یک چرخ در سطح زیر خود نیز می‌تواند یک نیرویی را به وجود آورد که مانع حرکت می‌گردد. به این نیروی اصطکاک، " اصطکاک غلتشی" می‌گویند. در این فصل فقط اصطکاک خشک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

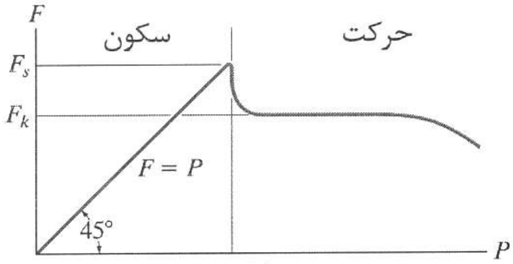
۱-۱۰ اصطکاک خشک



شکل ۱

چنانچه قطعه‌ای یکنواخت به وزن W (شکل (a) ۱) بر روی سطح زبر و غیرصُلب (تغییرشکل پذیر) قرار داشته باشد و به وسیله نیروی افقی P کشیده شود، نمودار جسم آزاد قطعه شکل (b) ۱ خواهد بود. سطح زیرین قطعه توزیع غیر یکنواختی از نیروهای نرمال ΔN_n و نیروهای اصطکاک ΔF_N را در طول سطح تماس بر قطعه اعمال می‌کند. در نمودار جسم آزاد شکل (c) این توزیع بارهای گسترده نرمال و اصطکاکی با برآیندهای N و F جایگزین شده‌اند. N در فاصله x در سمت راست خط اثر W اعمال می‌شود. این موقعیت، که با مرکز هندسی توزیع نیروی نرمال در شکل (b) ۱ منطبق است لازم می‌باشد، تا اثر "واژگون سازی" ناشی از P خنثی شود. مثلاً اگر P در ارتفاع h از سطح تماس اعمال شود (شکل (c) ۱)، در آن صورت تعادل گشتاور نیروها حول نقطه O وقتی برقرار خواهد بود که : $W \cdot x = P \cdot h \;\Rightarrow\; x = Ph/W$ گردد.

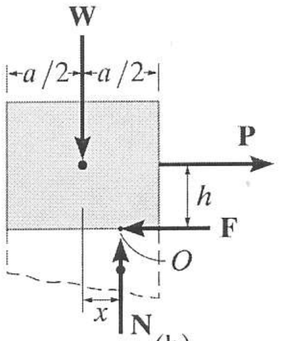
۲-۱۰ نیروی اصطکاک در شرایط مختلف



(a)

شکل (a) نیروی اصطکاک F را بر حسب نیروی اعمالی P نشان می‌دهد.
برای نیروی اصطکاک می‌توان سه حالت را در نظر گرفت:

۱ - نیروی اصطکاک قبل از حرکت و یا واژگونی (شرایط تعادل):



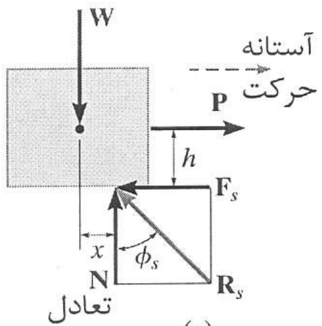
(b)

در این حالت نیروی اصطکاک F که با نیروی اعمالی P مقابله می‌کند از نیروی اصطکاک استاتیکی حدی $F_s = \mu_s N$ کمتر است و نقطه اثر آن در سطح تماس جسم با سطح زیر آن قرار دارد ($x \le a/2$):

$$F \le F_s = \mu_s N$$

در این شرایط فقط معادلات تعادل در اختیار می‌باشند و نیروی به‌دست آمده برای اصطکاک بایستی در نامعادله فوق صدق کند. در حل مسائلی که دارای این شرایط هستند، می‌توان جهتی برای امتداد F فرض نمود. صحت این فرض با توجه به علامت به‌دست آمده برای F راستی‌آزمایی می‌شود.

۲ - نیروی اصطکاک در آستانه حرکت :



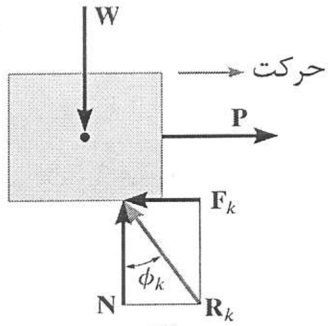
(c)

در این حالت نیروی اصطکاک به مقدار حدی $F_s = \mu_s N$ می‌رسد و اگر نیروی P بیشتر شود دیگر نمی‌تواند با آن مقابله کند و جسم شروع به لغزیدن می کند. به عبارت دیگر جسم در این حالت تعادل ناپایدار دارد. نیروی اصطکاک استاتیکی حدی F_s با نیروی نرمال N متناسب است:

$$F = F_s = \mu_s N$$

که در آن ثابت تناسب μ_s را ضریب اصطکاک استاتیکی می‌نامند. در حل این مسائل دیگر نمی‌توان در نمودار جسم آزاد جهتی برای F فرض نمود و بایستی همیشه با جهت صحیح نشان داده شود.

۳ - نیروی اصطکاک جنبشی (در حرکت):



(d)

چنانچه نیروی اعمالی P از نیروی اصطکاک حدی F_s بیشتر گردد، مقدار نیروی اصطکاک در سطح تماس به مقداری کوچکتر، یعنی نیروی اصطکاک جنبشی F_k کاهش می‌یابد. این نیرو نیز با نیروی نرمال N متناسب است:

$$F_k = \mu_k N$$

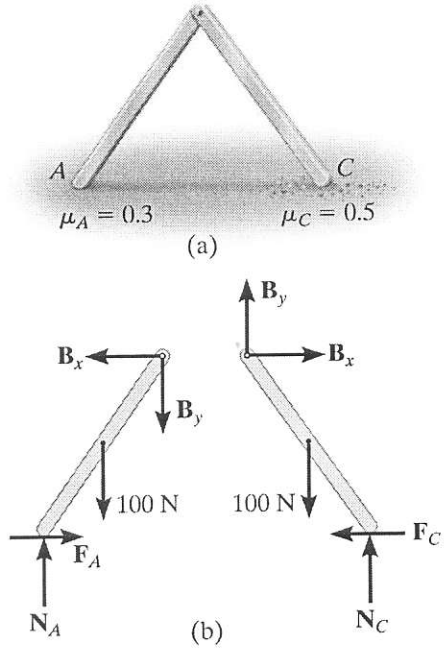
در اینجا ثابت تناسب μ_k ضریب اصطکاک جنبشی نامیده می‌شود ($\mu_k < \mu_s$).

۳-۱۰ انواع مسائل اصطکاک خشک

مسائل مکانیکی دارای نیروی اصطکاک خشک با توجه به رسم نمودار جسم آزاد آنها و شناسایی تعداد کل نیروهای مجهول و مقایسه آن با تعداد کل معادلات تعادل به سه تیپ مسئله دسته‌بندی می‌شوند:

تیپ ۱ : آستانه حرکت آشکار نیست:

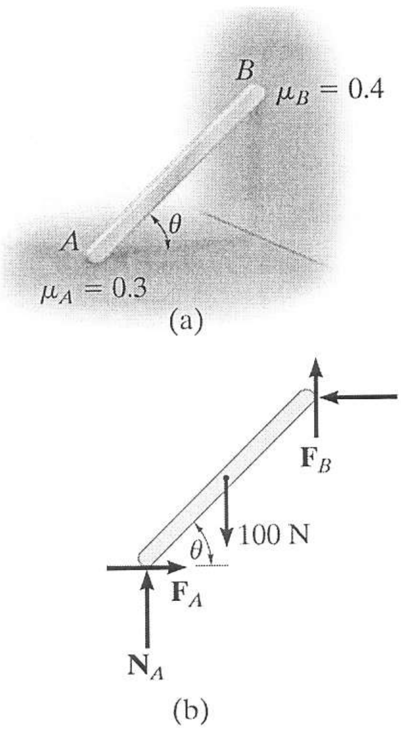
این تیپ مسائل مربوط به حالت تعادل می‌باشند و باید تعداد مجهول‌ها با تعداد معادلات تعادل برابری کنند. البته وقتی هم که نیروهای اصطکاک تعیین شدند بایستی مقدار عددی هر یک از آنها در نامعادله $F \leq F_s = \mu_s N$ صدق کنند. در غیر این صورت جسم در حالت تعادل باقی نمی ماند و خواهد لغزید. در شکل (a) ۱ مسئله‌ای از این تیپ نشان داده شده است. در اینجا برای تعیین این‌که قاب دو عضوی در حالت تعادل باقی خواهد ماند یا نه، باید ابتدا نیروی اصطکاک در نقاط A و C از شش معادله تعادل (سه معادله برای هر عضو) به‌دست آیند. وقتی F_A، N_A، F_C و N_C تعیین شدند، می‌توان نتیجه گرفت که میله‌ها در تعادل باقی می‌مانند یا نه. میله‌ها در حالت تعادل باقی خواهند ماند، به شرطی‌که نامعادله‌های $F_A \leq 0{,}3N_A$ و $F_C \leq 0{,}5N_C$ برقرار باشند.



شکل ۱

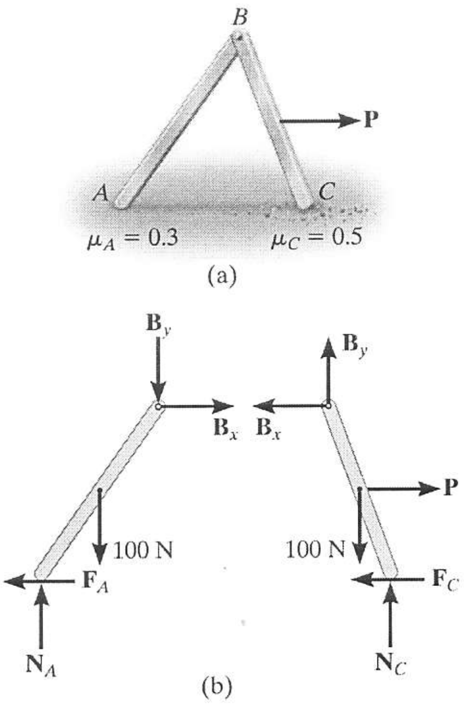
تیپ ۲ : همه نقاط تماس در آستانه حرکت می‌باشند:

در این حالت تعداد مجهول‌ها با تعداد معادلات تعادل به‌علاوه تعداد کل معادلات اصطکاک موجود $F = \mu N$ در نقاط تماس برابر خواهد بود. در آستانه حرکت برای هر نقطه تماس رابطه حدی $F = F_s = \mu_s N$ برقرار است، در حالی‌که اگر جسم در حالت لغزش باشد، نیروی اصطکاک جنبشی از رابطه $F_k = \mu_k N$ به‌دست می‌آید. مثلاً تعیین کوچکترین زاویه θ، که تحت آن می‌توان میله شکل (a) ۲ را به دیوار تکیه داد، بدون آن‌که بلغزد را در نظر بگیرید. نمودار جسم آزاد این میله در شکل (b) ۲ نشان داده شده است. در اینجا پنج مجهول با استفاده از سه معادله تعادل برای میله و دو معادله اصطکاک استاتیکی در آستانه حرکت تعیین می‌گردند. بنابراین در نقاط تماس A و B در میله، معادله‌های اصطکاک $F_A = 0{,}3N_A$ و $F_B = 0{,}4N_B$ نیز برقرار می‌باشند.



شکل ۲

تیپ ۳ : بعضی از نقاط تماس در آستانه حرکت می‌باشند:

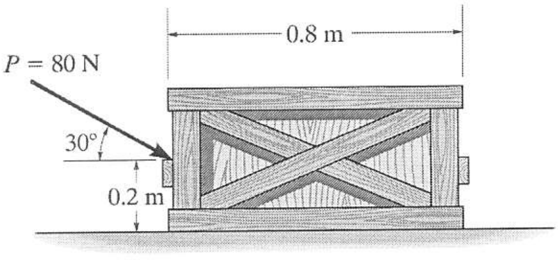


شکل ۱

در این حالت همه نقاط تماس جسم در وضعیت خروج از تعادل لزوماً به طور همزمان در آستانه حرکت قرار نمی‌گیرند و برای حرکت و یا آستانه حرکت چندین امکان وجود خواهد داشت. به عبارت دیگر تعداد مجهول‌ها از تعداد معادلات تعادل به‌علاوه تعداد کل معادلات اصطکاک موجود و یا معادله‌های شرطی برای واژگونی جسم کمتر است. مثلاً فرض کنید در قاب دو عضوی شکل (a) ۱، تعیین حداقل نیروی افقی لازم P برای ایجاد حرکت در آن مطرح است. چنانچه وزن هر عضو 100 N باشد، نمودار جسم آزاد هر دو عضو در شکل (b) ۱ نشان داده شده‌اند. در اینجا هفت مجهول وجود دارد که باید از شش معادله تعادل (۳ معادله برای هر عضو) به علاوه تنها یک معادله اصطکاک در آستانه حرکت برای نقطه A یا C به‌دست آیند. برای خروج از تعادل سه امکان وجود دارد: امکان اول وقتی است که نقطه A در آستانه حرکت قرار می‌گیرد ، ولی نقطه C به آستانه حرکت نرسیده است ($F_A = \mu_A N_A$ و $F_C < \mu_C N_C$). امکان دوم وقتی است که برعکس نقطه C در آستانه حرکت قرار گیرد، قبل از آن‌که نقطه A به آستانه حرکت برسد ($F_C = \mu_C N_C$ و $F_A < \mu_A N_A$). رخ دادن امکان سوم در عمل بسیار بعید است و آن وقتی است که نقاط A و C هر دو همزمان در آستانه حرکت قرار گیرند. در این حالت هفت مجهول در هشت معادله صدق خواهند کرد.

مثال ۱۰-۱

صندوق شکل مقابل دارای جرم 20 kg است. آیا اگر نیروی P= 80N مطابق شکل به صندوق اعمال گردد، تعادل آن برقرار می‌ماند یا نه؟ ضریب اصطکاک استاتیکی بین کف زمین و صندوق $\mu_s = 0{,}3$ است.

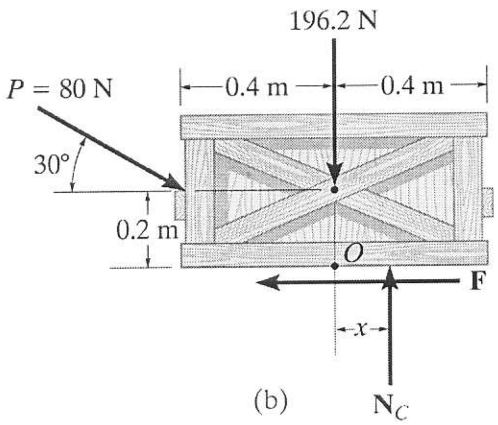


(a)

حل

نمودار جسم آزاد:

با توجه به نمودار جسم آزاد صندوق، نیروی نرمال N_C بایستی به فاصله x از خط مرکزی صندوق اعمال شود، تا با گشتاور واژگونی ناشی از نیروی P مقابله نماید.



(b)

معادلات تعادل:

سه مجهول F ، N_C و x با استفاده از سه معادله تعادل بدست می‌آیند (تیپ ۱):

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad 80\cos 30^\circ - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 69{,}3\ \text{N}$$

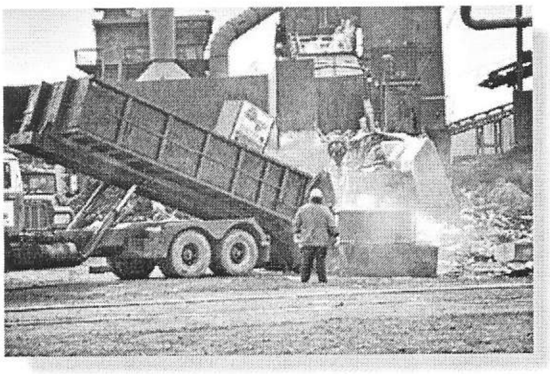
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -80\sin 30^\circ + N_C - 196{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 236\ \text{N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0: \quad 80\sin 30^\circ \cdot 0{,}4 - 80\cos 30^\circ \cdot 0{,}2 + N_C \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -0{,}00908\ \text{m} = -9{,}08\ \text{mm}$$

علامت منفی برای x حاکی از آن است که نیروی نرمال N_C در واقع به فاصله اندکی در سمت چپ خط مرکزی صندوق اعمال می‌شود. صندوق واژگون هم نمی‌شود، زیرا $x < 0{,}4$ m است. از طرفی نیروی اصطکاک $F = 69{,}3$ N از حداکثر نیروی اصطکاک در آستانه لغزش، یعنی $\mu_s \cdot N_C = 70{,}8$ N نیز کمی کمتر است، در نتیجه صندوق نخواهد لغزید.

مثال ۱۰-۲

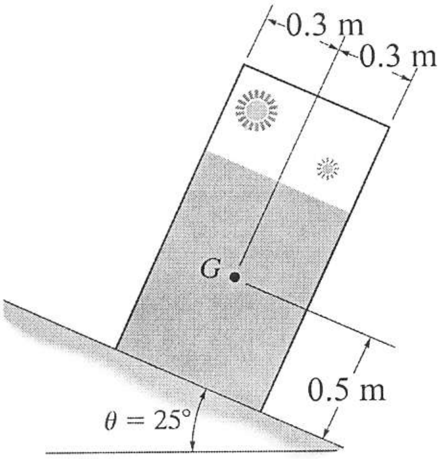
همان‌طور که شکل (a) نشان می‌دهد، در اثر تخلیه بار کامیون که متشکل از چند دستگاه اتومات فروش سکه‌ای است و کج شدن مخزن بار کامیون به اندازه زاویه $\theta = 25°$، دستگاه‌های داخل مخزن بار شروع به لغزیدن کرده و تخلیه می‌شوند. مطلوب است تعیین ضریب اصطکاک استاتیکی بین دستگاه‌های اتومات فروش سکه‌ای و کف مخزن بار کامیون.



(a)

حل

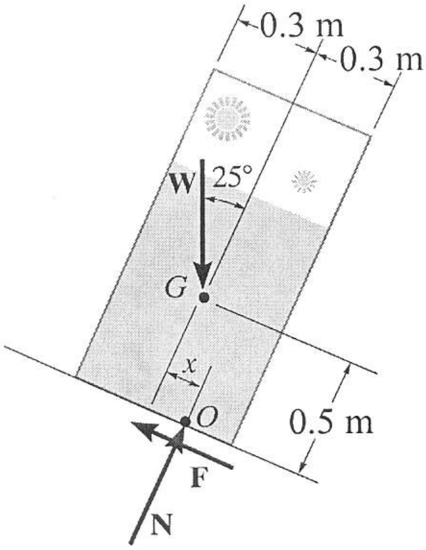
شکل (b) مدل ایده‌آل‌سازی شده یک دستگاه اتومات فروش سکه‌ای را نشان می‌دهد. ابعاد دستگاه اتومات اندازه‌گذاری و مرکز ثقل آن با G مشخص شده است. فرض می‌شود وزن هر دستگاه اتومات W است.



(b)

نمودار جسم آزاد:

همان‌طور که شکل (c) نشان می‌دهد، نیروی نرمال N به فاصله x از وسط کف دستگاه اتومات در نظر گرفته شده است و چهار مجهول N ، F ، μ_s و x وجود دارد.



(c)

معادلات تعادل:

$+\searrow \Sigma F_x = 0: \qquad W\sin 25° - F = 0 \qquad (1)$

$+\nearrow \Sigma F_y = 0: \qquad N - W\cos 25° = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0: \quad -W\sin 25° \cdot 0{,}5 + W\cos 25° \cdot x = 0 \qquad (3)$

با توجه به این‌که دستگاه‌ها به ازای زاویه $\theta = 25°$ در آستانه لغزش قرار می‌گیرند (تیپ ۲)، می‌توان از معادله اصطکاک $F = F_s = \mu_s N$ در آستانه حرکت نیز استفاده نمود. از معادله اصطکاک و معادله (1) نتیجه می‌شود :

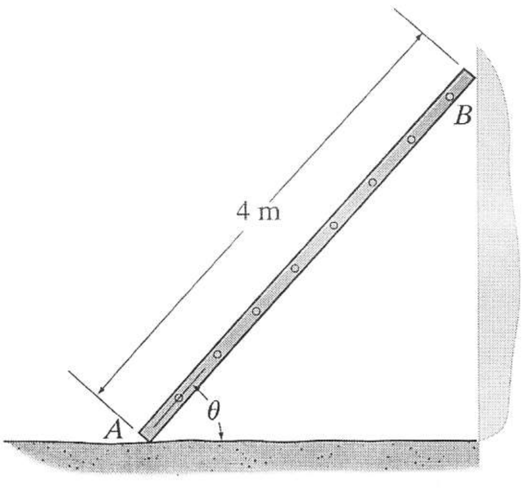
$$W\sin 25° = \mu_s (W\cos 25°) \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \tan 25° = 0{,}466$$

همان‌طور محاسبات نشان می‌دهد، زاویه θ مستقل از وزن دستگاه‌های اتومات W است.

تذکر: از معادله (3) نتیجه می‌شود که $x = 0{,}233 \text{ m} < 0{,}3 \text{ m}$ است. این بدان معنی است که دستگاه‌های فروش اتومات قبل از آن‌که واژگون شوند، شروع به لغزیدن می‌کنند.

