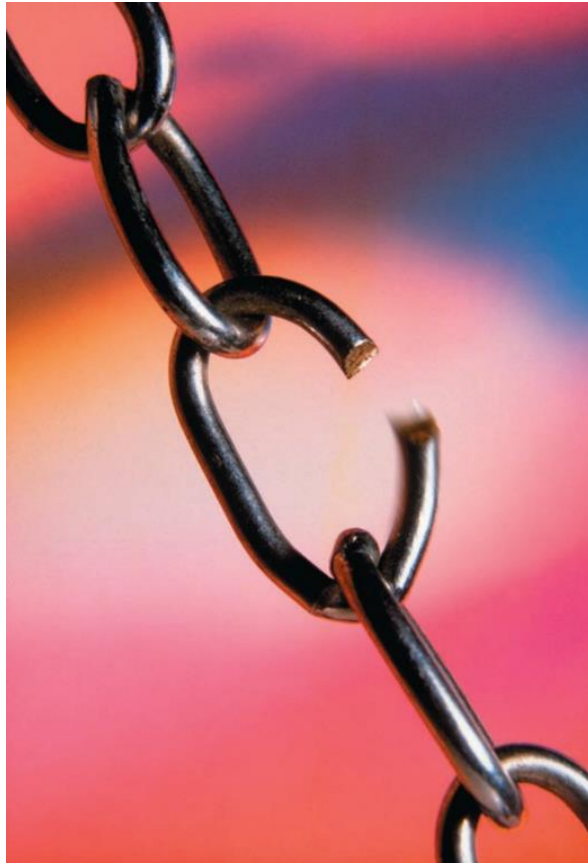




واحد مشہد

# مقاومت مصالح (۱)



**تألیف: محمد رهنورد**

نیمسال اول ۹۶-۹۷

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

این جزوه برای استفاده دانشجویان کارشناسی عمران دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، برای درس سه واحدی مقاومت مصالح (۱) تهیه شده است و هرگونه تکثیر و کپی برداری از آن با ذکر منبع، بلامانع است.

## فهرست:

فصل اول: مقدمه و یادآوری از استاتیک.....	۳
فصل دوم: مفهوم تنش.....	۱۸
فصل سوم: تغییر فرم نسبی.....	۴۹
فصل چهارم: خصوصیات مکانیکی مصالح.....	۶۳
فصل پنجم: پیچش.....	۹۱
فصل ششم: خمش و ترکیب خمش و بار محوری.....	۱۱۳
فصل هفتم: تنش های برشی حاصل از بارگذاری عرضی تیرها.....	۱۴۴
فصل هشتم: تغییر شکل (خیز) تیرها و مسائل تیرهای نامعین.....	۱۵۷

## فصل اول

### مقدمه و یادآوری از استاتیک



## مقدمه

مقاومت مصالح، شاخه‌ای از مکانیک کاربردی است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی می‌کند. پیش از این، تعادل اجسام صلب تحت اثر نیروهای گوناگون در استاتیک مورد مطالعه قرار گرفته و نیروهای داخلی در آن‌ها به دست آمده‌اند. در این درس، اجسام تحت اثر نیروی وارده، تغییر شکل پذیر فرض می‌شوند. جسم کاملاً صلب، در طبیعت وجود ندارد و اجسام بسته به میزان سختی خود، تحت اثر بارگذاری دچار تغییر شکل می‌شوند.

در مقاومت مصالح محاسبه نیروهای داخلی (تنش‌ها) و تغییر شکل مصالح ساختمانی نظیر فولاد، بتن، چوب و سایر اجسام مورد توجه است و با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی مقاومت، صلبیت و پایداری اعضای باربر سازه پرداخته می‌شود. در این درس، به مسائل نامعین استاتیکی نیز پرداخته می‌شود.

در این علم سه فرضیه اصلی در حل مسائل در نظر گرفته می‌شود:

Equilibrium	۱- تعادل:
Force – deformation relations	۲- روابط نیرو-تغییر شکل:
Compatibility	۳- سازگاری:

منظور از تعادل، تعادل نیروها است. تعادل کلی نمودار آزاد جسم (free body diagram) و نیز هریک از اجزای آن باید برقرار باشد.

باتوجه به روابط نیرو-تغییر شکل، میزان تغییر شکل جسم تحت اثر نیروی مشخص قابل محاسبه است. منظور از سازگاری نیز سازگاری تغییر شکل‌ها است. تحت اثر بارهای وارده، حفظ یکپارچگی جسم یا سازه ضروری است.

## تعاریف پایه

**جسم صلب:** جسمی است که بین ذرات آن هیچ جابجایی نسبی وجود نداشته باشد.  
**جسم همگن:** جسمی است که دارای ویژگی‌های یکسان در تمام نقاط باشد. همه اجسام مورد مطالعه در این درس، همگن فرض می‌شوند.

**جسم ایزوتروپیک:** جسمی است که در یک نقطه خاص، دارای ویژگی‌های یکسان در تمام جهات باشد.

**جسم غیر ایزوتروپیک:** جسمی است در یک نقطه خاص، دارای ویژگی‌های متفاوت در جهات مختلف باشد.

**جسم ارتوتروپیک:** جسمی است در یک نقطه خاص، دارای ویژگی‌های متفاوت در سه جهت عمود بر هم باشد.

**نیرو:** عاملی است که باعث ایجاد حرکت یا تغییر شکل در اجسام می‌شود.

**نیروی داخلی:** هر جسم از ذرات ریزی تشکیل شده است که نسبت به قطر ذرات، در فاصله بزرگی نسبت به هم قرار گرفته‌اند و جاذبه قوی بین مولکولی باعث حفظ این ذرات در کنار هم می‌شوند، این فاصله مقدار ثابتی است. هرگاه به جسمی نیروی خارجی وارد شود، الزاماً در آن نیروهای داخلی ایجاد خواهد شد که باعث تغییر شکل می‌شود.

## پیشوند واحدها

برای آن که اعداد مربوط به واحدها خیلی کوچک یا خیلی بزرگ نباشند، معمولاً پیشوندهایی مطابق با جدول زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

	Exponential Form	Prefix	SI Symbol
<i>Multiple</i>			
1 000 000 000	$10^9$	giga	G
1 000 000	$10^6$	mega	M
1 000	$10^3$	kilo	k
<i>Submultiple</i>			
0.001	$10^{-3}$	milli	m
0.000 001	$10^{-6}$	micro	$\mu$
0.000 000 001	$10^{-9}$	nano	n

## یادآوری از استاتیک

انواع سازه‌های ساختمانی: از دیدگاه مهندسی، سازه‌های ساختمانی را می‌توان به شرح زیر دسته‌بندی کرد:

- ۱- عناصر کششی: کابل‌ها کش‌ها و مهارها؛
- ۲- عناصر فشاری: قطعات فشاری در خرپاها، ستون‌ها؛
- ۳- تیرها: عناصر یک‌بعدی همراه با بار جانبی؛
- ۴- تیرستون‌ها: عناصر یک‌بعدی همراه با بار جانبی و محوری؛
- ۵- قوس‌ها (Arches): عناصر دوبعدی (خمیده) همراه با بار جانبی و محوری؛
- ۶- صفحات (Plates): عناصر دوبعدی مستوی همراه با بار جانبی و احتمالاً بار واقع در صفحه؛
- ۷- پوسته‌ها (Shells): عناصر دو بعدی با سطح منحنی و بار کلی؛
- ۸- محورها (Shafts): عناصر یک بعدی بار پیچشی؛
- ۹- قاب‌های سه بعدی: عناصر سه بعدی با بار کلی؛
- ۱۰- سازه‌های مرکب: عناصر مرکب از دو یا چند عنصر فوق از لحاظ شکل سازه یا بارهای وارده.

## اتصالات و تکیه‌گاه‌ها

هر دستگاه مکانیکی از تعدادی عنصر ساختمانی تشکیل می‌یابد که به یکدیگر متصل شده و در جاهایی نیز به محیط اطرافش متصل گشته و به اصلاح به آن تکیه نموده است.

در شکل زیر انواع تکیه‌گاه‌ها و اتصالات در سیستم‌های سازه‌ای دوبعدی نشان داده شده است:



The cable exerts a force on the bracket in the direction of the cable. (1)



The rocker support for this bridge girder allows horizontal movement so the bridge is free to expand and contract due to a change in temperature. (4)

This concrete girder rests on the ledge that is assumed to act as a smooth contacting surface. (5)



This utility building is pin supported at the top of the column. (8)

The floor beams of this building are welded together and thus form fixed connections. (10)

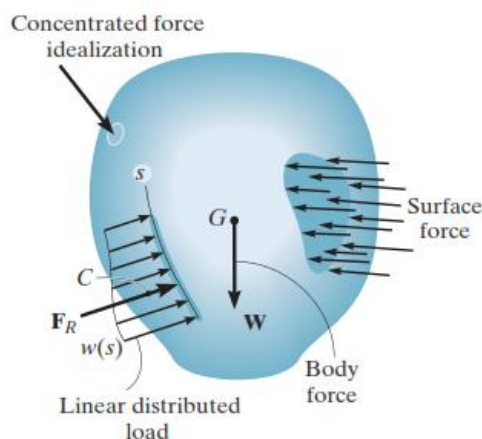


در شکل زیر نیز انواع تکیه‌گاه‌ها و نیروهای اتصالیه مربوطه در سیستم دوبعدی و سه‌بعدی نمایش داده شده است:

Description	Symbol	Required Forces/Couples
<b>REACTIONS – 2D</b>		
1. Roller support		
2. Cable or rod		
3. Pin support		
4. Cantilever support (fixed end)		
<b>REACTIONS – 3D</b>		
5. Ball joint		
6. Cantilever support (fixed end)		
<b>CONNECTIONS – 2D</b>		
7. Pinned connection		
8. Rigid connection (e.g., welded, bolted)		

## نمودار جسم آزاد (Free Body Diagram)

اکثر مطالعات مهندسی در زمینهٔ ساختمان‌ها و عناصر سازه‌ای، بر پایهٔ مفهوم جسم آزاد استوار است. در مسائل ابتدا دستگاه مکانیکی مورد نظر را مشخص ساخته، اطراف آن را به صورت نیروها و یا اثرات دیگر بر روی آن، تأثیر می‌دهیم. تصویری که بدین ترتیب از دستگاه جدا شده از محیط حاصل می‌شود، را بنا به تعریف نمودار جسم آزاد آن دستگاه می‌نامند.



نمودار جسم آزاد

## تعادل سازه‌ها و دستگاه‌های مکانیکی

یک جسم صلب در فضا، دارای شش درجهٔ آزادی است. به عبارت دیگر، می‌تواند سه حرکت انتقالی و سه حرکت دورانی داشته باشد. بنابراین، برای آن که جسم در حالت سکون قرار گیرد، باید شش نوع حرکت احتمالی آن مهار شود. سکون جسم از نظر مهندسی بدین معنی است که برآیند نیروها و لنگرهای وارده بر آن مساوی صفر است. شش معادله تعادل در سیستم مختصات دکارتی X-Y-Z عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

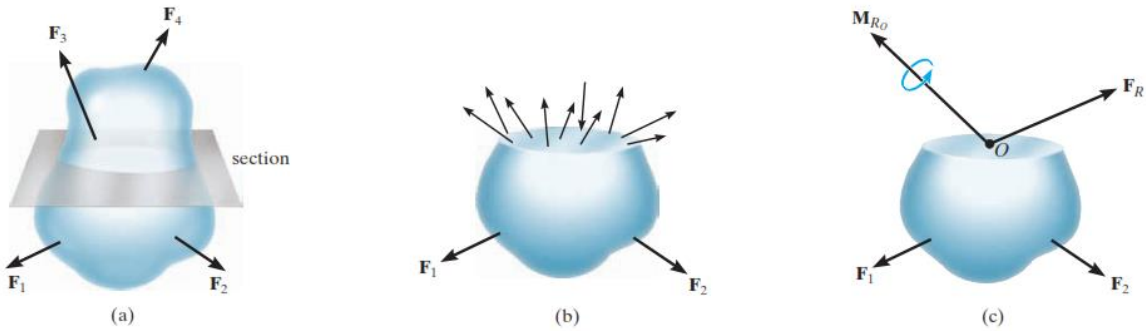
البته در حالات خاص که درجات آزادی حرکت جسم محدودتر بوده یا نیروهای وارده عملکردی خاص دارند و تعداد معادلات تعادل نیز کاهش می‌یابد. در صفحهٔ X-Y معادلات به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O &= 0 \end{aligned}$$

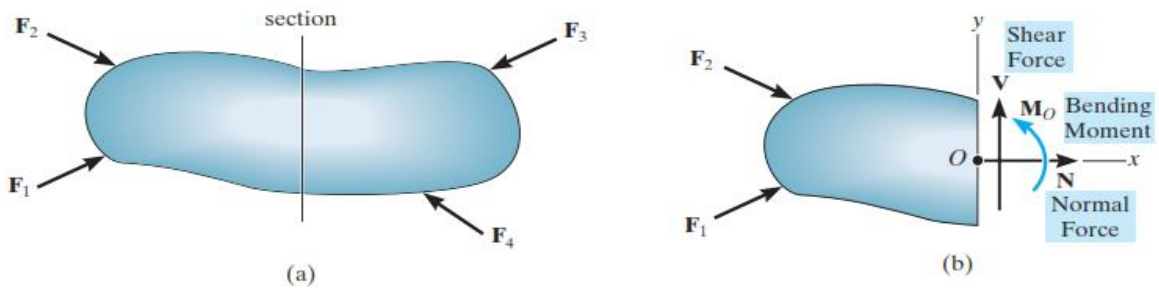
یعنی مجموع لنگرها نسبت به نقطهٔ دلخواه O حول محور Z باید مساوی صفر باشد.

## سیستم نیروهای داخلی در اعضای سازه‌ای (Internal Force System)

هرگاه بخواهیم به کم و کیف اثرات درونی جسم پی ببریم، باید مقطعی از نقاط مورد نظر عبور دهیم و نمودار جسم آزاد را که در یک طرف این نمودار قرار گرفته است، در نظر بگیریم. در نمودار جسم آزاد قسمتی از جسم، اثر بقیهٔ سیستم را که از آن جدا شده است، به صورت یک سیستم نیرو بر روی قسمت باقی‌مانده قرار می‌دهیم و با استفاده از معادلات تعادل، نیروهای داخلی را در نقطهٔ مورد نظر به دست آوریم.



از آن جا که اکثر سازه‌های ساختمانی را عناصر یک‌بعدی و دوبعدی تشکیل می‌دهند، مطابق با شکل زیر، نیروهای داخلی شامل: نیروی محوری (در عناصر یک‌بعدی و دوبعدی)، نیروی برشی و لنگر خمشی (در عناصر دوبعدی)، با استفاده از معادلات تعادل قابل محاسبه خواهد بود.

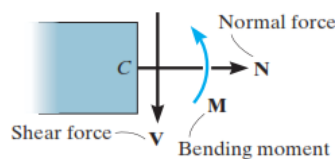
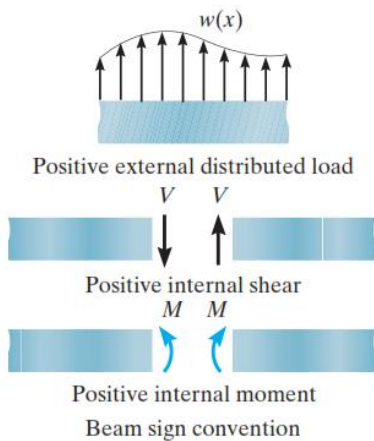


### ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها

تیرها بیشترین کاربرد را در ساختمان‌های متداول به‌عنوان اعضای سازه‌ای دارند. عناصر اصلی تحمل‌کننده بار کف ساختمان‌ها، تیرها هستند. بار وارد بر تیر می‌تواند به‌صورت متمرکز، عمود و یا تحت زاویه نسبت به امتداد محور طولی آن باشد. همچنین بارهای وارده می‌تواند به شکل گسترده یکنواخت یا غیر یکنواخت در واحد طول تیر، وارد شود. برای طراحی یک تیر، نخست لازم است نیروها و لنگرهای داخلی در تمام نقاط روی آن معلوم شود. بدین منظور نمودار تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در طول تیر ترسیم و نقاط بحرانی آن نشان داده می‌شود. البته به‌دلیل اهمیت و کاربرد بیشتر، در این فصل فقط نمودارهای مربوط به تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی مورد توجه قرار گرفته است.

### قراردادهای علامتی:

پیش از ورود به بحث، لازم است به‌صورت قراردادی، علامت بارها و نیروهای داخلی عضو را مشخص کنیم. در شکل روبه‌رو، جهت مثبت بارها و نیروی برشی و لنگر خمشی در یک نقطه دلخواه از یک تیر، نشان داده شده است. شکل زیر نیز علامت مثبت نیروها و لنگر خمشی را در یک مقطع از تیر نشان می‌دهد.

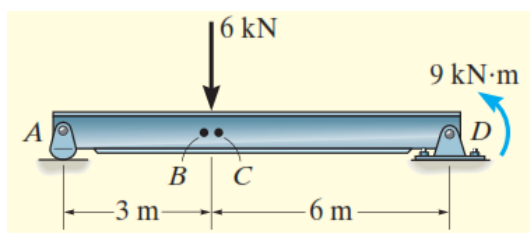




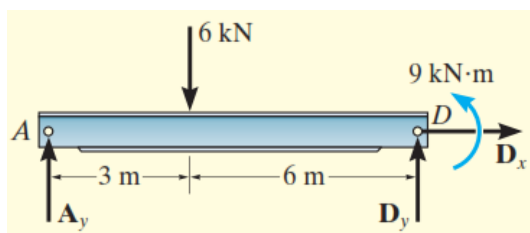
## روش مقطع

این روش، به عنوان یک روش پایه در مکانیک جامدات، برای تعیین نیروهای داخلی، شناخته می‌شود. تحلیل یک تیر، نخست با رسم نمودار جسم آزاد آن آغاز می‌شود. در صورتی که تیر مورد نظر، معین استاتیکی باشد، تعداد عکس‌العمل‌های مجهول تکیه‌گاهی مساوی با تعداد معادلات تعادل خواهد بود. به این ترتیب واکنش تکیه‌گاه‌ها محاسبه می‌گردد. در گام‌های بعدی، در فواصل بین نیروهای متمرکز و همچنین، نقاطی از تیر که تحت بار گسترده مشخصی قرار گرفته‌اند، مقطعی فرض می‌شود و با توجه به این اصل که هرگاه جسمی کلاً در حال تعادل باشد، هر جزء آن نیز باید در حال تعادل باشد، نوشتن معادلات تعادل برای هر جزء، نیروهای داخلی در مقطع مورد نظر را به دست می‌دهد.

**مثال ۱:** نیروی برشی و لنگر خمشی را در نقاط B و C (بلافاصله قبل و بعد از بار متمرکز) از تیر مطابق شکل زیر تحت اثر بار متمرکز 6 kN محاسبه کنید.



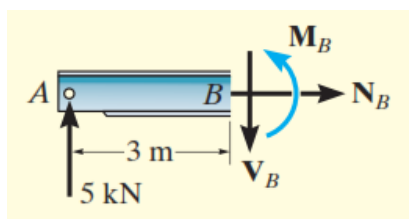
**حل:** ابتدا پس از ترسیم نمودار آزاد تیر، واکنش‌های تکیه‌گاهی را تعیین می‌کنیم (کافی است فقط مؤلفه قائم واکنش تکیه‌گاه A محاسبه شود):



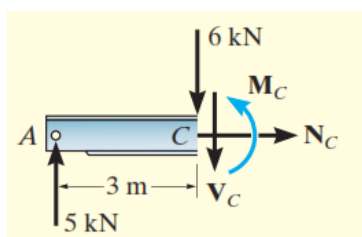
$$\zeta + \sum M_D = 0; \quad 9 \text{ kN} \cdot \text{m} + (6 \text{ kN})(6 \text{ m}) - A_y(9 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = 5 \text{ kN}$$

اکنون با مقطع زدن در نقاط B و C معادلات تعادل را نمودار جسم آزاد قطعه سمت چپ تیر می‌نویسیم:

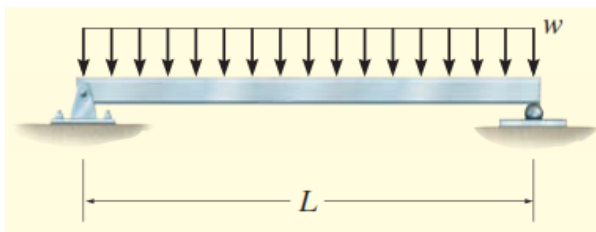


$$\begin{aligned} \pm \sum F_x = 0; & \quad N_B = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad 5 \text{ kN} - V_B = 0 \quad V_B = 5 \text{ kN} \\ \zeta + \sum M_B = 0; & \quad -(5 \text{ kN})(3 \text{ m}) + M_B = 0 \quad M_B = 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

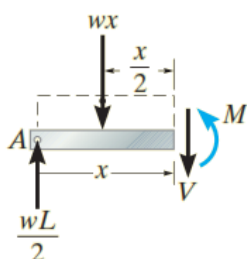


$$\begin{aligned} \pm \sum F_x = 0; & \quad N_C = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad 5 \text{ kN} - 6 \text{ kN} - V_C = 0 \quad V_C = -1 \text{ kN} \\ \zeta + \sum M_C = 0; & \quad -(5 \text{ kN})(3 \text{ m}) + M_C = 0 \quad M_C = 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

**مثال ۲:** نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر مطابق شکل زیر، تحت اثر بار گسترده یکنواخت  $w$  ترسیم کنید.



**حل:** واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر به دلیل تقارن، به سهولت برابر با  $wL/2$  به دست می‌آید. مقطعی را در فاصله  $x$  از تکیه‌گاه A در نظر می‌گیریم و نمودار جسم آزاد را برای قطعه سمت چپ نشان می‌دهیم و معادلات تعادل را برای این قطعه می‌نویسیم (به جای بار گسترده در طول  $x$  بار متمرکز معادل آن را قرار داده‌ایم):

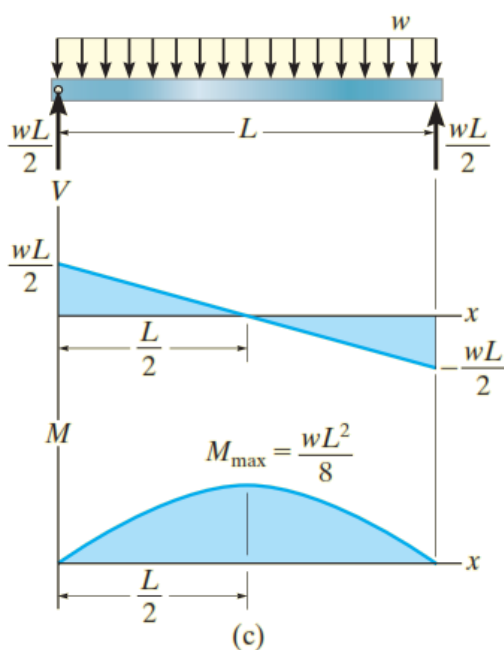


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \frac{wL}{2} - wx - V = 0$$

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad -\left(\frac{wL}{2}\right)x + (wx)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$



مقدار نیروی برشی در تکیه‌گاه، با واکنش تکیه‌گاه برابر است و به دلیل خطی بودن معادله نیروی برشی بر حسب  $x$ ، نمودار تغییرات آن نیز خطی خواهد بود. اگر رابطه نیروی برشی را برابر با صفر قرار دهیم، موقعیت آن بر روی نمودار به دست می‌آید:

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

حال اگر این مقدار  $x$  را در معادله لنگر خمشی قرار دهیم، بیشترین مقدار آن حاصل خواهد شد:

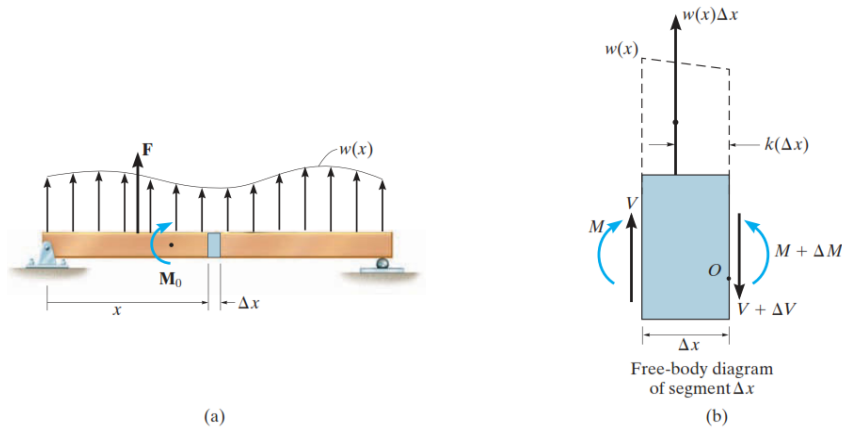
$$M_{\max} = \frac{w}{2} \left[ L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{wL^2}{8}$$

نمودار تغییرات لنگر خمشی نیز با توجه به آن که بر حسب  $x$  از درجه دو است، به صورت سهمی خواهد بود.

## معادلات دیفرانسیل تعادل

یک روش مؤثر در تعیین نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر و ترسیم نمودارهای مربوطه، استفاده از معادلات دیفرانسیل تعادل است. تیر مطابق شکل a را تحت اثر بارهای مختلفی از جمله بار گسترده، بار متمرکز و لنگر خمشی متمرکز، در نظر بگیرید. تمام نیروها در این تیر، با علامت مثبت فرض شده‌اند. در شکل b نمودار جسم آزاد قطعه کوچکی به طول  $\Delta x$  نشان داده شده است.



با استفاده از تعادل نیروها در امتداد قائم، می‌توان نوشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + w(x) \Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = w(x) \Delta x$$

در صورتی که  $\Delta x \rightarrow 0$  با تقسیم کردن عبارت فوق بر  $\Delta x$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{dV}{dx} = w(x) \quad (1)$$

به عبارت دیگر، «شیب نمودار نیروی برشی در هر نقطه، برابر با مقدار بار گسترده وارد در همان نقطه است».

همچنین، برای حفظ تعادل در قطعه مورد نظر، باید مجموع لنگرها حول نقطه  $O$  مساوی صفر شود:

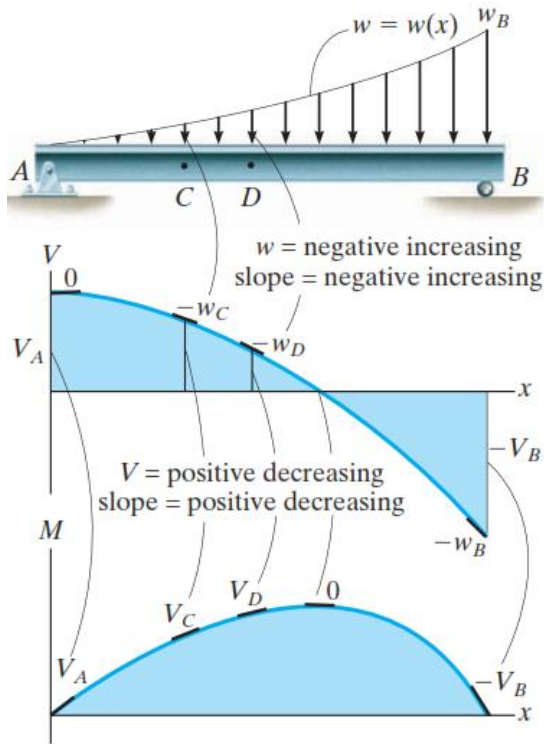
$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad -V \Delta x - M - w(x) \Delta x [k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x + w(x) k(\Delta x)^2$$

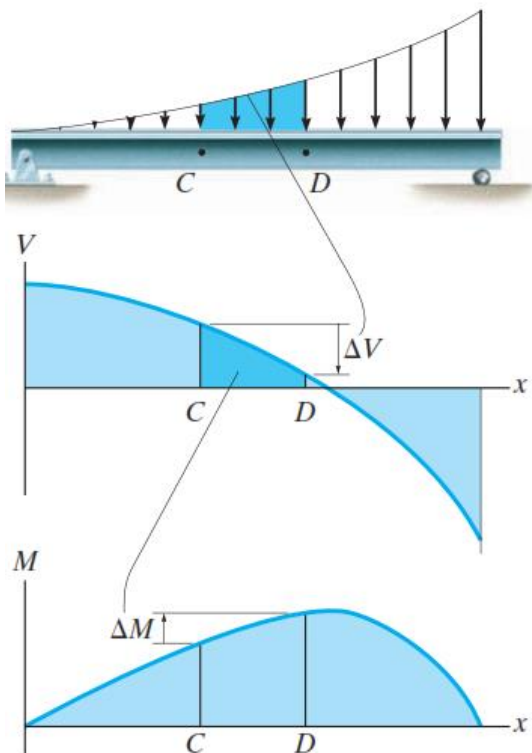
به‌طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (2)$$

یعنی، «شیب نمودار لنگر خمشی در هر نقطه، برابر با مقدار نیروی برشی در همان نقطه است».



خواهد یافت. محل لنگر خمشی ماکزیمم نیز روی نمودار با شیب مساوی صفر نشان داده شده است، در موقعیتی از تیر قرار گرفته است که نیروی برشی در آن مساوی با صفر است. شیب نمودار لنگر خمشی از این نقطه به بعد، که نیروی برشی منفی است، در جهت منفی افزایش یافته، در نقطه B برابر با واکنش تکیه‌گاه B خواهد بود.



معادلات 1 و 2 را می‌توان به صورت:  $dM = V dx$  و  $dV = w(x) dx$  نیز نوشت. با انتگرال گیری از این معادلات در فاصله بین دو مقطع دلخواه C و D می‌توان نوشت:

$$\Delta V = \int_{XC}^{XD} w(x) dx$$

= (سطح زیر منحنی بار بین نقاط C, D)

یعنی: «تغییر نیروی برشی در فاصله بین دو نقطه، برابر با سطح زیر منحنی بار بین آن دو نقطه است.»

در شکل روبه‌رو، کاهش در مقدار نیروی برشی، به دلیل علامت منفی امتداد بار گسترده است (جهت بار رو به پایین است).

و به همین ترتیب:

$$\Delta M = \int_{XC}^{XD} V dx$$

= (سطح زیر منحنی برش بین نقاط C, D)

یعنی: «تغییر لنگر خمشی در فاصله بین دو نقطه، برابر با سطح زیر منحنی برش بین آن دو نقطه است.»

علت افزایش لنگر خمشی در این شکل، مثبت بودن مقدار نیروی برشی در این فاصله است.

### ناحیه بار یا لنگر خمشی متمرکز

در صورتی که بار متمرکزی مطابق شکل روبه‌رو در فاصله  $\Delta x$  اثر کند، با نوشتن رابطه تعادل در امتداد قائم، خواهیم داشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + F - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = F$$

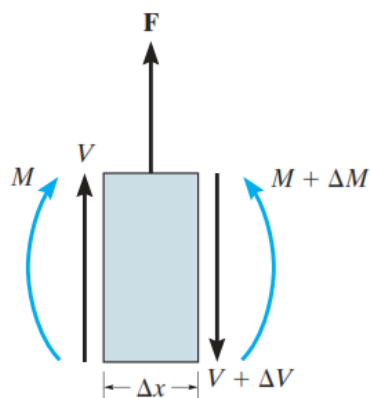
بنابراین، هنگامی که یک نیروی متمرکز در جهت مثبت (رو به بالا) بر تیر اثر کند، تغییرات نیروی برشی به اندازه مقدار نیرو و در جهت مثبت خواهد بود (افزایش نیروی برشی)؛ در این صورت، یک تغییر ناگهانی (جهش) به اندازه نیروی وارده در نمودار نیروی برشی ایجاد می‌گردد.

اگر لنگر خمشی متمرکزی در فاصله  $\Delta x$  وارد شود، با نوشتن رابطه تعادل لنگر حول نقطه O می‌توان نوشت:

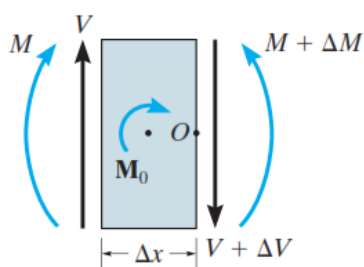
$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad M + \Delta M - M_0 - V \Delta x - M = 0$$

$$\Delta M = M_0$$

در نتیجه، روی نمودار لنگر خمشی، در محل اثر لنگر خمشی متمرکز، یک تغییر ناگهانی (جهش) به اندازه لنگر متمرکز ایجاد خواهد شد. اگر این لنگر در جهت عقربه‌های ساعت باشد، افزایش لنگر خمشی مثبت و اگر در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد، منفی خواهد بود.

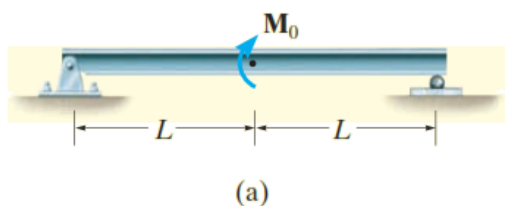


(a)

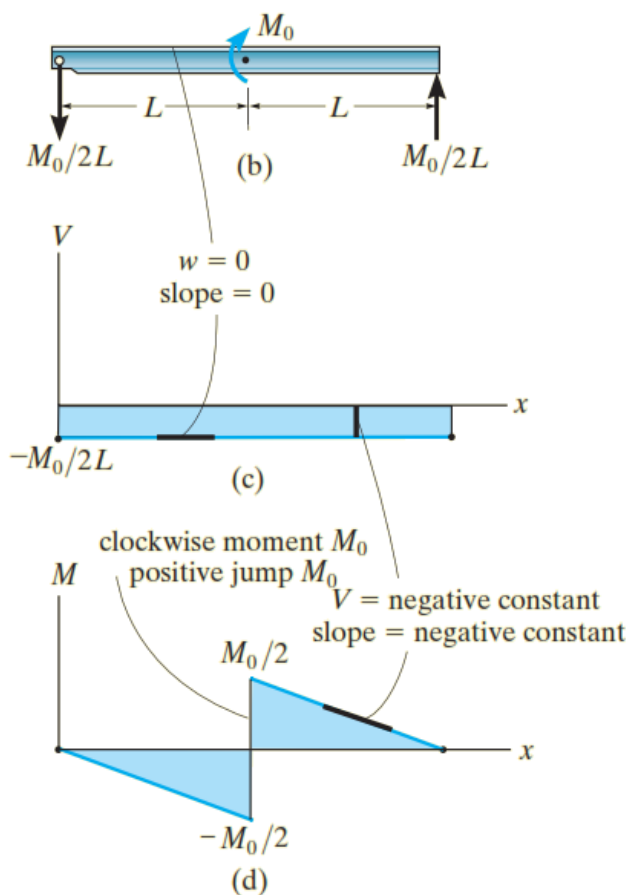


(b)

**مثال ۳:** نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر نشان داده شده در شکل زیر ترسیم کنید.

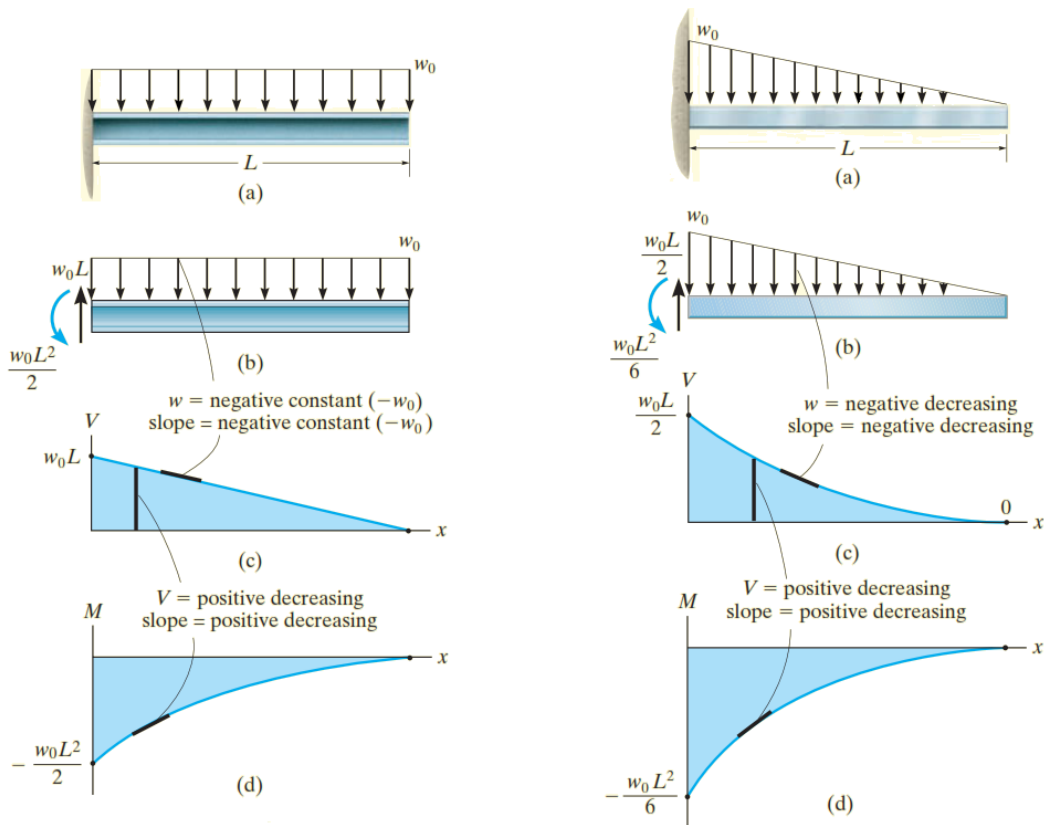


**حل:** پس از ترسیم نمودار جسم آزاد تیر مطابق شکل فوق و نوشتن رابطه لنگر حول هر کدام از تکیه‌گاه‌ها، واکنش‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آیند.

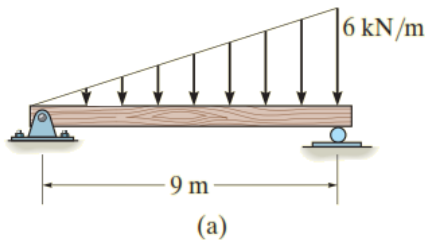


مقدار نیروی برشی در تکیه‌گاه سمت چپ، به اندازه واکنش تکیه‌گاه و با علامت منفی است؛ زیرا جهت نیرو رو به پایین است. چون در فاصله بین دو تکیه‌گاه هیچ نیرویی بر تیر وارد نشده است، تغییری در مقدار نیروی برشی تا انتهای تیر ایجاد نخواهد شد و مقدار آن در طول تیر ثابت باقی می‌ماند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، شیب نمودار نیروی برشی در این فاصله برابر با صفر است. برای ترسیم نمودار لنگر خمشی نیز با توجه به مفصلی بودن تکیه‌گاه‌ها، لنگر خمشی در آن نقاط برابر با صفر است. در فاصله بین تکیه‌گاه سمت چپ تا محل اثر لنگر متمرکز، نزولی است؛ چون نیروی برشی منفی است. به دلیل ثابت بودن مقدار نیروی برشی در این فاصله، شیب نمودار لنگر خمشی ثابت خواهد بود. مقدار لنگر خمشی در وسط دهانه برابر با سطح زیر نمودار برش در فاصله تکیه‌گاه تا وسط دهانه است. چون نیروی برشی در این فاصله منفی است، لنگر خمشی نیز منفی خواهد بود. در محل اثر لنگر متمرکز مقدار لنگر خمشی به اندازه لنگر  $M_0$  افزایش می‌یابد (چون لنگر در جهت عقربه‌های ساعت اثر می‌کند). به دلیل تقارن، در ادامه نیز نمودار لنگر خمشی با همان شیب ثابت تا تکیه‌گاه ادامه می‌یابد و در تکیه‌گاه سمت راست، مقدار آن به صفر می‌رسد.

در شکل‌های زیر با همان روشی که توضیح داده شد، نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیرهای کنسول، تحت بارهای گسترده یکنواخت و مثلثی ترسیم شده است:

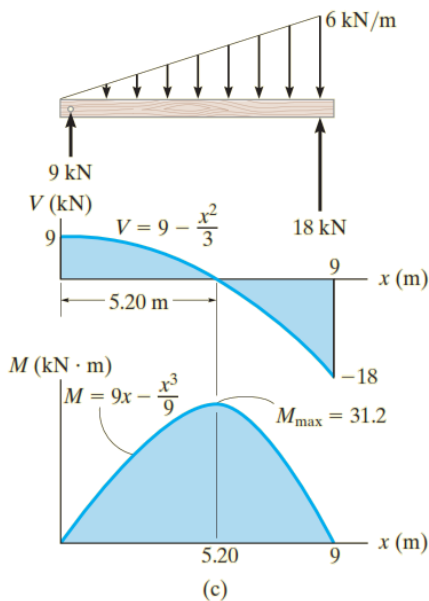


**مثال ۴:** نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مطابق شکل مقابل را ترسیم کنید.



**حل:** واکنش‌های تکیه‌گاهی که با نوشتن معادلات تعادل و لنگر به دست آمده‌اند، در نمودار جسم آزاد مطابق شکل C نشان داده شده است.

با در نظر گرفتن مقطعی به فاصله  $x$  از تکیه‌گاه سمت راست، نمودار جسم آزاد قطعه جدا شده در شکل b ترسیم شده است. برای حفظ تعادل در این قطعه می‌توان نوشت:



$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 9 - \frac{1}{3}x^2 - V = 0$$

$$V = \left(9 - \frac{x^2}{3}\right) \text{ kN}$$

$$\zeta + \sum M = 0; \quad M + \frac{1}{3}x^2\left(\frac{x}{3}\right) - 9x = 0$$

$$M = \left(9x - \frac{x^3}{9}\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی، مطابق با روشی که بیان شد، در شکل‌های b و c ترسیم شده‌اند. برای تعیین موقعیت نیروی برشی صفر، در معادله به دست آمده فوق،  $V$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$V = 9 - \frac{x^2}{3} = 0$$

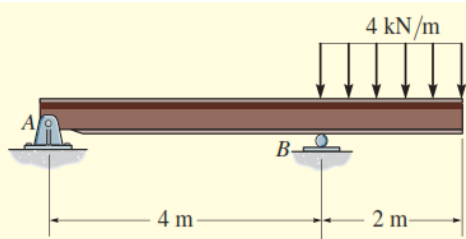
$$x = 5.20 \text{ m}$$

اگر مقدار به دست آمده برای  $x$  را در معادله لنگر خمشی قرار دهیم، بیشترین مقدار آن در طول تیر به دست می‌آید:

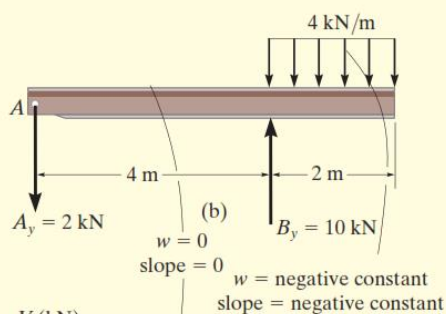
$$M_{\max} = \left( 9(5.20) - \frac{(5.20)^3}{9} \right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$= 31.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

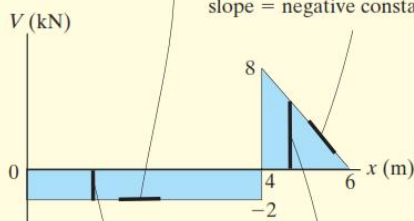
**مثال ۵:** نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر نشان داده شده در شکل زیر ترسیم کنید.



(a)



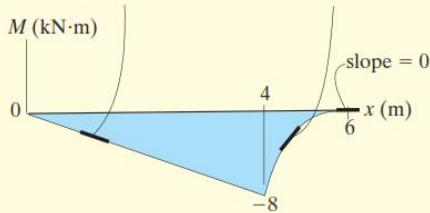
$w = \text{negative constant}$   
 $\text{slope} = \text{negative constant}$



(c)

$V = \text{negative constant}$   
 $\text{slope} = \text{negative constant}$

$V = \text{negative decreasing}$   
 $\text{slope} = \text{negative decreasing}$



(d)

**حل:** ابتدا پس از تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی، نمودار جسم آزاد تیر را ترسیم می‌کنیم.

نیروی برشی در تکیه‌گاه A مساوی با واکنش تکیه‌گاه است و چون علامت نیروی واکنش تکیه‌گاه منفی است، نیروی برشی نیز منفی است. در فاصله بین دو تکیه‌گاه، چون هیچ نیرویی وارد نشده است، شیب نمودار برش برابر با صفر و در نتیجه مقدار آن در این فاصله ثابت خواهد بود. در تکیه‌گاه B نیروی برشی به صورت پله‌ای به اندازه واکنش این تکیه‌گاه و در جهت مثبت افزایش می‌یابد؛ در ادامه، با توجه به بار گسترده یکنواختی که با علامت منفی (رو به پایین) بر تیر وارد می‌شود، نمودار نیروی برشی نیز با شیب ثابت و علامت منفی تا انتها امتداد می‌یابد.

برای ترسیم نمودار لنگر خمشی نیز از تکیه‌گاه مفصلی A شروع می‌کنیم. لنگر خمشی از مقدار صفر در تکیه‌گاه به تدریج با شیب ثابت منفی (به دلیل ثابت بودن نیروی برشی با علامت منفی)، تا تکیه‌گاه B تغییر می‌کند. بیشترین مقدار لنگر خمشی در تکیه‌گاه B برابر است با:

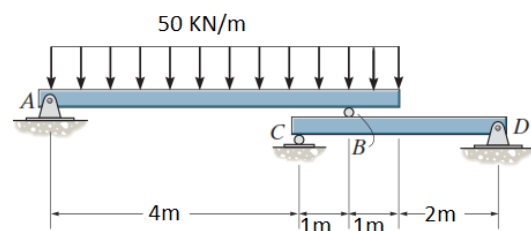
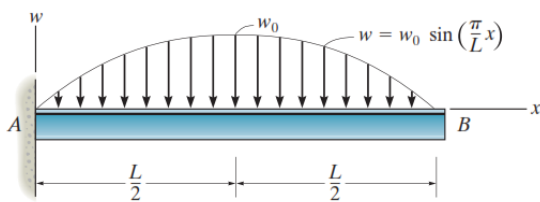
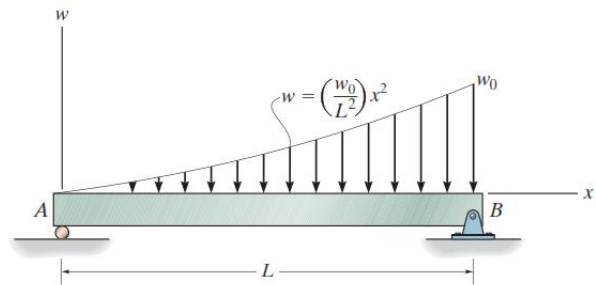
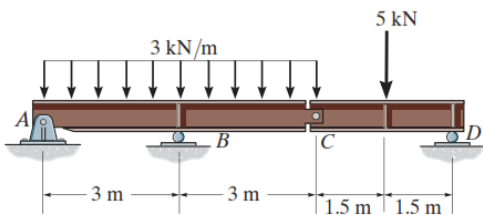
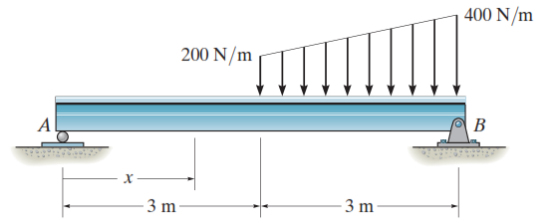
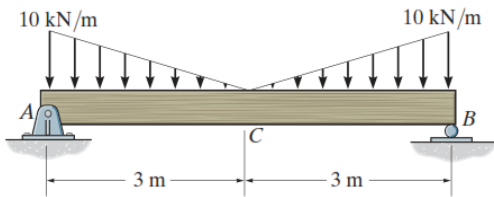
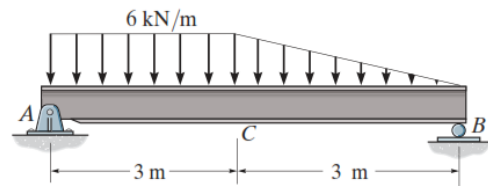
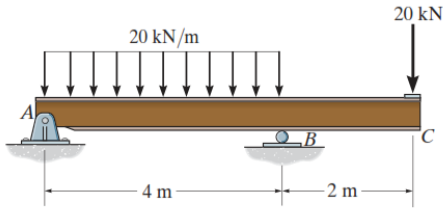
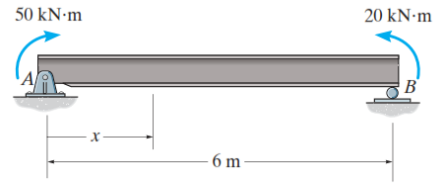
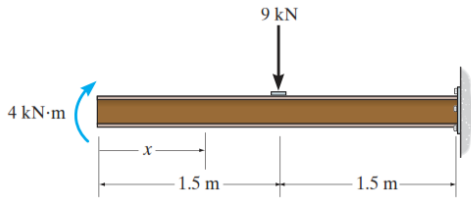
$$M|_{x=4 \text{ m}} = M|_{x=0} + \Delta M = 0 + [-2 \text{ kN}(4 \text{ m})] = -8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

از این نقطه به بعد، لنگر خمشی با شیب مثبت (نیروی برشی مثبت در ادامه تیر) تا انتها ادامه می‌یابد. از آن جا که از مقدار نیروی برشی به تدریج تا انتهای تیر کاسته می‌شود، شیب لنگر خمشی نیز کم می‌شود تا در انتهای آزاد تیر که برش صفر است، شیب نمودار لنگر خمشی نیز صفر شود.



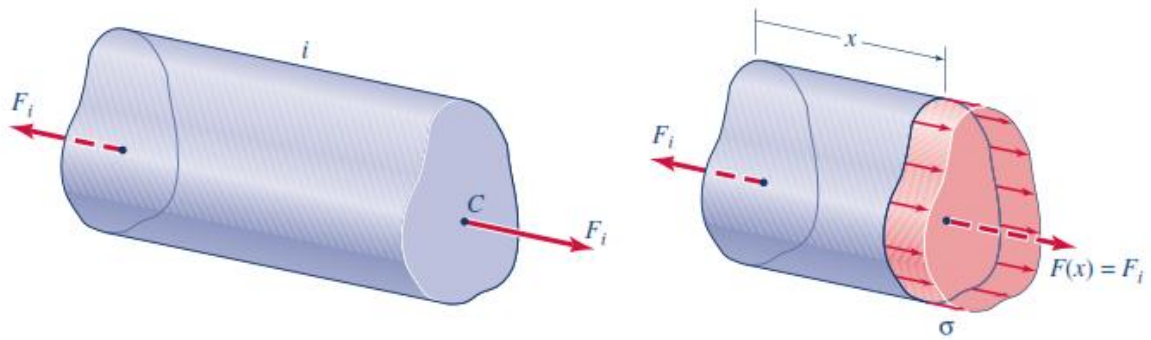
### تمرینات فصل اول

نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیرهای مطابق شکل‌های زیر ترسیم کنید.

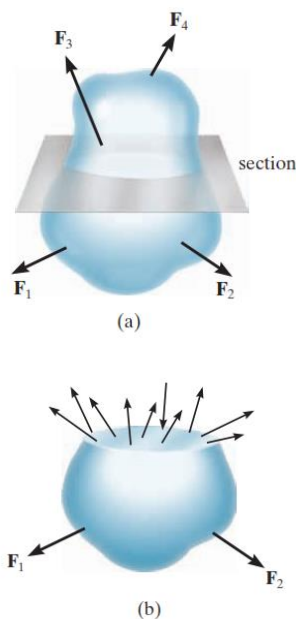


## فصل دوم

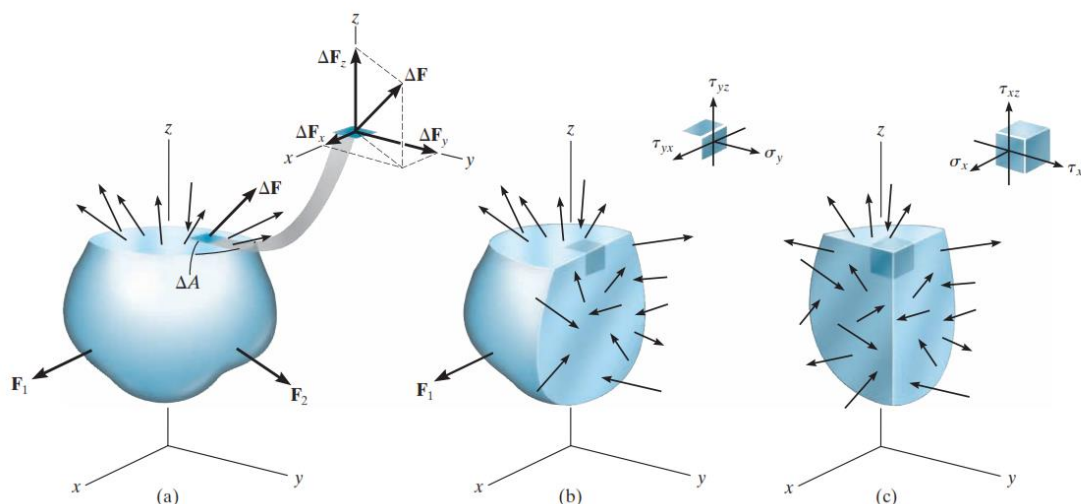
مفهوم تنش  
Stress



## تعریف تنش



جسمی را که مطابق شکل روبه‌رو تحت اثر نیروهای خارجی گوناگونی قرار گرفته است، در نظر می‌گیریم. این جسم می‌تواند، یک ساختمان، ماشین یا بدن جاندار باشد. می‌خواهیم تأثیر بارهای وارده را در نقطه‌ای داخل جسم مورد نظر مطالعه کنیم. بدین منظور یک صفحه فرضی در امتداد دلخواه از این نقطه می‌گذرانیم و به‌وسیله آن جسم را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. چنان‌چه بخواهیم هر یک از دو نیمه را جداگانه در نظر بگیریم، باید اثر قسمت دیگر را روی آن قرار دهیم. اثری که هر قسمت روی قسمت دیگر دارد، عبارت است از مجموعه نیرویی که در هر نقطه از صفحه مقطع، به این قسمت‌ها اثر می‌کند. این نیروهای داخلی، در حقیقت جای‌گزین رشته‌های قطع شده بین دو قطعه هستند. البته امتداد، جهت و مقدار این نیروها از یک نقطه تا نقطه‌ای دیگر از صفحه مقطع، متفاوت است. حال چنانچه به نقطه مورد نظر توجه کنیم، خواهیم دید، مطابق با شکل زیر، اثر قسمت حذف شده در این نقطه، نیرویی است که آن را  $\Delta F$  می‌نامیم. از نظر مهندسی، منظور از نقطه، در واقع سطح بسیار کوچکی به مساحت  $\Delta A$  است. این بردار تنش دارای سه مؤلفه در امدادهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  می‌باشد که در شکل زیر نشان داده شده است.



**تنش عمودی:** بنا به تعریف، بردار تنش در یک نقطه از داخل یک جسم تحت بارگذاری، عبارت از برداری است در امتداد عمود بر صفحه (به‌طور مثال در شکل فوق، محور  $Z$  عمود بر صفحه فرضی در نظر گرفته شده است)، که به‌صورت زیر مشخص می‌شود.

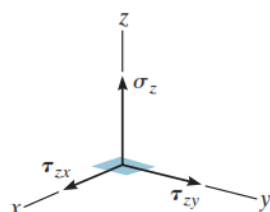
$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

از این تعریف چنین برمی‌آید که بردار تنش و تنش در یک نقطه، نمایان‌گر نیروهای داخلی در آن نقطه‌اند که از نیروهای خارجی ناشی می‌گردد. مطابق تعریف بالا و از لحاظ فیزیکی، بردار تنش عبارت از نیروی داخلی در واحد سطح مقطع است که جهت و قدر آن از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت است. بردار تنش، علاوه بر موقعیت نقطه انتخاب شده، به امتداد صفحه گذرنده بر آن نقطه نیز وابسته است. بدیهی است، چنان‌چه امتداد این صفحه تغییر کند،  $\Delta F$  و  $\Delta A$  و حد نسبت این دو نیز تغییر خواهد کرد ( $\sigma_y$  و  $\sigma_x$  در امتداد محورهای  $X$  و  $Y$  شکل‌های (b) و (c)).

**تنش برشی:** اگر بردار تنش مطابق شکل فوق، مماس بر سطح  $\Delta A$  اثر کند، تنش در نقطه مورد نظر، «تنش برشی» نامیده می‌شود و مقدار آن در دو صفحه‌ای که در شکل مشخص شده‌اند، عبارتند از:

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$



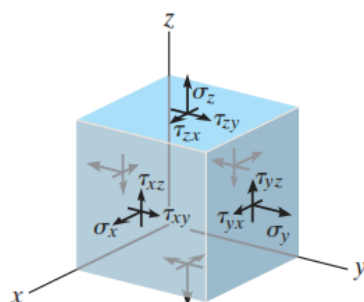
این تنش‌ها، به همراه تنش عمودی، مؤلفه‌های تنش نامیده می‌شوند.  $\tau$  (تاو) علامتی است که برای نشان دادن تنش برشی به کار می‌رود. اندیس اول، امتداد عمود بر صفحه را نشان می‌دهد و اندیس دوم به امتداد مؤلفه تنش مربوط می‌شود.

### سیستم یکاها (آحاد) Units

**واحد تنش:** از آن جا که تنش، نیروی وارد بر واحد سطح را بیان می‌کند، در سیستم بین‌المللی واحدها (SI) مقدار تنش‌های برشی و عمودی، بر حسب نیوتن بر متر مربع بیان می‌شود که برابر با یک پاسکال است ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ). در کارهای مهندسی معمولاً واحد مگاپاسکال مورد استفاده قرار می‌گیرد که برابر با  $10^6$  پاسکال یا یک مگاپاسکال است. این مقدار برابر با تنشی به اندازه یک نیوتن بر میلی‌متر مربع است ( $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$ ). البته از دیگر واحدهای تنش، می‌توان کیلوگرم بر سانتی متر مربع ( $\text{Kg/cm}^2$ ) و کیلو پوند بر اینچ مربع (ksi) را نام برد.

### حالت عمومی تنش

از آن چه تا کنون گفته شد، چنین نتیجه می‌گیریم که در هر نقطه از صفحه مقطع، می‌توان سه مؤلفه برای تنش در آن نقطه، مشخص کرد. اگر صفحات گذرنده در همسایگی نقطه مورد نظر را به موازات محورها  $x$ ،  $y$  و  $z$  در نظر بگیریم، مکعبی به ابعاد بسیار کوچک، مطابق شکل روبه‌رو حاصل می‌شود که مؤلفه‌های تنش در آن مشخص شده است. در واقع، این مکعب، نشان دهنده تنش‌های وارده بر عنصر بی‌نهایت کوچکی از یک جسم است. این سه مؤلفه تنش را می‌توان به صورت یک تانسور از مرتبه دو (هر مؤلفه آن نیاز به دو اندیس دارد) نشان داد (لازم به ذکر است که در این تانسور، مؤلفه‌های تنش عمودی، جهت سهولت، فقط با یک اندیس نشان داده شده‌اند؛ مثلاً  $\sigma_x$  به جای  $\sigma_{xx}$  نوشته شده است).