مثال ۱۰-۳

نردبانی به جرم 10 kg مطابق شکل (a) در نقطه B به دیوار صاف و بدون اصطکاکی تکیه دارد. انتهای دیگر این نردبان در نقطه A بر روی سطح زبری قرار دارد که ضریب اصطکاک استاتیکی آن $\mu_s = 0,3$ است. مطلوب است تعیین زاویه شیب نردبان θ و واکنش قائم در B در آستانه لغزش نردبان.

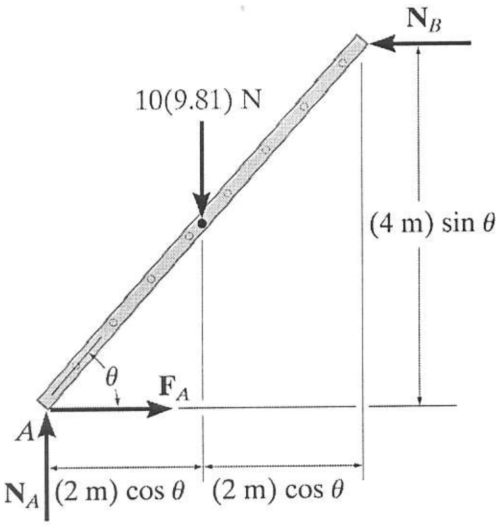


(a)

حل

نمودار جسم آزاد:

با توجه به نمودار جسم آزاد نردبان، همه نقاط تماس آن در آستانه حرکت می‌باشند (تیپ ۲). نیروی اصطکاک F_A باید به طرف راست باشد، زیرا حرکت نردبان به سمت چپ خواهد بود.



(b)

معادلات تعادل و اصطکاک در آستانه حرکت:

چون نردبان در آستانه لغزش است :

$$F_A = \mu_s \cdot N_A = 0,3 \cdot N_A$$

در نتیجه:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\,; \quad \Rightarrow \quad N_A - 10 \cdot 9,81 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = 98,1\ \mathrm{N}$$

و بنابراین:

$$F_A = 0,3 \cdot N_A = 29,43\ \mathrm{N}$$

اکنون می‌توان عکس‌العمل قائم N_B را نیز بدست آورد:

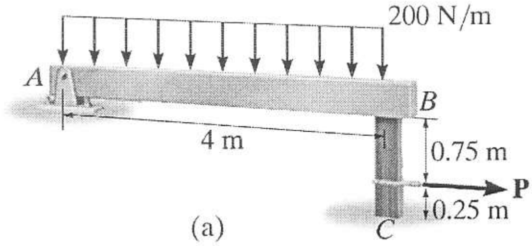
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad 29,43 - N_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_B = 29,43\ \mathrm{N}$$

و سرانجام با جمع بستن گشتاورها حول نقطه A می‌توان زاویه θ را بدست آورد:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad 29,43 \cdot 4 \cdot \sin\theta - 10 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \cos\theta = 0$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = 1,6667 \quad \Rightarrow \quad \theta = 59,04^\circ$$

مثال ۱۰-۴

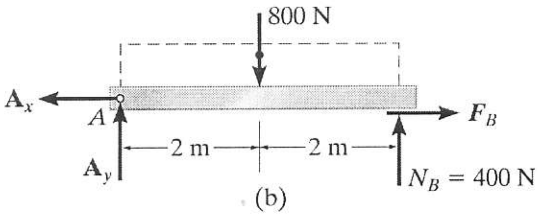


(a)

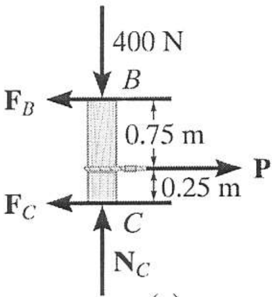
به تیر AB در شکل (a) یک بار گسترده یکنواخت 200 N/m اثر می‌کند. این تیر در سمت چپ به مفصل ثابت A و در نقطه B به ستون BC تکیه داده است. چنانچه ضرایب اصطکاک استاتیکی در B و C به ترتیب $\mu_B = 0{,}2$ و $\mu_C = 0{,}5$ باشد، مطلوب است تعیین نیروی لازم P برای بیرون کشیدن ستون از زیر تیر. از وزن عضوها و ضخامت تیر می‌توان چشم‌پوشی نمود.

حل

نمودار جسم آزاد:



(b)



(c)

با توجه به نمودار جسم آزاد تیر در شکل (b) و استفاده از معادله گشتاور $\Sigma M_A = 0$، $N_B = 400$ N به‌دست می‌آید. این نیرو در نمودار جسم آزاد ستون در شکل (c) نیز نشان داده شده است. در این عضو چهار مجهول F_B، P، F_C و N_C وجود دارد، که با استفاده از سه معادله تعادل در ستون و یک معادله اصطکاک در نقطه B و یا نقطه C در ستون به‌دست می‌آیند (تیپ ۳) .

معادلات تعادل و اصطکاک در آستانه حرکت:

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad P - F_B - F_C = 0 \qquad (1)$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad N_C - 400\text{ N} = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \qquad -P\cdot(0{,}25\text{m}) + F_B\cdot(1\text{m}) = 0 \qquad (3)$

برای معادله اصطکاک در آستانه حرکت دو حالت ممکن است رخ دهد:

۱) ستون در آستانه لغزیدن در سطح تماس B و چرخیدن حول نقطه C قرار دارد:

در این وضعیت بایستی $F_C \le \mu_C N_C$ باشد و $F_B = \mu_B N_B \;\Rightarrow\; F_B = 0{,}2\cdot 400\text{ N} = 80\text{ N}$ خواهد بود.

با این نتیجه و حل معادلات (1) تا (3) : $N_C = 400$ N ; $F_C = 240$ N ; $P = 320$ N ;

با بررسی $F_C = 240\text{ N} > \mu_C N_C = 0{,}5\cdot 400\text{ N} = 200\text{ N}$ این تناقض به‌دست می‌آید که قبل از این وضعیت ستون در نقطه C لغزیده است. به این ترتیب باید حالت دیگر را بررسی نمود.

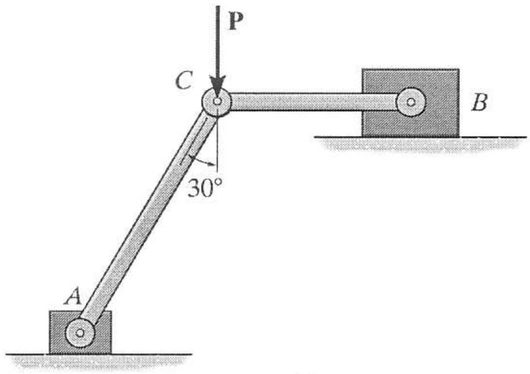
۲) ستون در آستانه لغزیدن در سطح تماس C و چرخیدن حول نقطه B قرار دارد:

در این وضعیت بایستی $F_B \le \mu_B N_B$ باشد و (4) $F_C = \mu_C N_C \;\Rightarrow\; F_C = 0{,}5\cdot N_C$ خواهد بود.

با حل معادلات (1) تا (4) : $F_B = 66{,}7$ N ; $F_C = 200$ N ; $N_C = 400$ N ; $P = 267$ N ;

مقدار P برای این حالت کمتر است، یعنی آن‌که این وضعیت زودتر رخ خواهد داد.

مثال ۱۰-۵

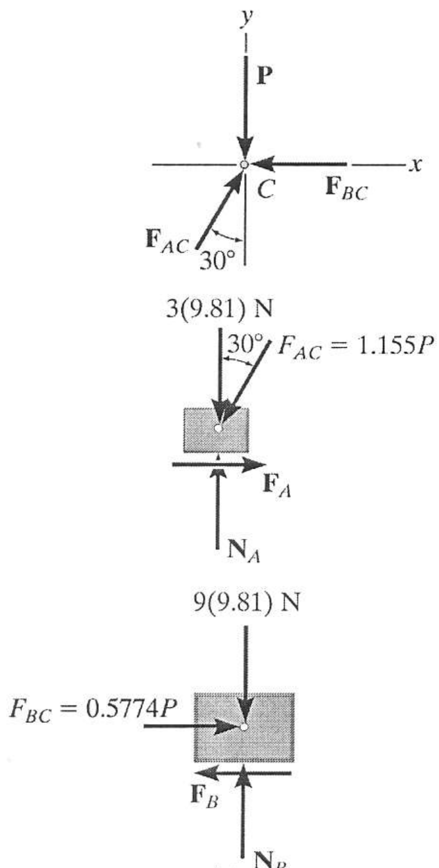


(a)

مکانیزم شکل (a) از دو میله بی وزن AC و BC تشکیل شده است، که توسط پین C به یکدیگر متصل شده‌اند. به انتهای دیگر این دو میله مطابق شکل دو قطعه A و B هر یک به جرم 3 kg و 9 kg مفصل شده‌اند. مطلوب است تعیین بزرگترین نیروی عمودی لازم P، که می‌توان به پین C اعمال نمود، بدون آن‌که باعث حرکت مکانیزم شود. ضریب اصطکاک استاتیکی بین قطعات و سطح تماس آن‌ها $\mu_s = 0{,}3$ است

حل

نمودارهای جسم آزاد:



(b)

با توجه به این‌که میله‌ها عضوهای دو نیرویی هستند، جهت آن‌ها در نمودارهای جسم آزاد پین C و قطعات A و B در شکل (b) مشخص است. چون مؤلفه افقی F_{AC}، که به قطعه A اعمال می‌شود به سمت چپ است، بایستی برای عکس‌العمل کردن آن نیروی اصطکاک F_A به سمت راست اثر کند. به همین ترتیب نیز جهت نیروی اصطکاک F_B در قطعه B بایستی خلاف جهت نیروی F_{BC} باشد. در این شکل‌ها هفت مجهول وجود دارد که باید از شش معادله تعادل (دو معادله برای پین و دو معادله برای هر یک از قطعات) و یک معادله اصطکاک در یکی از قطعات A یا B به‌دست آیند (تیپ ۳).

معادلات تعادل و اصطکاک در آستانه حرکت:

با استفاده از تعادل پین C می‌توان نیروی میله‌های AC و BC را بر حسب نیروی P بیان نمود:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad F_{AC}\cos 30° - P = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AC} = 1{,}155P$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad 1{,}155P\sin 30° - F_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 0{,}5774P$$

با استفاده از رابطه بیان شده برای F_{AC} در معادلات تعادل قطعه A :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad F_A - 1{,}155P \cdot \sin 30° = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 0{,}5774P \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad N_A - 1{,}155P\cos 30° - 3 \cdot 9{,}81\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = P + 29{,}43\ \text{N} \qquad (2)$$

همچنین با استفاده از رابطه بیان شده برای F_{BC} در معادلات تعادل قطعه B :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad (0{,}5774P) - F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 0{,}5774P \qquad (3)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad N_B - 9 \cdot 9{,}81\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = 88{,}29\ \text{N}$$

[۱] برای آغاز حرکت مکانیزم دو امکان وجود دارد: یا ابتدا قطعه A شروع به لغزیدن می‌کند، در حالی‌که قطعه B هنوز به آستانه حرکت نرسیده است و یا آن‌که برعکس لغزش ابتدا در قطعه B صورت می‌گیرد و قطعه A ساکن می‌ماند.
چنانچه حالت اول رخ دهد، معادله اصطکاک در آستانه حرکت فقط برای قطعه A برقرار خواهد بود:

$$F_A = \mu_s N_A = 0{,}3 N_A \qquad (4)$$

از قرار دادن معادلات (1) و (2) در معادله (4) نتیجه می‌شود:

$$0{,}5774P = 0{,}3(P + 29{,}43) \quad \Rightarrow \quad P = 31{,}8\ \text{N}$$

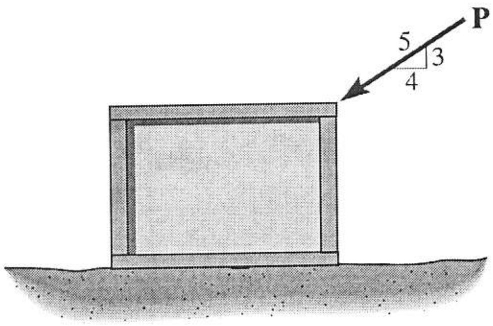
این جواب در صورتی قابل قبول است که قطعه B هنوز به آستانه حرکت نرسیده باشد، یعنی:

$$F_B = 0{,}5774P = 18{,}4 < \mu_s N_B = 0{,}3(88{,}29\ \text{N}) = 26{,}5\text{N}$$

به این ترتیب فرض اول صحیح است و قطعه B نخواهد لغزید.
اگر نامعادله بالا برقرار نمی بود، می‌بایستی مقدار P را بر اساس امکان دوم به‌دست می‌آوردیم.

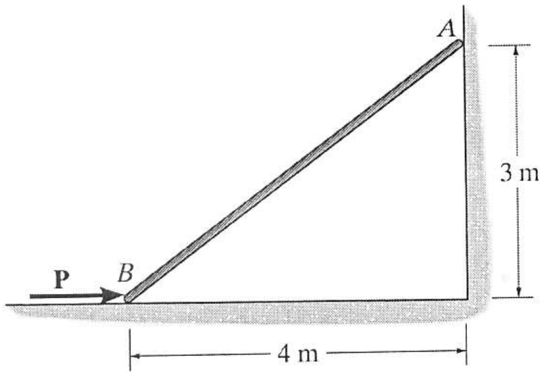
تمرین ۱۰-۱

صندوقی مطابق شکل 50 kg جرم دارد. با فرض آن که P = 200 N باشد، مطلوب است تعیین نیروی اصطکاکی که بین صندوق و زمین ایجاد می‌شود.
ضریب اصطکاک استاتیکی بین کف زمین و صندوق $\mu_s = 0{,}3$ است.



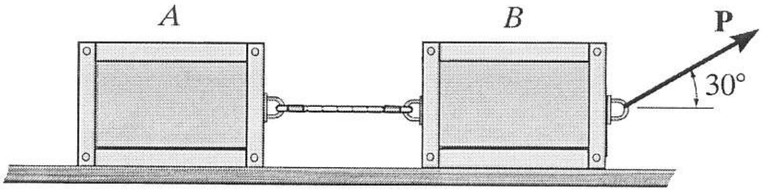
تمرین ۱۰-۲

حداقل نیروی لازم P را چنان تعیین کنید، که مانع لغزش میله AB مطابق شکل به جرم 30 kg گردد. سطح تماس میله در نقطه B صاف است ولی نقطه A بر روی سطح زبری قرار دارد، که ضریب اصطکاک استاتیکی آن برابر $\mu_s = 0{,}2$ است.



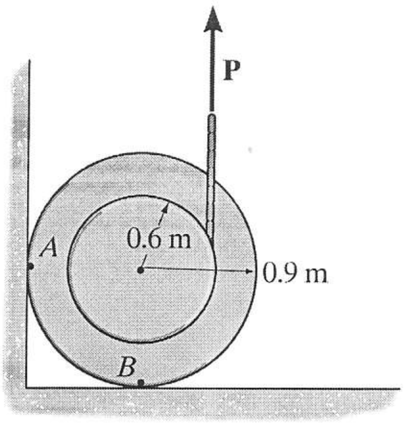
تمرین ۱۰-۳

مطلوب است تعیین مقدار حداکثر نیروی $\vec{P}$ که می‌توان اعمال نمود، بدون آنکه دو صندوق A و B مطابق شکل هر یک به جرم 50 kg به حرکت در آیند. ضریب اصطکاک استاتیکی بین هر صندوق و کف زمین $\mu_s = 0{,}25$ است.



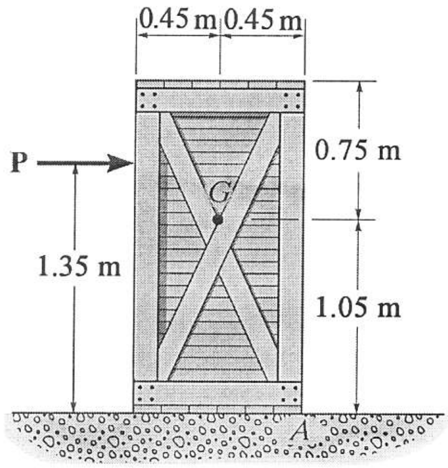
تمرین ۱۰-۴

اگر ضریب اصطکاک استاتیکی در نقاط تماس A و B برابر $\mu_s = 0{,}3$ باشد، مطلوب است حداکثر نیروی P که می‌توان اعمال نمود، بدون آن‌که قرقره شکل مقابل به جرم 100 kg به حرکت در آید.



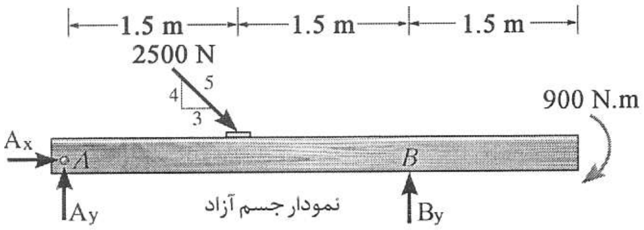
تمرین ۱۰-۵

مطلوب است حداکثر نیروی P که می‌توان به صندوقی مطابق شکل به جرم 125kg اعمال نمود، بدون آن‌که صندوق به حرکت در آید. مرکز ثقل صندوق G است و ضریب اصطکاک استاتیکی بین زمین و کف صندوق برابر $\mu_s = 0{,}4$ می‌باشد.



حل تمرین‌های فصل ۷

حل تمرین ۷-۱:



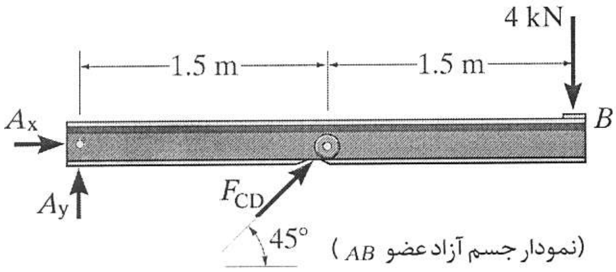
شکل مقابل نمودار جسم آزاد تیر را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -900\ \text{Nm} + [B_y \cdot 3]\ \text{Nm} - [2500\left(\frac{4}{5}\right) \cdot 1{,}5]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 1300\ \text{N}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + 2500\left(\frac{3}{5}\right)\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_X = -1500\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + 1300\ \text{N} - 2500\left(\frac{4}{5}\right)\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 700\ \text{N}$$

حل تمرین ۷-۲:



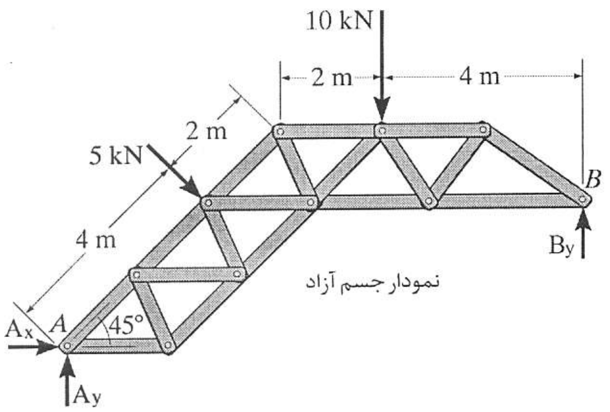
شکل مقابل نمودار جسم آزاد تیر را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad [F_{CD} \sin 45° \cdot 1{,}5]\ \text{kNm} - [4 \cdot 3]\ \text{kNm} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 11{,}314\ \text{kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + 11{,}314 \cos 45°\ \text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_X = -8\ \text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + 11{,}314 \sin 45°\ \text{kN} - 4\ \text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -4\ \text{kN}$$

حل تمرین ۷-۳:



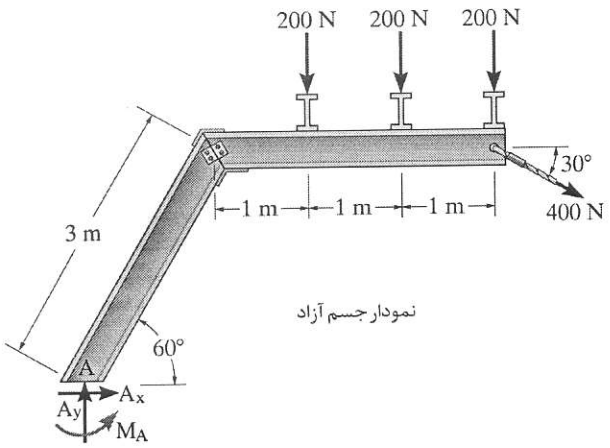
شکل مقابل نمودار جسم آزاد خرپا را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad [B_y \cdot (6 + 6\cos 45°)]\text{kNm} - [10 \cdot (2 + 6\cos 45°)]\text{kNm} - [5 \cdot 4]\text{kNm} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 8{,}047\ \text{kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + 5\cos 45°\ \text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_X = -3{,}536\ \text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 5\sin 45°\ \text{kN} - 10\ \text{kN} + 8{,}047\ \text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 5{,}489\ \text{kN}$$

حل تمرین ۷-۴:



شکل مقابل نمودار جسم آزاد تیر را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :