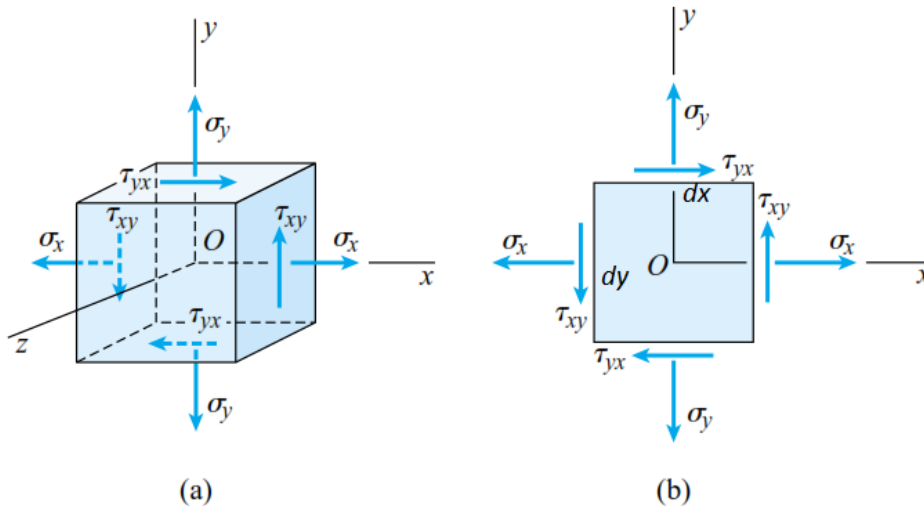


$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

**جهت مثبت تنش‌ها:** همان‌طور که پیش از این نیز گفته شد، اندیس اول تنش‌ها، امتداد عمود بر صفحه و اندیس دوم امتداد مؤلفه تنش را نشان می‌دهد. در صورتی که هر دو امتداد، در جهت مثبت و یا هر دو در جهت منفی محورهای مختصات باشد، علامت تنش مثبت، و اگر غیر از این باشد، منفی فرض می‌شود. شکل فوق، جهت‌های مثبت تنش‌های عمودی و برشی را نشان می‌دهد. به این ترتیب، تنش‌های عمودی کششی مثبت و تنش‌های فشاری منفی خواهد بود.

## خواص مؤلفه‌های تنش:

جزء بی‌نهایت کوچک مطابق شکل زیر را به ابعاد  $dx$  و  $dy$  و  $dz$  در نظر بگیرید که برای ساده‌تر شدن، به صورت دوبعدی نمایش داده شده است.



با توجه به تعادل این جزء کوچک، می‌توان رابطه لنگر را نسبت به نقطه  $O$  نوشت:

$$M_o = 0 \quad +2(\tau_{yx})(dx \cdot dz) \frac{dy}{2} - 2(\tau_{xy})(dy \cdot dz) \frac{dx}{2} = 0$$

در این معادله، به ترتیب از چپ به راست، پراتز اول نشان دهنده تنش، دومی سطحی که تنش بر آن اثر می‌کند و سومی بازوی لنگر است. با ساده کردن این معادله می‌توان نتیجه گرفت:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

به‌طور مشابه و با نوشتن این معادله برای وجوه دیگر المان تنش، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

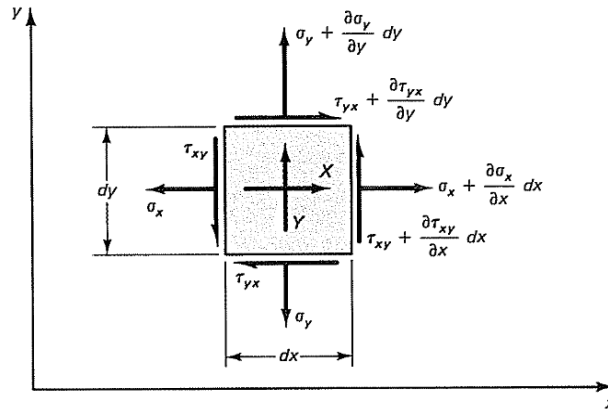
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

بنابراین، اندیس‌های تنش‌های برشی می‌توانند جابه‌جا شوند، در نتیجه مؤلفه‌های تنش برشی در دو صفحه عمود برهم، همواره با هم مساویند و تانسور تنش نیز متقارن است.

به عبارت دیگر، می‌توان به نتیجه مهم رسید که تنش‌های برشی مؤثر بر صفحات عمود برهم یک جزء بی‌نهایت کوچک، از لحاظ عددی، برابرند. علاوه بر آن، فقط در صورتی یک جزء بی‌نهایت کوچک در حال تعادل خواهد بود که تنش‌های برشی به‌طور همزمان بر چهار وجه آن اثر کند. این تنش‌ها همواره در گوشه‌ها، همگرا یا واگرا هستند.

## معادلات دیفرانسیل تعادل

جسمی را که تحت اثر نیروهایی قرار گرفته است، در نظر می‌گیریم و مطابق شکل زیر جسم آزاد عنصر بی‌نهایت کوچکی از آن را در حالت دوبعدی و با فرض آن که ضخامت این عنصر در جهت عمود بر صفحه، برابر با واحد باشد، جدا کرده، ترسیم می‌کنیم.



چون نیروهای داخلی و تنش‌های حاصل از آن‌ها، از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند، مقدار تنش در یک وجه از این عنصر، با تنش موجود در وجه مقابل آن (به فاصله  $dx$  یا  $dy$  از آن) تفاوت خواهد داشت. به عنوان مثال، چون شیب تغییرات  $\sigma_x$  در جهت  $X$  برابر با  $\partial\sigma_x/\partial x$  می‌باشد، مقدار کل تغییرات در فاصله  $dx$  برابر با  $(\partial\sigma_x/\partial x)dx$  خواهد بود (برای نشان دادن تغییرات تابع دو متغیره، از مشتق جزئی استفاده می‌شود). در این عنصر، نیروهای اینرسی یا نیروهای کالبدی، مانند نیروهای وزن یا مغناطیسی، با حروف  $Y$  و  $X$  مشخص شده‌اند و به واحد حجم مصالح مربوط می‌شوند. با این تعریف می‌توان نوشت:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow +, \quad \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx\right)(dy \times 1) - \sigma_x(dy \times 1) \\ + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} dy\right)(dx \times 1) - \tau_{yx}(dx \times 1) + X(dx dy \times 1) = 0$$

با ساده کردن رابطه فوق و با در نظر گرفتن  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  می‌توان رابطه اصلی تعادل در جهت  $X$  را به دست آورد. به طریق مشابه، معادله تعادل در جهت  $Y$  نیز به دست می‌آید.

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

می‌توان با نوشتن رابطه لنگر حول محور  $Z$  و با در نظر گرفتن  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  برای حالت سه‌بعدی به معادله زیر رسید.

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

به همین ترتیب، برای دو امتداد دیگر نیز می‌توان معادلات دیفرانسیل را به شرح زیر به دست آورد.

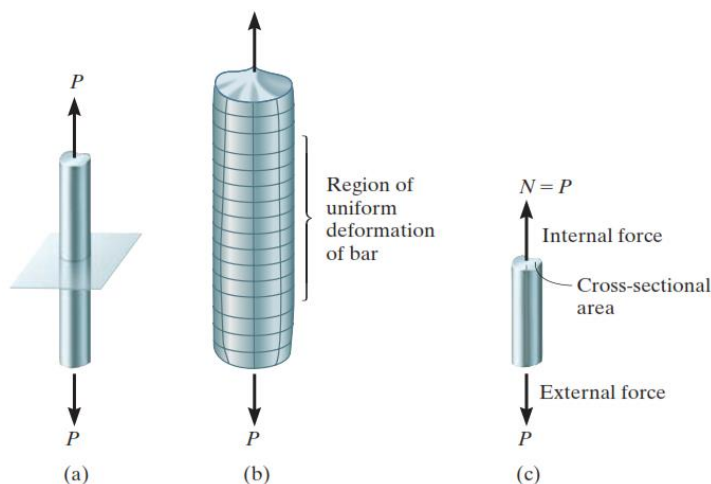
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

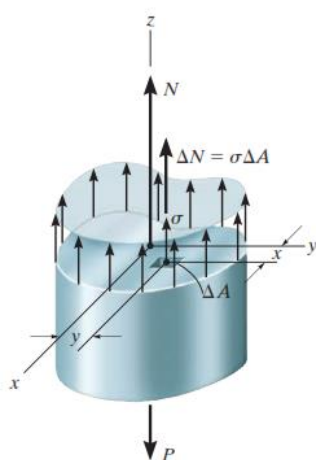
این معادلات، برای هر عنصر از جسم پیوسته‌ای صادق است و برای حالت کلی تنش سه‌بعدی به دست آمده‌اند؛ در مسائل خاص مهندسی، معمولاً به صورت‌های ساده‌تری نوشته می‌شود. از این معادلات در حل مسائل مربوط به تعادل اجسام پیوسته و انعطاف‌پذیر استفاده می‌شود.

## تنش در اعضای تحت تأثیر بار محوری

در این بخش، تنش متوسط در مقطع میله‌ای که مطابق شکل زیر تحت اثر بار محوری قرار گرفته است، محاسبه می‌شود. در شکل (a) میله‌ای همگن و ایزوتروپ با مقطع یکنواخت، تحت اثر نیروی محوری کششی  $P$  قرار گرفته است. این میله تحت اثر بار وارده دچار تغییر فرم به صورت افزایش طول خواهد شد که توزیع آن برای بخش میانی میله که در شکل (b) نشان داده شده است، می‌تواند یکنواخت فرض شود. لازم به ذکر است که در صورتی توزیع تنش یکنواخت خواهد بود که برآیند بار محوری وارد بر عضو، از مرکز سطح مقطع آن عضو عبور کند. اگر مقطعی در این بخش از میله به صورت فرضی در نظر بگیریم، نیروی داخلی در آن، همان‌طور که در شکل (c) نشان داده شده است، با نیروی وارد بر میله برابر خواهد بود.



توزیع تنش در مقطع مورد نظر در شکل (d) نشان داده شده است. نیروی وارد بر سطح بسیار کوچک  $\Delta A$  برابر است با:  $\Delta N = \sigma \Delta A$  مجموع نیروهای وارد بر این مقطع باید با نیروی داخلی  $N$  مساوی باشد. اگر:  $\Delta A \rightarrow dA$  در نتیجه:  $\Delta N \rightarrow dN$  بنابراین  $\sigma$  مقدار ثابتی خواهد داشت و می‌توان نوشت:

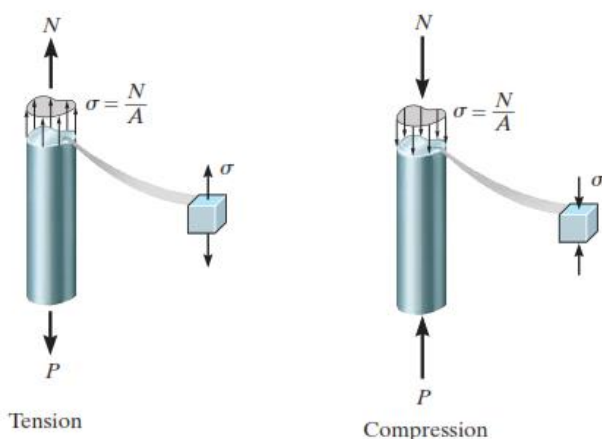


$$+\uparrow F_{Rz} = \Sigma F_z;$$

$$\int dN = \int_A \sigma dA$$

$$N = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

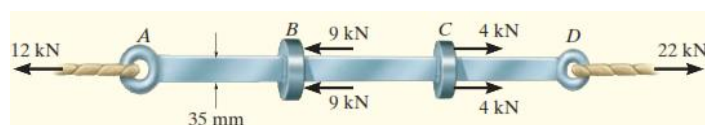


به بیان ساده‌تر می‌توان گفت: تنش محوری متوسط در یک مقطع، برابر است با نیروی داخلی در آن مقطع تقسیم بر سطح مقطع. مقدار تنش تحت نیروهای فشاری و کششی یکسان است.

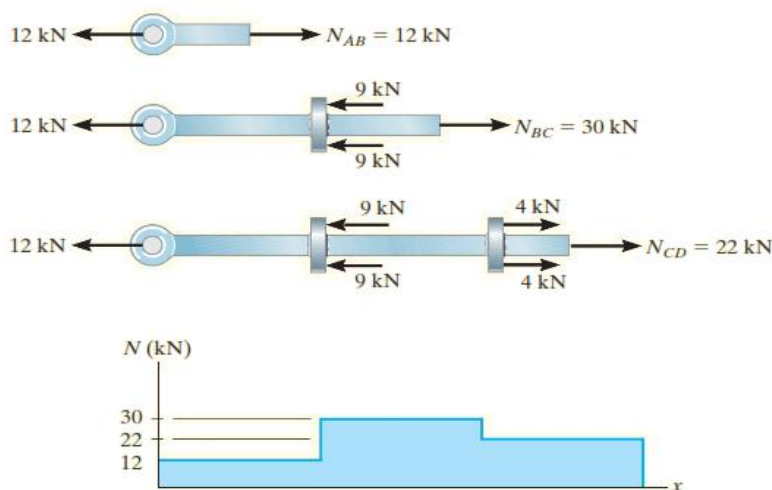
### بیشترین تنش عمودی

در صورتی که بار وارده و سطح مقطع گذرانده شده از نقطه مورد نظر، هر دو عمود بر محور طولی میله باشند، تنش متوسط به دست آمده از رابطه فوق بیشترین مقدار را خواهد داشت. محاسبه تنش در صورتی که بار یا مقطع مورد نظر مایل انتخاب شده باشد، در بخش بعدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

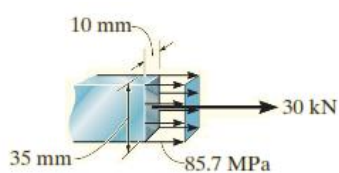
**مثال ۱:** بیشترین تنش عمودی را در میله مطابق شکل زیر، با مقطع ثابت مستطیلی به طول 35 mm و عرض 10 mm، تحت اثر بارگذاری نشان داده شده به دست آورید.



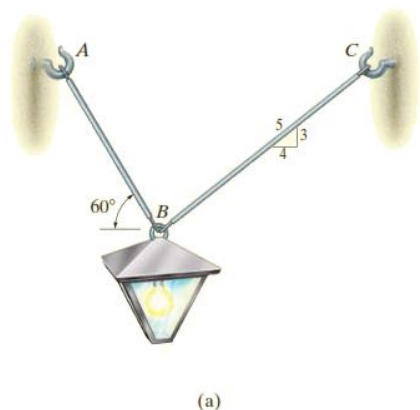
**حل:** ابتدا نیروهای داخلی در مقاطع مختلف میله فوق و نمودار نیروی محوری در طول عضو ترسیم می‌گردد:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، بیشترین نیروی داخلی در فاصله BC ایجاد شده است که تنش در این مقطع برابر است با:

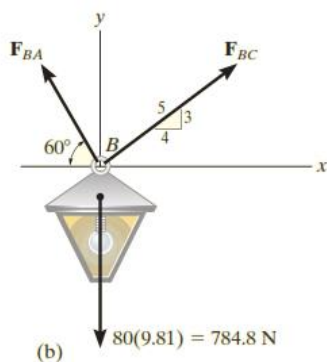


$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{30(10^3) \text{ N}}{(0.035 \text{ m})(0.010 \text{ m})} = 85.7 \text{ MPa}$$



**مثال ۲:** چراغی به وزن 80 kg مطابق شکل (a) توسط دو میله نگه‌داشته شده است. اگر قطر میله AB مساوی با 10 mm و میله BC برابر با 8 mm باشد، تنش عمودی متوسط را در هر یک از میله‌ها بر حسب Mpa محاسبه کنید.

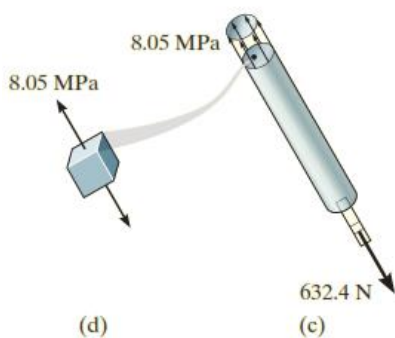




**حل:** ابتدا نمودار جسم آزاد را ترسیم می‌کنیم و با فرض  $g=9.81m/s^2$  وزن چراغ را بر حسب نیوتن قرار می‌دهیم. با نوشتن معادلات تعادل، نیروهای داخلی در میله‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0; & F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA} \cos 60^\circ &= 0 \\ + \uparrow \sum F_y &= 0; & F_{BC}\left(\frac{3}{5}\right) + F_{BA} \sin 60^\circ - 784.8 \text{ N} &= 0 \\ & & F_{BC} = 395.2 \text{ N}, & \quad F_{BA} = 632.4 \text{ N} \end{aligned}$$

تنش عمودی در هریک از میله‌ها برابر خواهد بود با:

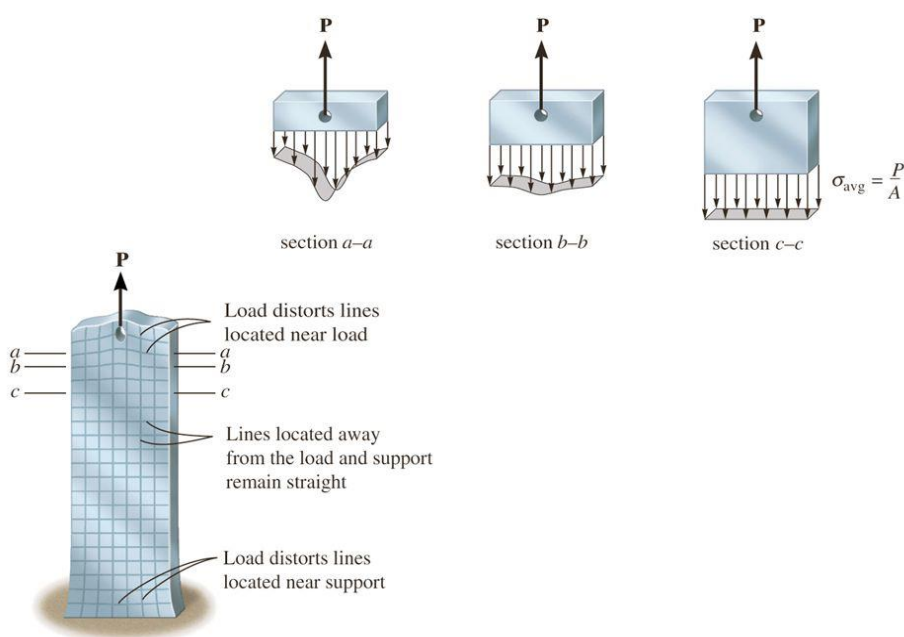


$$\begin{aligned} \sigma_{BC} &= \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395.2 \text{ N}}{\pi(0.004 \text{ m})^2} = 7.86 \text{ MPa} \\ \sigma_{BA} &= \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632.4 \text{ N}}{\pi(0.005 \text{ m})^2} = 8.05 \text{ MPa} \end{aligned}$$

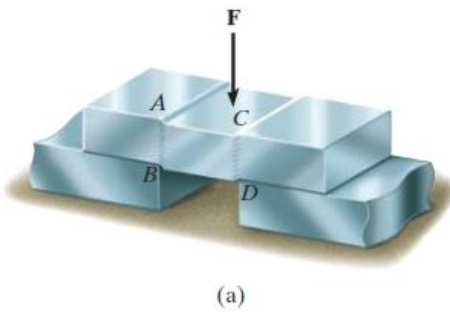
توزیع تنش متوسط عمودی در میله AB در شکل (c) نشان داده شده است. شکل (d) نیز یک المان از این میله را که در نقطه‌ای از مقطع مورد نظر واقع شده است، نشان می‌دهد.

### اصل سن ونان (Saint-Venant's Principle)

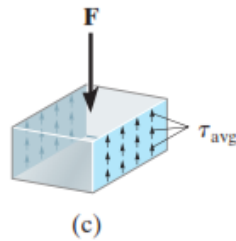
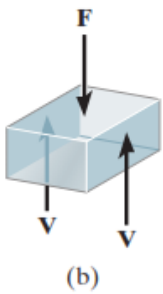
این اصل بیان می‌کند که توزیع تنش در نقاط نزدیک به محل اثر بار متمرکز، یکنواخت نیست و هرچه از محل اثر بار دورتر شویم، توزیع تنش در مقطع، یکنواخت‌تر خواهد شد. در فاصله‌ای برابر با دو برابر بزرگ‌ترین بعد مقطع عضو، و بعد از آن، توزیع تنش را می‌توان یکنواخت فرض کرد. شکل زیر نحوه توزیع تنش را در فواصل مختلف از محل بارگذاری یک میله تحت بار متمرکز را نشان می‌دهد.



## تنش برشی متوسط



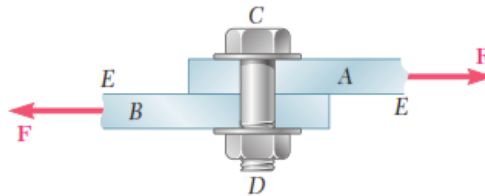
وضعیت دیگری که اغلب در مسائل مهندسی پیش می‌آید، حالتی است که مطابق شکل زیر، نیروی وارد بر مقطع، تنش برشی مماس بر مقطع ایجاد کند. تنش برشی، مطابق با آنچه که در بخش قبل بیان شد، مؤلفه‌ای از تنش است که مماس بر صفحه مقطع اثر می‌کند. برای این منظور، شکل (a) را که در آن نیروی  $F$  بر قطعه فوقانی اثر میکند را در نظر بگیرید. نیروی  $F$  مطابق شکل (b) باعث ایجاد نیروی داخلی  $V$  در هر یک از سطوح به مساحت  $A$ ، که در امتداد  $AB$  و  $CD$  قرار دارد، می‌شود. شکل (c) نیز توزیع تنش برشی متوسط بر روی این سطوح را نشان می‌دهد. مقدار این تنش، از رابطه زیر به دست می‌آید (البته این توزیع تنش یکنواخت نیست که در فصل مربوط به برش، توضیحات مربوط به نحوه توزیع تنش بر روی سطح ارائه خواهد شد):



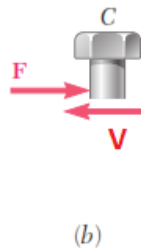
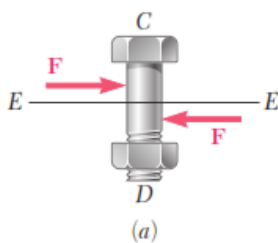
$$\tau_{avg} = \frac{V}{A}$$



شکل روبه‌رو، مقطع یک اتصال پیچ و مهره‌ای را نشان می‌دهد. در این اتصال دو صفحه فولادی که تحت نیروی کششی  $F$  قرار دارند، با یک پیچ و مهره به هم متصل شده‌اند. این نیروها، مقطع پیچ را در صفحه  $E$  تحت تنش‌های برشی قرار می‌دهد.



شکل (a) نیروهای وارد بر پیچ و شکل (b) نیروی برشی را در مقطع پیچ نشان می‌دهد که تحت اثر برش ساده (یک‌طرفه) قرار گرفته است.



$$\Sigma F_x = 0 \quad V = F$$

نیروی برشی متوسط در این پیچ برابر است با:

$$\tau_{ave} = \frac{F}{A}$$

ممکن است مطابق شکل زیر، برای اتصال صفحات A و B از دو ورق C و D استفاده شود. در این صورت، هریک از این پیچ‌ها تحت اثر برش مضاعف قرار می‌گیرد و نیروهای وارد بر هریک از پیچ‌ها در شکل (a) و نیروی برشی در مقطع هر پیچ در شکل (b) نشان داده شده است:



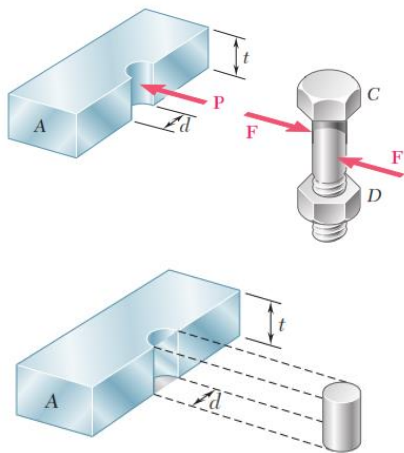
با نوشتن معادله تعادل نیروها، نیروی برشی در مقطع هریک از پیچ‌ها محاسبه می‌شود.

$$\Sigma F_x = 0 \quad V = F_C = F_D = F/2$$

مقدار تنش متوسط در هر پیچ نیز چنین به دست می‌آید:

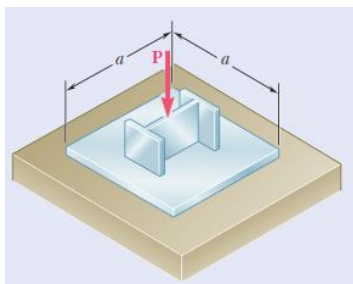
$$\tau_{ave} = \frac{V}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}$$

### تنش لهیدگی (Bearing Stress)



تنش ایجاد شده در محل تماس دو سطح تحت فشار، تنش لهیدگی نام دارد که به آن تنش تکیه‌گاهی نیز گفته می‌شود. یکی از حالت‌های ایجاد این تنش، محل تماس پیچ با صفحه متصل به آن است که یک تنش فشاری نامنظم در آن ایجاد می‌گردد. توزیع واقعی این نیرو و تنش‌های متناظر با آن پیچیده است؛ اما در عمل مقدار متوسط آن را از تقسیم نیروی وارده بر مساحت مستطیلی تصویر پیچ روی مقطع صفحه به دست می‌آید. این مساحت را با توجه به شکل زیر، می‌توان برابر با  $td$  که در آن  $t$  ضخامت صفحه و  $d$  قطر پیچ است.

$$\sigma_b = \frac{P}{td}$$



از حالت‌های دیگری که تنش لهیدگی در آن روی می‌دهد، محل اتصال صفحه ستون، برای انتقال بار یک ستون به شالوده بتنی است. در چنین مواردی، تنش لهیدگی بر روی سطحی که جنس ضعیف‌تری دارد (مثلاً بتن، در مقایسه با فولاد)، از تقسیم بار محوری وارده بر سطح تماس دو جسم A به دست می‌آید.

$$\sigma_b = \frac{P}{A}$$

### تنش بر روی یک صفحه مایل

پیش از این گفته شد که برای به دست آوردن بیشترین تنش عمودی در یک میله تحت بار محوری، یک صفحه فرضی، عمود بر امتداد محور طولی عضو انتخاب می‌شود. در این حالت، فقط تنش عمود بر صفحه ایجاد می‌شود. حال اگر این صفحه را مایل در نظر بگیریم، علاوه بر تنش عمودی، تنش برشی نیز حاصل خواهد شد.

میله‌ای را مطابق با شکل (a) در نظر بگیرید که تحت اثر دو نیروی متمرکز در طرفین قرار دارد. یک مقطع فرضی مایل از آن عبور می‌دهیم. از شرایط تعادل برمی‌آید که روی یک مقطع مایل نیز نیرویی به همان اندازه  $P$  در جهت خلاف نیروی سمت چپ وجود داشته باشد (شکل b).

این نیرو می‌تواند در دو امتداد عمود بر سطح مقطع و مماس بر آن تجزیه شود. مؤلفه عمودی با  $F$  و مؤلفه مماسی با  $V$  روی شکل (c) نشان داده شده است. می‌توان نوشت:

$$F = P \cos \theta$$

$$V = P \sin \theta$$

مؤلفه عمودی نیرو روی صفحه مورد نظر، تنش عمودی و مؤلفه مماسی، تنش

برشی ایجاد می‌کند (شکل d). این تنش‌ها را می‌توان از تقسیم مؤلفه‌های نیروی متناظر بر مساحت مقطع مایل ( $A_\theta$ ) به دست آورد:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta}$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta}$$

اگر مساحت مقطع عرضی عمود بر محور طولی میله را با  $A_0$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$A_\theta = \frac{A_0}{\cos \theta}$$

با جایگزین کردن این مقدار در روابط  $\sigma$  و  $\tau$ ، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

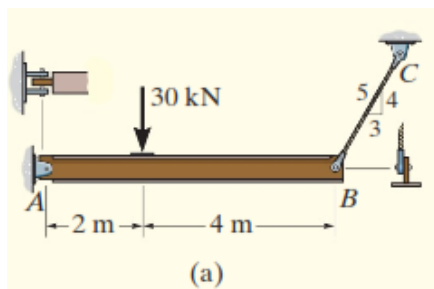
$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

چنانچه بخواهیم روی مقطع عرضی ( $\theta=0$ ) تنش‌ها را محاسبه کنیم، تنش برشی برابر با صفر و تنش عمودی بیشترین مقدار خود را خواهد داشت ( $\sigma = \frac{P}{A_0}$ )، که همان مقداری است که قبلاً نیز به دست آمده بود. مقدار تنش برشی ماکزیمم در صفحه‌ای تحت زاویه  $\theta = 45^\circ$  ایجاد می‌شود که تنش‌ها تحت این زاویه برابر خواهند بود با:

$$\sigma_m = \frac{P}{2A_0}$$

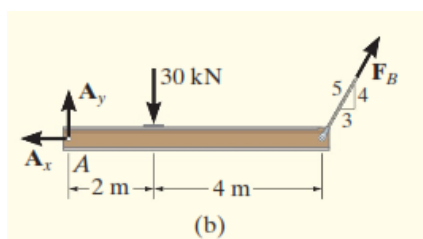
$$\tau_m = \frac{P}{2A_0}$$

از روابط فوق، ملاحظه می‌شود که مقدار تنش برشی ماکزیمم، نصف مقدار تنش عمودی ماکزیمم است و تنش عمودی بر روی صفحه‌ای که تنش برشی ماکزیمم است، با آن برابر است.



**مثال ۳:** تنش برشی متوسط را در میله نگهدارنده (pin) واقع در تکیه‌گاه مفصلی A به قطر 20 mm و تکیه‌گاه B به قطر 30 mm در تیر مطابق شکل مقابل، به دست آورید.

**حل:** نمودار جسم آزاد را مطابق با شکل (b) ترسیم و معادلات تعادل را برای آن می‌نویسیم:

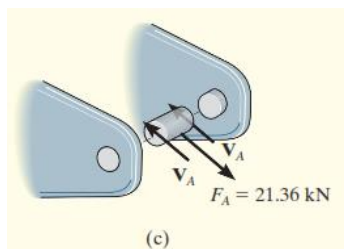


$$\zeta + \sum M_A = 0;$$

$$F_B \left( \frac{4}{5} \right) (6 \text{ m}) - 30 \text{ kN} (2 \text{ m}) = 0 \quad F_B = 12.5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad (12.5 \text{ kN}) \left( \frac{3}{5} \right) - A_x = 0 \quad A_x = 7.50 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad A_y + (12.5 \text{ kN}) \left( \frac{4}{5} \right) - 30 \text{ kN} = 0 \quad A_y = 20 \text{ kN}$$

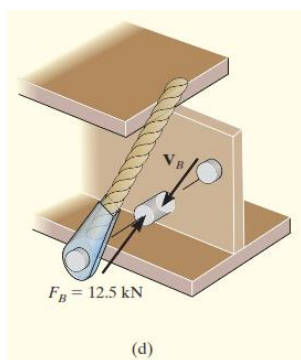


بنابراین، برآیند نیروی مؤثر بر میله تکیه‌گاه A که نمودار جسم آزاد آن در شکل (c) نشان داده شده، برابر است با:

$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(7.50 \text{ kN})^2 + (20 \text{ kN})^2} = 21.36 \text{ kN}$$

با توجه به این شکل، نیروی برشی در مقطع میله که تحت اثر برش مضاعف قرار دارد، برابر است با:

$$V_A = \frac{F_A}{2} = \frac{21.36 \text{ kN}}{2} = 10.68 \text{ kN}$$



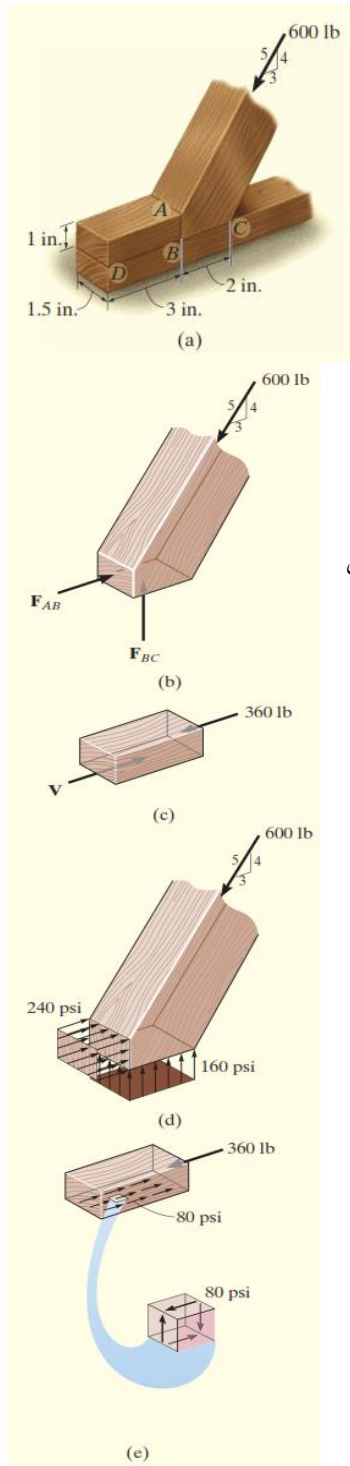
اما میله نگهدارنده در تکیه‌گاه B همان‌طور که در شکل (d) نشان داده شده، تحت اثر برش ساده قرار گرفته است. بنابراین نیروی برشی در آن برابر است با:

$$V_B = F_B = 12.5 \text{ kN}$$

به این ترتیب، تنش برشی متوسط در هر یک از میله‌ها محاسبه می‌شود:

$$(\tau_A)_{\text{avg}} = \frac{V_A}{A_A} = \frac{10.68 (10^3) \text{ N}}{\frac{\pi}{4} (0.02 \text{ m})^2} = 34.0 \text{ MPa}$$

$$(\tau_B)_{\text{avg}} = \frac{V_B}{A_B} = \frac{12.5 (10^3) \text{ N}}{\frac{\pi}{4} (0.03 \text{ m})^2} = 17.7 \text{ MPa}$$



**مثال ۴:** عضو مایل نشان داده شده در شکل (a) تحت اثر بار محوری 600 lb قرار دارد. تنش متوسط لهدیگی را در سطوح AB و BC و تنش برشی متوسط را در صفحه DB محاسبه کنید.

**حل:** محاسبه نیروهای داخلی: با نوشتن روابط تعادل در نمودار جسم آزادی که در شکل (b) ترسیم شده است، نیروهای فشاری مؤثر بر میله مایل را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad F_{AB} - 600 \text{ lb} \left(\frac{3}{5}\right) = 0 & \quad F_{AB} = 360 \text{ lb} \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad F_{BC} - 600 \text{ lb} \left(\frac{4}{5}\right) = 0 & \quad F_{BC} = 480 \text{ lb} \end{aligned}$$

همچنین با نوشتن رابطه تعادل برای قطعه ABD نشان داده شده در شکل (c) نیروی برشی در امتداد صفحه BC به دست می‌آید:

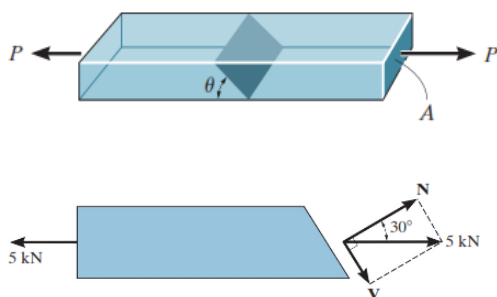
$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad V - 360 \text{ lb} = 0 \quad V = 360 \text{ lb}$$

**محاسبه تنش متوسط:** تنش فشاری متوسط یا همان تنش لهدیگی در دو سطح AB و BC در امتداد قائم و افقی، به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{360 \text{ lb}}{(1 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})} = 240 \text{ psi} \\ \sigma_{BC} &= \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{480 \text{ lb}}{(2 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})} = 160 \text{ psi} \end{aligned}$$

توزیع این تنش‌ها به صورت یکنواخت در شکل (d) نشان داده شده است. تنش برشی متوسط نیز در امتداد صفحه DB به صورت زیر محاسبه می‌شود که توزیع آن در شکل (e) نشان داده شده است.

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{360 \text{ lb}}{(3 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})} = 80 \text{ psi}$$



**مثال ۵:** تنش‌های عمودی و برشی را بر روی صفحه مطابق شکل از میله نشان داده شده تحت بار محوری فشاری  $P=5\text{kN}$  محاسبه کنید ( $A=4000 \text{ mm}^2$ ;  $\theta = 60^\circ$ )

با نوشتن رابطه تعادل، نیروهای عمودی و برشی به دست می‌آیند:

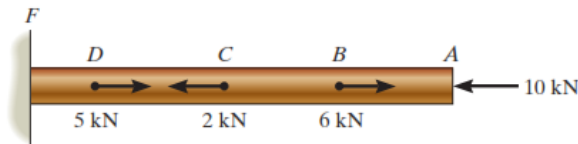
$$\begin{aligned} N &= (5 \text{ kN}) \cos 30^\circ = 4.33 \text{ kN} \\ V &= (5 \text{ kN}) \sin 30^\circ = 2.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

تنش‌های عمودی و برشی نیز به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

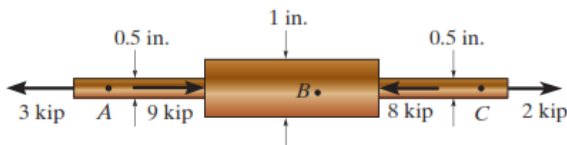
$$\sigma = \frac{N}{A_0} = \frac{4.33 \times 1000}{4000 / \cos 30^\circ} = 0.94 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \frac{V}{A_0} = \frac{2.5 \times 1000}{\frac{4000}{\cos 30^\circ}} = 0.54 \text{ N/mm}^2$$

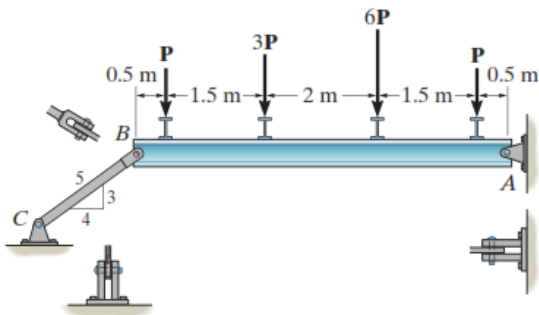
### تمرین:



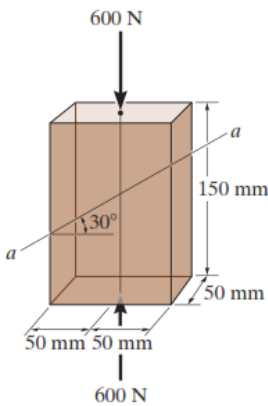
(۱) بیش‌ترین تنش عمودی را در میله مطابق شکل به‌دست آورید.



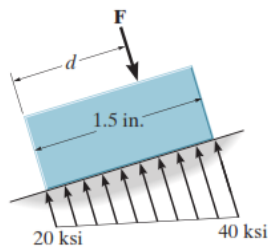
(۲) تنش عمودی متوسط را در نقاط A، B و C از میله مطابق شکل محاسبه کنید.



(۳) بیش‌ترین مقدار نیروی P وارد بر تیر مطابق شکل را طوری محاسبه کنید که تنش در هرکدام از بین‌ها (میله‌های مفصل تکیه‌گاهی) از 480 MPa تجاوز نکند. قطر هرکدام از بین‌ها 18 mm و هرسه تحت برش مضاعف قرار دارند.

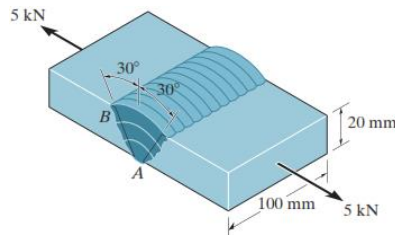


(۴) بلوک پلاستیکی مطابق شکل، تحت اثر نیروی محوری 600 kN قرار دارد. با فرض توزیع یکنواخت تنش، تنش عمودی و برشی را بر روی صفحه a-a به‌دست آورید.



(۵) بلوک کوچکی به ضخامت 0.5 in در شکل روبه‌رو نشان داده شده است. اگر توزیع تنش تکیه‌گاهی مطابق با شکل نشان داده شده باشد، مقدار بار F و فاصله d را به‌دست آورید.

(۶) یک اتصال جوشی نیروی 5 kN را تحمل می‌کند. مؤلفه‌های تنش عمودی و برشی وارد بر سطح AB را محاسبه کنید.



## تنش مجاز Allowable Stress

برای اطمینان از ایمنی یک عضو سازه‌ای یا مکانیکی، لازم است بار وارد بر آن به مقداری کم‌تر از باری که می‌تواند تحمل کند، کاهش یابد. دلایل زیادی برای این امر وجود دارد:

- ✓ به دلیل خطاهای ناشی از اجراء ابعاد و اندازه‌های قطعات سازه‌ای یا مکانیکی نمی‌توانند چندان دقت لازم را داشته باشند؛
- ✓ بارهای دینامیکی، ضربه‌ای یا بارهای اتفاقی غیر قابل پیش‌بینی و اثر خستگی ناشی از بارهای تکراری باید در طراحی مد نظر قرار گیرد؛
- ✓ خوردگی ناشی از عوامل جوّی و کاهش تدریجی مقاومت اعضاء در اثر گذشت زمان؛
- ✓ برخی از مصالح، همانند چوب و بتن کاملاً همگن نیستند و خصوصیات مکانیکی متفاوتی از خود نشان می‌دهند؛
- ✓ رفتار ترد و شکننده مصالحی مانند سنگ و بتن که می‌تواند منجر به شکست ناگهانی و بدون هشدار قبلی گردد.

یک روش اختصاص بار مجاز برای یک عضو سازه‌ای، استفاده از ضریبی به نام «ضریب اطمینان» (F.S.) Factor of Safety است. نسبت بار نهایی (بار گسیختگی) به با مجاز، ضریب اطمینان نامیده می‌شود.

$$F.S. = \frac{F_{fail}}{F_{allow}}$$

در صورتی که بار وارد بر عضو، با توزیع تنش بر روی آن عضو رابطه خطی داشته باشد، می‌توان به‌جای نسبت بارها در رابطه فوق، از نسبت تنش‌ها استفاده کرد.

$$F.S. = \frac{\sigma_{fail}}{\sigma_{allow}} \qquad F.S. = \frac{\tau_{fail}}{\tau_{allow}}$$

این مقدار، همواره عددی بزرگ‌تر از واحد است و به انواع مصالح به‌کار رفته و نیز اهمیت عضو بستگی دارد؛ هرچه اهمیت بیش‌تر باشد، این ضریب مقدار بزرگ‌تری خواهد داشت. مثلاً در طراحی نیروگاه هسته‌ای، ضریب اطمینان برای طراحی برخی از اجزاء، به بیش از ۳ نیز می‌رسد. در هر صورت این مقدار در آیین‌نامه‌ها برای موارد مختلف مشخص شده‌اند. این روش طراحی، اساس طراحی به روش تنش مجاز **Allowable Stress Design (ASD)** است.

**اتصالات ساده:** با ساده‌سازی فرضیه‌های مربوط به رفتار مصالح، روابط  $\sigma = N/A$  و  $\tau_{avg} = V/A$  اغلب می‌توانند برای تحلیل و طراحی یک اتصال ساده یا عنصر مکانیکی به‌کار رود. به‌عنوان مثال، اگر عضوی تحت اثر بار محوری در مقطعی از آن قرار گرفته باشد، سطح لازم برای تحمل تنش حاصل از آن، می‌تواند از رابطه زیر محاسبه شود:

$$A = \frac{N}{\sigma_{allow}}$$

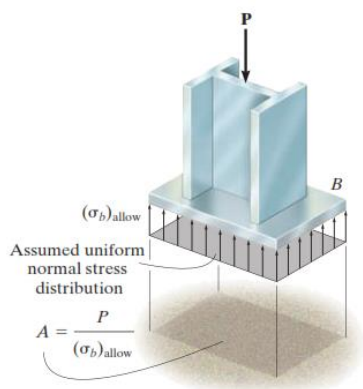
یا اگر این سطح تحت اثر نیروی برشی متوسط قرار گرفته باشد، مساحت لازم برای تحمل تنش حاصل از آن، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \frac{V}{\tau_{allow}}$$

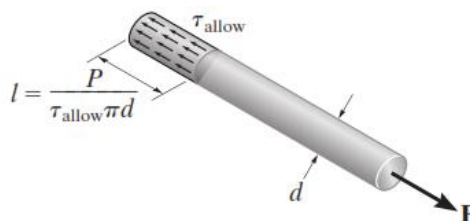
در ادامه، مثال‌هایی برای نشان دادن کاربرد این روش مطرح شده است.



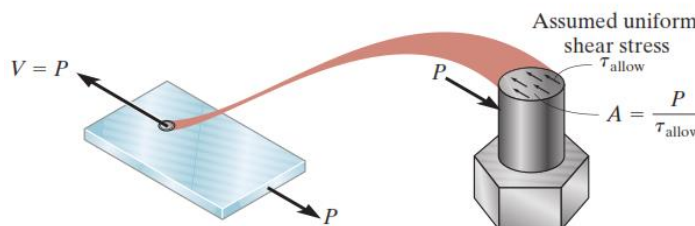
در شکل مقابل، با استفاده از این روش، مساحت لازم برای صفحه ستون B با توجه به تنش لهیدگی مجاز بتن محاسبه شده است.



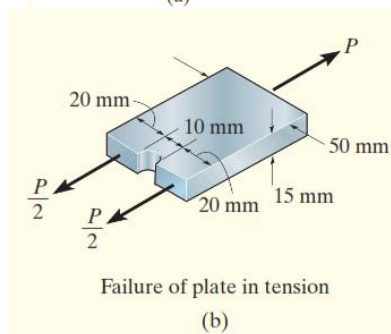
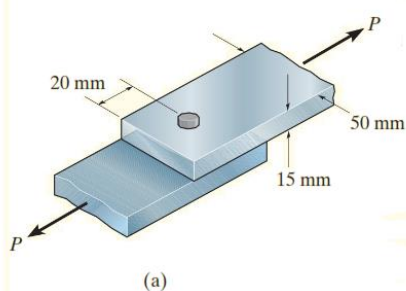
طول گیرایی (مهاری) میل گرد مطابق شکل زیر داخل بتن، می تواند با استفاده از تنش برشی پیوستگی مجاز محاسبه شود (توزیع تنش برشی یکنواخت فرض شده است).



سطح مقطع پیچ لازم برای تحمل نیروی وارد بر اتصال مطابق شکل زیر نیز با فرض توزیع یکنواخت تنش برشی، به دست می آید:



**مثال ۶:** بزرگترین بار مجاز P وارد بر اتصال مطابق شکل (a) را محاسبه کنید. قطر پیچ 10mm و تنش برشی مجاز آن 80 MPa، تنش کششی مجاز هر یک از صفحات فلزی، 50 MPa، تنش لهیدگی مجاز آنها 80 MPa و تنش برشی مجاز ورقها نیز 30 MPa فرض شود.

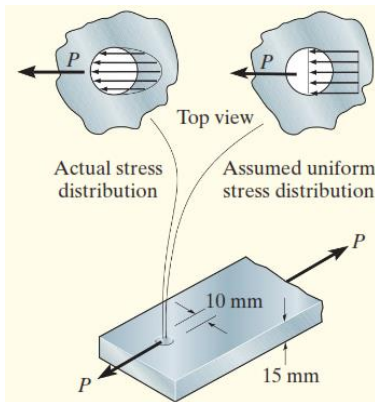


**حل:** برای حل این مسئله، مقدار نیروی P را برای هر یک از شرایط گسیختگی ممکن محاسبه می کنیم. آنگاه کوچکترین مقدار نیروی به دست آمده را انتخاب می کنیم.

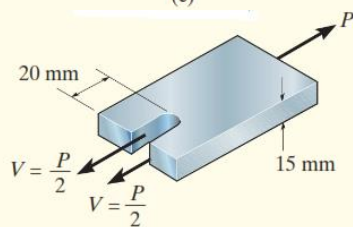
**گسیختگی صفحه فلزی تحت کشش:** اگر قرار باشد صفحه تحت نیروی کششی گسیخته شود، این اتفاق در کوچکترین سطح مقطع آن رخ می رهد که در شکل (b) این مقطع به تصویر کشیده شده است. مقدار نیروی P در این حالت برابر خواهد بود با:

$$(\sigma_{\text{allow}})_t = \frac{N}{A}; \quad 50(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{P}{2(0.02 \text{ m})(0.015 \text{ m})}$$

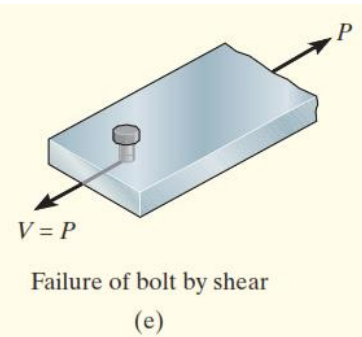
$$P = 30 \text{ kN}$$



Failure of plate in bearing caused by bolt  
(c)



Failure of plate by shear  
(d)



Failure of bolt by shear  
(e)

**گسیختگی صفحه تحت تنش لهیدگی:** شکل (c) یک نمودار جسم آزاد از صفحه فوقانی را تحت اثر یک توزیع تنش لهیدگی که توسط اثر پیچ بر سطح متصل به آن ایجاد شده است، نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، توزیع واقعی غیر یکنواخت و پیچیده است که برای سهولت، یکنواخت فرض شده است. بدین ترتیب نیروی P که موجب گسیختگی ورق می‌شود عبارت است از:

$$(\sigma_{\text{allow}})_b = \frac{N}{A}; \quad 80(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{P}{(0.01 \text{ m})(0.015 \text{ m})}$$

$$P = 12 \text{ kN}$$

**گسیختگی صفحه توسط نیروی برشی:** این احتمال نیز وجود دارد که نیروی وارده از طرف پیچ، صفحه را مطابق شکل (d) تحت برش قرار دهد و باعث گسیختگی آن شود. در این صورت نیروی P برابر خواهد بود با:

$$(\tau_{\text{allow}})_p = \frac{V}{A}; \quad 30(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{P/2}{(0.02 \text{ m})(0.015 \text{ m})}$$

$$P = 18 \text{ kN}$$

**گسیختگی پیچ تحت برش:** مطابق آنچه در شکل (e) نشان داده شده است، پیچ می‌تواند در مقطع بین دو صفحه تحت تنش حاصل از نیروی برشی وارده، گسیخته شود. نیروی لازم برای گسیختگی برشی پیچ عبارت است از:

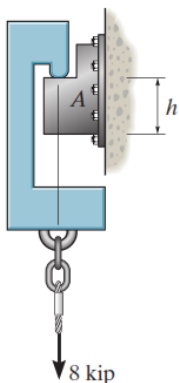
$$(\tau_{\text{allow}})_b = \frac{V}{A}; \quad 80(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{P}{\pi(0.005 \text{ m})^2}$$

$$P = 6.28 \text{ kN}$$

کم‌ترین مقدار از چهار مقدار به‌دست آمده برای نیروی P، بیش‌ترین بار مجاز این اتصال است. بنابراین:

$$P = 6.28 \text{ kN}$$

### تمرین:



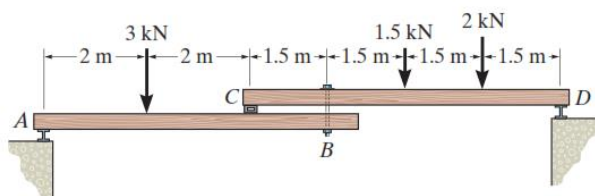
(۷) براکت آلومینیومی A مطابق شکل، تحت اثر بار 8kip قرار دارد. اگر ضخامت آن 0.5 in باشد، کم‌ترین ارتفاع h را برای جلوگیری از گسیختگی برشی آن محاسبه کنید. تنش برشی گسیختگی برابر است با:  $\tau_{fail} = 23 \text{ ksi}$ . ضریب اطمینان را  $F.S.=2.5$  در نظر بگیرید.

۸) تیر مرکب از دو قطعه چوبی مطابق شکل زیر توسط یک پیچ در نقطه B به یکدیگر متصل شده است. با فرض آن که در نقاط A، B، C و D فقط نیروی قائم ایجاد شود، قطر لازم برای پیچ در نقطه B و قطر خارجی مهره مربوط به آن را محاسبه کنید.

تنش کششی مجاز پیچ  $(\sigma_t)_{allow} = 150 \text{ MPa}$  و

تنش لهیدگی مجاز چوب  $(\sigma_b)_{allow} = 28 \text{ MPa}$

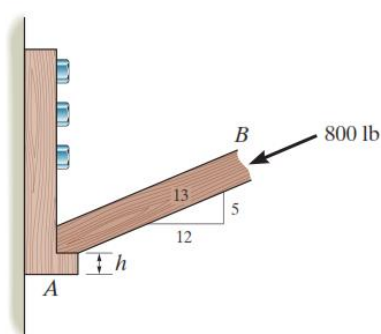
می باشد. قطر سوراخ را برابر با قطر پیچ فرض کنید.



۹) هر دو عضو متصل به هم در شکل روبه‌رو از چوب با ضخامت  $3/8 \text{ in}$  ساخته

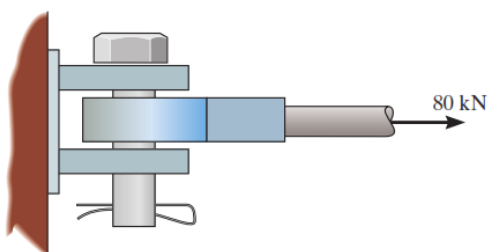
شده‌اند. کم‌ترین ارتفاع  $h$  را برای آن که گسیختگی برشی اتفاق نیفتد، محاسبه

کنید. تنش برشی مجاز را  $\tau_{allow} = 300 \text{ psi}$  فرض کنید.



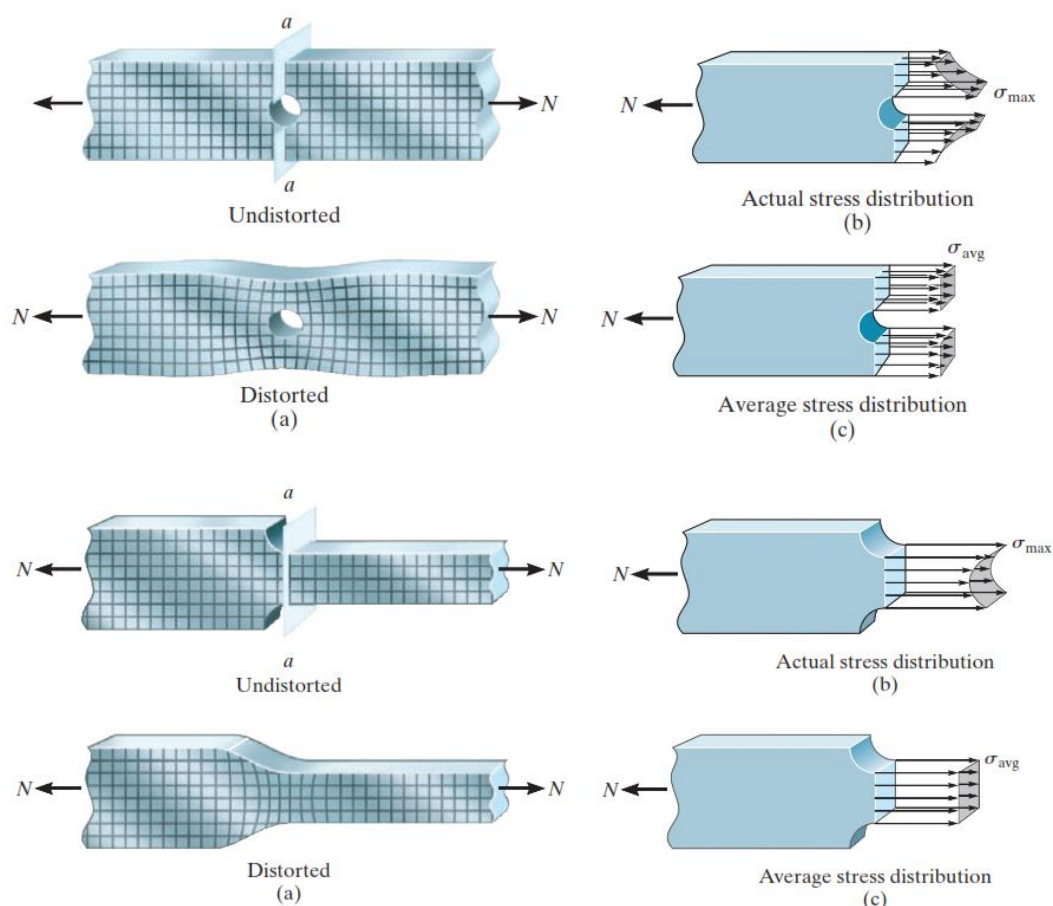
۱۰) قطر لازم برای پیچ مطابق شکل را که تنش گسیختگی آن

$\tau_{fail} = 100 \text{ MPa}$  است، با فرض  $F.S. = 2.5$  محاسبه کنید.



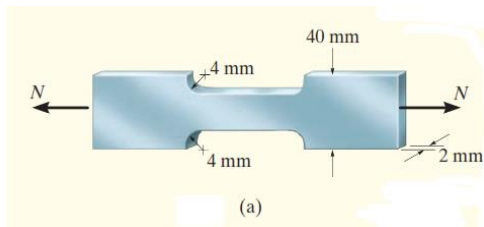
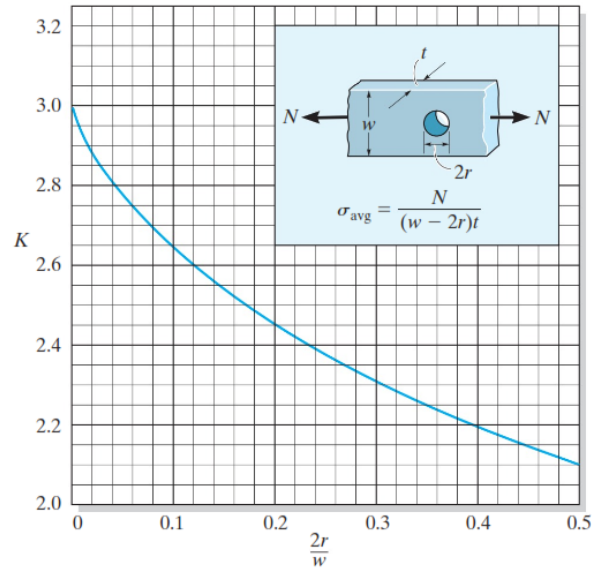
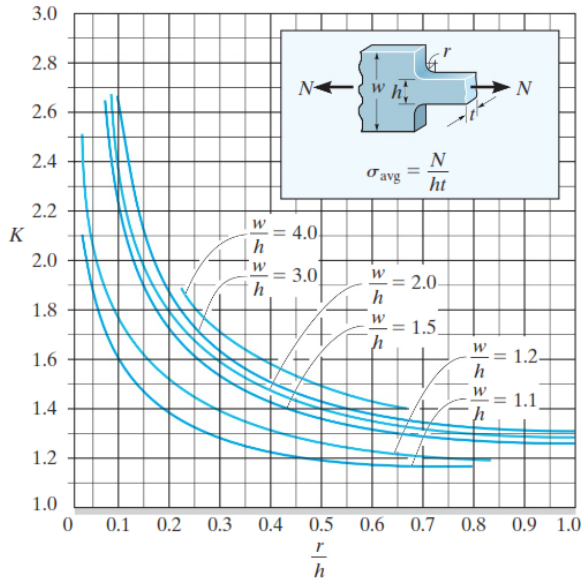
## تمرکز تنش

همان طور که قبلاً نیز گفته شد، تنش‌ها در نزدیکی نقطه اعمال بار متمرکز به مقداری بسیار بزرگ‌تر از مقدار تنش متوسط در عضو می‌رسد. اگر یک تغییر ناگهانی در سطح مقطع عضو یا سوراخی داخل آن ایجاد شود نیز توزیع تنش از حالت یکنواخت خارج شده، مطابق با شکل‌های زیر تحت تأثیر تمرکز تنش، در نقاط نزدیک این ناپیوستگی، با افزایش تنش نسبت به تنش متوسط رو به‌رو می‌گردد.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تنش‌های واقع در نزدیکی ناپیوستگی، نسبت به تنش متوسط، به‌مراتب بیشتر است و به پارامترهای هندسی ناحیه تغییر مقطع وابسته است. در طراحی یک عضو، برای اطمینان از مقاومت در نواحی بحرانی، کافی است تنش متوسط را در ضریبی به نام ضریب تمرکز تنش  $K$  ضرب کنیم. این ضریب می‌تواند از نمودارهایی که به همین منظور تهیه شده‌اند، به‌دست آید.