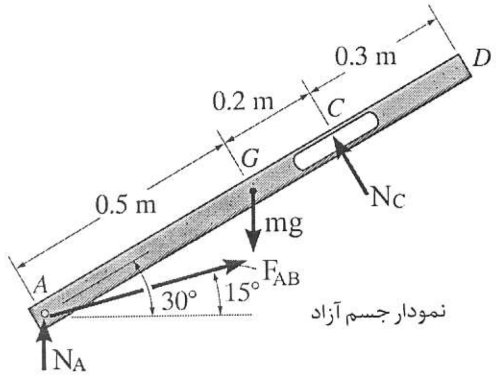
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad M_A - [600\cdot(2+3\cos 60°)]\ \text{Nm} - [400\sin 30°\cdot(3+3\cos 60°)]\ \text{Nm}$$

$$-[400\cos 30°\cdot 3\sin 60°]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 3900\ \text{Nm}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + 400\cos 30°\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_X = -346{,}4\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - (200\cdot 3)\ \text{N} - 400\sin 30°\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -800\ \text{N}$$

حل تمرین ۷-۵:



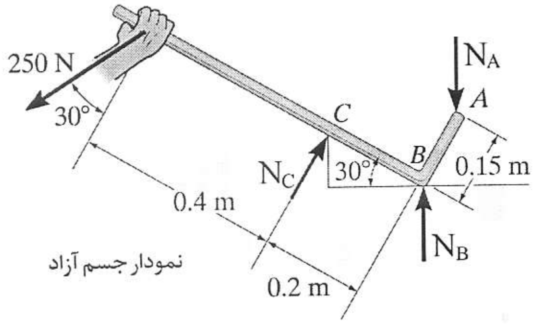
شکل مقابل نمودار جسم آزاد میله را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad [N_C\cdot 0{,}7]\ \text{Nm} - [mg\sin 60°\cdot 0{,}5]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 151{,}71\ \text{N}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad F_{AB}\cos 15°\ \text{N} - N_C\cos 60°\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = -78{,}53\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_A + F_{AB}\sin 15° - (25\cdot 9{,}81)\ \text{N} - N_C\sin 60° = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = 93{,}54\ \text{N}$$

حل تمرین ۷-۶:



شکل مقابل نمودار جسم آزاد دیلم را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :

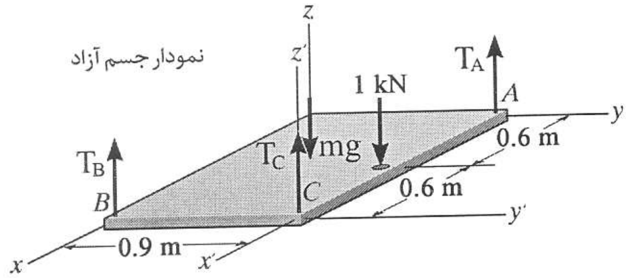
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad -250\sin 60°\ \text{N} + N_C\cos 60°\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 433{,}0\ \text{N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \quad [250\cos 30°\cdot 0{,}6]\ \text{Nm} - [N_C\cdot 0{,}2]\ \text{Nm} - [N_A\cdot(0{,}15\cos 60°)] = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = 577{,}35\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -250\cos 60°\ \text{N} + N_C\sin 60°\ \text{N} + N_B - N_A = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = 327{,}35\ \text{N}$$

حل تمرین ۷-۷:

شکل مقابل نمودار جسم آزاد میله را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :



$mg = 2{,}5\ kN$

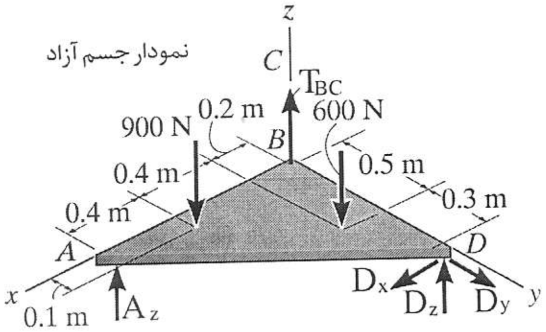
$\Sigma M_{x'} = 0: \quad -[T_B \cdot 0{,}9]\ kNm + [mg \cdot 0{,}45]\ kNm = 0 \quad \Rightarrow \quad T_B = 1{,}25\ kN$

$\Sigma M_{y'} = 0: \quad [T_A \cdot 1{,}2]\ kNm - [1 \cdot 0{,}6]\ kNm - [mg \cdot 0{,}6]\ kNm = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = 1{,}75\ kN$

$\Sigma F_z = 0: \quad T_A + T_B + T_C - 1\ kN - 2{,}5\ kN = 0 \quad \Rightarrow \quad T_C = 0{,}5\ kN$

حل تمرین ۷-۸:

شکل مقابل نمودار جسم آزاد میله را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :



$\Sigma F_x = 0: \quad D_x = 0$

$\Sigma F_y = 0: \quad D_y = 0$

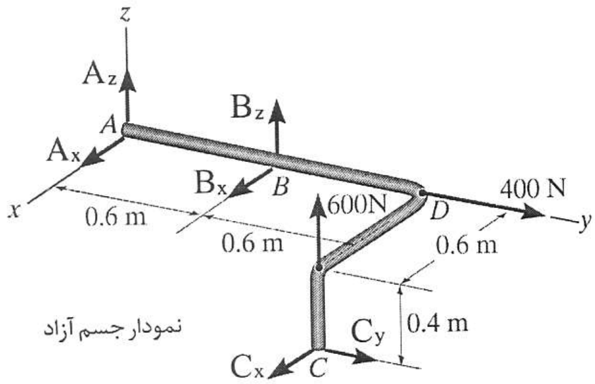
$\Sigma M_y = 0: \quad [600 \cdot 0{,}2]\ Nm + [900 \cdot 0{,}6]\ Nm - [A_z \cdot 1]\ Nm = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = 660\ N$

$\Sigma M_x = 0: \quad [D_z \cdot 0{,}8]\ Nm - [600 \cdot 0{,}5]\ Nm - [900 \cdot 0{,}1]\ Nm = 0 \quad \Rightarrow \quad D_z = 487{,}5\ N$

$\Sigma F_z = 0: \quad A_z + T_{BC} + D_z - 600N - 900\ N = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BC} = 352{,}5\ N$

حل تمرین ۷-۹:

شکل مقابل نمودار جسم آزاد میله را نشان می‌دهد.
با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :



$\Sigma M_y = 0: \quad -[C_x \cdot 0{,}4]\ Nm - [600 \cdot 0{,}6]\ Nm = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = -900\ N$

$\Sigma F_y = 0: \quad C_y + 400\ N = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = -400\ N$

$\Sigma M_z = 0: \quad -[B_x \cdot 0{,}6]\ Nm - [C_x \cdot 1{,}2]\ Nm + [C_y \cdot 0{,}6]\ Nm = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 1400\ N$

$\Sigma M_x = 0: \quad [B_z \cdot 0{,}6]\ Nm + [600 \cdot 1{,}2]\ Nm + [C_y \cdot 0{,}4]\ Nm = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z = -933{,}3\ N$

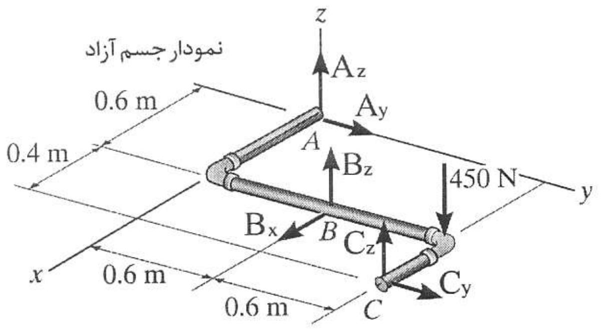
$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + B_x + C_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -500\ N$

$\Sigma F_z = 0: \quad A_z + B_z + 600\ N = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = 333{,}3\ N$

حل تمرین ۷-۱۰:

شکل مقابل نمودار جسم آزاد مجموعه لوله‌ای را نشان می‌دهد.

با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :



$\Sigma F_x = 0:$ $\Rightarrow$ $B_x = 0$

$\Sigma M_z = 0:\ -[B_x \cdot 0{,}6]\ \text{Nm} + [C_y \cdot 1]\ \text{Nm} = 0$ $\Rightarrow$ $C_y = 0$

$\Sigma F_y = 0:\ A_y + C_y = 0$ $\Rightarrow$ $A_y = 0$

$\Sigma M_x = 0:\ [B_z \cdot 0{,}6]\ \text{Nm} + [C_z \cdot 1{,}2]\ \text{Nm} - [450 \cdot 1{,}2]\ \text{Nm} = 0$

$\Rightarrow\ B_z + 2C_z = 900\ \text{N}$ (1)

$\Sigma M_y = 0:\ -[B_z \cdot 0{,}6]\ \text{Nm} - [C_z \cdot 1] + [450 \cdot 0{,}6]\ \text{Nm} = 0$

$\Rightarrow\ B_z + \frac{10}{6} C_z = 450\ \text{N}$ (2)

از (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$B_z = -1800\ \text{N}$, $C_z = 1350\ \text{N}$

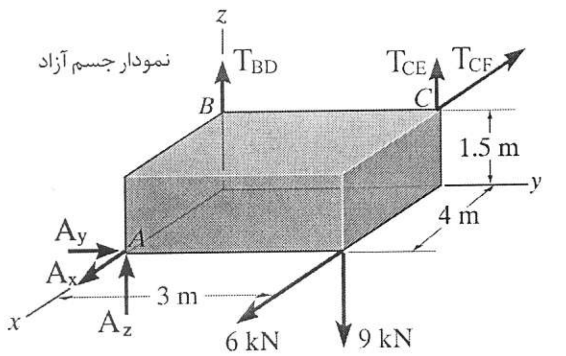
و بالاخره

$\Sigma F_z = 0:\ A_z + B_z + C_z - 450\ \text{N} = 0$ $\Rightarrow$ $A_z = 900\ \text{N}$

حل تمرین ۷-۱۱:

شکل مقابل نمودار جسم آزاد قطعه را نشان می‌دهد.

با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :



$\Sigma F_y = 0:$ $\Rightarrow$ $A_y = 0$

$\Sigma M_x = 0:\ [T_{CE} \cdot 3]\ \text{kNm} - [9 \cdot 3]\ \text{kNm} = 0$ $\Rightarrow$ $T_{CE} = 9\ \text{kN}$

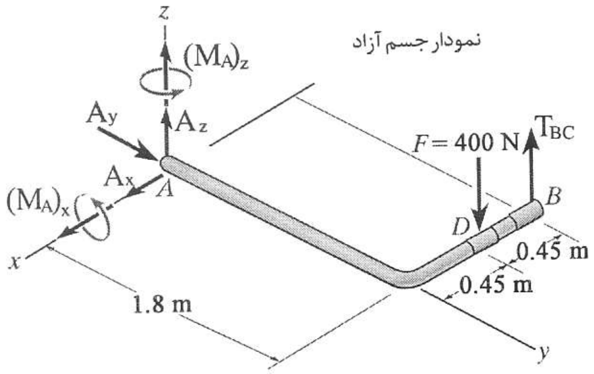
$\Sigma M_z = 0:\ [A_y \cdot 4]\ \text{kNm} - [6 \cdot 3]\ \text{kNm} + [T_{CF} \cdot 3]\ \text{kNm} = 0$ $\Rightarrow$ $T_{CF} = 6\ \text{kN}$

$\Sigma M_y = 0:\ -[A_z \cdot 4]\ \text{kNm} + [9 \cdot 4]\ \text{kNm} - [T_{CF} \cdot 1{,}5]\ \text{kNm} = 0$ $\Rightarrow$ $A_z = 6{,}75\ \text{kN}$

$\Sigma F_x = 0:\ A_x + 6\ \text{kN} - T_{CF} = 0$ $\Rightarrow$ $A_x = 0$

$\Sigma F_z = 0:\ A_z - 9\ \text{kN} + T_{BD} + T_{CE} = 0$ $\Rightarrow$ $T_{BD} = -6{,}75\ \text{kN}$

حل تمرین ۷-۱۲:



شکل مقابل نمودار جسم آزاد میله را نشان می‌دهد. به غیر از تک یاتاقان محوری (کف‌گرد) A تکیه‌گاه دیگری وجود ندارد که گشتاورهای $(M_A)_x$ و $(M_A)_z$ را عکس‌العمل کند.

با استفاده از معادلات تعادل نیروها و گشتاورها :

$\Sigma F_y = 0: \quad \Rightarrow \quad A_y = 0$

$\Sigma M_y = 0: \quad [T_{BC} \cdot 0,9]\ \text{Nm} - [400 \cdot 0,45]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BC} = 200\ \text{N}$

$\Sigma F_z = 0: \quad A_z + T_{BC} - 400\ \text{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = 200\ \text{N}$

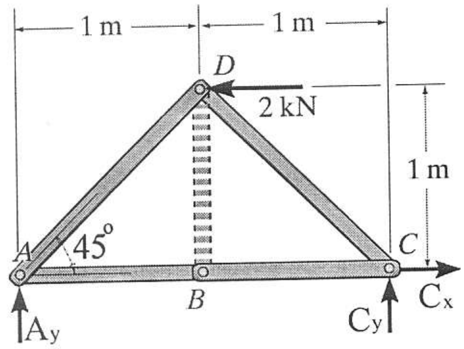
$\Sigma F_x = 0: \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$

$\Sigma M_x = 0: \quad (M_A)_x - [400 \cdot 1,8]\ \text{Nm} + [T_{BC} \cdot 1,8]\ \text{Nm} = 0 \quad \Rightarrow \quad (M_A)_x = 360\ \text{Nm}$

$\Sigma M_z = 0: \quad \Rightarrow \quad (M_A)_z = 0$

حل تمرین‌های فصل ۸

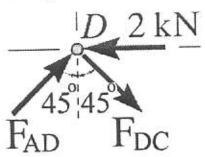
حل تمرین ۸-۱:



عضو با نیروی صفر:

مفصل B سه عضو دارد که دو عضو آن هم‌خط هستند. در نتیجه عضو BD عضوی با نیروی صفر است (رجوع شود به شکل مقابل).

مفصل D :

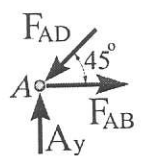


$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{AD} \cos 45° - F_{DC} \cos 45° = 0 \;\Rightarrow\; F_{AD} = F_{DC}$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad F_{AD} \sin 45° + F_{DC} \sin 45° - 2\ \text{kN} = 0$

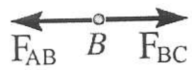
$2F_{AD} \sin 45° = 2 \;\Rightarrow\; F_{AD} = \sqrt{2} = 1,414\ \text{kN (C)}\ ;\ F_{DC} = 1,414\ \text{kN (T)}$

مفصل A :



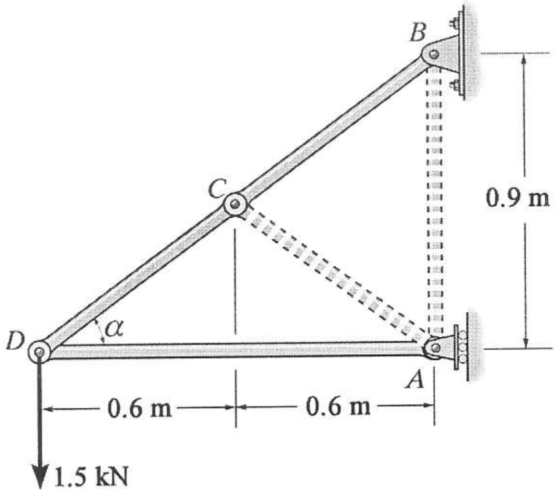
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad F_{AB} - F_{AD} \cos 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 1\ \text{kN (T)}$

مفصل B :



$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = F_{AB} = 1\ \text{kN (T)}$

حل تمرین ۸-۲:

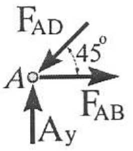


$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0,9}{1,2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\alpha = 0,6 \\ \cos\alpha = 0,8 \end{cases}$$

عضوهای با نیروی صفر:

مفصل C سه عضو دارد که دو عضو آن هم‌خط هستند. در نتیجه عضو AC عضوی با نیروی صفر است. بنابراین عضو AC هم در مفصل A صفر است، این مفصل سه عضو خواهد داشت که دو تای آن‌ها هم‌خط هستند (عضو AD و تکیه‌گاه غلتکی). در نتیجه عضو AB نیز عضوی با نیروی صفر است (رجوع شود به شکل مقابل). $F_{AC} = F_{AB} = 0$

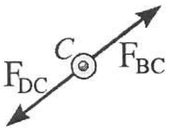
مفصل D :



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{DC}\ \sin\alpha - 1,5\ \text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC} = 2,5\ \text{kN (T)}$$

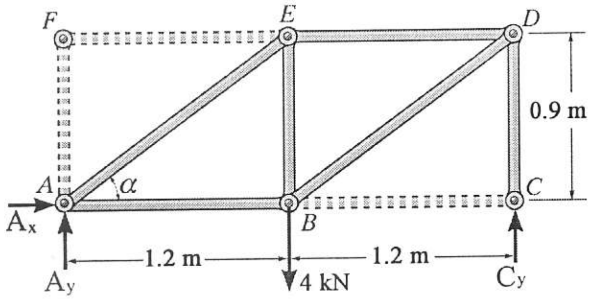
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad F_{DC} \cos\alpha - F_{AD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} = 2\ \text{kN (C)}$$

مفصل C :



$$+\nearrow \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - F_{DC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 2,5\ \text{kN (T)}$$

حل تمرین ۸-۳:



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0,9}{1,2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\alpha = 0,6 \\ \cos\alpha = 0,8 \end{cases}$$

عضوهای با نیروی صفر:

مفصل F فقط دو عضو غیر همراستا دارد و نیروی خارجی به این مفصل اعمال نمی‌شود، در نتیجه عضوهای AF و EF عضوهای با نیروی صفر هستند.

همچنین مفصل C سه عضو دارد که دو تای آن‌ها یعنی عضو DC و تکیه‌گاه غلتکی هم‌خط هستند. در نتیجه عضو BC نیز عضوی با نیروی صفر است (رجوع شود به شکل مقابل). بنابراین $F_{AF} = F_{EF} = F_{BC} = 0$

سیستم کل:

قبل از تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نمی‌توان هیچ مفصلی را تحلیل نمود، زیرا به همه مفصل‌ها به غیر از مفصل C بیش از دو نیروی مجهول اعمال می‌شود و به خود مفصل C نیز نیروی معلومی اعمال نمی‌شود. شکل بالا نمودار جسم آزاد کل خرپا را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلات تعادل:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (C_y \cdot 2,4\ \text{m}) - (4\ \text{kN} \cdot 1,2\ \text{m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 2\ \text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + C_y - 4\ \text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 2\ \text{kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0$$

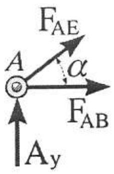
ادامه حل تمرین ۸-۳:

اکنون می‌توان تحلیل را از مفصل A و یا مفصل C آغاز نمود، زیرا هر یک از این مفصل‌ها حداقل یک نیروی معلوم و حداکثر دو نیروی مجهول دارند.

مفصل C :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - F_{DC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC} = 2 \text{ kN (C)}$$

مفصل A :

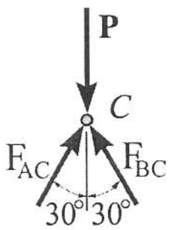


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + F_{AE} \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AE} = -3{,}333 \text{ kN}$$

علامت منفی بیانگر آن است که جهت F_{AE} خلاف جهت نشان‌داده شده در شکل است. بنابراین:

$$F_{AE} = 3{,}333 \text{ kN (C)}$$

حل تمرین ۸-۴:



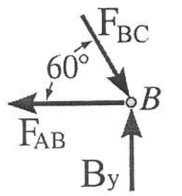
مفصل C : هر دو عضو AC و BC فشاری هستند.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad F_{AC} = F_{BC}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2F_{AC} \cos 30^\circ - P = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{AC} = F_{BC} = \frac{P}{2\cos 30^\circ} = 0{,}5774P \text{ (C)}$$

مفصل B :



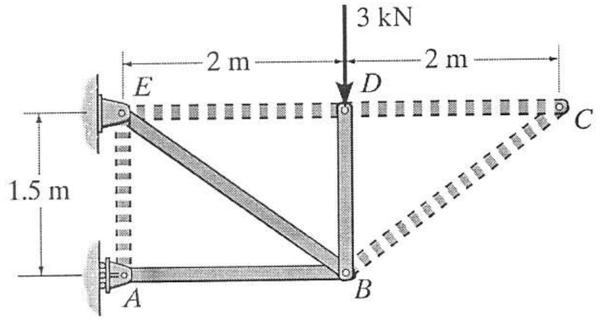
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} \cos 60^\circ - F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow F_{AB} = 0{,}2887P \text{ (T)}$$

اگر مقدار مجاز عضوهای فشاری ($F_{AC} = F_{BC} = 1{,}5$ kN) در نظر گرفته شوند: $P = 2{,}598$ kN

اگر مقدار مجاز عضو کششی ($F_{AB} = 2$ kN) در نظر گرفته شود: $P = 6{,}928$ kN

کوچکترین مقدار ممکن قابل قبول است. بنابراین: $P = 2{,}598$ kN

حل تمرین ۸-۵:



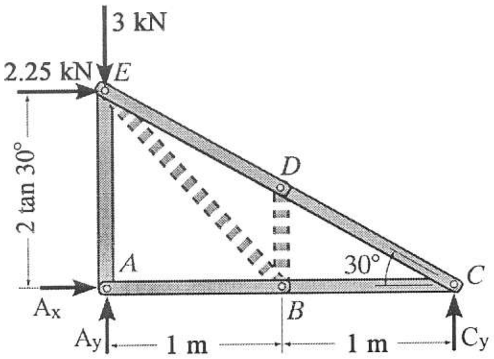
عضوهای با نیروی صفر:

مفصل C فقط دو عضو غیر همراستا دارد و نیروی خارجی به این مفصل اعمال نمی‌شود، در نتیجه عضوهای DC و BC عضوهای با نیروی صفر هستند.