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{avg}}}$$

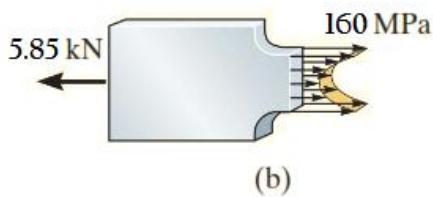


**مثال ۷:** بیشترین مقدار نیروی محوری  $N$  را برای آن که میله نشان داده شده در شکل (a)، با تنش مجاز کششی  $(\sigma_t)_{allow} = 160 \text{ MPa}$ ، گسیخته نشود، محاسبه کنید.

با استفاده از نمودار مربوطه، ضریب تمرکز تنش به دست می آید:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{h} &= \frac{4 \text{ mm}}{(40 \text{ mm} - 8 \text{ mm})} = 0.125 \\ \frac{w}{h} &= \frac{40 \text{ mm}}{(40 \text{ mm} - 8 \text{ mm})} = 1.25 \end{aligned} \right\} K \approx 1.75.$$

میله را باید طوری طراحی کرد که:  $\sigma_{max} \leq (\sigma_t)_{allow}$



$$\sigma_{max} = K \sigma_{avg}$$

$$160 = 1.75 \sigma_{avg}$$

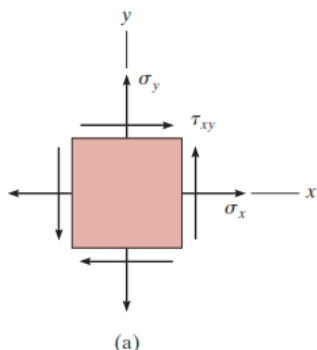
$$\sigma_{avg} = 91.43 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{avg} = N/A.$$

$$N = A \sigma_{avg} = 2(40 - 2 \times 4) \times 91.43 \times 10^{-3} = 5.85 \text{ KN}$$

## تنش در صفحه - تبدیلات تنش

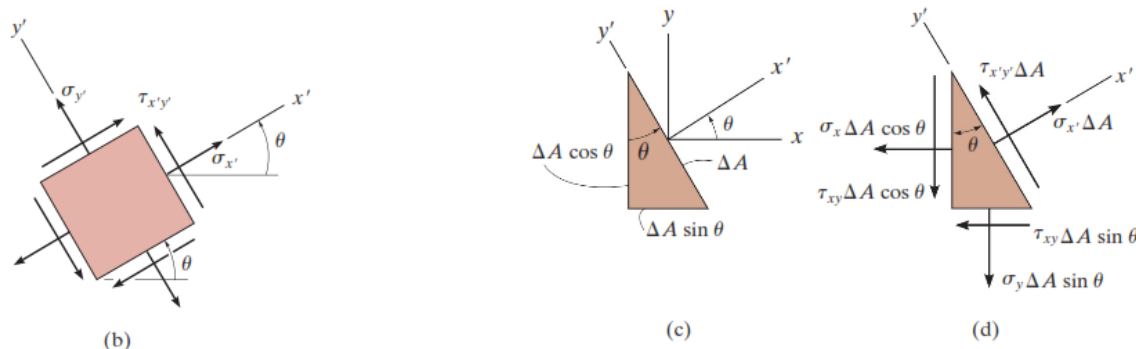
پیش از این، حالت عمومی تنش در یک نقطه از جسم را در حالت سه بعدی بررسی کردیم؛ بسیاری از مسائل مهندسی، می توانند در حالت دوبعدی مطرح شوند. در شکل زیر، تنش های عمودی و برشی در این حالت و در یک جزء کوچک صفحه ای با محورهای مختصاتی که در امتداد عمود و مماس بر صفحه انتخاب شده اند، نشان داده شده است.



باید توجه داشت که صفحه مورد نظر، می توانست کاملاً به صورت دلخواه انتخاب شود و تنش های مشخص شده در این حالت، الزاماً تنش های ماکزیمم عمودی و برشی در نقطه مورد نظر از جسم نیستند که در طراحی بتوان آن ها را مد نظر قرار داد. به عبارت دیگر، ممکن بود با تغییر امتداد صفحه گذرنده از نقطه مورد نظر، مقادیر تنش های بزرگتری حاصل شود. در مسائل مهندسی، تعیین بیشترین تنش های ایجاد شده در یک نقطه و امتداد آن، برای طراحی عضو مورد نظر، ضروری است. از این رو، در ادامه ابتدا به محاسبه تنش ها در یک دستگاه مختصات  $x' - y'$  تحت زاویه  $\theta$  نسبت دستگاه مختصات  $x - y$  خواهیم پرداخت، سپس تنش های ماکزیمم را به دست می آوریم.

## معادلات عمومی برای تبدیلات تنش صفحه ای

المان (عنصر) دوبعدی کوچکی را با ضخامت کم در نظر بگیرید. مؤلفه های تنش های عمودی و برشی در صفحه  $x - y$  برای این المان، در شکل (a) نشان داده شده است. مؤلفه های عمود بر این صفحه، صفر فرض شده اند. با دوران محورهای مختصات حول محور عمود بر صفحه (Z)، به اندازه  $\theta$ ، محورهای مختصات جدید  $x' - y'$  تعریف می شود. وضعیت المان دوران یافته در شکل (b) نشان داده شده است. برای تعیین تنش های  $\sigma_{x'}$  و  $\tau_{x'y'}$  وارد بر وجه عمود بر محور  $x'$ ، مطابق شکل (c)، یک جزء منشوری در نظر می گیریم که وجوه آن به ترتیب، بر محورهای  $x$  و  $y$  و  $x'$  عمودند. اگر مساحت وجه مایل را با  $\Delta A$  نشان دهیم، مساحت وجوه عمودی و افقی برابر خواهند بود با  $\Delta A \cos \theta$  و  $\Delta A \sin \theta$ ؛ نیروهای وارد بر این سه وجه در شکل (d) نشان داده شده است.



با نوشتن معادلات تعادل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum F_{x'} = 0; \quad & \sigma_{x'} \Delta A - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \sin \theta \\ & - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta = 0 \\ \sigma_{x'} = & \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_{y'} = 0; \quad & \tau_{x'y'} \Delta A + (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta \\ & - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \sin \theta = 0 \\ \tau_{x'y'} = & (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

برای ساده‌تر شدن این معادلات، با استفاده از توابع مثلثاتی زیر، می‌توان نتیجه گرفت:

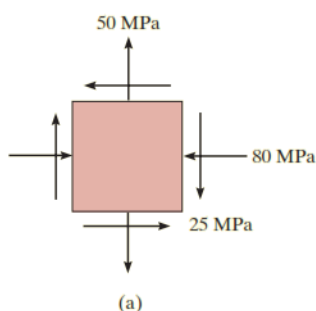
$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2, \cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2.$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

به همین ترتیب، اگر مقطع را عمود بر محور  $y'$  انتخاب کنیم، تنش عمودی  $\sigma_{y'}$  نیز به دست می‌آید:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

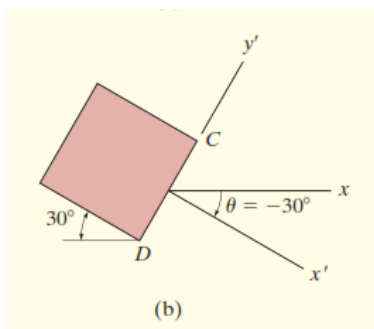


**مثال ۸:** حالت تنش صفحه‌ای در نقطه‌ای از یک جسم، مطابق با المان نشان داده شده در شکل (a) است. حالت تنش را در این نقطه، در المانی که به اندازه  $30^\circ$  درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران یافته است، محاسبه کنید.

**حل:** با توجه به المان مورد نظر، تنش‌های عمودی و برشی عبارتند از:

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

تنش‌ها در وجه CD که به اندازه  $\theta = -30^\circ$  (در خلاف جهت مثلثاتی) چرخیده است، برابرند با:



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

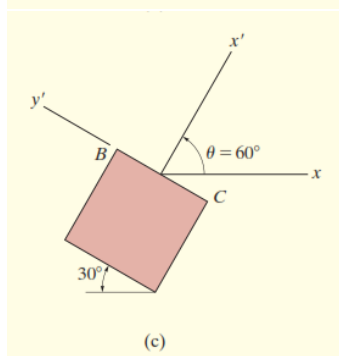
$$= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(-30^\circ) + (-25) \sin 2(-30^\circ)$$

$$= -25.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$= -\frac{-80 - 50}{2} \sin 2(-30^\circ) + (-25) \cos 2(-30^\circ)$$

$$= -68.8 \text{ MPa}$$



برای وجه BC نیز همان‌طور که در شکل (c) ملاحظه می‌شود، محور  $x'$  به اندازه  $\theta = 60^\circ$  در جهت مثلثاتی دوران یافته است؛ بنابراین:

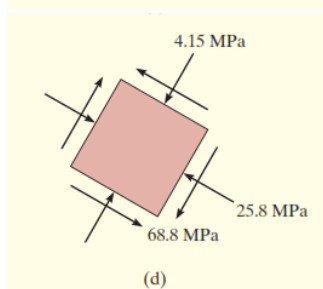
$$\sigma_{x'} = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(60^\circ) + (-25) \sin 2(60^\circ)$$

$$= -4.15 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80 - 50}{2} \sin 2(60^\circ) + (-25) \cos 2(60^\circ)$$

$$= 68.8 \text{ MPa}$$

وضعیت تنش‌های تبدیل یافته در شکل (d) نشان داده شده است.

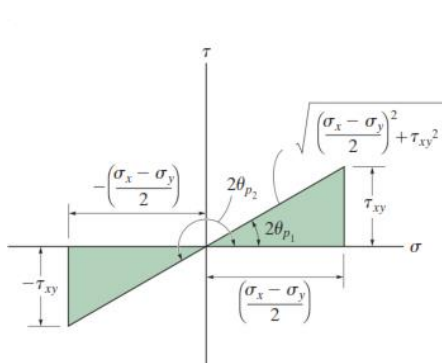


### تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم در صفحه

برای محاسبه تنش‌های عمودی ماکزیمم و مینیمم که تنش‌های اصلی نامیده می‌شوند، لازم است از رابطه  $\sigma_{x'}$  نسبت به  $\theta$  مشتق گرفته، مساوی با صفر قرار دهیم:

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2 \sin 2\theta) + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

از حل این معادله، امتداد صفحه‌ای که تنش‌های اصلی بر روی آن قرار دارد، به دست می‌آید. زاویه امتداد تنش‌های اصلی با  $\theta_p$  نشان داده می‌شود.

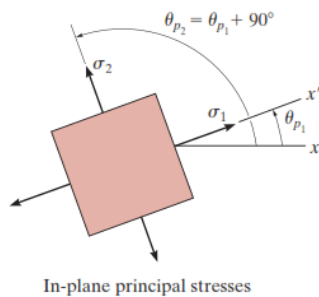


$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

این معادله، دو مقدار برای  $2\theta_p$  به دست می‌دهد که  $180^\circ$  با هم اختلاف دارند. بنابراین، مطابق با شکل روبه‌رو، دو مقدار  $\theta_p$ ،  $\theta_{p2}$  و  $\theta_{p1}$ ، نسبت به هم  $90^\circ$  اختلاف دارند.

با قرار دادن این مقادیر  $2\theta_p$  در رابطه  $\sigma_{x'}$ ، تنش‌های اصلی ماکزیمم و مینیمم به دست می‌آیند:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



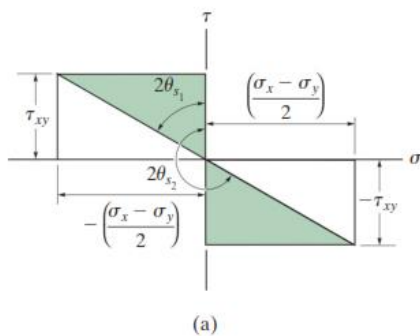
در رابطه فوق،  $\sigma_1$  تنش اصلی ماکزیمم و  $\sigma_2$  تنش اصلی مینیمم هستند. در این حالت، تنش برشی برابر با صفر است. تنش‌های اصلی در صفحه، در شکل مقابل نشان داده شده است.

### تنش‌های برشی ماکزیمم

برای پیدا کردن وضعیت صفحاتی که تنش‌های برشی ماکزیمم روی آن‌ها اثر می‌کند، باید از رابطه  $\tau_{x'y'}$  نسبت به  $\theta$  مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده شود که رابطه زیر از آن نتیجه خواهد شد:

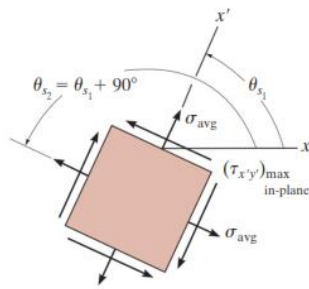
$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

این معادله دو ریشه دارد؛ دو صفحه‌ای که توسط آن تعریف می‌شود، بر هم عمودند. این بدان معنی است که دو زاویه  $\theta_{s1}$  و  $\theta_{s2}$  که تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم را مشخص می‌کنند، با تنش‌های اصلی  $45^\circ$  اختلاف دارند.





با قرار دادن مقادیر سینوس و کسینوس زوایای فوق در رابطه  $\tau_{x'y'}$  مقادیر تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم به صورت زیر حاصل می‌شود:



Maximum in-plane shear stresses

$$\tau_{\text{in-plane}}^{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Maximum In-Plane Shear Stress

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم در صفحه با هم یکسان و از نظر علامت، در خلاف جهت یکدیگرند.

برخلاف تنش‌های اصلی که همراه با آن‌ها هیچ‌گونه تنش برشی در صفحات اصلی ظاهر نمی‌شود، تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم همراه با تنش برشی عمودی بر صفحه عمل می‌کنند. با جایگزین نمودن سینوس و کسینوس زاویه  $2\theta_s$  در معادله  $\sigma_{x'}$  تنش متوسط عمودی روی صفحه تنش‌های برشی ماکزیمم به دست خواهد آمد:

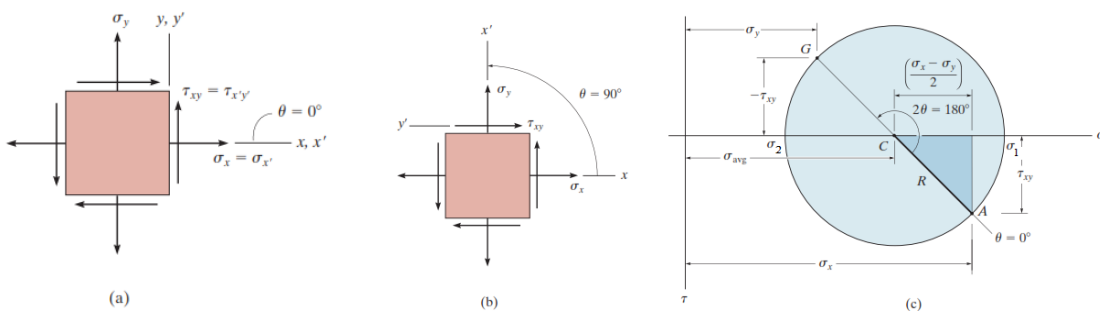
$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

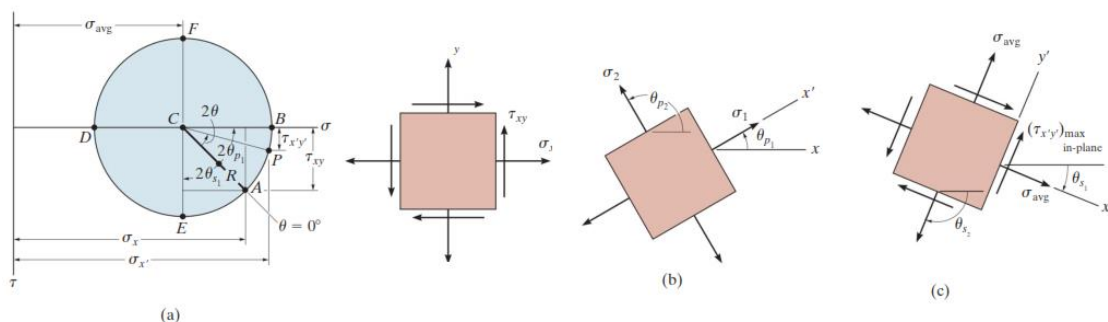
Average Normal Stress

### دایره مور در تنش صفحه‌ای (Mohr's Circle- Plane Stress)

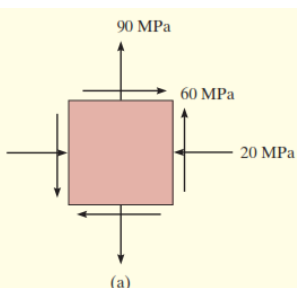
به کمک این روش ترسیمی که توسط مهندس آلمانی به نام Otto Mohr بنا نهاده شده است، می‌توان به‌طور ساده‌تر و سریع‌تری تنش‌ها را در هر صفحه دلخواه محاسبه کرد و تنش‌های اصلی را محاسبه کرد. در این روش، محور افقی، تنش عمودی  $\sigma$  و محور قائم تنش برشی  $\tau$  را نشان می‌دهد. تنش عمودی کششی در جهت مثبت و تنش عمودی فشاری در جهت منفی محور  $\sigma$  قرار می‌گیرد و تنش برشی وقتی مثبت است که در جهت عقربه‌ساعت اثر کند. برای رسم این دایره، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ✓ نقاط مربوط به زوج  $A(\sigma_x, \tau)$  و  $G(\sigma_y, \tau)$ ، را ضمن رعایت علامت‌های ذکر شده برای تنش‌ها، بر روی نمودار مشخص می‌کنیم؛
- ✓ محلی که از تقاطع محور افقی با امتداد گذرانده شده از دو نقطه مذکور حاصل می‌شود، مرکز دایره را مشخص می‌کند؛
- ✓ دایره مور را با مرکزیت نقطه به دست آمده (C)، به نحوی که از نقاط نشان دهنده تنش‌ها (A و G) عبور کند، ترسیم می‌کنیم؛
- ✓ محل تلاقی دایره با محور افقی (B و D)، تنش‌های اصلی را مشخص می‌کند؛
- ✓ مقدار تنش برشی ماکزیمم برابر با شعاع دایره مور است؛
- ✓ زاویه دوران بر روی المان تنش  $\theta$ ، نصف زاویه دوران بر روی دایره مور  $2\theta$  می‌باشد؛ بنابراین، برای محاسبه تنش‌ها در هر امتداد دلخواه که به اندازه  $\theta$  نسبت به المان مورد نظر دوران یافته باشد، امتداد AG روی دایره مور را، در همان جهت، به اندازه  $2\theta$  دوران می‌دهیم.





**مثال ۹:** حالت تنش صفحه‌ای در یک نقطه از جسمی، در شکل (a) نمایش داده شده است؛ ماکزیمم تنش برشی را در این نقطه محاسبه کنید.

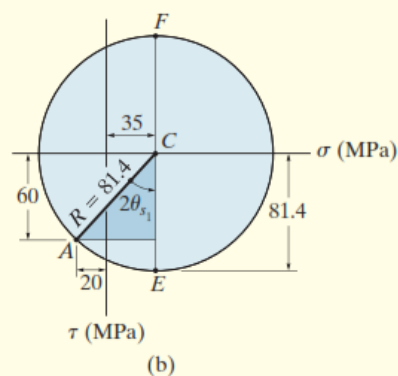


**حل:** مقادیر تنش‌ها در المان نشان داده شده عبارتند از:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

موقعیت مرکز دایره مور بر روی محور  $\sigma$ :

$$\sigma_{avg} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$



برای تعیین مختصات نقطه  $A$ ، تنش‌های وجه سمت راست المان نشان داده شده را مد نظر قرار می‌دهیم. تنش عمودی به دلیل فشاری بودن و تنش برشی نیز چون در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت دوران می‌کند، منفی هستند  $(-20, -60)$ . شعاع دایره مور برابر است با:

$$R = \sqrt{(60)^2 + (55)^2} = 81.4 \text{ MPa}$$

**بیش‌ترین تنش برشی در صفحه:**

نقاط  $E$  و  $F$  روی دایره مور، نشان دهنده موقعیت بیش‌ترین تنش برشی در صفحه است. مختصات نقطه  $E$  تنش برشی ماکزیمم و تنش عمودی متوسط را در این حالت نشان می‌دهد:

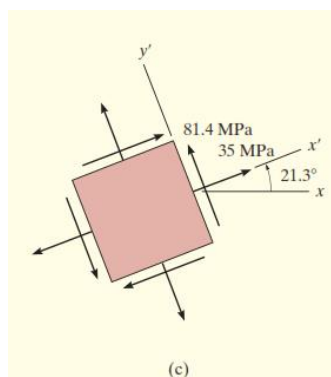
$$\sigma_{avg} = 35 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max \text{ in-plane}} = 81.4 \text{ MPa}$$

زاویه  $\theta_{s1}$  از دوران شعاع دایره مور،  $CA$  به  $CE$  حاصل می‌شود که برابر است با:

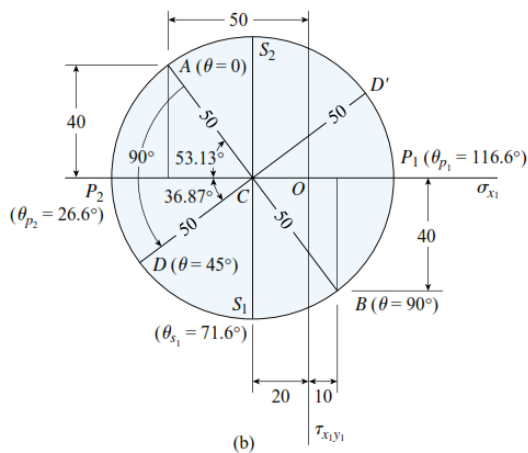
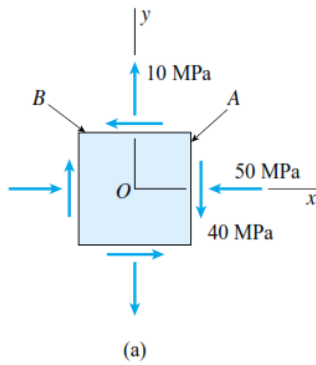
$$2\theta_{s1} = \tan^{-1}\left(\frac{20 + 35}{60}\right) = 42.5^\circ$$

$$\theta_{s1} = 21.3^\circ$$



مطابق شکل  $c$ ، زاویه در جهت خلاف عقربه ساعت، جهت محور  $x'$  را تعریف می‌کند. از آنجا که نقطه  $E$  در سمت مثبت محور  $\sigma$  قرار دارد، تنش متوسط عمودی و تنش برشی ماکزیمم در صفحه، در هر دو امتداد مثبت محورهای  $x'$  و  $y'$  اثر می‌کنند.

**مثال ۱۰:** شکل رو به‌رو، تنش‌های واقع در یک نقطه از سطح یک محور فولادی را نشان می‌دهد؛ با استفاده از دایره مور، مطلوب است محاسبه: الف) تنش‌ها بر روی این المان به‌طوری که به اندازه  $45^\circ$  در جهت عقربه‌های ساعت دوران کند؛ ب) تنش‌های اصلی؛ ج) تنش برشی ماکزیمم در صفحه.



**حل:** با توجه به شکل، داریم:

$$\sigma_x = -50 \text{ MPa} ; \sigma_y = 10 \text{ MPa} ; \tau = -40 \text{ MPa}$$

نقطه O مرکز دایره مور انتخاب می‌شود و تنش‌های مربوط به نقاط A (وجه سمت راست) و B (وجه فوقانی) در المان نشان داده شده در شکل a را بر روی دایره مور، مطابق شکل مقابل، ترسیم می‌کنیم. موقعیت مرکز دایره (C) و شعاع آن، به ترتیب زیر تعیین می‌شود:

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-50 \text{ MPa} + 10 \text{ MPa}}{2} = -20 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-50 \text{ MPa} - 10 \text{ MPa}}{2}\right)^2 + (-40 \text{ MPa})^2} = 50 \text{ MPa}$$

الف) دوران المان مورد نظر به اندازه  $\theta = 45^\circ$ ، بر روی دایره

مور  $2\theta = 90^\circ$  خواهد بود؛ بدین ترتیب، نقطه A به D و B به D' منتقل می‌شود. زاویه دوران را نسبت به محور افقی محاسبه

می‌کنیم:

$$\tan \overline{ACP_2} = \frac{40 \text{ MPa}}{30 \text{ MPa}} = \frac{4}{3} \quad \overline{ACP_2} = 53.13^\circ$$

$$\overline{DCP_2} = 90^\circ - \overline{ACP_2} = 90^\circ - 53.13^\circ = 36.87^\circ$$

با معلوم شدن زاویه‌ها، مختصات نقاط D و D' به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{(Point D)} \quad \sigma_{x_1} = -20 \text{ MPa} - (50 \text{ MPa})(\cos 36.87^\circ) = -60 \text{ MPa}$$

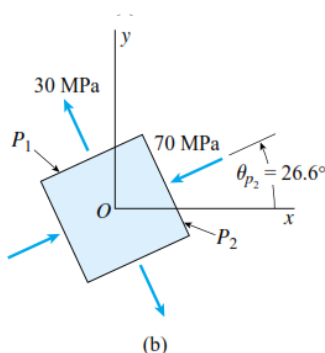
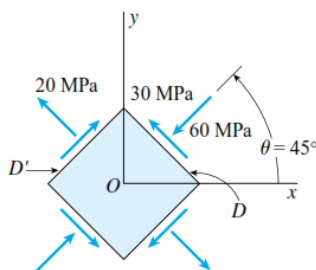
$$\tau_{x_1y_1} = (50 \text{ MPa})(\sin 36.87^\circ) = 30 \text{ MPa}$$

$$\text{(Point D')} \quad \sigma_{x_1} = -20 \text{ MPa} + (50 \text{ MPa})(\cos 36.87^\circ) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1y_1} = (-50 \text{ MPa})(\sin 36.87^\circ) = -30 \text{ MPa}$$

شکل (a) تنش‌ها را بر روی المان دوران یافته نشان می‌دهد.

ب) نقاط P1 و P2 موقعیت تنش‌های اصلی را نشان می‌دهند:



$$\sigma_1 = -20 \text{ MPa} + 50 \text{ MPa} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -20 \text{ MPa} - 50 \text{ MPa} = -70 \text{ MPa}$$

شکل (b) تنش‌های اصلی و امتداد آن را نسبت به محور X نشان می‌دهد.

### ج) تنش برشی ماکزیمم

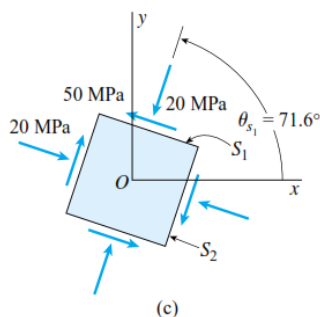
تنش‌های برشی حداقل و حداکثر، بر روی دایره مور با نقاط  $S_1$  و  $S_2$  مشخص شده‌اند؛ مقدار عددی آن برابر با شعاع دایره مور می‌باشد:

$$\tau_{\max} = 50 \text{ MPa}$$

از روی دایره مور زاویه  $2\theta_{S_1}$  که برابر است با زاویه  $ACS_1 = 90^\circ + 53.13^\circ$  به دست می‌آید:

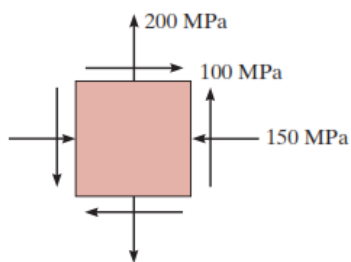
$$2\theta_{S_1} = 143.13^\circ$$

در این حالت، تنش عمودی وارد بر مقطع، در دو جهت عمود بر هم، برابر با  $\sigma_{ave}$  است که قبلاً محاسبه شد. وضعیت المان در این حالت در شکل (c) مشاهده می‌گردد.



### تمرین:

(۱۱) برای المان نشان داده شده در شکل رو به‌رو، با استفاده از دایره مور، مطلوب است محاسبه:



الف) تنش در صفحه‌ای که به اندازه ۲۵ درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران یافته است؛

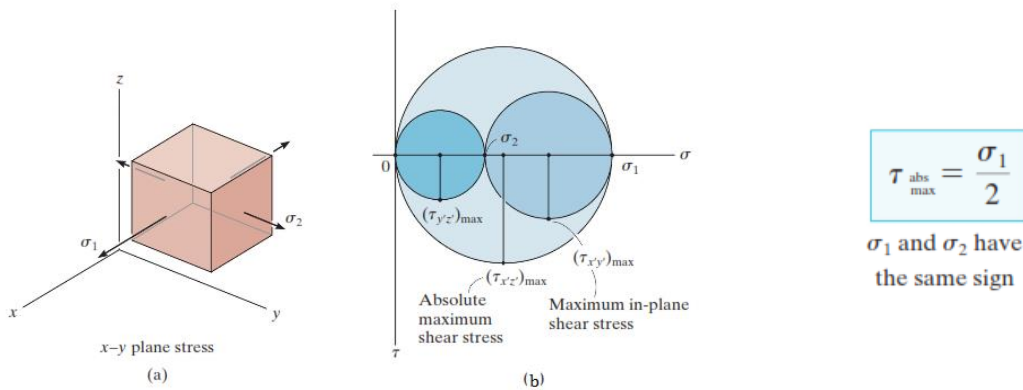
ب) تنش‌های اصلی و امتداد آن؛

ج) تنش برشی ماکزیمم در صفحه.

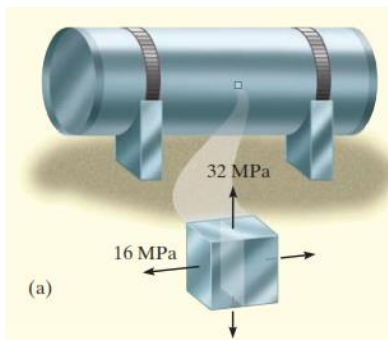
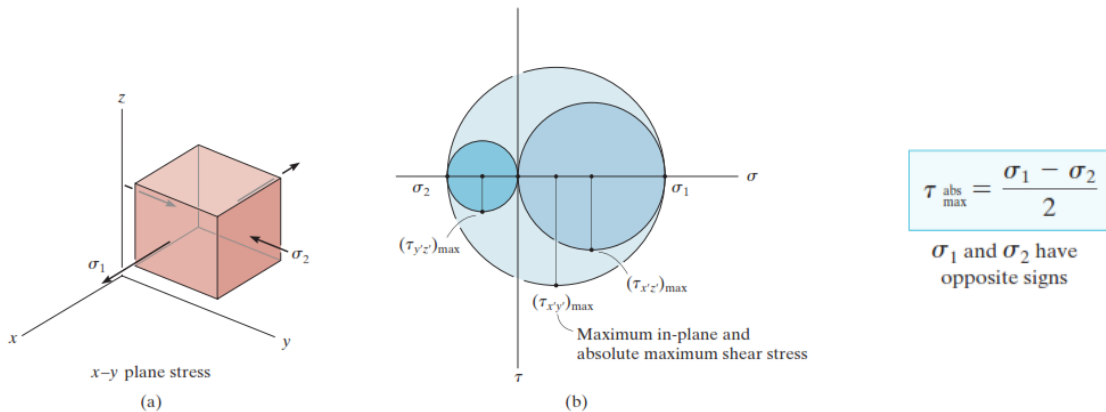
### تنش برشی ماکزیمم مطلق (Absolute Maximum Shear Stress)

از آنجایی که مقاومت مصالح شکننده به توانایی تحمل تنش برشی بستگی دارد، یافتن تنش برشی ماکزیمم مطلق در مصالح وقتی که تحت بارگذاری قرار می‌گیرند، اهمیت دارد. برای محاسبه مقدار آن، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

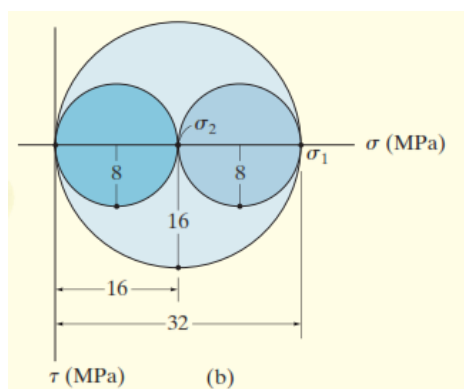
**حالت اول:** المان مطابق شکل (a) را که تحت اثر تنش دومحوری قرار دارد ( $\sigma_3$  در امتداد Z مساوی صفر است)، در نظر بگیرید. با توجه به آن که تنش‌های  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  هر دو کششی و مثبت هستند، دایره مور برای این المان در حالت کلی مطابق با شکل (b) خواهد بود. در نتیجه، تنش برشی ماکزیمم مطلق با توجه به شکل، برابر است با:



**حالت دوم:** در المان مطابق شکل (a) که تحت اثر تنش دومحوری قرار دارد، تنش‌های  $\sigma_1$  کششی و  $\sigma_2$  فشاری هستند، دایره مور برای این المان در حالت کلی مطابق با شکل (b) خواهد بود. در نتیجه، تنش برشی ماکزیمم مطلق با توجه به شکل، برابر است با:



**مثال ۱۱:** نقطه نشان داده شده روی سطح یک مخزن استوانه‌ای تحت فشار مطابق شکل (a) تحت تنش صفحه‌ای قرار دارد. تنش برشی ماکزیمم مطلق را در این نقطه به‌دست آورید.

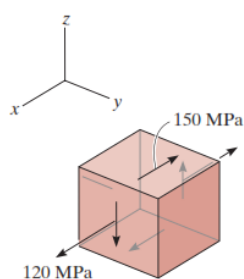


**حل:** همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، این المان تحت اثر تنش‌های کششی (مثبت) در صفحه قرار دارد و با توجه به عدم وجود تنش برشی در آن، تنش‌های مشخص شده همان تنش‌های اصلی هستند:  
 $(\sigma_3 = 0$  و  $\sigma_2 = 16\text{MPa}$  ؛  $\sigma_1 = 32\text{MPa}$ )  
 بنابراین با ترسیم دایره مور، تنش برشی ماکزیمم مطلق به دست می‌آید:

$$\tau_{\max}^{\text{abs}} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ MPa}$$

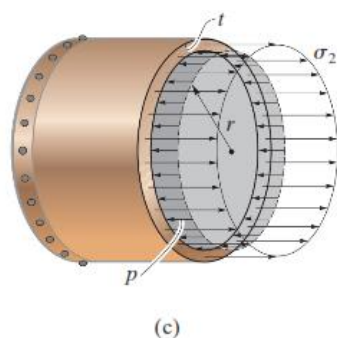
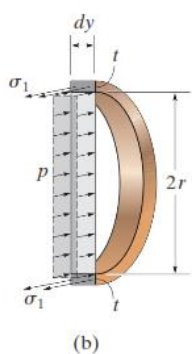
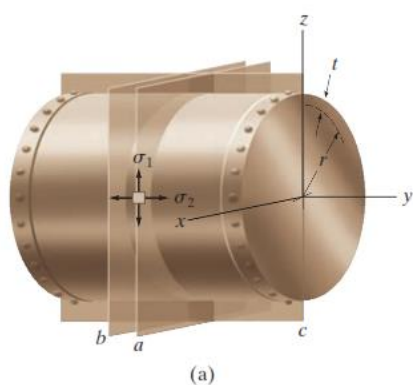
### تمرین:

(۱۲) تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم مطلق المان نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



## تنش در مخازن جدار نازک تحت فشار (Thin-Walled Pressure Vessels)

محفظه‌ای است که برای نگهداری، ذخیره‌سازی و حمل سیالات (گاز یا مایع) تحت فشار، استفاده می‌شود. نمونه‌هایی از آن‌ها در شکل زیر نشان داده شده است. این مخازن، معمولاً به صورت کره‌ای یا استوانه‌ای شکل و از ورق فلزی ساخته می‌شوند. مخزن جدار نازک، مخزنی است که نسبت شعاع به ضخامت جدار آن،  $(r/t)$  بزرگ‌تر از ۱۰ باشد.



**مخازن استوانه‌ای:** یک مخزن جدار نازک استوانه‌ای مانند شکل (a) را در نظر بگیرید. به دلیل تقارن محوری، هیچ‌گونه تنش برشی روی المان مشخص شده در شکل ایجاد نمی‌شود؛ در نتیجه، تنش‌های عمودی نشان داده شده در شکل، همان تنش‌های اصلی هستند. همچنین، از تنش شعاعی (تنش در راستای ضخامت جداره) در مقایسه با تنش‌های دیگر، صرف‌نظر می‌شود. تنش  $\sigma_1$  را تنش محیطی (circumferential یا Hoop Stress) و تنش  $\sigma_2$  را تنش طولی (Longitudinal Stress) می‌نامند.

برای تعیین تنش محیطی  $\sigma_1$ ، قسمتی از مقطع برش خورده (بین مقاطع a و b) به طول dy را از این شکل جدا می‌کنیم. اگر اختلاف فشار داخل و خارج مخزن باشد، با نوشتن معادله تعادل نیروها در امتداد x خواهیم داشت:

$$\Sigma F_x = 0; \quad 2[\sigma_1(t dy)] - p(2r dy) = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

همچنین، برای تعیین تنش طولی  $\sigma_2$  مقطع عمود بر محور y را مطابق شکل (c) در نظر بگیرید. با نوشتن معادله تعادل در امتداد y می‌توان نوشت:

$$\Sigma F_y = 0; \quad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

از مقایسه این دو تنش، معلوم می‌شود که تنش محیطی در مخازن استوانه‌ای، دو برابر تنش طولی است. اگر دایره مور تنش را در این حالت ترسیم کنیم، تنش برشی ماکزیمم برابر خواهد بود با:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{2t}$$

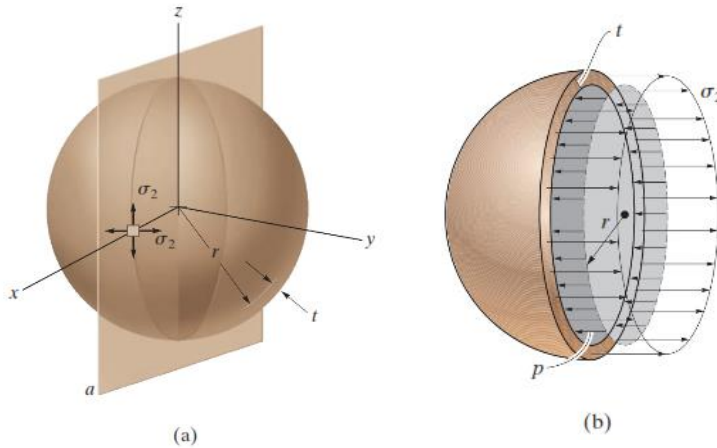
**مخازن کروی:** یک مخزن کروی، به شعاع داخلی  $r$  و ضخامت جداره  $t$  مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که تحت فشار داخلی  $p$  قرار دارد. مقطع  $a$  کره را به دو قسمت تقسیم کرده است و در شکل (b) نمودار جسم آزاد نیمه سمت چپ نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود:

$\sigma_1 = \sigma_2$ ، با نوشتن تعادل نیروها در امتداد محور  $y$  خواهیم داشت:

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$\sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$



تنش برشی ماکزیمم در جدار مخزن نیز برابر خواهد بود با:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t}$$

**مثال ۱۲:** یک مخزن استوانه‌ای تحت فشار به قطر داخلی  $4\text{ft}$  و ضخامت  $\frac{1}{2}\text{in}$  مطابق شکل رو به‌رو مفروض است. بیش‌ترین فشار داخلی که این مخزن می‌تواند تحمل کند، به‌نحوی که هیچ‌یک از تنش‌های طولی و محیطی از  $20\text{ksi}$  تجاوز نکند، چقدر است؟ تحت شرایط مشابه، حداکثر فشاری که یک مخزن کروی شکل، با ابعاد مشابه می‌تواند تحمل کند، چقدر است؟

**حل: مخزن استوانه‌ای:** با توجه به روابط فوق، معلوم است که تنش ماکزیمم، تحت اثر تنش محیطی ایجاد می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t};$$

$$20\text{ kip/in}^2 = \frac{p(24\text{ in.})}{\frac{1}{2}\text{ in.}}$$

$$p = 417\text{ psi}$$

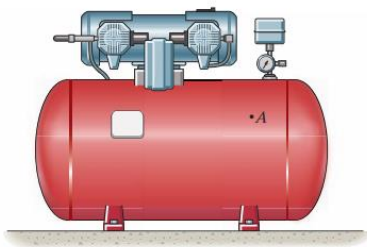
$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t};$$

$$20\text{ kip/in}^2 = \frac{p(24\text{ in.})}{2(\frac{1}{2}\text{ in.})}$$

$$p = 833\text{ psi}$$

**مخزن کروی:**

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، هرچند که اجرای مخزن کروی شکل، نسبت به مخزن استوانه‌ای به‌مراتب دشوارتر است، اما تحمل فشار داخلی آن دو برابر مخزن استوانه‌ای است.



**تمرین:**

(۱۳) مخزن نشان داده شده در شکل رو به‌رو، مربوط به یک کمپرسور هوا با فشار داخلی  $90\text{ psi}$  است. اگر قطر داخلی آن  $22\text{ in}$  و ضخامت جداره آن  $0.25\text{ in}$  باشد، مؤلفه‌های تنش در نقطه  $A$  را محاسبه کنید. یک المان حجمی در این نقطه را نشان دهید و تنش‌های مؤثر بر آن را مشخص کنید.



## فصل سوم

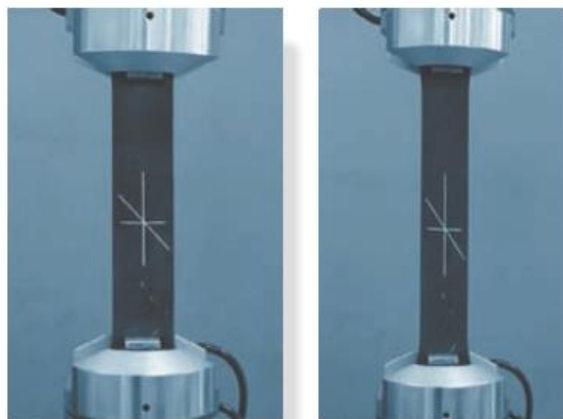
### تغییر فرم نسبی

### Strain



## تغییر فرم (Deformation)

همان‌طور که در مقدمه نیز بیان شد، همه اجسام تغییر شکل پذیرند؛ به عبارت دیگر، تحت اثر نیروهای وارده، شکل و اندازه آن‌ها دچار تغییر می‌شود. تغییر فرم یک جسم، از جابه‌جایی نسبی بین ذرات یک جسم ناشی می‌گردد. البته ممکن است این تغییرات چشم‌گیر باشد، مثل تغییراتی که در یک نوار لاستیکی ایجاد می‌شود، و یا با چشم، چندان قابل تشخیص نباشد. این تغییرات می‌تواند ناشی از تغییر درجه حرارت محیط و یا عوامل دیگری (همچون افت یا جمع شدگی (Shrinkage) یا خزش (Creep)) باشد. این تغییر فرم، در سرتاسر یک جسم، به صورت یکنواخت ایجاد نمی‌شود، بلکه تغییر در هندسه هر جزء در طول عضو می‌تواند متفاوت باشد. بنابراین، برای مطالعه تغییر فرم، جزء کوچک خطی از جسم را در همسایگی نقطه مورد نظر در نظر می‌گیریم.



برای درک بهتر از رفتار مصالح، در شکل مقابل یک نوار لاستیکی نشان داده شده است. تغییرات خطوط قائم، افقی و موربی که در یک نقطه از آن ترسیم شده است، هنگامی که این نوار تحت کشش قرار می‌گیرد، در شکل سمت چپ، قابل تشخیص است. در خط قائم، افزایش طول و خط افقی کاهش طول مشاهده می‌شود؛ اما نوار مورب، دچار تغییر طول و دوران شده است. این سه نوع تغییر فرم را در ادامه مورد بررسی قرار خواهیم داد.

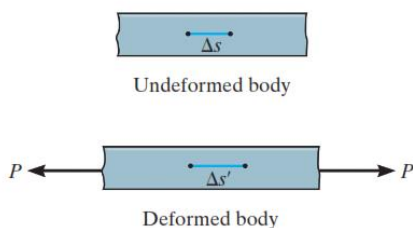
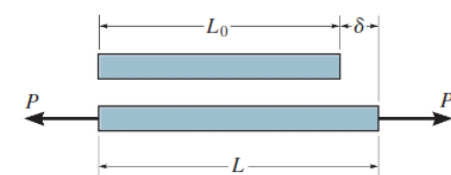
## تغییر فرم نسبی (Strain)

در شکل فوق تغییر فرم یک جسم، در یک نقطه از آن، مورد مطالعه قرار گرفت و سه نوع تغییر فرم متفاوت در آن مشاهده شد. اختلاف تغییر طول یا تغییر زاویه نسبت به وضعیت اولیه آن، تغییر فرم نسبی نامیده می‌شود. همان‌طور که در نمونه تحت آزمایش ملاحظه شد، این تغییرات می‌تواند در امتدادی که عضو تحت بارگذاری قرار گرفته است باشد، که به آن تغییر فرم نسبی عمودی گفته می‌شود. در ادامه، ابتدا این نوع از تغییر فرم نسبی مطرح می‌شود و دو نوع دیگر آن، در قسمت‌های بعد مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

## تغییر فرم نسبی عمودی (Normal Strain)

میله‌ای را که تحت اثر نیروی محوری  $P$  قرار گرفته است، مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر  $L_0$  طول اولیه میله و  $\delta$  افزایش طول ناشی از اعمال نیرو و  $L$  طول بعد از بارگذاری باشد، تغییر فرم نسبی عمودی متوسط برای این میله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon_{avg} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$



تنش عمودی در یک نقطه از یک جسم با شکل اختیاری، به طریق مشابهی تعریف می‌شود. جزء بسیار کوچکی به طول  $\Delta s$  از یک جسم را مطابق شکل، در نظر بگیرید. پس از تغییر شکل، طول آن به  $\Delta s'$  تغییر می‌یابد. اگر حد  $\Delta s \rightarrow 0$ ، تغییر فرم نسبی در یک نقطه از جسم با رابطه زیر تعریف می‌شود:

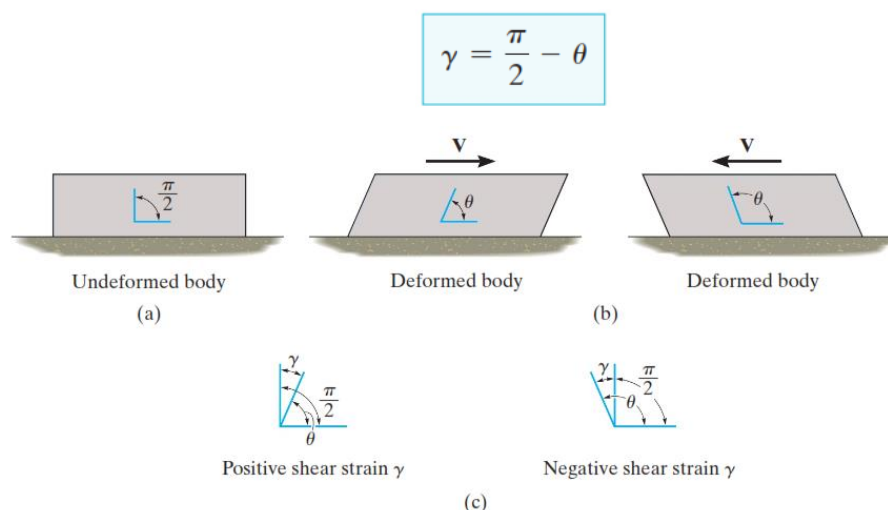
$$\epsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

در هر دو حالت،  $\epsilon$  (یا  $\epsilon_{avg}$ )، عبارت است از تغییر طول در واحد طول و با افزایش طول، علامت آن مثبت و با کاهش طول، منفی خواهد بود.

**واحدها:** از آنجایی که در تعریف تغییر فرم نسبی، واحدهای صورت و مخرج، هر دو واحد طول است،  $\epsilon$  کمیت بدون بعدی خواهد بود. اما چون در کاربردهای معمول در مهندسی، مقادیر خیلی کوچکی برای آن به دست می آید، معمولاً بر حسب میکرون بیان می شود. مثلاً در دستگاه SI به صورت  $\mu m/m$  بیان می شود ( $1 \mu m = 10^{-6} m$ ).

### تغییر فرم نسبی برشی (Shear Strain)

همان طور که پیش از این نیز گفته شد، تغییر فرم، علاوه بر تغییر طول، باعث تغییر زاویه نیز می شود. در شکل زیر، جسمی با اضلاع موازی هم نشان داده شده است. پس از اعمال نیروی برشی، زاویه قائمه موازی اضلاع، تغییر می کند. طبق تعریف، این تغییر زاویه که با  $\gamma$  نشان داده شده است، تغییر فرم نسبی برشی نامیده می شود. کاهش زاویه با علامت مثبت و افزایش زاویه با علامت منفی مشخص می شود. بنابراین، اگر زاویه پس از تغییر شکل را با  $\theta$  نشان دهیم، خواهیم داشت:



### مؤلفه های تغییر فرم نسبی در مختصات دکارتی

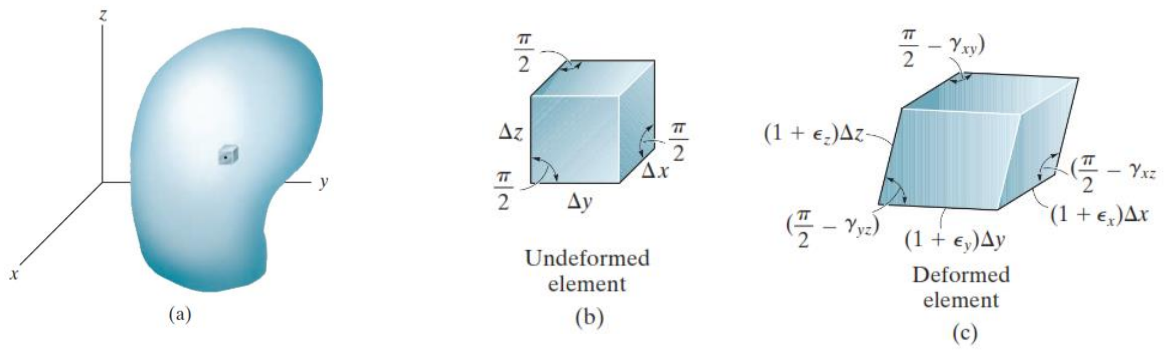
تعاریف مذکور برای تغییر فرم نسبی عمودی و برشی را می توانیم تعمیم دهیم و المان مطابق شکل (a) را در حالت کلی در نظر بگیریم. چون ابعاد المان بسیار کوچک انتخاب شده است، می توان آن را مطابق با مکعب مستطیل مطابق شکل (b) فرض کرد. تغییر فرم نسبی عمودی باعث می شود تا ابعاد این المان به صورت زیر تغییر کند:

$$(1 + \epsilon_x)\Delta x \quad (1 + \epsilon_y)\Delta y \quad (1 + \epsilon_z)\Delta z$$

که باعث تغییر حجم در المان مورد نظر می شود. از طرف دیگر، تغییر فرم نسبی برشی، باعث تغییر زاویه بین وجوه این المان به اندازه:

$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}$$

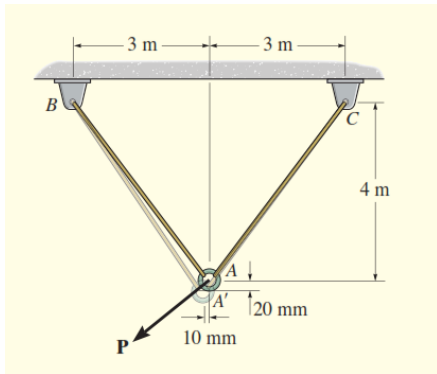
می گردد که موجب تغییر شکل المان خواهد شد.



از آنجا که در اکثر مسائل مهندسی تغییر شکل‌ها در محدوده تغییر شکل‌های کوچک مجازند، می‌توان فرض کرد:

$$\tan \Delta\theta \approx \Delta\theta \quad ; \quad \cos \Delta\theta \approx 1 \quad ; \quad \sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$$

**مثال ۱:** تغییر فرم نسبی عمودی متوسط را در دو مفتول مطابق شکل زیر محاسبه کنید. تحت اثر نیروی  $P$  حلقه اتصال از نقطه  $A$  به  $A'$  منتقل شده است.



**حل:** طول هر کدام از مفتول‌ها برابر است با:

$$L_{AB} = L_{AC} = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$$

طول نهایی نیز عبارت است از:

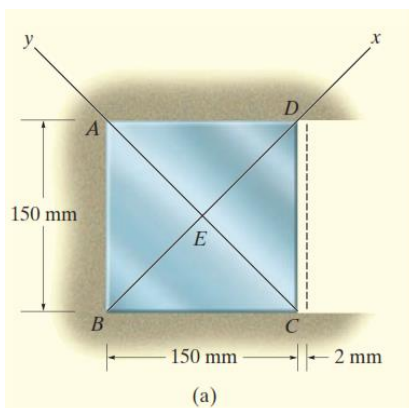
$$L_{A'B} = \sqrt{(3 \text{ m} - 0.01 \text{ m})^2 + (4 \text{ m} + 0.02 \text{ m})^2} = 5.01004 \text{ m}$$

$$L_{A'C} = \sqrt{(3 \text{ m} + 0.01 \text{ m})^2 + (4 \text{ m} + 0.02 \text{ m})^2} = 5.02200 \text{ m}$$

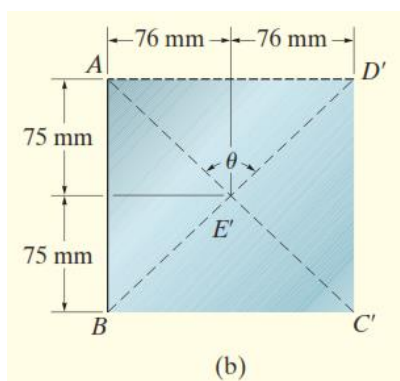
تغییر فرم نسبی متوسط در هر یک از میله‌ها برابر است با:

$$\epsilon_{AB} = \frac{L_{A'B} - L_{AB}}{L_{AB}} = \frac{5.01004 \text{ m} - 5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 2.01(10^{-3}) \text{ m/m}$$

$$\epsilon_{AC} = \frac{L_{A'C} - L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{5.02200 \text{ m} - 5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 4.40(10^{-3}) \text{ m/m}$$



**مثال ۲:** صفحه نشان داده شده در شکل (a) در سه لبه خود به تکیه‌گاه متصل است و فقط در لبه CD می‌تواند حرکت کند. اگر این لبه، به اندازه 2 mm در امتداد افق، به‌طور یکنواخت جابه‌جا شود، تغییر فرم نسبی متوسط عمودی قطر AC و تغییر فرم نسبی برش در E را نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.



**حل:** پس از تغییر شکل صفحه، گوشه C به G' منتقل می‌گردد. طول اولیه و بعد از تغییر شکل قطر صفحه، از رابطه فیثاغورت محاسبه می‌شود:

$$AC = \sqrt{(0.150 \text{ m})^2 + (0.150 \text{ m})^2} = 0.21213 \text{ m}$$

$$AC' = \sqrt{(0.150 \text{ m})^2 + (0.152 \text{ m})^2} = 0.21355 \text{ m}$$

بنابراین، تغییر فرم نسبی عمودی متوسط AC برابر است با:

$$(\epsilon_{AC})_{\text{avg}} = \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{0.21355 \text{ m} - 0.21213 \text{ m}}{0.21213 \text{ m}} = 0.00669 \text{ mm/mm}$$

برای محاسبه تغییر فرم نسبی برشی در E نسبت به محورهای x و y، که قبل از تغییر فرم،  $90^\circ$  بوده است، با توجه به شکل (b) می‌توان نوشت:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{76 \text{ mm}}{75 \text{ mm}}$$

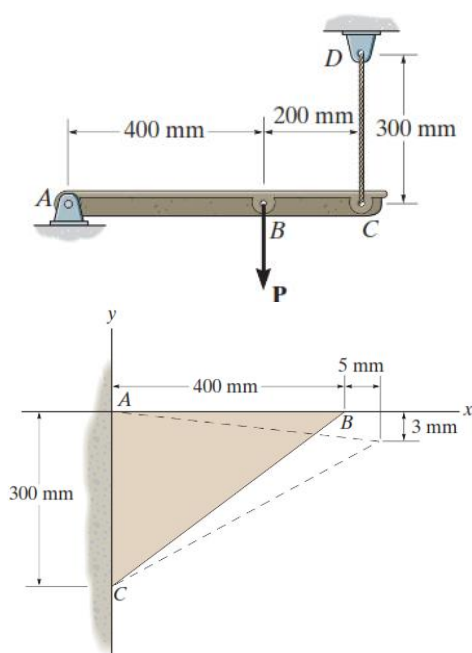
$$\theta = 90.759^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)(90.759^\circ) = 1.58404 \text{ rad}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، زاویه  $\theta$  بزرگ‌تر از  $90^\circ$  شده است، بنابراین:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 1.58404 \text{ rad} = -0.0132 \text{ rad}$$

**نکته:** اگر محورهای مختصات x و y در نقطه E در امتداد افقی و قائم انتخاب می‌شد، زاویه تغییری نمی‌کرد؛ یعنی:  $\gamma_{xy} = 0$

### تمرین:

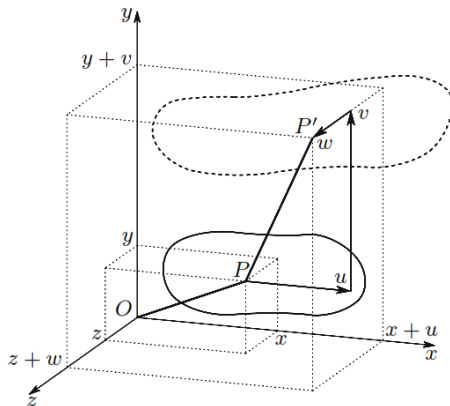


(۱) در سازه مطابق شکل مقابل، نقطه B تحت اثر نیروی P، به اندازه 2 mm در امتداد قائم جابه‌جا می‌شود. تغییر فرم نسبی عمودی را در میله CD محاسبه کنید.