با توجه به صفر بودن عضو DC اکنون در مفصل D عضوهای BD و ED و همچنین نیروی 3 kN مطرح هستند که دو تای آن‌ها هم‌خط بوده و سومین عضو، یعنی ED بایستی عضو صفر باشد. و بالاخره مفصل A سه عضو دارد که دو تای آن‌ها یعنی عضو AB و تکیه‌گاه غلتکی هم‌خط هستند. در نتیجه عضو AE نیز عضوی با نیروی صفر است (رجوع شود به شکل مقابل). بنابراین

$$F_{BC} = F_{DC} = F_{ED} = F_{AE} = 0$$

حل تمرین ۸-۶:



عضوهای با نیروی صفر:

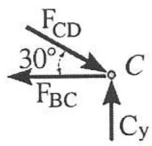
مفصل D سه عضو دارد که دو تای آن‌ها، یعنی عضوهای CD و DE هم‌خط هستند. در نتیجه عضو BD عضوی با نیروی صفر است . همچنین با توجه به صفر بودن عضو BD اکنون در مفصل B عضوهای BC و AB هم‌خط بوده و سومین عضو، یعنی EB بایستی عضو صفر باشد. بنابراین $F_{BD} = F_{EB} = 0$

سیستم کل:

با استفاده از معادله تعادل گشتاورها:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (C_y \cdot 2\text{ m}) - (2{,}25\text{ kN} \cdot 2\tan 30^\circ\text{ m}) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 1{,}299\text{ kN}$$

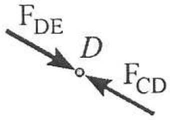
مفصل C :



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - F_{CD}\sin 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 2{,}598\text{ kN (C)}$$

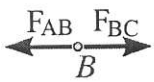
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad F_{CD}\cos 30^\circ - F_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 2{,}25\text{ kN (T)}$$

مفصل D :



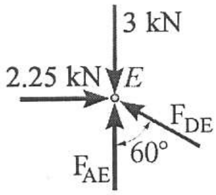
$$+\searrow \Sigma F_x = 0: \quad F_{DE} - F_{CD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = 2{,}598\text{ kN (C)}$$

مفصل B :



$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 2{,}25\text{ kN (T)}$$

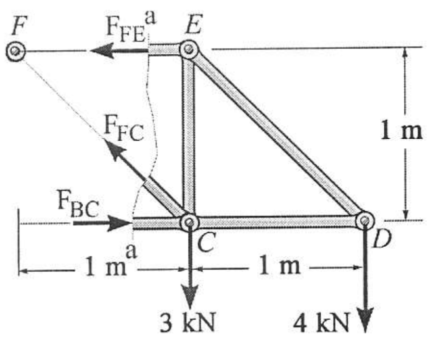
مفصل E :



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{AE} + F_{DE}\cos 60^\circ - 3\text{ kN} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{AE} = 1{,}701\text{ kN (C)}$$

حل تمرین ۸-۷:



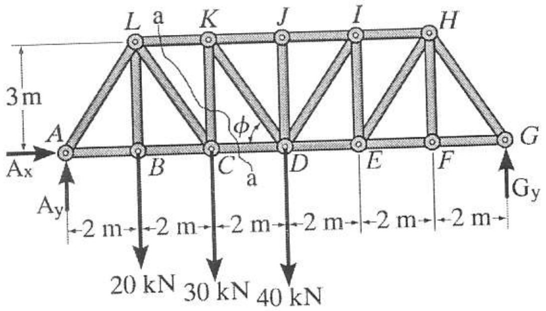
با توجه به نمودار جسم آزاد قسمت سمت راست مقطع aa، که فقط سه نیروی مورد نظر در آن مجهول هستند و نیز استفاده از معادلات تعادل برای این قسمت:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad F_{FE} \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE} = 4\text{ kN (T)}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_F = 0: \quad F_{BC} \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 11\text{ kN (C)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{FC} \cdot \cos 45^\circ - 3 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FC} = 9{,}8995\text{ kN (T)}$$

حل تمرین ۸-۸:

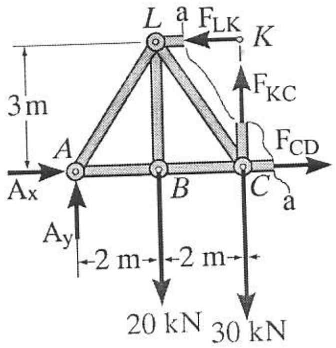


برای تعیین عضوهای مورد نظر باید خرپا طوری برش زده شود که فقط این سه عضو را قطع کند، یعنی برش aa. برای تحلیل، قسمت چپ مقطع aa را در نظر گرفته و برای آن لازم است ابتدا واکنش‌های تکیه‌گاه مفصل ثابت A به‌دست آیند.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (G_y \cdot 12\text{ m}) - (40\text{ kN}\cdot 6\text{ m}) - (30\text{ kN}\cdot 4\text{ m}) - (20\text{ kN}\cdot 2\text{ m}) = 0 \Rightarrow \qquad G_y = 33{,}333\text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad \Rightarrow \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + G_y - 20\text{ kN} - 30\text{ kN} - 40\text{ kN} = 0 \quad \Rightarrow \qquad A_y = 56{,}667\text{ kN}$$



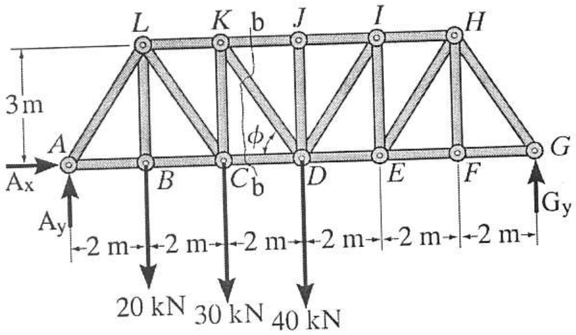
اکنون تحلیل قسمت چپ مقطع aa با سه معادله تعادل با توجه به نمودار جسم آزاد شکل مقابل صورت می‌گیرد:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad (F_{LK} \cdot 3\text{ m}) - (A_y \cdot 4\text{ m}) + (20\text{ kN}\cdot 2\text{ m}) = 0 \quad \Rightarrow \qquad F_{LK} = 62{,}222\text{ kN (C)}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + F_{CD} - F_{LK} = 0 \quad \Rightarrow \qquad F_{CD} = 62{,}222\text{ kN (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + F_{KC} - 20\text{ kN} - 30\text{ kN} = 0 \quad \Rightarrow F_{KC} = -6{,}667\text{ kN} \Rightarrow \qquad F_{KC} = 6{,}667\text{ kN (C)}$$

حل تمرین ۸-۹:



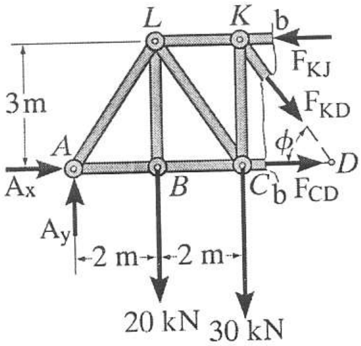
برای تعیین عضوهای مورد نظر باید خرپا طوری برش زده شود که فقط این سه عضو را قطع کند، یعنی برش bb. برای تحلیل، قسمت چپ مقطع bb را در نظر گرفته و برای آن لازم است ابتدا واکنش‌های تکیه‌گاه مفصل ثابت A به‌دست آیند.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (G_y \cdot 12\text{ m}) - (40\text{ kN}\cdot 6\text{ m}) - (30\text{ kN}\cdot 4\text{ m}) - (20\text{ kN}\cdot 2\text{ m}) = 0 \Rightarrow \qquad G_y = 33{,}333\text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad \Rightarrow \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + G_y - 20\text{ kN} - 30\text{ kN} - 40\text{ kN} = 0 \quad \Rightarrow \qquad A_y = 56{,}667\text{ kN}$$

ادامه حل تمرین ۸-۹:



اکنون تحلیل قسمت چپ مقطع bb با سه معادله تعادل با توجه به نمودار جسم آزاد شکل مقابل صورت می‌گیرد:

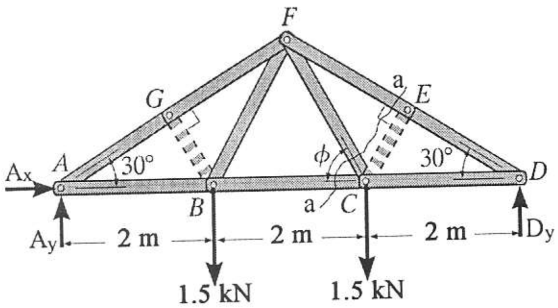
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56{,}3099^\circ$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_K = 0: \quad (A_x \cdot 3\text{ m}) - (A_y \cdot 4\text{ m}) + (20\text{ kN} \cdot 2\text{ m}) + (F_{CD} \cdot 3\text{ m}) = 0 \quad \Rightarrow \qquad F_{CD} = 62{,}222\text{ kN (T)}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0: \quad -(A_y \cdot 6\text{ m}) + (20\text{ kN} \cdot 4\text{ m}) + (30\text{ kN} \cdot 2\text{ m}) + (F_{KJ} \cdot 3\text{ m}) = 0 \quad \Rightarrow \qquad F_{KJ} = 66{,}667\text{ kN (C)}$$

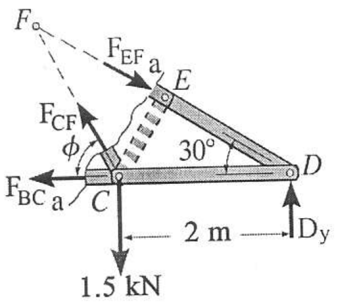
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + F_{CD} + F_{KD}\cos\phi - F_{KJ} = 0 \qquad F_{KD} = 8{,}012\text{ kN (T)}$$

حل تمرین ۸-۱۰:



برای تعیین عضوهای مورد نظر باید خرپا طوری برش زده شود که فقط این سه عضو را قطع کند، یعنی برش aa. برای تحلیل، قسمت راست مقطع aa را در نظر گرفته و برای آن لازم است ابتدا واکنش تکیه‌گاه غلتکی D به‌دست آید.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (D_y \cdot 6\text{ m}) - (1{,}50\text{ kN} \cdot 4\text{ m}) - (1{,}5\text{ kN} \cdot 2\text{ m}) = 0 \Rightarrow \qquad D_y = 1{,}5\text{ kN}$$



اکنون تحلیل قسمت راست مقطع aa با سه معادله تعادل با توجه به نمودار جسم آزاد شکل مقابل صورت می‌گیرد:

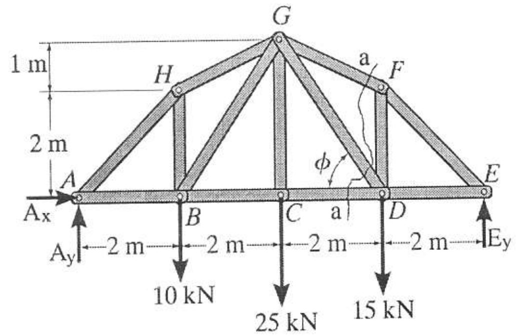
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan 30^\circ}{1}\right) = 60^\circ$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0: \quad -(F_{CF}\sin\phi \cdot 2\text{ m}) + (1{,}50\text{ kN} \cdot 2\text{ m}) = 0 \quad \Rightarrow \qquad F_{CF} = 1{,}732\text{ kN (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{CF}\sin\phi - F_{EF}\sin 30^\circ - 1{,}5\text{ kN} + D_y = 0 \quad \Rightarrow \qquad F_{EF} = 3\text{ kN (C)}$$

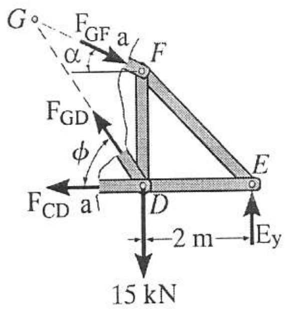
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad -F_{BC} - F_{CF}\cos\phi + F_{EF}\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \qquad F_{BC} = 1{,}732\text{ kN (T)}$$

حل تمرین ۸-۱۱:



برای تعیین عضوهای مورد نظر باید خرپا طوری برش زده شود که فقط این سه عضو را قطع کند، یعنی برش aa. برای تحلیل، قسمت راست مقطع aa را در نظر گرفته و برای آن لازم است ابتدا واکنش تکیه‌گاه غلتکی E به‌دست آید.

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad (E_y \cdot 8\ m) - (15\ kN \cdot 6\ m) - (25\ kN \cdot 4\ m) - (10\ kN \cdot 2\ m) = 0 \Rightarrow \qquad E_y = 26{,}25\ kN$



اکنون تحلیل قسمت راست مقطع aa با سه معادله تعادل با توجه به نمودار جسم آزاد شکل مقابل صورت می‌گیرد:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 50{,}3099°$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}565°$$

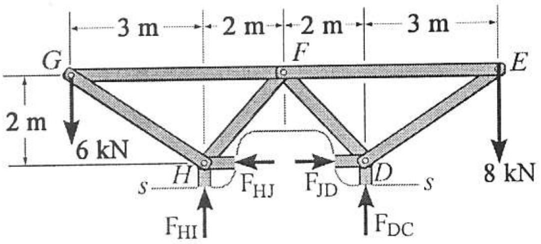
$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0: \quad (E_y \cdot 4\ m) - (15\ kN \cdot 2\ m) - (F_{CD} \cdot 3\ m) = 0 \Rightarrow \qquad F_{CD} = 25\ kN\ (T)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0: \quad (E_y \cdot 2\ m) - (F_{GF} \cos\alpha \cdot 2\ m) = 0 \Rightarrow \qquad F_{GF} = 29{,}347\ kN\ (C)$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad -F_{CD} - F_{GD}\cos\phi + F_{GF}\cos\alpha = 0 \Rightarrow \qquad F_{GD} = 2{,}253\ kN\ (T)$

حل تمرین ۸-۱۲:

برای تعیین عضوهای مورد نظر باید خرپا طوری برش زده شود که فقط این سه عضو را قطع کند، یعنی مقطع tt. اما در این مقطع یک مجهول دیگر JC نیز ظاهر می‌شود. بنابراین ابتدا در مقطع ss برش زده، تا دو مجهول DC و HI به‌دست آیند و سپس مقطع tt تحلیل می‌گردد.



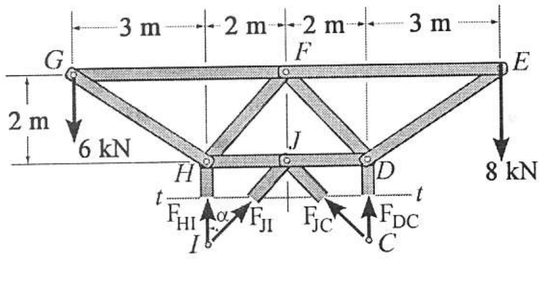
برای تعیین F_{DC} و F_{HI} مقطع ss تحلیل می‌شود.

$\circlearrowleft + \Sigma M_H = 0: \; (F_{DC} \cdot 4) + (6 \cdot 3) - (8 \cdot 7) = 0$

$\Rightarrow \qquad F_{DC} = 9{,}5\ kN\ (C)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0: \; -(F_{HI} \cdot 4) - (8 \cdot 3) - (6 \cdot 7) = 0$

$\Rightarrow \qquad F_{HI} = 4{,}5\ kN\ (C)$

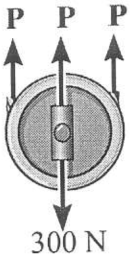


برای تعیین F_{JI} مقطع tt تحلیل می‌شود.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 45°$$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \; -(F_{HI} \cdot 4) - (F_{JI}\cos\alpha \cdot 4) - (8 \cdot 3) + (6 \cdot 7) = 0$

$\Rightarrow \qquad F_{JI} = 0\ kN$

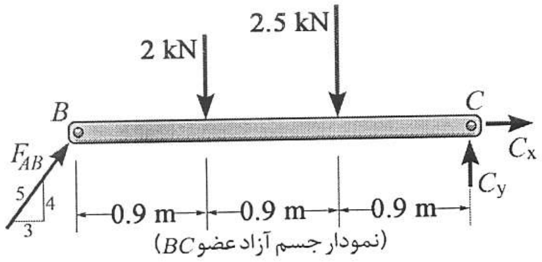


حل تمرین ۸-۱۳:

با توجه به نمودار جسم آزاد قرقره در شکل مقابل و نوشتن تعادل نیروها در جهت عمودی:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 3P - 300\text{ N} = 0$

$\Rightarrow \quad P = 100\text{ N}$



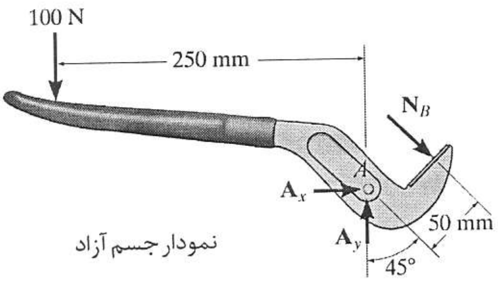
حل تمرین ۸-۱۴:

با توجه به نمودار جسم آزاد عضو BC و اینکه عضو AB دو نیرویی است :

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \quad (2{,}7\, C_y) - (1{,}8\text{ m} \cdot 2{,}5\text{ kN}) - (0{,}9\text{ m} \cdot 2\text{ kN}) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 2{,}333\text{ kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2{,}333\text{ kN} + \frac{4}{5} F_{AB} - 2{,}5\text{ kN} - 2\text{ kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 2{,}708\text{ kN}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad C_x + \frac{3}{5}\, 2{,}708\text{ kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = -1{,}625\text{ kN}$



حل تمرین ۸-۱۵:

با توجه به نمودار جسم آزاد عضو زیرین انبر دست و نوشتن معادلات تعادل آن:

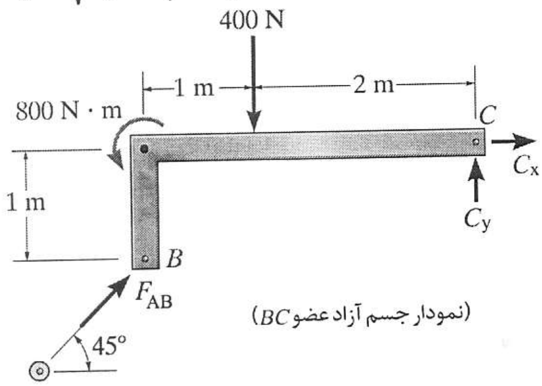
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -N_B \cdot 50 + 100 \cdot 250 = 0$

$\Rightarrow \quad N_B = 500\text{ N}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + N_B \sin 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -353{,}553\text{ N}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 100 - N_B \cos 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 453{,}553\text{ N}$

$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-353{,}553)^2 + (453{,}553)^2} = 575{,}074\text{ N}$



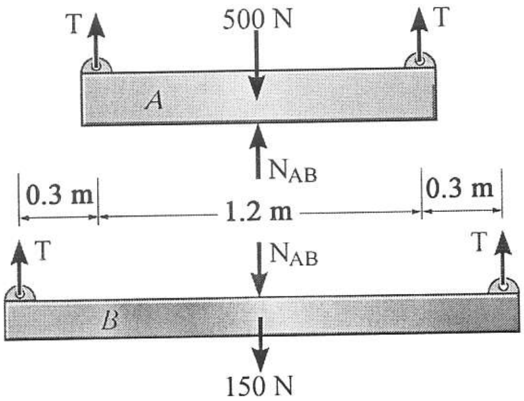
حل تمرین ۸-۱۶:

با توجه به نمودار جسم آزاد عضو BC و اینکه عضو AB دو نیرویی است :

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad (F_{AB} \cos 45°) \cdot 1 - (F_{AB} \sin 45°) \cdot 3 + 400 \cdot 2 + 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 1131{,}371\text{ N}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad C_x + F_{AB} \cos 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = -800\text{ N}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - 400 + F_{AB} \sin 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = -400\text{ N}$



حل تمرین ۸-۱۷:

با توجه به نمودار جسم آزاد ورق بالایی A :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 : N_{AB} - 500 + 2T = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2T = 500 - N_{AB} \qquad (1)$$

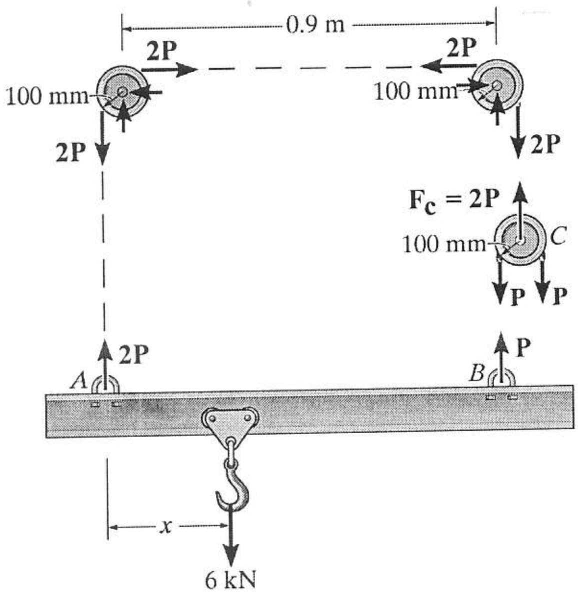
و نیز با توجه به نمودار جسم آزاد ورق پایینی B :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 : -N_{AB} - 150 + 2T = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2T = N_{AB} - 150 \qquad (2)$$

از معادلات (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$$500 - N_{AB} = N_{AB} + 150 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = 175 \text{ N}$$



حل تمرین ۸-۱۸:

از قرقره پایین سمت راست نتیجه می‌شود :

$$F_c = 2P$$

در بالای تیر به نقطه B در سمت راست تیر نیروی P و به نقطه A در سمت چپ آن نیروی 2P به فاصله $0{,}9 + 0{,}1 = 1\text{m}$ از هم اثر می‌کنند.

از نمودار جسم آزاد تیر نتیجه می‌شود:

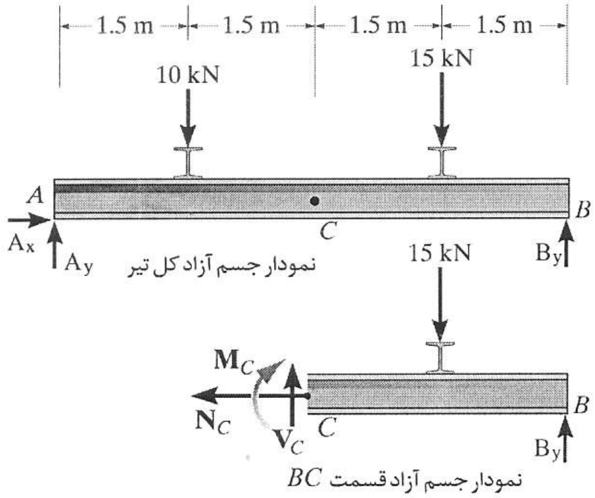
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 : 2P + P - 6\text{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 2 \text{ kN}$$

فاصله مناسب x جایی است که گشتاور نیروها صفر گردد:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0 : P(1 - x) - 2P(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} = 0{,}333 \text{ m}$$

حل تمرین‌های فصل ۹

حل تمرین ۹-۱:



از نمودار جسم آزاد کل تیر نتیجه می‌شود:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad 6B_y - 4{,}5 \cdot 15 - 1{,}5 \cdot 10 = 0$

$\Rightarrow \quad B_y = 13{,}75 \text{ kN}$

با توجه به معادلات تعادل برای نمودار جسم آزاد قسمت برش خورده BC در سمت راست تیر نتیجه می‌شود:

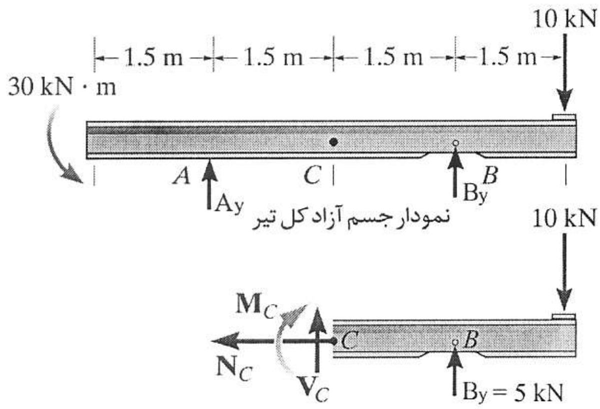
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow \quad N_C = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad B_y - 15 + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 1{,}25 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad -M_C + 3B_y - 1{,}5 \cdot 15 = 0$

$\Rightarrow \quad M_C = 18{,}75 \text{ kNm}$

حل تمرین ۹-۲:



از نمودار جسم آزاد کل تیر نتیجه می‌شود:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \; 30 + 3B_y - 4{,}5 \cdot 10 = 0$

$\Rightarrow \quad B_y = 5 \text{ kN}$

با توجه به معادلات تعادل برای نمودار جسم آزاد قسمت برش خورده BC در سمت راست تیر نتیجه می‌شود:

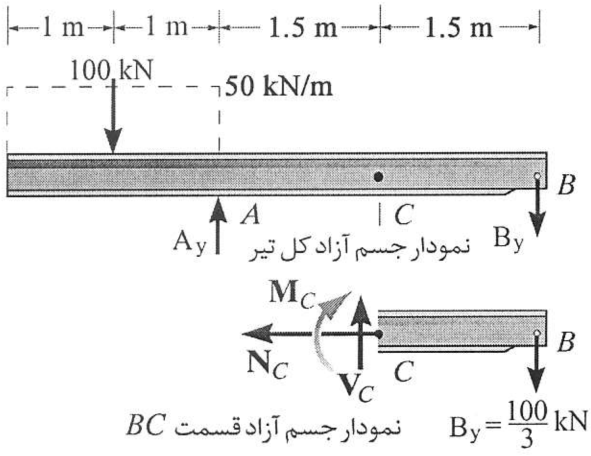
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow \quad N_C = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad B_y - 10 + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 5 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad -M_C + 1{,}5 B_y - 3 \cdot 10 = 0$

$\Rightarrow \quad M_C = -22{,}5 \text{ kNm}$

حل تمرین ۹-۳:



از نمودار جسم آزاد کل تیر نتیجه می‌شود:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \; 1 \cdot 100 - 3B_y = 0$

$\Rightarrow \quad B_y = \frac{100}{3} \text{ kN}$

با توجه به معادلات تعادل برای نمودار جسم آزاد قسمت برش خورده BC در سمت راست تیر نتیجه می‌شود:

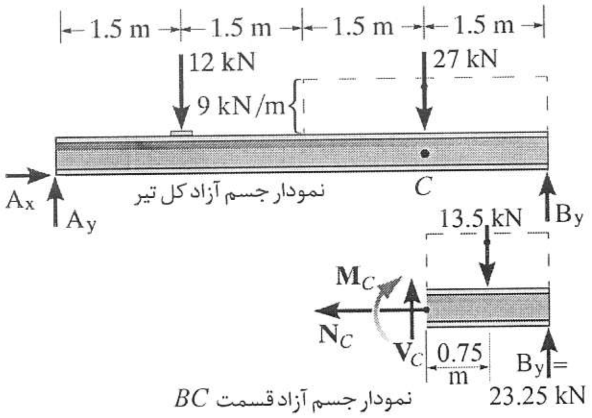
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow \quad N_C = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_C - B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = \frac{100}{3} \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad -1{,}5 B_y - M_C = 0$

$\Rightarrow \quad M_C = -50 \text{ kNm}$

حل تمرین ۹-۴:



از نمودار جسم آزاد کل تیر نتیجه می‌شود:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad 6B_y - 4{,}5 \cdot 27 - 1{,}5 \cdot 12 = 0$

$\Rightarrow \quad B_y = 23{,}25 \text{ kN}$

با توجه به معادلات تعادل برای نمودار جسم آزاد قسمت برش خورده BC در سمت راست تیر نتیجه می‌شود:

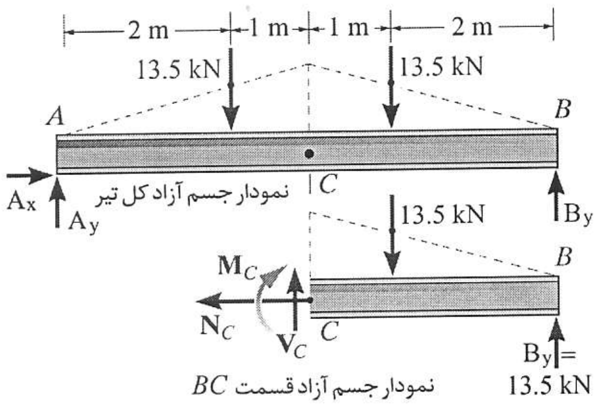
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow \quad N_C = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad B_y - 13{,}5 + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = -9{,}75 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad -M_C + 1{,}5 \cdot B_y - 0{,}75 \cdot 13{,}5 = 0$

$\Rightarrow \quad M_C = 24{,}75 \text{ kNm}$

حل تمرین ۹-۵:



از نمودار جسم آزاد کل تیر نتیجه می‌شود:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \; 6B_y - 4 \cdot 13{,}5 - 2 \cdot 13{,}5 = 0$

$\Rightarrow \quad B_y = 13{,}5 \text{ kN}$

با توجه به معادلات تعادل برای نمودار جسم آزاد قسمت برش خورده BC در سمت راست تیر نتیجه می‌شود:

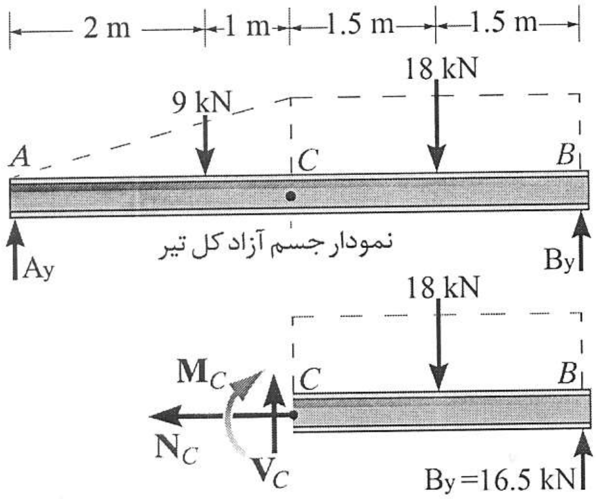
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow \quad N_C = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad B_y - 13{,}5 + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 0$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad -M_C - 1 \cdot 13{,}5 + 3B_y = 0$

$\Rightarrow \quad M_C = 27 \text{ kNm}$

حل تمرین ۹-۶:



از نمودار جسم آزاد کل تیر نتیجه می‌شود:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \; 6B_y - 4{,}5 \cdot 18 - 2 \cdot 9 = 0$

$\Rightarrow \quad B_y = 16{,}5 \text{ kN}$

با توجه به معادلات تعادل برای نمودار جسم آزاد قسمت برش خورده BC در سمت راست تیر نتیجه می‌شود:

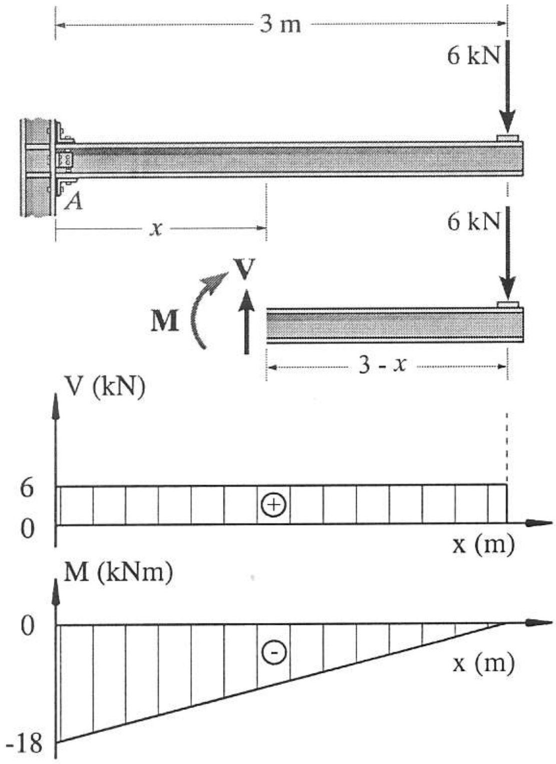
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \Rightarrow \quad N_C = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_C + B_y - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 1{,}5 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0: \quad -M_C + 3B_y - 1{,}5 \cdot 18 = 0$

$\Rightarrow \quad M_C = 22{,}5 \text{ kNm}$

حل تمرین ۹-۷:



به فاصله $0< x< 3m$ از نقطه A برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت راست تیر در شکل نشان داده شده است. در این نمودار V و M در جهت مثبت طبق قرارداد علامت در سطح سمت چپ قسمت بریده شده از تیر وارد می‌شوند. با استفاده از معادلات تعادل نتیجه می‌شود:

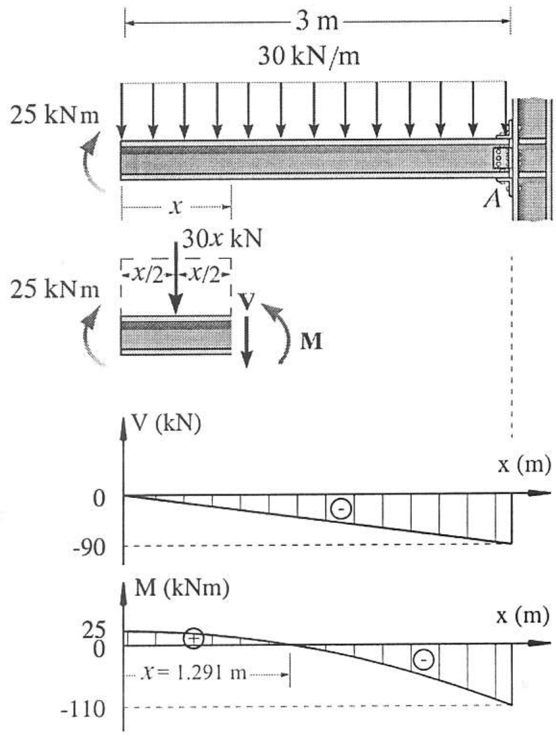
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V(x) - 6\text{ kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = 6\text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \quad -M(x) - [6\text{ kN}(3\text{m} - x)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad M(x) = (6x - 18)\text{ kNm}$$

توابع نیروی برشی و گشتاور خمشی به‌دست آمده در بالا در شکل مقابل رسم شده‌اند.

حل تمرین ۹-۸:



به فاصله $0< x< 3m$ از لبه آزاد تیر برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت چپ تیر در شکل نشان داده شده است. در این نمودار V و M در جهت مثبت طبق قرارداد علامت در سطح سمت راست قسمت بریده شده از تیر وارد می‌شوند. با استفاده از معادلات تعادل نتیجه می‌شود:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -V(x) - 30x\text{ kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = -30x\text{ kN}$$

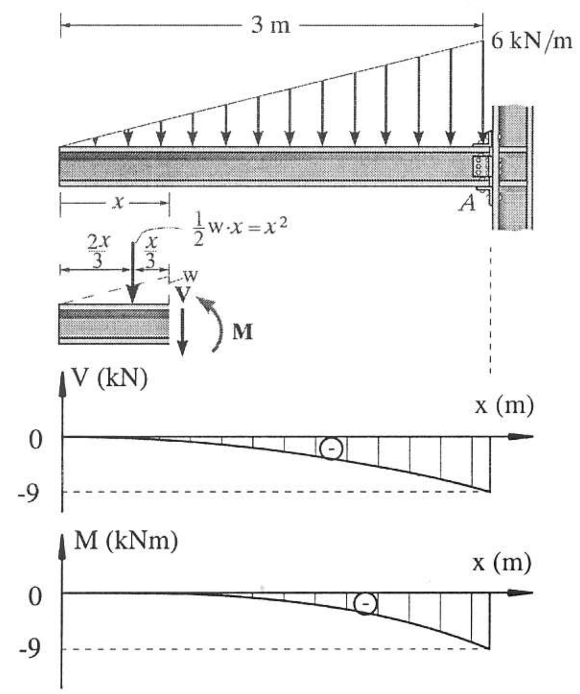
$$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \quad M(x) - 25\text{ kNm} + (30x\text{kN} \cdot x/2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad M(x) = (25 - 15x^2)\text{ kNm}$$

توابع نیروی برشی و گشتاور خمشی به‌دست آمده در بالا در شکل مقابل رسم شده‌اند. مقدار گشتاور خمشی در $x=1{,}291\text{ m}$ برابر صفر خواهد بود.

$$(25 - 15x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{25/15} = 1{,}291\text{ m}$$

حل تمرین ۹-۹:



به فاصله $0 < x < 3m$ از لبه آزاد تیر برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت چپ تیر در شکل نشان داده شده است. از تشابه مثلث‌ها نتیجه می‌شود:

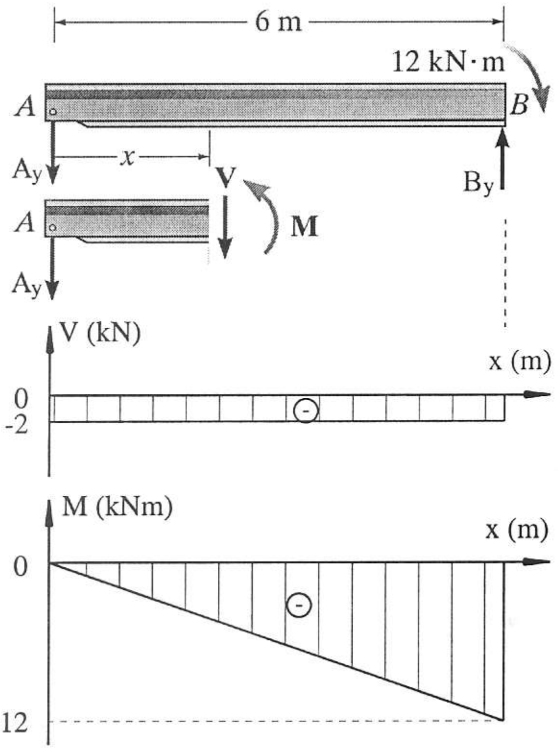
$$\frac{w}{x} = \frac{6}{3} \Rightarrow w = 2x\ \mathrm{kN/m}$$

بارگذاری گسترده قسمت برش خورده را نیز در نمودار جسم آزاد آن با یک نیروی برآیند متمرکز $\frac{1}{2}2x \cdot x = x^2\ \mathrm{kN}$ به فاصله $\frac{1}{3}x$ از مقطع جایگزین می‌کنیم. در این نمودار V و M در جهت مثبت طبق قرارداد علامت در سطح سمت راست قسمت بریده شده از تیر وارد می‌شوند. با استفاده از معادلات تعادل نتیجه می‌شود:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ -V(x) - x^2\ \mathrm{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = -x^2\ \mathrm{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \ M(x) + \frac{1}{3}x \cdot x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -\frac{1}{3}x^3\ \mathrm{kNm}$$

حل تمرین ۹-۱۰:



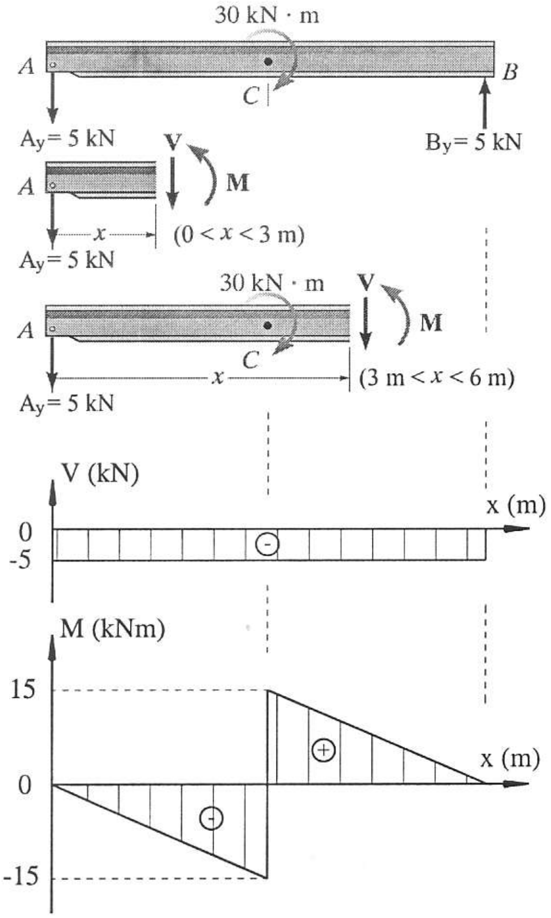
ابتدا کل سیستم را در نظر می‌گیریم:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \ 6A_y - 12\mathrm{kNm} = 0 \Rightarrow A_y = 2\ \mathrm{kN}$$

سپس به فاصله $0 < x < 6m$ از تکیه‌گاه A برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت چپ تیر در شکل نشان داده شده است. در این نمودار V و M در جهت مثبت طبق قرارداد علامت در سطح سمت راست قسمت بریده شده از تیر وارد می‌شوند. با استفاده از معادلات تعادل می‌توان نوشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ -2 - V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = -2\ \mathrm{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \ M(x) + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -2x\ \mathrm{kNm}$$



حل تمرین ۹-۱۱:

ابتدا کل سیستم را در نظر می‌گیریم :

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \ 6A_y - 30\,\text{kNm} = 0 \ \Rightarrow \ A_y = 5\ \text{kN}$

به فاصله $0 < x < 3\text{m}$ (از A تا C) برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت چپ تیر در شکل نشان داده شده است. با استفاده از معادلات تعادل برای $0 < x < 3\text{m}$ می‌توان نوشت:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ -V(x) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = -5\ \text{kN}$