(۲) صفحه مثلثی شکل زیر، تحت اثر بارهای وارده دچار تغییر شکل شده است. تغییر فرم نسبی عمودی در امتداد لبه BC و تغییر فرم نسبی برشی را در گوشه A نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.

## تغییر فرم نسبی در حالت کلی

در حالت کلی برای یک جسم سه بعدی، تغییر مکان در هر نقطه، تابعی از مختصات آن نقطه است. به عنوان مثال، نقطه دلخواه P از جسم تحت اثر بارهای وارده، به نقطه P' منتقل می‌گردد. بردارهای تغییر مکان مطابق شکل رو به رو در امتداد محورهای X، Y و Z به ترتیب برابر با u، v و w فرض شده‌اند. ثابت می‌شود رابطه بین این بردارهای تغییر مکان با تغییر فرم نسبی المان سه بعدی انتخاب شده عبارت است از:



$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \frac{\gamma_{xy}}{2} = \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} = \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} = \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases}$$

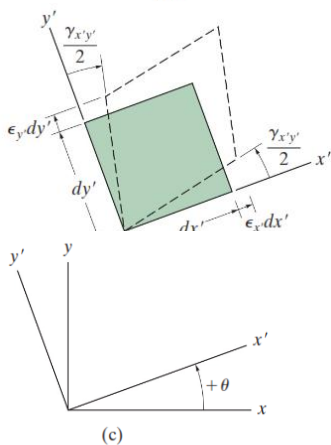
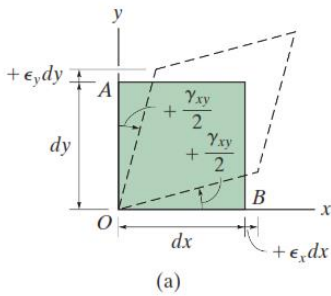
این پارامترها نشان دهنده مؤلفه‌های تانسور تغییر فرم نسبی در حالت کلی هستند که همانند تانسور تنش به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

در اغلب مسائل مهندسی، تغییر فرم جسم در حالات خاص مطرح می‌شود، در چنین مواردی فقط تعدادی از این مؤلفه‌ها وجود دارند و بقیه صفرند.

## تبدیل تغییر فرم نسبی در حالت دوبعدی

همان طور که در فصل قبل در مورد تنش گفته شد، تغییر فرم نسبی در هر نقطه از جسم نیز متأثر از امتداد محورهای مختصات است و با چرخش این محورها، مقادیر آن‌ها تغییر می‌کند. در مسائل مهندسی اغلب به دنبال تعیین بیشترین تغییر فرم نسبی و امتداد آن هستیم. اگر تغییر فرم‌های نسبی در صفحه دلخواه X-Y را در اختیار داشته باشیم، تغییر فرم‌های نسبی عمودی و برشی در صفحه X'-Y' که به اندازه  $\theta$  نسبت به آن دوران کرده است، از روابط زیر به دست می‌آید:



$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left( \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

تغییر فرم نسبی عمودی در امتداد Y' نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

## تغییر فرم‌های نسبی اصلی (Principal Strains):

برای تغییر فرم نسبی در یک نقطه نیز می‌توان جهات اصلی و مقادیر اصلی، مشابه آن‌چه که در مورد تنش بیان شد، تعریف کرد. با روشی شبیه آنچه قبلاً دیدیم، زاویهٔ مربوط به جهات اصلی تغییر فرم نسبی که در آن  $\gamma'_{xy} = 0$  است، برابر است با:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

مقادیر تغییر فرم نسبی اصلی نیز از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

جهت‌های مربوط به حداکثر تغییر فرم نسبی برشی:

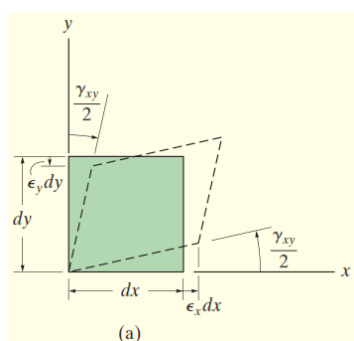
$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right)$$

مقادیر حداکثر تغییر فرم نسبی برشی در صفحه:

$$\frac{\gamma_{\text{in-plane}}^{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

و تغییر فرم نسبی عمودی متوسط:

$$\epsilon_{\text{avg}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$



**مثال ۳:** تانسور تغییر فرم نسبی در حالت صفحه‌ای، در یک نقطه عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} 500 & 200 \\ 200 & -300 \end{pmatrix} \text{ (بر حسب } \mu\text{m/m)}$$

اگر محورهای مختصات به اندازه  $30^\circ$  در جهت عقربه‌های ساعت دوران کند، تغییر فرم‌های نسبی را نسبت به محورهای مختصات دوران‌یافته محاسبه کنید.

**حل:** با توجه به تانسور داده شده، داریم:

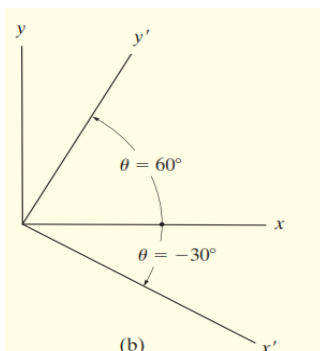
$$\gamma_{xy} = 200 \mu \quad ; \quad \epsilon_x = 500 \mu \quad ; \quad \epsilon_y = -300 \mu$$

محورهای مختصات در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده‌اند،  $\theta = -30^\circ$ ، بنابراین:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$= \left[ \frac{500 + (-300)}{2} \right] (10^{-6}) + \left[ \frac{500 - (-300)}{2} \right] (10^{-6}) \cos(2(-30^\circ)) + \left[ \frac{200(10^{-6})}{2} \right] \sin(2(-30^\circ))$$

$$\epsilon_{x'} = 213(10^{-6})$$



$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left( \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

$$= -\left[ \frac{500 - (-300)}{2} \right] (10^{-6}) \sin(2(-30^\circ)) + \frac{200(10^{-6})}{2} \cos(2(-30^\circ))$$

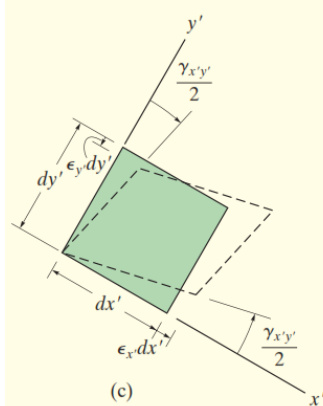
$$\gamma_{x'y'} = 793(10^{-6})$$

برای محاسبه  $\epsilon'_{xy}$  نیز با قرار دادن  $\theta = -30 + 90 = 60^\circ$  در رابطه مربوط به  $\epsilon'_x$  خواهیم داشت:

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$= \left[ \frac{500 + (-300)}{2} \right] (10^{-6}) + \left[ \frac{500 - (-300)}{2} \right] (10^{-6}) \cos(2(60^\circ)) + \frac{200(10^{-6})}{2} \sin(2(60^\circ))$$

$$\epsilon_{y'} = -13.4(10^{-6})$$



نتایج در شکل (c) نشان داده شده است (البته می‌توانستیم همان  $\theta = -30^\circ$  را در رابطه  $\epsilon'_{y'}$  قرار دهیم و به همین نتیجه برسیم).

### تمرین:

۲) تانسور تغییر فرم نسبی در حالت صفحه‌ای، در یک نقطه عبارت است از:  $\begin{pmatrix} 300 & -200 \\ -200 & -180 \end{pmatrix}$  (بر حسب  $\mu\text{m}/\text{m}$ ):

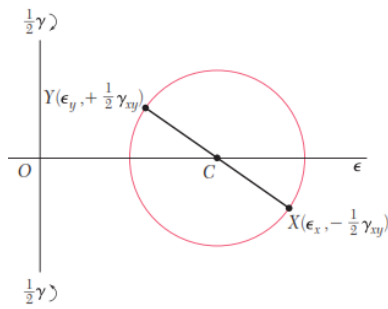
(الف) تغییر فرم‌های نسبی اصلی و امتداد آن‌ها را تعیین کنید.

(ب) بیش‌ترین تغییر فرم نسبی برشی در صفحه را به‌دست آورید.

(ج) اگر محورهای مختصات به اندازه  $45^\circ$  در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران کند، تغییر فرم‌های نسبی را نسبت به محورهای مختصات دوران‌یافته محاسبه کنید.



### دایره مور تغییر فرم نسبی در صفحه (Mohr's Circle Plane Strain)

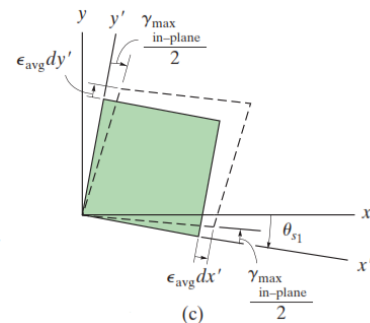
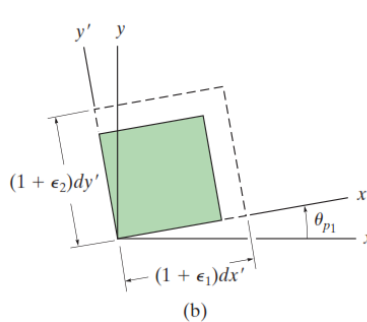
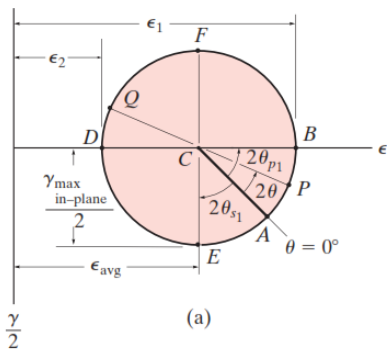
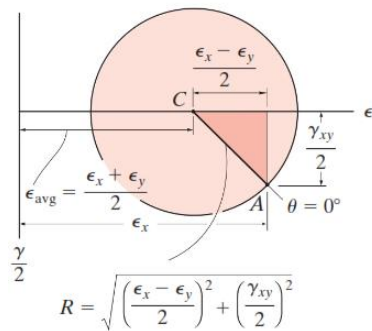


نمایش هندسی روابط مربوط به تغییر فرم نسبی، دایره‌ای است که دایره مور تغییر فرم نسبی نامیده می‌شود. روش ترسیم آن مشابه با روشی است که در مورد تنش بیان شد. محور افقی تغییر فرم نسبی عمودی  $\epsilon$  و محور قائم، تغییر فرم نسبی برشی  $\frac{\gamma_{xy}}{2}$  را نشان می‌دهد (در حالت دوبعدی (صفحه‌ای)، برای سهولت می‌توان  $\gamma$  را بدون اندیس نیز نشان داد). تغییر فرم نسبی عمودی مثبت که نشان‌دهنده افزایش طول است، در سمت مثبت محور  $\epsilon$  فرض می‌شود؛ اما تغییر فرم نسبی برشی مثبت، روی دایره مور، نسبت به امتداد  $x$  منفی و نسبت به امتداد  $y$  مثبت فرض می‌شود (و برعکس).

مرکز و شعاع دایره مور با استفاده از تعاریف قبلی تعیین می‌شود:

$$\epsilon_{\text{ave}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{and} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

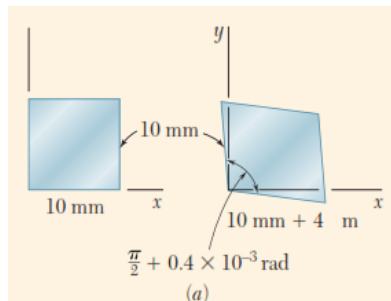
زاویه دوران المان  $\theta$ ، بر روی دایره مور به اندازه  $2\theta$  خواهد بود. تغییر فرم‌های نسبی اصلی و امتداد آن و نیز تغییر فرم برشی ماکزیمم در صفحه، در شکل‌های زیر نشان داده شده است.



**مثال ۴:** یک صفحه مربع شکل به ابعاد  $10 \times 10$  mm، در حالت تغییر فرم نسبی صفحه‌ای، مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. ضلع افقی آن تحت اثر بارهای وارده به اندازه  $4 \mu\text{m}$  افزایش می‌یابد؛ ضلع قائم آن تغییری نمی‌کند و زاویه گوشه سمت چپ در پایین صفحه، به اندازه  $0.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$  افزایش می‌یابد. مطلوب است:

(الف) تغییر فرم‌های نسبی اصلی و امتداد محورهای مربوط به آن؛

(ب) ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی و تغییر فرم نسبی عمودی متناظر با آن.

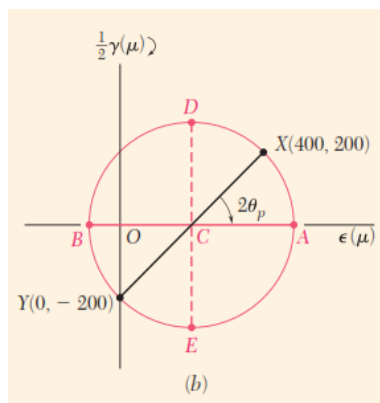


**حل:**

(الف) محورهای اصلی و تغییر فرم‌های نسبی اصلی

پس از رسم محورهای  $\epsilon$  و  $\frac{\gamma}{2}$  مختصات نقاط  $X$  و  $Y$  را بر روی آن مشخص می‌کنیم.

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^{-3} \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$



$\epsilon_x$  افزایش طول نسبی را نشان می‌دهد، پس علامت آن مثبت است و چون زاویه گوشه افزایش یافته است،  $\frac{\gamma}{2}$  منفی خواهد بود، بنا براین، نقطه  $X$  به مختصات  $\epsilon_x$  و  $\frac{\gamma}{2}$  هر دو با علامت مثبت روی دایره مور مشخص می‌گردد. از این رو، نقطه  $Y$  به مختصات  $0$  و  $\frac{\gamma}{2}$  منفی تعیین می‌شود. با ترسیم قطر  $XY$  از دایره مور، مرکز دایره مشخص می‌شود. مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

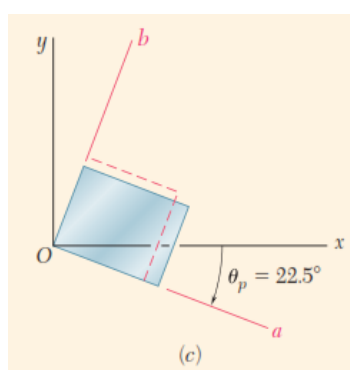
$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200\mu \quad ; \quad R = \sqrt{(200\mu)^2 + (200\mu)^2} = 283\mu$$

نقاط  $A$  و  $B$  موقعیت تغییر فرم‌های نسبی عمودی ماکزیمم و مینیمم را نشان می‌دهند:

$$\epsilon_1 = OA = 200\mu + 283\mu = 483\mu$$

$$\epsilon_2 = OB = 200\mu - 283\mu = -83\mu$$

شکل (c) محورهای اصلی را نشان می‌دهد. چون  $2\theta_p$  بر روی دایره مور  $45^\circ$  است، زاویه دوران صفحه،  $\theta_p = 22.5^\circ$  خواهد بود.



(ب) تغییر فرم نسبی برشی ماکزیمم در صفحه

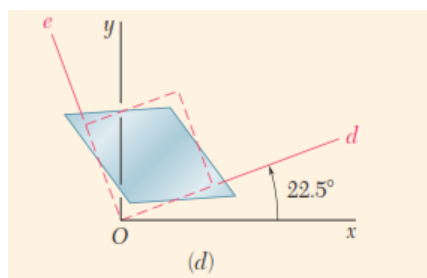
نقاط  $D$  و  $E$  روی دایره مور، نشان دهنده تغییر فرم نسبی برشی ماکزیمم در صفحه هستند. این مقدار مساوی با شعاع دایره مور می‌باشد:

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = R = 283\mu \quad \gamma_{\max} = 566\mu$$

در این حالت، تغییر فرم‌های نسبی عمودی منطبق بر مرکز دایره مور، برابرند با:

$$\epsilon_{ave} = 200\mu$$

شکل (d) محورهای تغییر فرم نسبی ماکزیمم را نشان می‌دهد.



**تمرین:**

۳) مؤلفه‌های تغییر فرم نسبی، در نقطه نشان داده شده در لچکی (bracket) مطابق شکل، تحت اثر نیروی  $P$  عبارتند از:

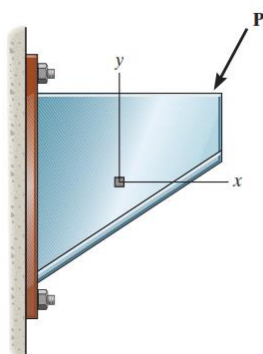
$$\epsilon_x = 500\mu \quad ; \quad \epsilon_y = 350\mu \quad ; \quad \gamma_{xy} = -430\mu$$

با استفاده از دایره مور،

الف) تغییر فرم‌های نسبی اصلی و امتداد محورهای اصلی را به دست آورید؛

ب) تغییر فرم‌های نسبی را بر روی این المان، وقتی که به اندازه  $\theta = 30^\circ$  در جهت ساعت گرد دوران کند، تعیین کنید؛

ج) ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی و تغییر فرم نسبی عمودی متناظر با آن را محاسبه کنید

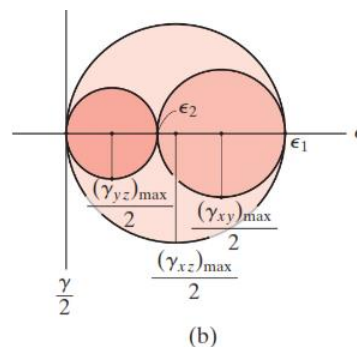
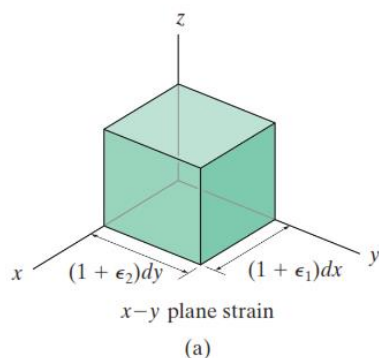


### ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی مطلق (Absolute Maximum Shear Strain)

در فصل گذشته، خاطر نشان گردید که در حالت تنش صفحه‌ای، هنگامی که تنش‌های اصلی هم‌جهت باشند، یعنی هر دو کششی یا هر دو فشاری باشند، تنش برشی ماکزیمم مطلق در یک المان، خارج از صفحه واقع می‌شود. این امر در مورد تغییر فرم نسبی صفحه‌ای نیز صادق است. مثلاً اگر تغییر فرم‌های اصلی در حالت صفحه‌ای، مطابق شکل زیر، باعث افزایش طول المان شوند، دایره مور در حالت سه‌محوره مطابق شکل (b) ترسیم می‌شود که در این صورت، شعاع دایره بزرگ‌تر برابر است با:

$$R = (\gamma_{xz})_{\max}/2$$

$$\gamma_{\max}^{\text{abs}} = (\gamma_{xz})_{\max} = \epsilon_1$$

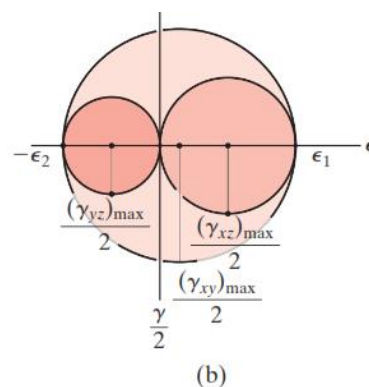
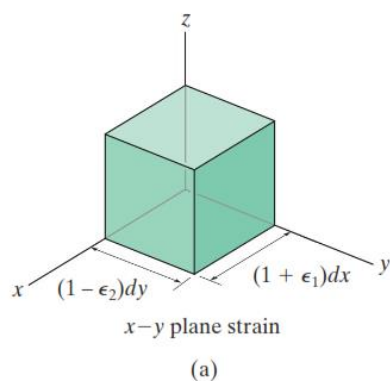


این مقدار، همان تغییر فرم نسبی برشی ماکزیمم مطلق را به دست می‌دهد. باید توجه داشت که این مقدار بزرگ‌تر از تغییر فرم نسبی برشی صفحه‌ای است که برابر است با:

$$(\gamma_{xy})_{\max}$$

اکنون، حالتی را در نظر بگیرید که تغییر فرم‌های نسبی در خلاف جهت یکدیگر باشند؛ بنابراین  $\epsilon_1$  باعث ازدیاد طول و  $\epsilon_2$  کاهش طول می‌گردد. در این حالت که وضعیت المان و دایره مور مربوط به آن در شکل‌های زیر نشان داده شده است، تغییر فرم نسبی برشی ماکزیمم مطلق، عبارت است از:

$$\gamma_{\max}^{\text{abs}} = (\gamma_{xy})_{\max}^{\text{in-plane}} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$



**مثال ۵:** مؤلفه‌های تغییر فرم نسبی صفحه‌ای در یک نقطه عبارتند از:

$$\epsilon_x = -400(10^{-6}) \quad ; \quad \epsilon_y = 200(10^{-6}) \quad ; \quad \gamma_{xy} = 150(10^{-6})$$

تغییر فرم نسبی برشی ماکزیمم صفحه‌ای و تغییر فرم نسبی برشی ماکزیمم مطلق را محاسبه کنید.

**حل:**

الف) ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی صفحه‌ای: با توجه به مثبت بودن علامت تغییر فرم نسبی برشی، وضعیت تغییر یافته‌ی المان، مطابق با شکل رو به‌رو خواهد بود. برای تعیین ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی در صفحه، دایره مور را ترسیم می‌کنیم. موقعیت مرکز دایره عبارت است از:

$$\epsilon_{avg} = \frac{-400 + 200}{2} (10^{-6}) = -100(10^{-6})$$

چون  $\epsilon_x$  منفی و  $\gamma_{xy}$  مثبت است، مختصات نقطه A مربوط به امتداد x، هر دو منفی خواهد بود (-400، -75). شعاع دایره مور نیز برابر است با:

$$R = [\sqrt{(400 - 100)^2 + (75)^2}] (10^{-6}) = 309(10^{-6})$$

بنابراین، از روی دایره مور، تغییر فرم‌های نسبی اصلی عبارتند از:

$$\epsilon_1 = (-100 + 309)(10^{-6}) = 209(10^{-6})$$

$$\epsilon_2 = (-100 - 309)(10^{-6}) = -409(10^{-6})$$

در نتیجه، ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی در صفحه برابر خواهد بود با:

$$\gamma_{in-plane}^{max} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = [209 - (-409)](10^{-6}) = 618(10^{-6})$$

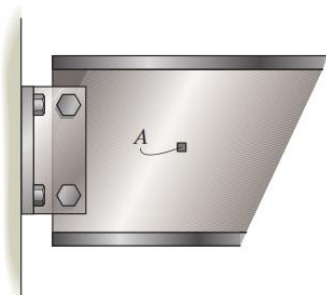
ب) ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی مطلق: چون تغییر فرم‌های نسبی اصلی در خلاف جهت یکدیگر واقع شده‌اند، ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی در صفحه، با ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی مطلق برابر خواهد بود؛ یعنی:

$$\gamma_{max}^{abs} = 618(10^{-6})$$

دایره مور سه‌محوره المان مورد نظر، نسبت به محورهای X و Y و Z، در شکل (b) ترسیم شده است.

**تمرین:**

۴) مؤلفه‌های تغییر فرم نسبی در نقطه A از تیر نشان داده شده در شکل، عبارتند از:  $\epsilon_x = 450(10^{-6})$  ؛  $\epsilon_y = 825(10^{-6})$  ؛  $\epsilon_z = 0$  ؛  $\gamma_{xy} = 275(10^{-6})$



الف) تغییر فرم‌های نسبی اصلی؛

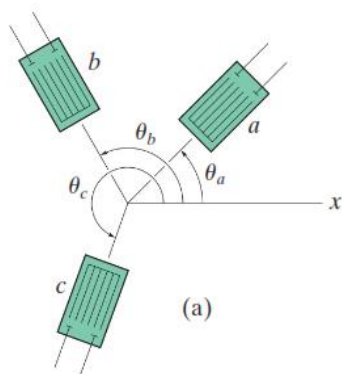
ب) ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی در صفحه  $x - y$ ؛

ج) ماکزیمم تغییر فرم نسبی برشی مطلق؛

را برای المان نشان داده شده محاسبه کنید.

### اندازه‌گیری تغییر فرم نسبی- گلب‌رگ‌های سنجش تغییر فرم نسبی (Strain Rosettes)

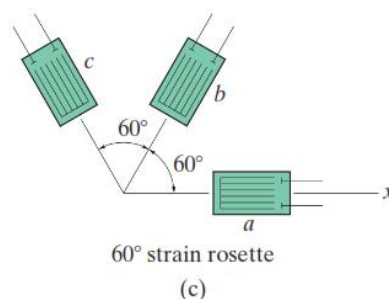
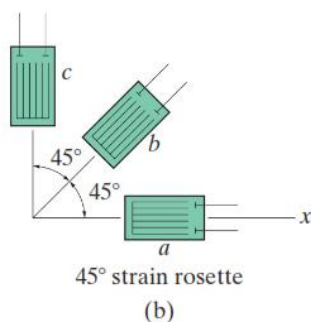
تغییر فرم اجسام را می‌توان با استفاده از ابزار ویژه‌ای اندازه‌گیری کرد. تغییر فرم سنج الکتریکی (Electrical Strain Gage)، از جمله معمول‌ترین وسایل اندازه‌گیری در این موارد است. این تغییر فرم سنج‌ها، که دارای ابعاد کوچکی هستند، به نقاط مورد نظر از سطح جسم جسابنده می‌شوند و به کمک دستگاهی که به آن متصل شده است، تغییر فرم طولی را در جهت مورد نظر نشان می‌دهند. این تغییر فرم سنج‌ها از یک رشته سیم نازک مارپیچ تشکیل شده‌اند. تغییر فرم جسم، باعث تغییر طول این رشته سیم و در نتیجه، تغییر مقاومت الکتریکی آن می‌شود. با توجه به رابطه‌ای که بین تغییر مقاومت الکتریکی و تغییر طول رشته سیم برقرار است، تغییر فرم جسم مورد نظر، اندازه‌گیری می‌شود.



برای اندازه‌گیری تغییر فرم نسبی در جهات مختلف و نیز تغییر فرم نسبی برشی، از گلب‌رگ‌های سنجش تغییر فرم نسبی استفاده می‌شود که در آن این تغییر فرم سنج‌های الکتریکی، در سه جهت مختلف، مطابق شکل رو به‌رو، قرار داده می‌شوند. پس از اندازه‌گیری تغییر فرم نسبی در این سه امتداد، با استفاده از روابط مثلثاتی به شرح زیر می‌توان تغییر فرم نسبی عمودی و برشی را در صفحه مورد نظر، نسبت به محورهای X و Y به‌دست آورد.

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c\end{aligned}$$

البته برای سهولت در حل معادلات، در عمل این تغییر فرم سنج‌ها را به ترتیب خاصی قرار می‌دهند. در شکل‌های زیر دو نمونه متداول تحت زوایای  $45^\circ$  و  $60^\circ$  نشان داده شده است.

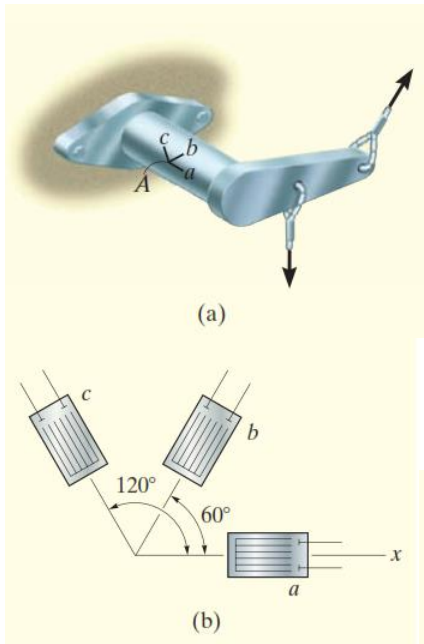


در صورت استفاده از گلب‌رگ  $45^\circ$ ،  $\theta_a = 0^\circ$ ،  $\theta_b = 45^\circ$  و  $\theta_c = 90^\circ$  خواهد بود؛ با قرار دادن این زوایه‌ها در روابط فوق و حل معادلات، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \epsilon_c \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - (\epsilon_a + \epsilon_c)\end{aligned}$$

اگر از گلب‌رگ  $60^\circ$  استفاده شود،  $\theta_a = 0^\circ$ ،  $\theta_b = 60^\circ$  و  $\theta_c = 120^\circ$  در روابط فوق قرار می‌گیرد و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \frac{1}{3} (2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_b - \epsilon_c)\end{aligned}$$



**مثال ۶:** حالت تغییر فرم نسبی در نقطه A از براکت نشان داده شده در شکل (a)، توسط گلبرگ سنجش تغییر فرم نسبی به شکل (b) اندازه‌گیری شده است. نتایج حاصل، عبارتند از:

$$\epsilon_a = 60(10^{-6}) ; \epsilon_b = 135(10^{-6}) ; \epsilon_c = 264(10^{-6})$$

تغییر فرم های نسبی اصلی صفحه‌ای و امتداد آن را برای نقطه مورد نظر محاسبه کنید.