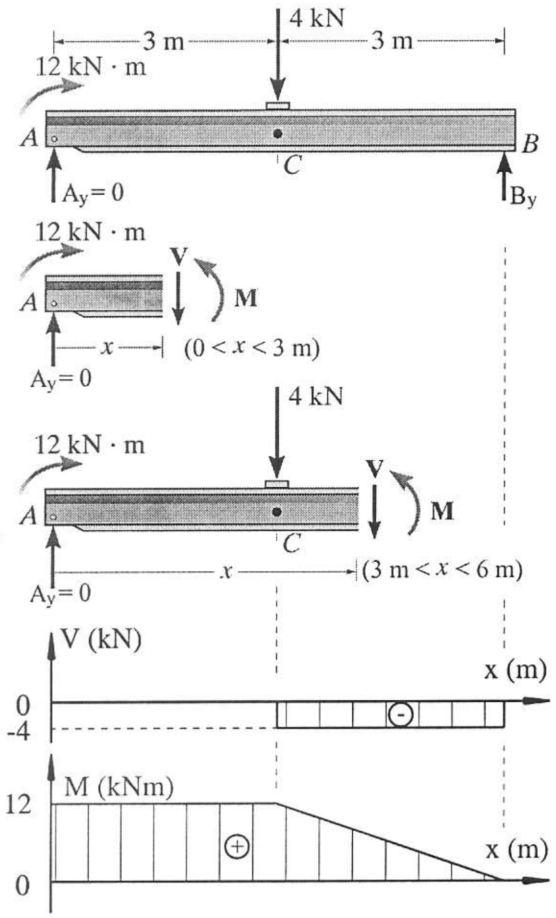
$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \ M(x) + 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -5x\ \text{kNm}$

دوباره به فاصله $3\text{m} < x < 6\text{m}$ (از C تا B) برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت چپ تیر در شکل نشان داده شده است. با استفاده از معادلات تعادل برای این ناحیه ($3\text{m} < x < 6\text{m}$) می‌توان نوشت:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ -V(x) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = -5\ \text{kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \ M(x) + 5x - 30\ \text{kNm} = 0$

$\Rightarrow \ M(x) = (30 - 5x)\ \text{kNm}$



حل تمرین ۹-۱۲:

ابتدا کل سیستم را در نظر می‌گیریم :

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \ -6A_y - 12\text{kNm} + (4\text{kN}\cdot 3\text{m}) = 0$

$\Rightarrow \quad A_y = 0$

به فاصله $0 < x < 3\text{m}$ (از A تا C) برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت چپ تیر در شکل نشان داده شده است. با استفاده از معادلات تعادل برای $0 < x < 3\text{m}$ می‌توان نوشت:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ A_y - V(x) = 0 \quad \Rightarrow \ V(x) = 0$

$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \ M(x) - 12\text{kNm} = 0 \ \Rightarrow \ M(x) = 12\ \text{kNm}$

دوباره به فاصله $3\text{m} < x < 6\text{m}$ (از C تا B) برش می‌زنیم. نمودار جسم آزاد قسمت بریده شده سمت چپ تیر در شکل نشان داده شده است. با استفاده از معادلات تعادل برای این ناحیه ($3\text{m} < x < 6\text{m}$) می‌توان نوشت:

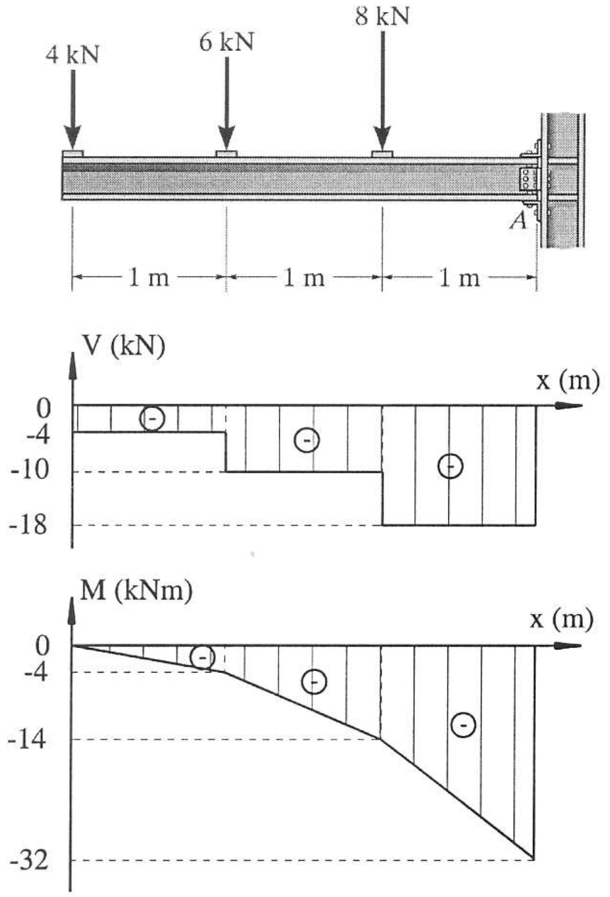
$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \ A_y - 4\text{kN} - V(x) = 0 \quad \Rightarrow \ V(x) = -4\ \text{kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_x = 0: \ M(x) - 12\ \text{kNm} + [4\text{kN}\cdot(x-3)\text{m}] = 0$

$\Rightarrow \ M(x) = (24 - 4x)\ \text{kNm}$

حل تمرین ۹-۱۳:

رجوع شود به شکل مقابل.



حل تمرین ۹-۱۴:

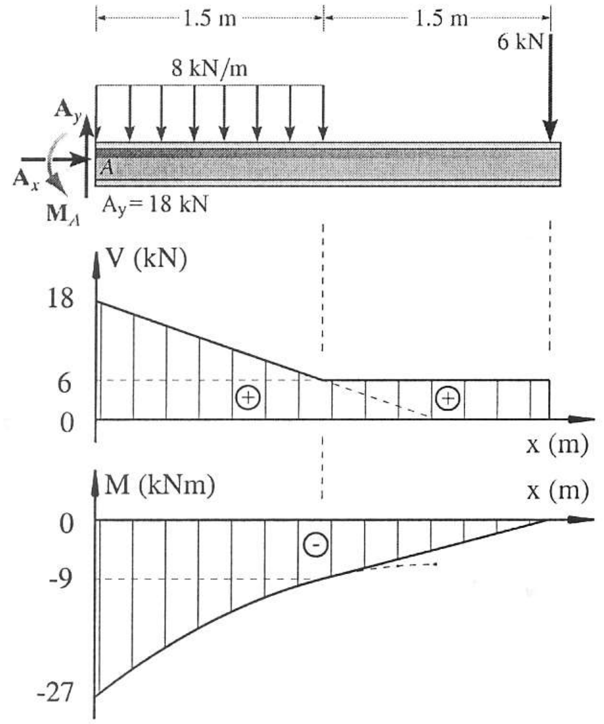
با توجه به کل سیستم :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad -(3\cdot 6) - (8\cdot 1{,}5\cdot 0{,}75) + M_A = 0$$

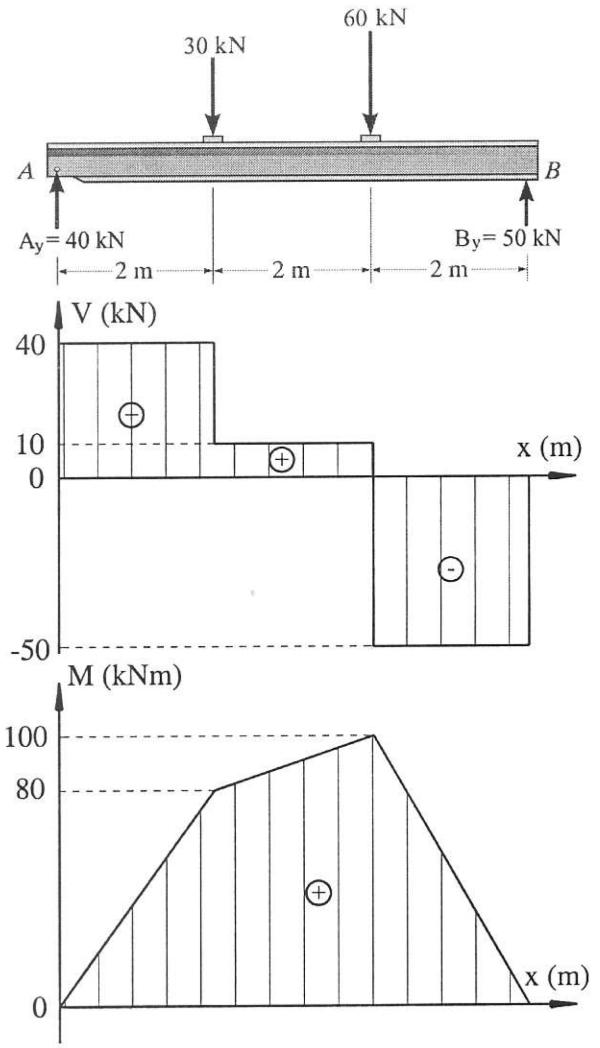
$$\Rightarrow \quad M_A = 27 \text{ kNm}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - (8\cdot 1{,}5)\text{ kN} - 6\text{ kN} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = 18 \text{ kN}$$



حل تمرین ۹-۱۵:



با توجه به کل سیستم :

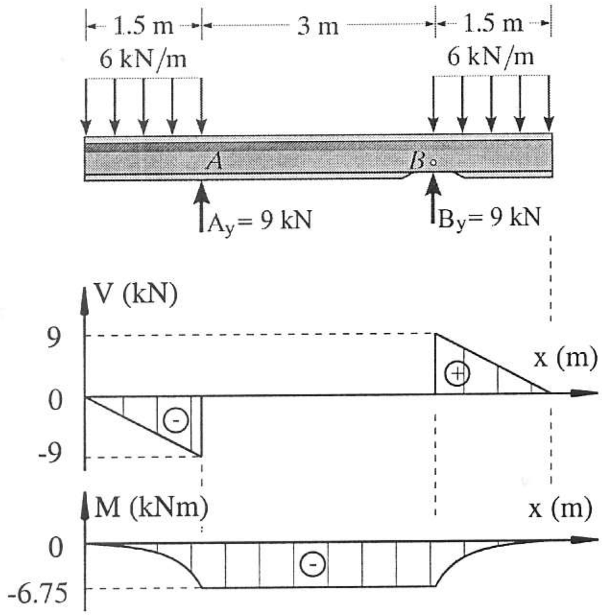
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0: \quad 6B_y - (4\cdot 60) - (2\cdot 30) = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_y = 50 \ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \quad -6A_y + (4\cdot 30) + (2\cdot 60) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = 40 \ \text{kN}$$

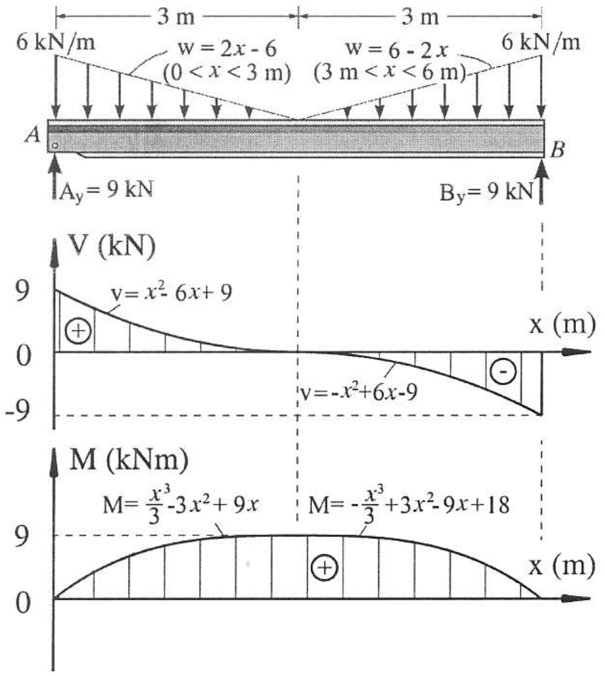
حل تمرین ۹-۱۶:



با توجه به تقارن هندسی و متقارن بودن بارها :

$$A_y = B_y = 9 \ \text{kN}$$

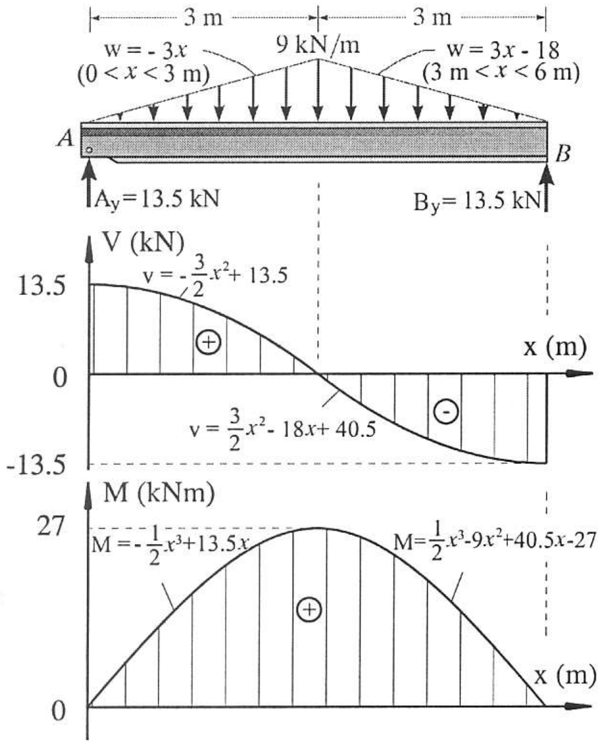
حل تمرین ۹-۱۷:



با توجه به تقارن هندسی و متقارن بودن بارها :

$$A_y = B_y = 9 \text{ kN}$$

حل تمرین ۹-۱۸:

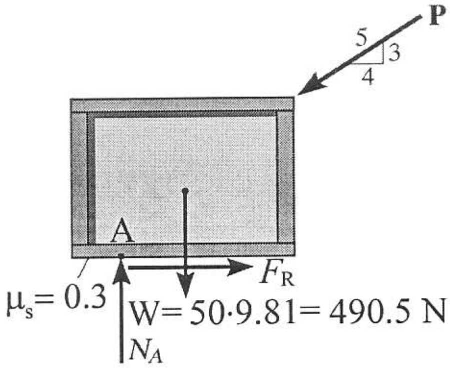


با توجه به تقارن هندسی و متقارن بودن بارها :

$$A_y = B_y = 13{,}5 \text{ kN}$$

حل تمرین‌های فصل ۱۰

حل تمرین ۱۰-۱:



با توجه به نمودار جسم آزاد صندوق، نیروی اصطکاک F_R از معادلات تعادل بدست می‌آید (تیپ ۱) :

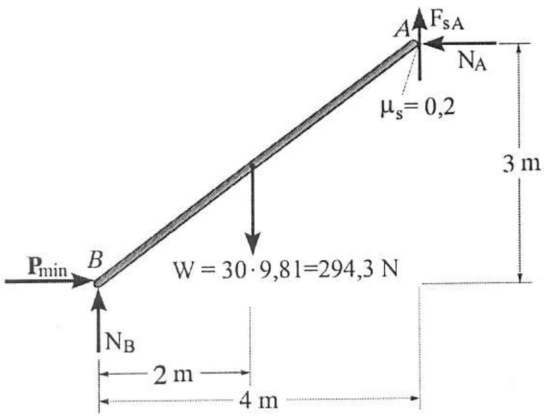
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0\ ;\ N_A - W - (\frac{3}{5})P = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = 610{,}5\ N$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0:\ F_R - (\frac{4}{5})P = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = 160\ N$$

با توجه به این‌که نامعادله $F_R = 160\ N \ <\ F_{R,max} = \mu_s N_A = 183{,}15\ N$ برقرار است، صندوق حرکت نمی‌کند.

حل تمرین ۱۰-۲:

حل:



نمودار جسم آزاد:

با توجه به نمودار جسم آزاد میله AB در آستانه حرکت، نیروی اصطکاک F_{sA} باید به طرف بالا باشد، زیرا حرکت میله به سمت پایین خواهد بود.

معادلات تعادل و اصطکاک در آستانه حرکت:

چون میله AB در آستانه لغزش است (تیپ ۲) :

$$F_{sA} = \mu_s \cdot N_A = 0{,}2 \cdot N_A$$

در نتیجه با گشتاور گیری حول نقطه B :

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0: \quad -W \cdot 2m + F_{sA} \cdot 4m + N_A \cdot 3m = 0 \ \Rightarrow\ -294{,}3N \cdot 2m + 0{,}2N_A \cdot 4m + N_A \cdot 3m = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3{,}8N_A = 588{,}6\ Nm \qquad \Rightarrow \quad N_A = 154{,}895\ N$$

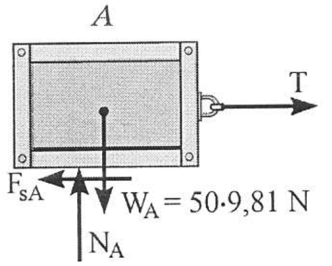
با توجه به تعادل نیروها در جهت افقی نتیجه می‌شود:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad P_{min} - N_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_{min} = 154{,}895\ N$$

حل تمرین ۱۰-۳:

نمودار جسم آزاد صندوق‌ها:

نمودار جسم آزاد صندوق A و B در شکل‌های زیر مشاهده می‌شوند :



معادلات تعادل و اصطکاک در آستانه حرکت:

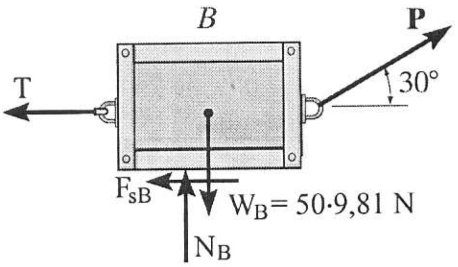
چون هر دو صندوق در آستانه لغزش قرار می‌گیرند (تیپ ۲) ، $F_{sA} = 0{,}25\ N_A$ و $F_{sB} = 0{,}25\ N_B$ برقرارند. در نتیجه:

برای صندوق A :

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_A - W_A = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = 490{,}5 \text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad T - 0{,}25 N_A = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 122{,}625 \text{ N}$$

و برای صندوق B :



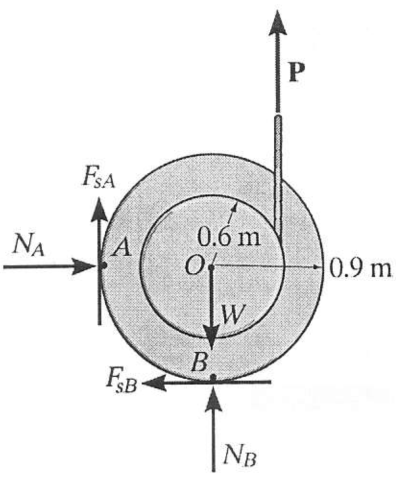
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_B + P_{max} \sin 30° - W_B = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad P_{max} \cos 30° - T - 0{,}25 N_B = 0$$

از دو معادله بالا نتیجه می‌شود:

$$P_{max} = 247{,}471 \text{ N}$$

حل تمرین ۱۰-۴:



نمودار جسم آزاد:

با توجه به نمودار جسم آزاد قرقره در آستانه حرکت، نیروی اصطکاک F_{sA} باید به سمت بالا و نیروی اصطکاک F_{sB} به طرف چپ باشد، زیرا میل به حرکت دورانی قرقره در اثر نیروی P پادساعت‌گرد خواهد بود.

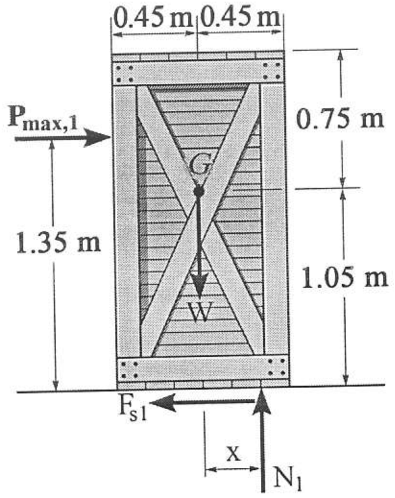
معادلات تعادل و اصطکاک در آستانه حرکت:

چون قرقره در آستانه لغزش است (تیپ ۲)، در نتیجه:

$$F_{sA} = \mu_s \cdot N_A = 0{,}3 \cdot N_A \;; \quad F_{sB} = \mu_s \cdot N_B = 0{,}3 \cdot N_B \;; \quad W = 100 \cdot 9{,}81 = 981 \text{ N}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad N_A - 0{,}3\ N_B = 0 \\ &+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad P_{max} + N_B + 0{,}3 N_A - W = 0 \\ &\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0: \quad 0{,}6\ P_{max} - 0{,}3 N_A \cdot 0{,}9 - 0{,}3\ N_B \cdot 0{,}9 = 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_A = 175{,}70 \text{ N} \\ N_B = 585{,}67 \text{ N} \\ P_{max} = 342{,}62 \text{ N} \end{cases}$$

حل تمرین ۱۰-۵:



نمودار جسم آزاد:

برای خروج از تعادل صندوق دو حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول وقتی است که صندوق شروع به لغزیدن می‌کند، قبل از آن‌که واژگون گردد و در حالت دوم برعکس صندوق قبل از آن‌که در آستانه لغزیدن قرار گیرد واژگون خواهد شد (تیپ۳). شکل‌های مقابل نمودار جسم آزاد صندوق را برای این دو حالت نشان می‌دهند.

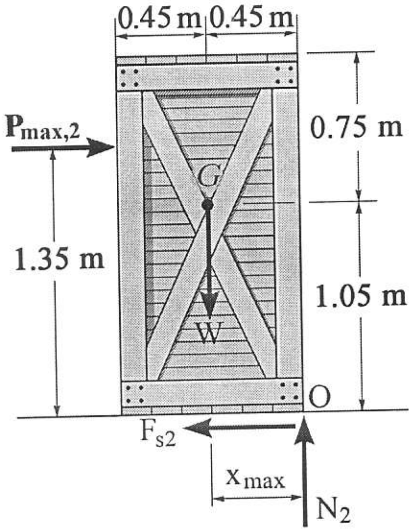
وزن صندوق برابر است با: $W = 125 \cdot 9{,}81 = 1226{,}25\ \text{N}$

حالت اول: (آستانه لغزش صندوق)

$$F_{s1} = \mu_s \cdot N_1 = 0{,}4\ N_1 \quad ; \quad x < x_{max} = 0{,}45\ \text{m}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N_1 - W = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 1226{,}25\ \text{N}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad P_{max,1} - 0{,}4 N_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{max,1} = 490{,}5\ \text{N}$$



حالت دوم: (آستانه واژگونی صندوق)

$$F_{s2} = \mu_s \cdot N_2 < 0{,}4\ N_2 \quad ; \quad x = x_{max} = 0{,}45\ \text{m}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0: \quad -1{,}35 P_{max,2} + 0{,}45 W = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{max,2} = 408{,}75\ \text{N}$$

$$P_{max} = \min\begin{pmatrix} P_{max,1} \\ P_{max,2} \end{pmatrix} = 408{,}75\ \text{N}$$

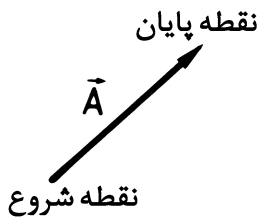
پیوست استاتیک

مفاهیم اساسی محاسبات بُرداری

پ-۱) کمیتهای عددی (اسکالر) و بُرداری

یک بُردار کمیتی است که

۱. دارای مقدار، راستا و جهت (سو) می‌باشد و
۲. از قواعد جبر برداری پیروی می‌کند.



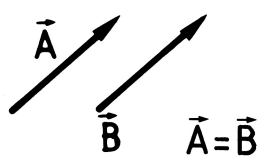
شکل پ-۱

یک بُردار به صورت گرافیکی توسط یک پاره خط جهت‌دار (پیکان) نشان داده می‌شود و طول پاره خط بیانگر اندازه بردار است.

مفهوم بُردار از آن جهت اهمیت دارد که در فیزیک و مهندسی کمیتهای زیادی وجود دارند که می‌توان آنها را به صورت بُرداری در نظر گرفت، مانند مسیرهای خطی‌شکل، جابه‌جاییهای خطی‌شکل، سرعتها، شتابها، نیروها، شدت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و غیره.
همچنین برای مشخص کردن بردارها از حروف لاتین با یک پیکان در بالای آنها استفاده می‌شود، مانند $\vec{A}$، $\vec{B}$، ... . اندازه یا مقدار بردارها و یا همچنین طول بردارها، در صورتی‌که بردار جابه‌جایی و یا بُردار مکان باشند را با A، B، و یا حتی $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ مشخص می‌کنند.
کمیت عددی یا اسکالر کمیتی است که تنها با یک عدد حقیقی بیان می‌گردد. در کمیتهای فیزیکی ذکر واحد اندازه نیز به آن اضافه می‌شود، مانند جرم، زمان، طول، دما.

پ-۲) جبر بُرداری

عملیات محاسباتی شناخته شده جبری را می‌توان تعمیم داده و بعضاً در مورد بُردارها هم به کار برد.



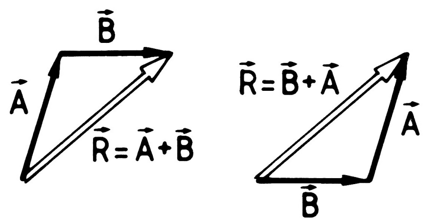
شکل پ-۲

۱. دو بُردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که از نظر مقدار، راستا و جهت یکسان باشند با هم برابرند. نقطه شروع آنها لازم نیست بر هم منطبق باشد (بُردارهای آزاد).
۲. مجموع و یا برآیند بُردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عبارت است از یک بُردار $\vec{R}$ و بدینگونه بدست می‌آید که نقطه شروع بُردار $\vec{B}$ بر نقطه پایان بُردار $\vec{A}$ قرار داده می‌شود. با متصل کردن نقطه شروع بردار $\vec{A}$ به نقطه پایان بُردار $\vec{B}$ بردار برآیند $\vec{R}$ بدست می‌آید و چنین نوشته می‌شود:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{R} \qquad (\text{پ-۱})$$

شکل پ-۳ نشان می‌دهدکه قانون (جابه‌جایی) تعویض پذیری برای جمع بُردارها هم معتبر است:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad \text{(پ-۲)}$$



شکل پ-۳

عمل جمع را می‌توان به سه و یا چند بُردار هم تعمیم داد:

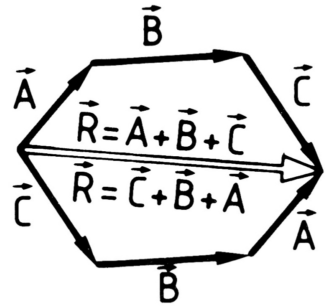
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{R} \qquad \text{(پ-۳)}$$

قانون شرکت پذیری نیز به صورت زیر است:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \qquad \text{(پ-۴)}$$

این موضوع از شکل پ-۴ بدست می آید:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{C} + \vec{B}) + \vec{A}$$



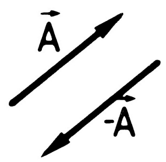
شکل پ-۴

و اگر قانون (جابه‌جایی) تعویض پذیری هم بکار برده شود:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{C} + \vec{B}) = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \qquad \text{(پ-۵)}$$

۳. بُردار صفر به بُرداری گفته می‌شود که مقدار آن صفر باشد. این بردار را به صورت $\vec{0}$ و یا حتی 0 نشان می‌دهند. یعنی:

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{A} \qquad \text{(پ-۶)}$$

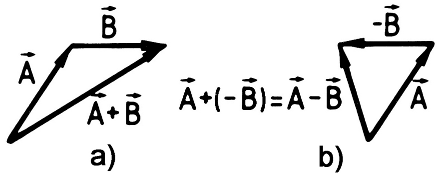


شکل پ-۵

۴. بُردار $-\vec{A}$ به برداری گفته می‌شود که اگر با $\vec{A}$ جمع شود برآیند آن صفر گردد:

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0} \qquad \text{(پ-۷)}$$

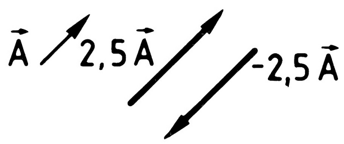
شکل پ-۵ نشان می‌دهد که بُردار $-\vec{A}$ موازی $\vec{A}$ بوده و دارای مقداری برابر آن ولی در جهت مخالف آن است.



شکل پ-۶

۵. همانند جبر اعداد حقیقی می‌توان علامت + و پرانتزها در رابطه (پ-۷) را حذف کرده و حاصل عبارت را به عنوان تفریق در نظر گرفت. بنابراین تفریق دو بُردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت جمع $\vec{A} + (-\vec{B})$ تعریف می‌گردد.:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad \text{(پ-۸)}$$



شکل پ-۷

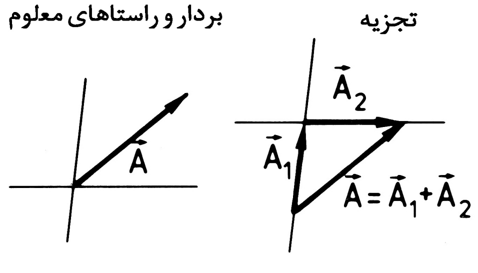
به این ترتیب اگر $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $(\vec{A} + \vec{B})$ بُردارهای نشانداده شده در شکل پ-(۶a باشند، $(\vec{A} - \vec{B})$ بُردار نشانداده شده در پ-(۶b خواهد بود.

۶. از آنجایی‌که بهتر است $\vec{A}+\vec{A}$ به صورت $2\vec{A}$، $\vec{A}+\vec{A}+\vec{A}$ به صورت $3\vec{A}$، و غیره بیان گردند به طور کلی حاصلضرب یک مقدار عددی (اسکالر) k در یک بُردار $\vec{A}$ را یک بردار $k\vec{A}$ می‌نامند، که مقداری برابر با $k|\vec{A}| = kA$ دارد و راستایش در صورتی‌که k مثبت باشد همان راستای $\vec{A}$ و چنانچه منفی باشد در خلاف جهت آن است.

۷. بُردار یکّه برداری است که مقدار آن برابر واحد است. چنانچه $\vec{A}$ برداری با $\vec{A} \neq 0$ باشد، $(1/A)\vec{A}=\vec{A}/A$ بُردار یکّه‌ای است که راستای آن با راستای $\vec{A}$ یکسان می‌باشد.

۸. مؤلفه‌های یک بُردار:

در بالا مشاهده شد که دو و یا چند بُردار را می‌توان به صورت یک بُردار برآیند جمع نمود. برعکس می‌توان یک بُردار $\vec{A}$ را به چندین بُردار تجزیه نمود، طوری‌که از جمع آنها بُردار اولیه بدست آید. این بُردارها را مؤلفه‌های بُردار اولیه $\vec{A}$ می‌نامند.

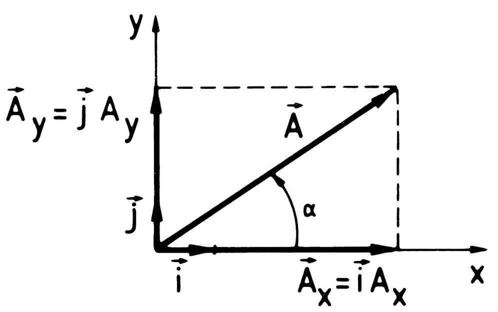


شکل پ-۸

الف) تجزیه در صفحه

تجزیه در صفحه در صورتی گویا و واضح است که دو راستا، که بُردار $\vec{A}$ قرار است بر روی آنها تجزیه گردد معلوم باشند. دو مؤلفه بُرداری $\vec{A}_1$ و $\vec{A}_2$ به این ترتیب بدست می‌آیند که دو راستای معلوم، همان طور که شکل پ-۸ نشان می‌دهد یکی از نقطه ابتدای بُردار $\vec{A}$ و دیگری از نقطه انتهای آن بگذرند.

چنانچه یک دستگاه مختصات عمود بر هم- x,y داده شده باشد، تجزیه مؤلفه‌های $\vec{A}_x$، $\vec{A}_y$، مطابق نمایش گرافیکی شکل پ-۹ نیز گویا و واضح است.



شکل پ-۹

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

اگر بُردارهای یکّه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در راستای محورهای x و y در نظر گرفته شوند و A_x و A_y مؤلفه‌های اسکالر بُردار $\vec{A}$ در راستای x و y باشند، می‌توان این تجزیه را به صورت زیر هم نوشت:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} \qquad (\text{پ-۹})$$

بنابراین مقدار $\vec{A}$ برابر خواهد بود با:

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (\text{پ-۱۰})$$

اگر زاویه بین محور- x و بُردار $\vec{A}$ را α بنامیم می‌توان نوشت:

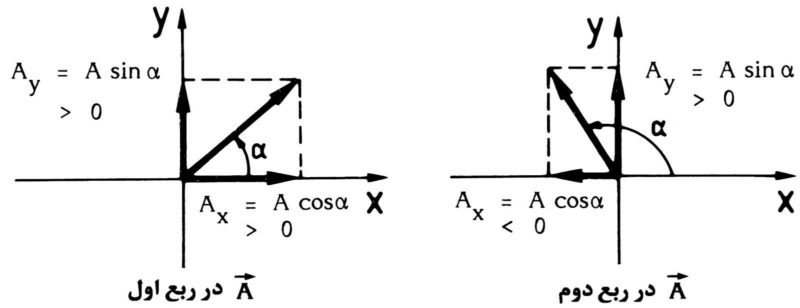
$$A_x = A\cos\alpha \qquad (\text{پ-۱۱})$$

$$A_y = A\sin\alpha \qquad (\text{پ-۱۲})$$

$$\frac{A_y}{A_x} = \tan\alpha \qquad (\text{پ-۱۳})$$

بنابراین یک بُردار در صفحه از نظر مقدار یا توسط A_x , A_y و یا از طریق A, α مشخص می‌گردد. همان طورکه شکل پ-۱۰ نشان می‌دهد مؤلفه‌ها دارای علائم زیر می‌باشند:

A	A_x	A_y
در ربع اول	+	+
در ربع دوم	-	+
در ربع سوم	-	-
در ربع چهارم	+	-



شکل پ-۱۰

از گویا و معین بودن تجزیه نتیجه می‌شود که

$$\vec{A} = \vec{B} \qquad \text{(پ-۱۴)}$$

موقعی صدق می‌کند که فقط و فقط $A_x = B_x \ , \ A_y = B_y$ باشند. این از نمایش مؤلفه‌ای معادله (پ-۱۴) هم قابل تعیین است:

$$A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

و یا

$$(A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} = 0 \qquad \text{(پ-۱۵)}$$

معادله (پ-۱۵) با شروط $A_x = B_x , A_y = B_y$ برآورده می‌شود.

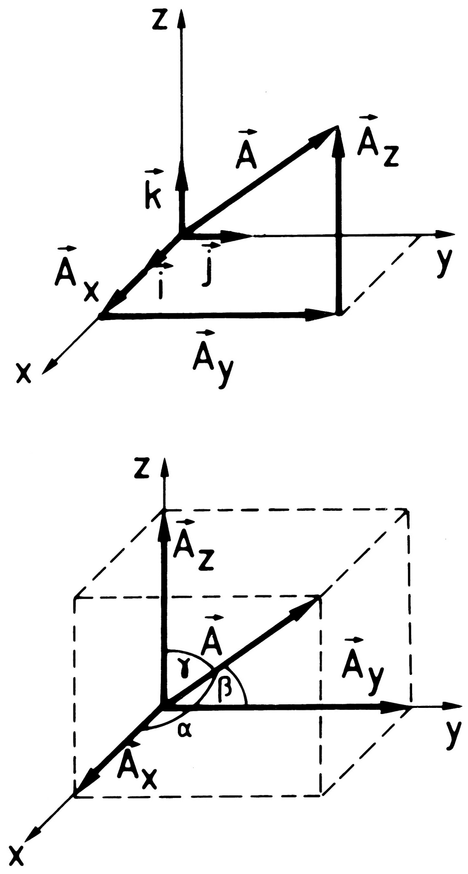
ب) تجزیه در فضا

بُردار $\vec{A}$ را می توان به صورتی گویا و واضح در فضای سه بعدی مطابق شکل پ-۱۱ به سه مؤلفه تجزیه نمود:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \qquad \text{(پ-۱۶)}$$

که در آن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بُردارهای یکّه در راستای محورهای یک دستگاه مختصات هستند.

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad \text{(پ-۱۷)}$$



شکل پ-۱۱

اگر زاویه بین $\vec{A}$ و راستای مثبت محورهای دستگاه مختصات α , β و γ باشند (زوایای هادی) می‌توان نوشت:

$$A_x = A\cos\alpha \ , \quad A_y = A\cos\beta \ , \quad A_z = A\cos\gamma \qquad \text{(پ-۱۸)}$$

از زوایای فوق فقط دو تای آنها مستقل هستند، یعنی آنکه می توانند به دلخواه از پیش داده شوند. این موضوع با قرار دادن معادله (پ-۱۸) در (پ-۱۷)۱ اثبات می‌گردد.

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

بنابراین یک بُردار $\vec{A}$ در فضا یا توسط ذکر مؤلفه‌های A_x, A_y, A_z آن و یا از طریق ذکر مقدار $\vec{A}$ و دو زاویه هادی آن، مثلاً α و β مشخص می‌باشد.

پ-۳) قوانین جبر بُرداری

برای اعمال جمع بُردارها و ضرب یک عدد حقیقی در یک بُردار، که در بالا اشاره شد قوانین زیر برقرار می‌باشند:

۱. (پ-۱۹) قانون (جابه‌جایی) تعویض پذیری در جمع بُردارها $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

۲. (پ-۲۰) قانون شرکت پذیری در جمع بُردارها $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

۳. (پ-۲۱) قانون شرکت پذیری در ضرب بُردارها $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$

۴. (پ-۲۲) قانون توزیع پذیری $(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$

۵. (پ-۲۳) قانون توزیع پذیری $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

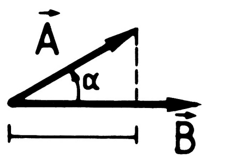
پ-۴) ضرب داخلی یا ضرب اسکالر دو بُردار

ضرب داخلی یا ضرب اسکالر دو بُردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با علامت $\vec{A}\cdot\vec{B}$ بیان می‌گردد. حاصلضرب داخلی این دو بُردار یک کمیت اسکالر است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

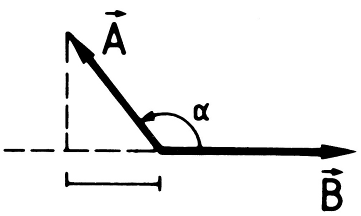
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha \qquad \text{(پ-۲۴)}$$

که در آن α زاویه بین دو بُردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است.

این ضرب را می‌توان به صورت هندسی به عنوان حاصلضرب جبری طول بردار $\vec{B}$ در تصویر $\vec{A}$ بر روی $\vec{B}$ بیان نمود (رجوع شود به شکل پ-۱۲). اگر $\alpha < 90^\circ$ باشد، تصویر $\vec{A}$ در جهت $\vec{B}$ می‌باشد و به این ترتیب حاصلضرب عددی مثبت است. اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ باشد، تصویر $\vec{A}$ در جهت مخالف $\vec{B}$ خواهد بود و به این ترتیب حاصلضرب عددی منفی است.



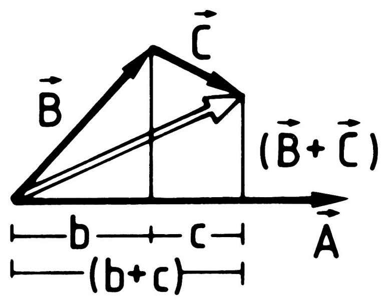
برای $0 < \alpha < \pi/2$
$\vec{A}\cdot\vec{B} > 0$ است، زیرا
$A\cos\alpha > 0$



برای $\pi/2 < \alpha < \pi$
$\vec{A}\cdot\vec{B} < 0$ است، زیرا
$A\cos\alpha < 0$

شکل پ-۱۲

در ضرب عددی دو بُردار قوانین زیر معتبرند:



شکل پ-۱۳

۱. (پ-۲۵) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

رابطه فوق از تعریف معادله (پ-۲۴) اثبات می‌گردد.

۲. (پ-۲۶) $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

اثبات: پاره‌خطهای b و c در شکل پ-۱۳ تصویر بُردارهای $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بر روی $\vec{A}$ را نشان می‌دهند. پاره خطی که با (b + c) مشخص شده است با مجموع پاره‌خطهای b و c برابر است و به علاوه با تصویر بُردار $(\vec{B}+\vec{C})$ بر روی $\vec{A}$ نیز برابر است. در نتیجه:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \left|\vec{A}\right|(\vec{B}+\vec{C})_{proj}$$
$$= A\cdot(b+c) = Ab + Ac = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

در اینجا تصویر بُردار $(\vec{B}+\vec{C})$ بر روی بُردار $\vec{A}$ با $(\vec{B}+\vec{C})_{proj}$ مشخص شده است.

۳. (پ-۲۷) $m(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (m\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(m\vec{B})$

اثبات: $m(\vec{A}\cdot\vec{B}) = mAB\cos\alpha = (mA)B\cos\alpha = A(mB)\cos\alpha$

۴. (پ-۲۸)

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1\cdot 1\cos 0 = 1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 1\cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

۵. چنانچه از تجزیه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به مؤلفه‌های آنها استفاده شود، با توجه به معادلات (پ-۲۸) برای ضرب داخلی بُردارها می توان نوشت:

(پ-۲۹)
$$\vec{A}\cdot\vec{A} = (A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k})\cdot(A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k})$$
$$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A\cdot A\cos 0 = A^2$$

همچنین:

(پ-۳۰) $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

این نمایش ضرب داخلی بُردارها به صورت مؤلفه‌ای است. با معادله (پ-۳۰) می‌توان معادله (پ-۲۶) را هم اثبات نمود.

۶. اگر $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ و $\vec{A},\vec{B} \neq 0$ باشند، از $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha = 0$ نتیجه می‌شود که یا بایستی $A = 0$ و یا $B = 0$ بوده و یا $\alpha = \pm 1/2\pi,\ \pm 3/2\pi,\ \pm 5/2\pi, ...,$ باشد، یعنی اینکه بایستی $\vec{A},\vec{B}$ بر هم عمود باشند. (حتی $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ هم لزوماً بدان معنی نیست که $\vec{A}$ یا $\vec{B}$ صفر می‌باشند.)

پ-۵) ضرب خارجی یا ضرب بُرداری دو بُردار

ضرب بُرداری دو بُردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

یک بُردار $\vec{C}$ خواهد بود که دارای مشخصات زیر است:

۱. $\vec{C}$ عمود بر صفحه گسترده شده توسط $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است (و به این ترتیب عمود بر خود $\vec{A}$ و $\vec{B}$ خواهد بود).

۲. اندازه $\vec{C}$ با مساحت متوازی‌الاضلاع گسترده شده توسط $\vec{A}$ و $\vec{B}$، یعنی

$$\left|\vec{C}\right| = AB\sin\alpha \qquad 0 < \alpha < 180^\circ$$

برابر است، که در آن α زاویه بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است.

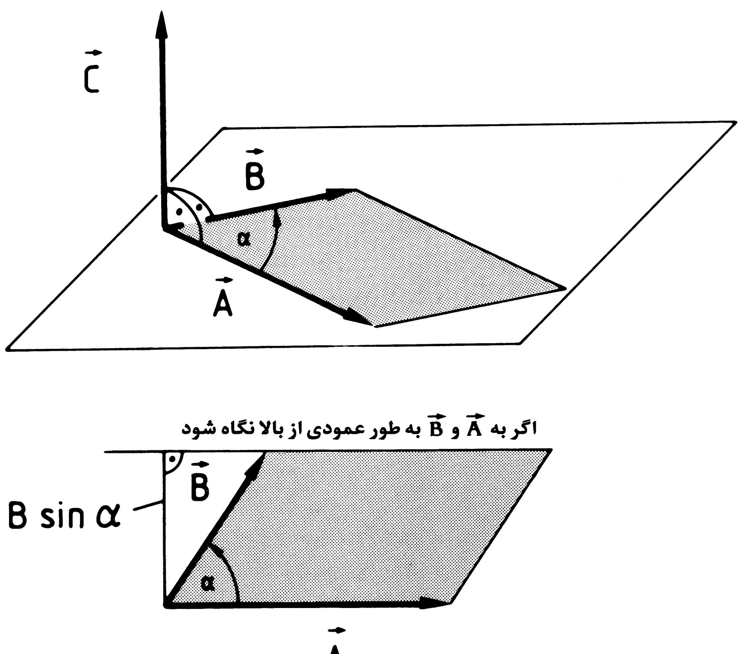
۳. جهت $\vec{C}$ به‌گونه‌ای است که اگر انگشتان دست راست حول مچ دست در کوتاهترین مسیر از $\vec{A}$ به طرف $\vec{B}$ بچرخند، شست دست راست جهت $\vec{C}$ را نشان دهد. چنانچه $\vec{A}$ با $\vec{B}$ موازی باشد، یعنی $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هم جهت و یا در جهت مخالف هم و یا حتی $\vec{A}=\vec{B}$ باشند، $\sin\alpha = 0$ خواهد بود. در این صورت:

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \qquad \text{(پ-۳۱)}$$

قوانین زیر در مورد ضرب بُرداری جاری است:

۱. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

اثبات: این موضوع از مشخصه ۳. نتیجه می‌شود. بر این اساس برای تعیین $\vec{B} \times \vec{A}$ بایستی بُردار $\vec{B}$ را در کوتاهترین مسیر به طرف $\vec{A}$ چرخاند. در این صورت بُرداری بدست می‌آید که در خلاف جهت بُردار $\vec{A} \times \vec{B}$ بوده، اما دارای اندازه‌ای برابر با آن است.



شکل پ-۱۴

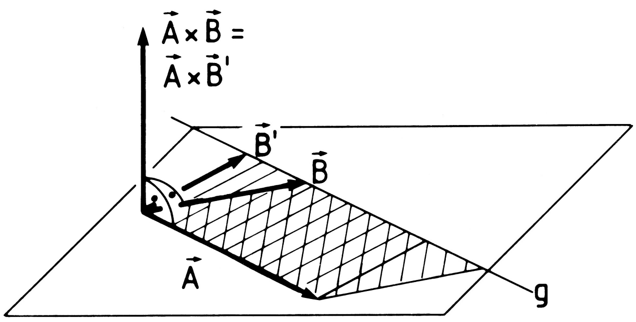
۲. قانون توزیع‌پذیری برای ضرب بُرداری عبارت است از:

$$\vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2 \qquad (\text{پ-۳۲})$$

اثبات: اندازه ضرب خارجی دو بُردار $\vec{A} \times \vec{B}$ با مساحت متوازی‌الاضلاع گسترده شده توسط $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است. اما اگر $\vec{B}$ با یک بُردار $\vec{B}'$ جایگزین شود، که نوک پیکان آن بر روی g قرار دارد و g به موازات $\vec{A}$ از نوک پیکان $\vec{B}$ می گذرد، اندازه این مساحت بدون تغییر خواهد ماند (رجوع شود به شکل پ-۱۵). بنابراین می‌توان با این روش $\vec{B}$ را با $\vec{B}'$، بدون آنکه مقدار ضرب خارجی تغییر کند جایگزین نمود.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}' \qquad (\text{پ-۳۳})$$

از این ویژگی در ادامه استفاده می‌شود.



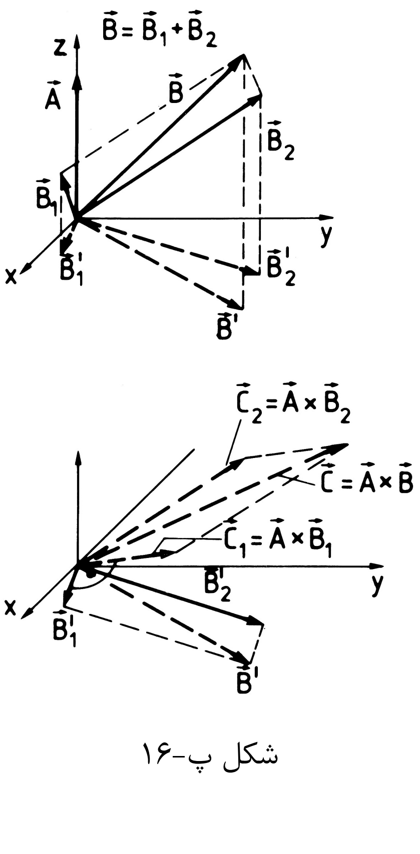
شکل پ-۱۵

کمیتهایی که در قانون توزیع‌پذیری ظاهر می‌شوند به طور ترسیمی در شکل شکل پ-۱۶ نشانداده شده‌اند و در این حال یک دستگاه مختصات کارتزینی به آن اضافه شده است، که محور- z آن در راستای $\vec{A}$ قرار دارد. از بُردارهای $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ متوازی‌الاضلاعی گسترده می‌شود که قطر آن برابر است با:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

بُردارهای $\vec{B}_1'$ و $\vec{B}_2'$ که از تصویر بُردارهای فوق بر روی سطح- x,y بدست می‌آیند، طبق معادله (پ-۳۳) دارای همان مقدار ضرب خارجی هستند، در نتیجه معادله (پ-۳۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A} \times (\vec{B}_1' + \vec{B}_2') = \vec{A} \times \vec{B}' = \vec{A} \times \vec{B}_1' + \vec{A} \times \vec{B}_2'$$



شکل پ-۱۶

از آنجایی‌که $\vec{B}'_1$ بر $\vec{A}$ عمود است، طبق تعریف ضرب خارجی، بُردار $\vec{A} \times \vec{B}'_1$ به این صورت بدست می‌آید که بُردار $\vec{B}'_1$ را در اندازه $\vec{A}$، یعنی در مقدار اسکالر A ضرب کرده و بُردار بدست آمده را در صفحه- x,y به اندازه 90° چرخاند. به همین ترتیب هم می‌توان برای $\vec{A} \times \vec{B}'_2$ و $\vec{A} \times \vec{B}'$ عمل نمود. بنابراین از متوازی‌الاضلاع گسترده شده توسط $\vec{B}'_2, \vec{B}'_1$ و $\vec{B}'$ متوازی‌الاضلاعی بدست می‌آید که به اندازه ضریب A بزرگتر شده و قطر آن بردار $\vec{A} \times \vec{B}'$ است. از این متوازی‌الاضلاع می‌توان روابط زیر را استخرج نمود:

$$\vec{A} \times \vec{B}'_1 + \vec{A} \times \vec{B}'_2 = \vec{A} \times \vec{B}' = \vec{A} \times (\vec{B}'_1 + \vec{B}'_2)$$

به این ترتیب معادله (پ-۳۲) اثبات گردید.

۳. (پ-۳۴)
$$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$$

رابطه فوق مستقیماً از تعریف ضرب خارجی بدست می‌آید.

۴. (پ-۳۵)
$$\text{a)}\quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$
$$\text{b)}\quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

این روابط هم مستقیماً از تعریف ضرب خارجی بدست می‌آیند. همچنین رجوع شود به معادله (پ-۳۱).

۵. چنانچه $\vec{B}, \vec{A}$ و $\vec{C}$ را به صورت مؤلفه‌ای نمایش دهیم:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad ; \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

نتیجه می‌شود:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \qquad \text{(پ-۳۶)}$$

با توجه به قانون توزیع‌پذیری نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\vec{C} = \; & A_x B_x \vec{i} \times \vec{i} + A_x B_y \vec{i} \times \vec{j} + A_x B_z \vec{i} \times \vec{k} + \\ & A_y B_x \vec{j} \times \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \times \vec{j} + A_y B_z \vec{j} \times \vec{k} + \\ & A_z B_x \vec{k} \times \vec{i} + A_z B_y \vec{k} \times \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \times \vec{k}\end{aligned}$$

با استفاده از روابط ذکر شده در ۴. می توان نوشت:

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

به عبارت دیگر مؤلفه‌های x, y و z بُردار $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} C_x &= (A_y B_z - A_z B_y) \\ C_y &= (A_z B_x - A_x B_z) \\ C_z &= (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \qquad \text{(پ-۳۷)}$$

نتایج فوق را می‌توان به صورت دترمینانی نوشته و محاسبه نمود.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(پ-۳۸)}$$

۶. چنانچه

(پ-۳۹) (برای $\vec{A}, \vec{B} \neq 0$) $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

باشد می توان با توجه به اینکه $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB\sin\alpha$ است نتیجه گرفت که:

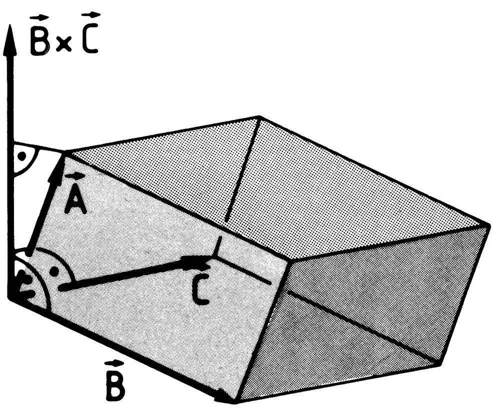
(پ-۴۰) $\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$

پ-۶) ضرب سه‌گانه اسکالر

ضرب داخلی یک بردار $\vec{A}$ در حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{B}$ و $\vec{C}$، یعنی

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

را ضرب سه‌گانه اسکالر می نامند. حاصل این ضرب سه‌گانه یک کمیت اسکالر است، که مقدار آن با حجم متوازی السطوح گسترده شده توسط $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$ برابر است.
طبق تعریف ضرب خارجی، بردار $\vec{B}\times\vec{C}$ عمود بر سطح گسترده شده توسط $\vec{B}$ و $\vec{C}$ قرار دارد و مقدار آن با مساحت متوازی‌الاضلاع گسترده شده توسط $\vec{B}$ و $\vec{C}$ برابر است. ضرب داخلی که بُردار $\vec{A}$ با این بُردار $\vec{B}\times\vec{C}$ تشکیل می‌دهد به این صورت بدست می‌آید که $\vec{A}$ را بر روی بُردار $\vec{B}\times\vec{C}$ تصویر کرده و مقدار $\vec{B}\times\vec{C}$ در طول این تصویر ضرب گردد. اما این مقدار با حجم متوازی‌السطوح گسترش یافته توسط $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ برابر است.



شکل پ-۱۷

باید توجه داشت که $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ وقتی مثبت است که $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ یک دستگاه راستگرد را تشکیل دهند و چنانچه این بُردارها یک دستگاه چپگرد بسازند حاصل این ضرب سه گانه منفی خواهد بود. از این رو با تعویض متوالی چرخشی بُردارها نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) &= \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \\ &= -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) = -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) = -\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})\end{aligned} \qquad \text{(پ-۴۰)}$$

ترتیبهای متفاوت بُردارها در هر دو سطر، هر کدام از اولین عبارت با تعویض متوالی چرخشی بدست آمده‌اند. همچنین از تعریف ضرب داخلی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}$$

برای نمایش مؤلفه‌ای ضرب سه‌گانه اسکالر به صورت زیر عمل می‌شود. چنانچه بردار $\vec{B}\times\vec{C}$ موقتاً با $\vec{D}$ جایگزین گردد، می‌توان ضرب سه‌گانه اسکالر را همچنین به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{D} = A_x D_x + A_y D_y + A_z D_z$$

و با توجه به نمایش مؤلفه‌ای ضرب خارجی نتیجه می‌شود:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

عبارت فوق با دترمینانی که سطرهای آن از مؤلفه‌های $\vec{A}$, $\vec{B}$ و $\vec{C}$ تشکیل شده‌اند برابر است.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

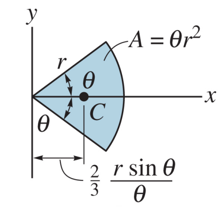
با توجه به معنای هندسی ضرب سه‌گانه اسکالر نتیجه می‌شود، همینکه یکی از این سه بُردار در سطح تشکیل شده از دو بُردار دیگر قرار گیرد، حاصلضرب سه‌گانه اسکالر صفر خواهد شد. بنابراین مشابه ضرب داخلی و خارجی بُردارها، ضرب سه‌گانه اسکالر هم می‌تواند صفر گردد، بدون آنکه یکی از بُردارها صفر باشد.

جدول ۱ خواص هندسی عناصر خطی و سطحی

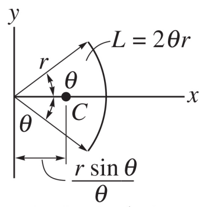
ممان اینرسی سطح | **محل مرکز هندسی** | **محل مرکز هندسی**

$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \sin 2)\theta$

$I_y = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \sin 2)\theta$



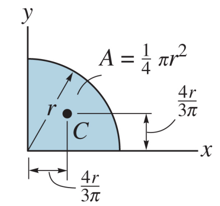
سطح قطاع دایره‌ای



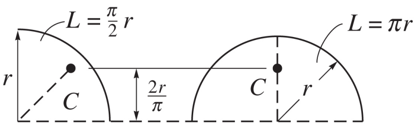
پاره کمان دایره‌ای

$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$

$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$



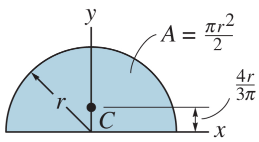
سطح ربع دایره‌ای



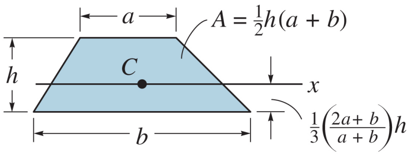
کمان‌های ربع دایره‌ای و نیم دایره‌ای

$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$

$I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$



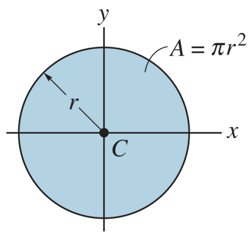
سطح نیم دایره‌ای



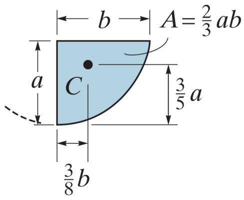
سطح ذوزنقه‌ای

$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$

$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$



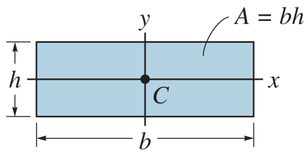
سطح دایره‌ای



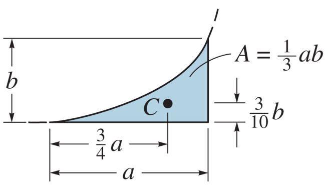
سطح نیم سهمی

$I_x = \frac{1}{12} bh^3$

$I_y = \frac{1}{12} hb^3$

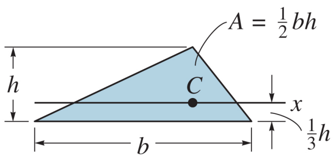


سطح مستطیلی

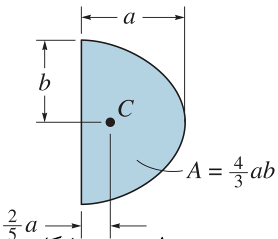


سطح سهمی‌شکل خارجی

$I_x = \frac{1}{36} bh^3$

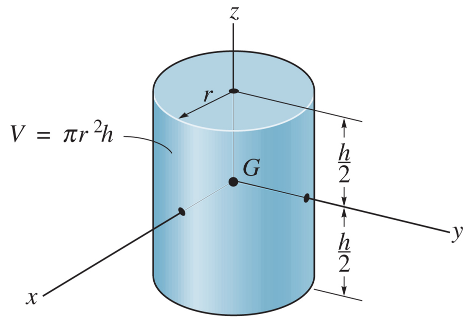


سطح مثلثی



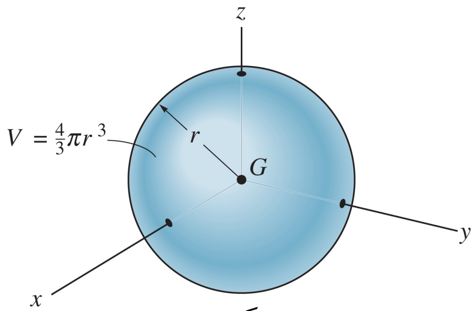
سطح سهمی‌شکل

جدول ۲ مرکز ثقل و ممان اینرسی جرمی اجسام فضایی همگن



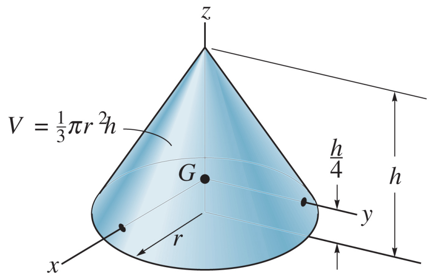
استوانه

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$



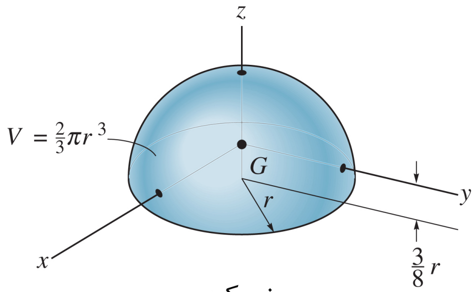
کره

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$



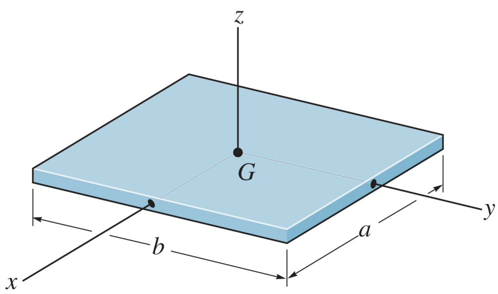
مخروط

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80}m(4r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$



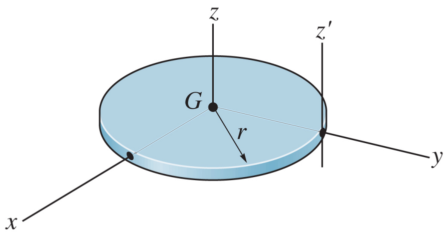
نیم کره

$I_{xx} = I_{yy} = 0.259mr^2 \quad I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$



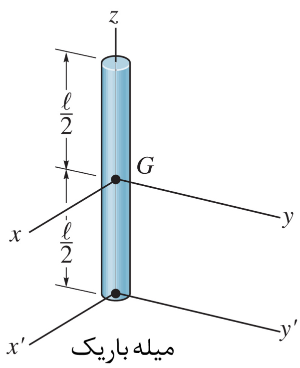
صفحه نازک

$I_{xx} = \frac{1}{12}mb^2 \quad I_{yy} = \frac{1}{12}ma^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$



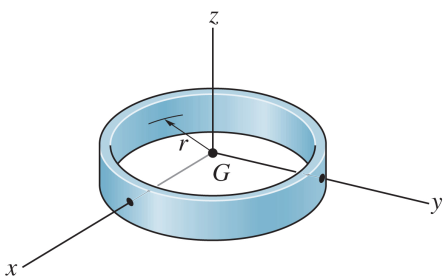
دیسک دایره‌ای نازک

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{z'z'} = \frac{3}{2}mr^2$



میله باریک

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}m\ell^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3}m\ell^2 \quad I_{z'z'} = 0$



حلقه نازک

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{zz} = mr^2$

استاتیک برای مهندسین

در این کتاب مباحث زیر با مثال ها و تمرین های متنوع حل شده مورد بررسی قرار گرفته اند :

- ❊ بردار نیرو
- ❊ تعادل اجسام با مجموعه نیروهایی با نقطه اثر مشترک
- ❊ گروه های عمومی نیرو
- ❊ مرکز نیروها و مرکز ثقل
- ❊ گشتاورهای دوم سطح
- ❊ تعادل جسم صلب
- ❊ تحلیل سازه ای
- ❊ بارهای داخلی
- ❊ اصطکاک

محمدرضا فرامرزی

انتشارات استاد