**حل:** با توجه به گلبرگ نشان داده شده در شکل (b) داریم:

$$\theta_c = 120^\circ \text{ و } \theta_b = 60^\circ, \theta_a = 0^\circ$$

با قرار دادن این مقادیر در روابط مربوطه، می توان نوشت:

$$60(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 0^\circ + \epsilon_y \sin^2 0^\circ + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ \\ = \epsilon_x \quad (1)$$

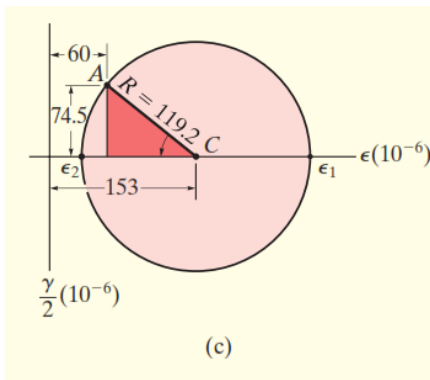
$$135(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 60^\circ + \epsilon_y \sin^2 60^\circ + \gamma_{xy} \sin 60^\circ \cos 60^\circ \\ = 0.25\epsilon_x + 0.75\epsilon_y + 0.433\gamma_{xy} \quad (2)$$

$$264(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 120^\circ + \epsilon_y \sin^2 120^\circ + \gamma_{xy} \sin 120^\circ \cos 120^\circ \\ = 0.25\epsilon_x + 0.75\epsilon_y - 0.433\gamma_{xy} \quad (3)$$

با قرار دادن مقدار به‌دست آمده از رابطه (1) در روابط (2) و (3) و حل این معادلات، خواهیم داشت:

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \quad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \quad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

برای به‌دست آوردن تغییر فرم‌های نسبی اصلی در صفحه، از دایره مور در حالت دوبعدی آن استفاده می‌کنیم. موقعیت مرکز دایره و شعاع آن عبارتند از:



$$R = [\sqrt{(153 - 60)^2 + (74.5)^2}] (10^{-6}) = 119.1(10^{-6})$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{60(10^{-6}) + 246(10^{-6})}{2} \\ = 153(10^{-6})$$

در نتیجه تغییر فرم‌های نسبی اصلی از روی دایره مور برابر خواهند بود با:

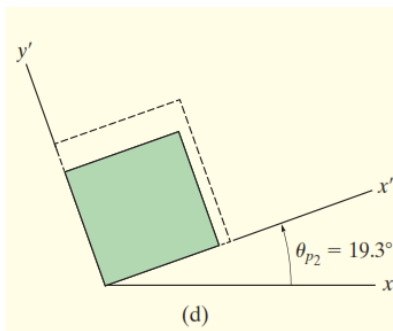
$$\epsilon_1 = 153(10^{-6}) + 119.1(10^{-6}) = 272(10^{-6})$$

$$\epsilon_2 = 153(10^{-6}) - 119.1(10^{-6}) = 33.9(10^{-6})$$

$$2\theta_{p_2} = \tan^{-1} \frac{74.5}{(153 - 60)} = 38.7^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 19.3^\circ$$

المان تغییر فرم یافته، با خط‌چین در شکل (d) نشان داده شده است.



## فصل چهارم

### خصوصیات مکانیکی مصالح



Failure of a  
ductile material

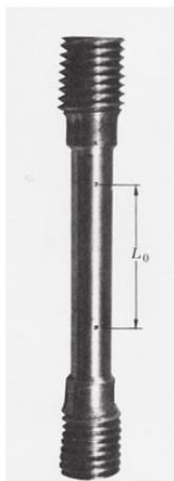


Tension failure of  
a brittle material

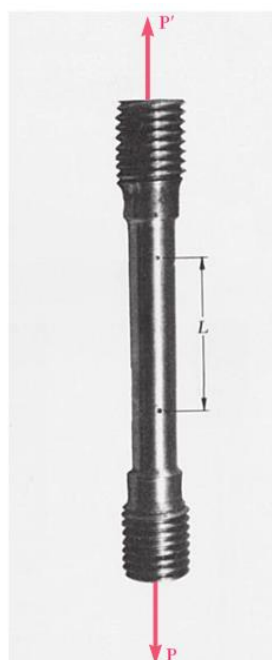
در فصل‌های پیش درباره مفاهیم «تنش» و «تغییر فرم نسبی» به‌طور جداگانه بحث شد. از آن‌چه گذشت، نتیجه گرفتیم که اجسام تحت اثر نیروهای وارده تغییر فرم می‌دهند و در هر نقطه از آن‌ها، تنش که نماینده نیروهای داخلی است، ایجاد می‌شود. اکنون این سؤال پیش می‌آید که چه رابطه‌ای بین تنش و تغییر فرم نسبی در یک نقطه از جسم وجود دارد و این رابطه بیان‌کننده چه خصوصیتی از مصالح ساختمانی است؟

در پاسخ باید گفت که اولاً بین تنش و تغییر فرم نسبی در هر عنصر از جسم، همواره روابطی وجود دارد که در ادامه در رابطه با آن مفصل بحث خواهد شد. ثانیاً این روابط، مشخص‌کننده رفتارهای مادی جسم و معرف واکنش آن در مقابل اثرات خارجی هستند و از جمله خصوصیات اصلی مادی اجسام به‌شمار می‌روند. این ویژگی‌ها، تعیین‌کننده رفتار مصالح مختلف در شرایط گوناگون هستند و از این رو، بسیار اهمیت دارند و در حل مسائل مهندسی، کاربردهای اساسی دارند. روابط بین تنش و تغییر فرم نسبی، روابط مشخصه (Constitutive Relations) نامیده می‌شوند و در قسمت‌های آینده، ضمن معرفی آن، بهره‌گیری‌های اساسی از آن در حل مسائل به‌عمل خواهد آمد.

### نمودار تنش-تغییر فرم نسبی



**آزمایش کشش ساده:** برای ترسیم نمودار تنش-تغییر فرم نسبی مصالح، معمولاً از یک آزمایش کششی ساده بر روی نمونه‌ای از آن استفاده می‌شود. البته لازم به ذکر است که این آزمایش معمولاً بر روی مصالح انعطاف‌پذیر که خاصیت کشسانی دارند، انجام می‌شود. در شکل رو به‌رو، یک نمونه فلزی با سطح مقطع دایره‌ای نشان داده شده است. دو علامت روی میله، به فاصله  $L_0$  از یکدیگر مشخص می‌شود. این طول، فاصله مقیاس (Gage Length) نامیده می‌شود. این نمونه توسط یک دستگاه تست کشش مورد آزمایش قرار می‌گیرد. در این آزمایش، نیروی کششی  $P$  بر نمونه وارد می‌شود و تحت اثر این نیرو، طول نمونه افزایش می‌یابد؛ در نتیجه به طول  $L_0$  نیز افزوده می‌شود. طول افزایش یافته  $L$  در هر لحظه از انجام آزمایش، اندازه‌گیری می‌شود و افزایش طول  $\delta = L - L_0$  نظیر هر مقدار  $P$  ثبت می‌شود.  $\epsilon$  از تقسیم  $\delta$  بر طول اولیه  $L_0$  محاسبه می‌شود. تغییرات قطر نمونه نیز هم‌زمان قابل اندازه‌گیری است. از طرف دیگر، تنش  $\sigma$  نیز از تقسیم  $P$  بر سطح مقطع اولیه  $A_0$  به‌دست می‌آید.



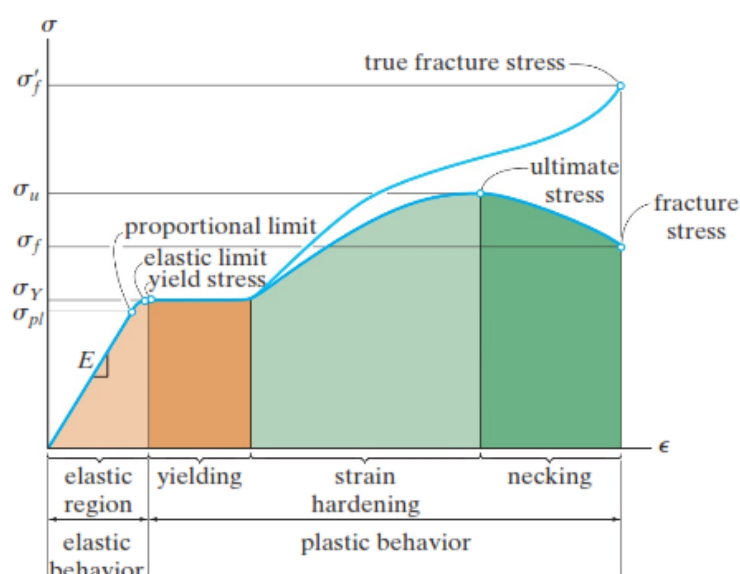


باید دقت شود که بارگذاری بسیار آرام انجام گیرد تا شرایط آزمایش شبه استاتیکی فراهم شود. در ترسیم نمودار، محور افقی را برای نمایش تغییرات  $\epsilon$  در نظر می‌گیریم و محور قائم را برای نشان دادن تغییرات  $\sigma$  انتخاب می‌کنیم. در طول مدت زمان انجام آزمایش، از لحظه شروع بارگذاری تا لحظه گسیختگی (Rupture) نمونه، مقادیر تنش و تغییر فرم نسبی، مرتباً ثبت می‌شود و از برازش منحنی بر نقاط ثبت شده، نمودار ترسیم می‌گردد. نمودارهای تنش-تغییر فرم نسبی برای مصالح مختلف باهم اختلاف زیادی دارند. حتی برای یک نوع مصالح مشخص، با توجه به درجه حرارت محیط، سرعت بارگذاری و چند متغیر دیگر، نمودارهای متفاوتی به دست می‌آید. اما در یک شرایط استاندارد، می‌توان برای یک نوع مصالح خاص، یک نمودار ثابت ترسیم کرد. در یک تقسیم‌بندی کلی، می‌توان مصالح ساختمانی را به دو دسته شکل‌پذیر (Ductile) و شکننده یا ترد (Brittle) تقسیم‌بندی کرد. مصالح شکل‌پذیر، پیش از گسیختگی، تغییر شکل قابل ملاحظه‌ای از خود نشان می‌دهند. مصالح ترد، بدون آن که تغییر شکل قابل توجهی در آن‌ها ایجاد شود، به‌طور ناگهانی گسیخته می‌شوند. مواد چکش‌خوار، شامل فولاد ساختمانی و بسیاری از آلیاژهای فلزی رفتار انعطاف‌پذیری دارند. شکل زیر رفتار یک فولاد نرمه (کم‌کربن) را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با شروع آزمایش، رابطه بین تنش و تغییر فرم نسبی خطی است و این نمودار با شیب ثابت تا رسیدن به حد تناسب (Proportional limit) ادامه می‌یابد. در این ناحیه، مصالح رفتار ارتجاعی (الاستیک یا کش‌سان) دارند. البته همان‌طور که از روی نمودار ملاحظه می‌شود، پس از رسیدن به حد تناسب، شیب منحنی اندکی کاهش می‌یابد و در فاصله کمی به حد تسلیم می‌رسد. در مسائل مهندسی می‌توان تا رسیدن به حد تسلیم، رفتار مصالح را ارتجاعی فرض کرد. شیب این نمودار با  $E$  نشان داده می‌شود و به افتخار دانشمند انگلیسی توماس یانگ (۱۸۲۹-۱۷۷۳)، مدول یانگ یا مدول الاستیسیته یا ضریب ارتجاعی نامیده شده است. این کمیت، شاخصی از سختی (Stiffness) ماده است. سختی، مقاومتی است که ماده در برابر تغییر شکل ارتجاعی از خود نشان می‌دهد. رابطه بین تنش و تغییر فرم نسبی م به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma = E\epsilon$$

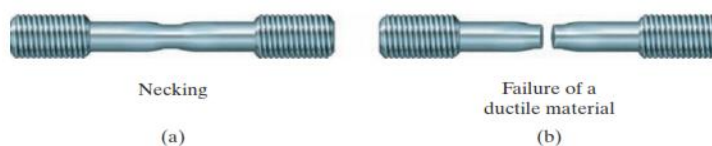
این رابطه به افتخار ریاضی‌دان انگلیسی رابرت هوک (۱۷۰۳-۱۶۳۵)، قانون هوک نامیده می‌شود. چون  $E$  یک کمیت بدون بعد است، واحد  $E$  همان واحد  $\sigma$  است.

پس از گذراندن این مرحله و با افزودن بار، رفتار نمونه به مرحله تسلیم (Yield) می‌رسد و پس از آن، تا مدتی بدون افزایش بار، به تغییر شکل خود ادامه می‌دهد. در این مرحله، مقدار تنش برابر با  $\sigma_y$  ثابت می‌ماند و مصالح رفتار کاملاً خمیری یا موم‌سان (Perfectly Plastic) از خود نشان می‌دهند.

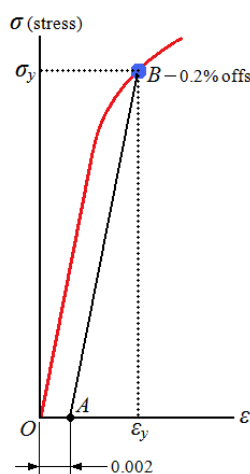


Conventional and true stress-strain diagram for ductile material (steel) (not to scale)

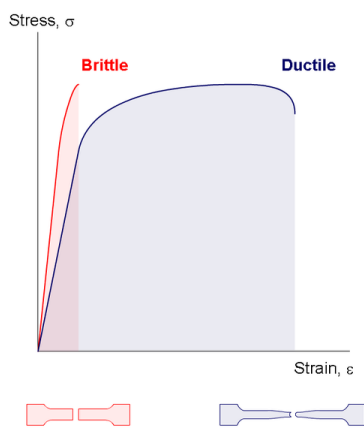
در ادامه بارگذاری، نمودار وارد مرحله سخت شدگی مجدد (Strain Hardening) می‌شود و تا رسیدن به مقاومت نهایی  $\sigma_u$  (Ultimate Strength) همچنان با شیب مثبت ادامه می‌یابد. از این نقطه به بعد، قطر قسمتی از نمونه شروع به کاهش می‌کند؛ این پدیده، باریک شدگی یا گلوبی شدن (Necking) نامیده می‌شود. در این مرحله نیروی لازم برای افزایش طول نمونه، کاهش می‌یابد تا آن که سرانجام با رسیدن تنش به  $\sigma_f$  گسیختگی نهایی رخ می‌دهد.



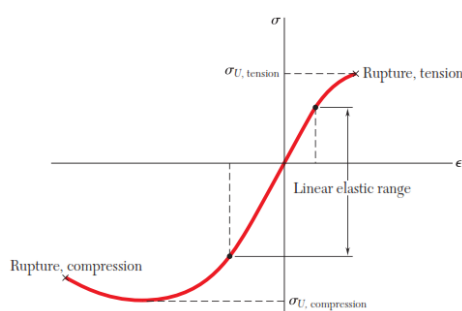
البته لازم به ذکر است که در حقیقت، نمونه در مرحله اخیر دچار کاهش سختی نمی‌شود و شیب نمودار پس از رسیدن به مقاومت نهایی نیز تا لحظه گسیختگی همچنان مثبت است. با توجه به کاهش قطر نمونه در مرحله گلوبی شدن، تنش حقیقی، از تقسیم نیرو بر سطح مقطع کاهش یافته به دست می‌آید. بنابراین، منحنی پس از ورود به مرحله سخت شدگی مجدد، تا نقطه‌ای که تنش به  $\sigma_f$  برسد ادامه می‌یابد. در مسائل مهندسی، منحنی حقیقی به کار نمی‌رود و از همان تنشی که از تقسیم نیرو بر سطح مقطع اولیه به دست آمده است، استفاده می‌شود.



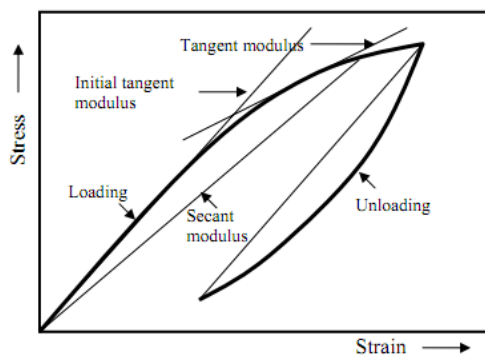
در برخی از مصالح انعطاف‌پذیر، ناحیه تسلیم شدن وجود ندارد و یا قابل تشخیص نیست. روش معمول برای تعیین تنش تسلیم در این قبیل موارد، روش جابه‌جایی مبدأ یا افست (Offset Method) است. در این روش، چنانچه در شکل مقابل مشاهده می‌شود، بر این اساس استوار است که روی محور  $\epsilon$  به اندازه  $0.002$  (0.2%) جدا کرده و از آن نقطه (A)، خطی به موازات مماس بر نمودار در مبدأ ترسیم می‌شود؛ این خط، نمودار را در نقطه B قطع می‌کند. تنش نظیر این نقطه را تنش تسلیم  $\sigma_y$  در نظر می‌گیرند.



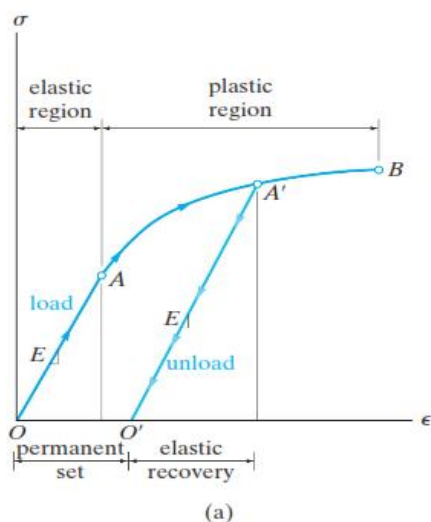
**نمودار تنش-تغییر فرم نسبی برای مصالح ترد:** این نوع از مصالح، همانند چدن، سنگ، بتن، آجر، شیشه و ...، موادی هستند که قبل از شکست، تغییر شکل قابل ملاحظه‌ای از خود نشان نمی‌دهند و گسیختگی آن‌ها به صورت ناگهانی است. در شکل رو به رو، تفاوت نحوه گسیختگی مصالح نرم (Ductile) و ترد (Brittle) مشاهده می‌گردد. در نمودار مربوط به مصالح ترد یا شکننده، ناحیه خمیری و گلوبی شدن دیده نمی‌شود. نمودارهای تنش-تغییر فرم نسبی برای این اجسام را می‌توان براساس آزمایش تحت نیروی کششی یا فشاری به دست آورد. نمودارهای حاصل از این دو نوع آزمایش، در اکثر موارد با هم یکی نیست. به عبارت دیگر، رفتار این نوع از مصالح، تحت اثر نیروهای کششی و فشاری متفاوت است. بسیاری از این مصالح، دارای مقاومت کششی به مراتب کم‌تری نسبت به مقاومت فشاری هستند. ضریب ارتجاعی آن‌ها نیز تحت کشش و فشار با هم فرق دارد. شکل مقابل، نتایج آزمایش‌های کششی و فشاری نمونه‌های بتنی، بر روی یک نمودار تنش-تغییر فرم نسبی، نشان داده شده است.



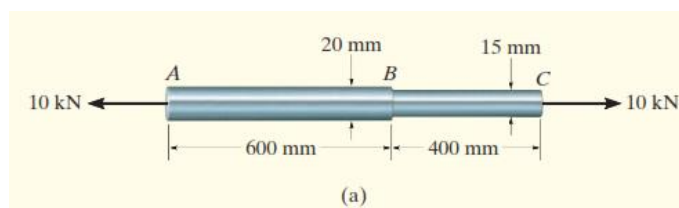
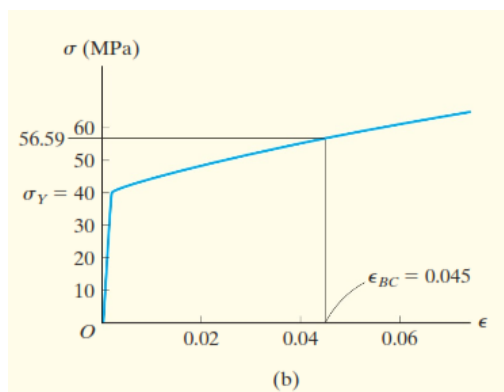
برای تعیین ضریب ارتجاعی اجسام ترد، به دلیل آن که معمولاً این اجسام ارتجاعی خطی نیستند و مستقیماً امکان تعیین این ضریب وجود ندارد، سه روش، مطابق شکل زیر مرسوم است.



یکی از این روش‌ها، انتخاب ضریب زاویه خط مماس بر منحنی در مبدأ مختصات است که به آن ضریب ارتجاعی مماسی (Initial tangent modulus) گفته می‌شود. دیگری، مماس بر منحنی در نقطه مورد نظر است که می‌تواند با استفاده از روش افست به دست آید (Tangent modulus)، و روش سوم ضریب ارتجاعی سکانتی (Secant modulus) است که از اتصال مبدأ به نقطه مورد نظر ترسیم می‌شود. در این ناحیه می‌توان رفتار اجسام را ارتجاعی فرض کرد؛ به طوری که اگر باربرداری انجام شود، ادامه منحنی روی منحنی بارگذاری به مبدأ برمی‌گردد. اما منحنی باربرداری در خارج از ناحیه ارتجاعی، به مبدأ برنمی‌گردد و در نهایت نیز تغییرشکل پس‌ماند یا دائمی (Permanent) در آن باقی می‌ماند. منحنی بارگذاری و باربرداری را می‌توان مطابق شکل زیر، با هم موازی فرض کرد.



**مثال ۱:** میله آلومینیومی مطابق شکل (a)، با مقطع دایره‌ای، تحت اثر نیروی محوری کششی 10 kN در دو انتها قرار گرفته است. اگر نمودار تنش-تغییر فرم نسبی این میله مطابق با شکل (b) باشد، ازدیاد طول تقریبی این میله را تحت اثر این نیرو محاسبه کنید. ( $E_{al} = 70 \text{ GPa}$ )



**حل:** برای محاسبه ازدیاد طول میله، نخست باید تغییر فرم نسبی آن را به دست آوریم. پس از محاسبه تنش در هر کدام از قسمت‌های میله، با استفاده از نمودار، تغییر فرم نسبی محاسبه می‌شود.

$$\sigma_{AB} = \frac{N}{A} = \frac{10(10^3) \text{ N}}{\pi(0.01 \text{ m})^2} = 31.83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N}{A} = \frac{10(10^3) \text{ N}}{\pi(0.0075 \text{ m})^2} = 56.59 \text{ MPa}$$

چون تنش در ناحیه AB از تنش حد تسلیم کم تر است، رفتار میله در این ناحیه ارتجاعی است، در نتیجه قانون هوک صادق است:

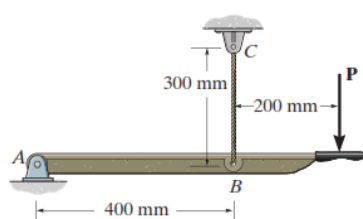
$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31.83(10^6) \text{ Pa}}{70(10^9) \text{ Pa}} = 0.0004547 \text{ mm/mm}$$

اما در طول BC از میله، تنش از حد تسلیم فراتر

رفته است و رفتار میله غیر ارتجاعی یا خمیری است؛ در نتیجه قانون هوک برای آن برقرار نیست و تغییر فرم نسبی از روی نمودار به صورت تقریبی برابر با  $\epsilon_{BC} \approx 0.045 \text{ mm/mm}$  به دست می آید. بنابراین، افزایش طول میله عبارت است از:

$$\delta = \sum \epsilon L = 0.0004547(600 \text{ mm}) + 0.0450(400 \text{ mm}) \\ = 18.3 \text{ mm}$$

### تمرین



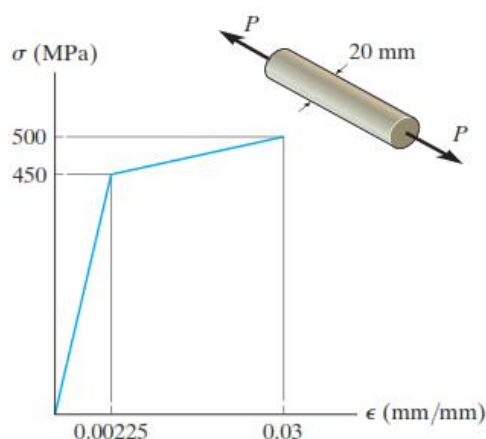
(۱) مقدار نیروی P چقدر باشد تا مفتول فولادی BC به قطر 3 mm پس از اعمال نیرو، ازدیاد طولی برابر با 0.2 mm داشته باشد؟ ( $E_{st} = 200 \text{ GPa}$ )

(۲) دو علامت دقیقاً به فاصله 250 mm از هم، روی یک میله آلومینیومی با  $E_{al} = 73 \text{ GPa}$  و مقاومت نهایی  $\sigma_u = 140 \text{ MPa}$  و به قطر 12 mm قرار دارند. اگر پس از اعمال نیرو، فاصله بین این دو علامت، 250.28 mm باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) تنش در میله؛

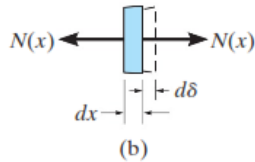
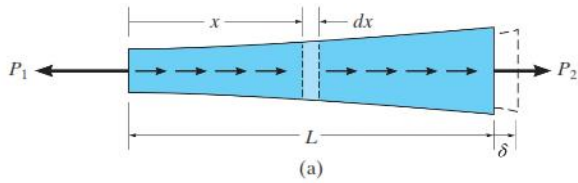
ب) ضریب اطمینان.

(۳) نمودار تنش- تغییر فرم نسبی مربوط به یک نمونه به طول 50 mm در شکل زیر نشان داده شده است. اگر یک نیروی محوری کششی  $P=150 \text{ kN}$  بر این نمونه وارد شود، تغییر شکل دائمی (Permanent) آن را محاسبه کنید.



## تغییر طول یک عضو، تحت بار محوری

یک میله منشوری به طول  $L$  سطح مقطع متغیر  $(A_x)$ ، بارگذاری  $(P_x)$  در طول عضو و مدول الاستیسیته  $(E_x)$  و نیز بارهای متمرکز  $P_1$  و  $P_2$  در دو انتها، مطابق با شکل مقابل، در نظر بگیرید. می‌خواهیم تغییر مکان هر نقطه دلخواه از این میله را به فاصله  $x$  از لبه سمت چپ آن به دست آوریم.



جزء کوچکی از آن را به طول  $dx$  در فاصله  $x$  مطابق شکل (b) جدا می‌کنیم. تنش و تغییر فرم نسبی در این المان برابر است با:

$$\sigma = \frac{N(x)}{A(x)} \text{ and } \epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

این مقادیر را در رابطه هوک ( $\sigma = E\epsilon$ ) قرار می‌دهیم:

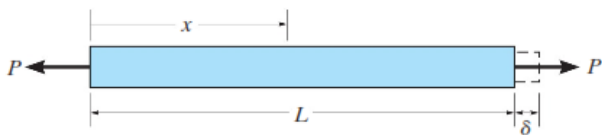
$$\frac{N(x)}{A(x)} = E(x) \left( \frac{d\delta}{dx} \right)$$

$$d\delta = \frac{N(x)dx}{A(x)E(x)}$$

در نتیجه، تغییر طول المان انتخاب شده برابر خواهد بود با:

با انتگرال گیری از طرفین این معادله تغییر طول کلی عضو، به دست می‌آید:

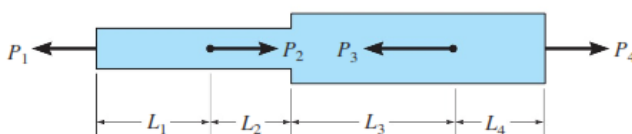
$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)dx}{A(x)E(x)}$$



در صورتی که جسم همگن باشد، مدول الاستیسیته در طول عضو ثابت خواهد بود. همچنین اگر سطح مقطع در طول عضو ثابت باشد و بار محوری فقط در دو انتها وارد شود، رابطه به شکل ساده زیر نوشته می‌شود:

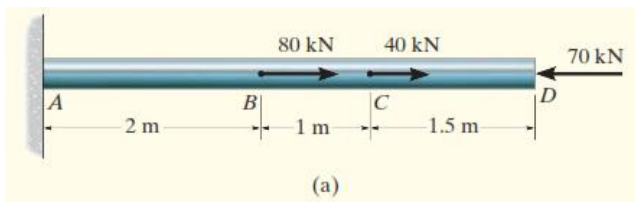
$$\delta = \frac{NL}{AE}$$

چنانچه عضو مورد نظر از چند قطعه با مقطع ثابت و همگن تشکیل شده باشد، با مقطع زدن در هر ناحیه مجزا و محاسبه تغییر طول آن قطعه و جمع زدن تغییر طول اجزاء، می‌توان به تغییر طول کلی رسید.

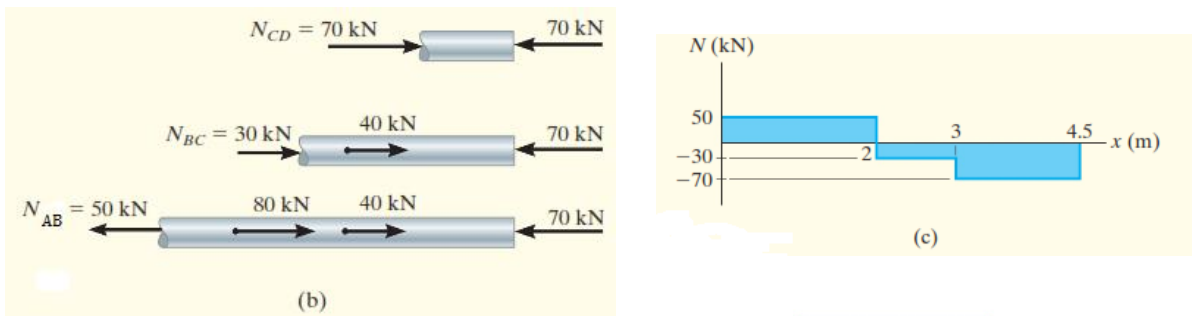


$$\delta = \sum \frac{NL}{AE}$$

**مثال ۲:** یک میله فولادی با قطر 50 mm مطابق شکل زیر تحت اثر بارگذاری قرار گرفته است. تغییر مکان نقطه D و نیز نقطه B را نسبت به C محاسبه کنید. ( $E_{st} = 200 \text{ GPa}$ )



**حل:** واکنش تکیه‌گاه A و نیروهای داخلی در مقاطع مختلف میله در شکل (b) و نمودار نیروی محوری در طول میله، در شکل (c) نشان داده شده است:



تغییر طول کل میله را در نقطه D به دست می‌آوریم:

$$\delta = \sum \frac{NL}{AE} \quad \text{با استفاده از رابطه}$$

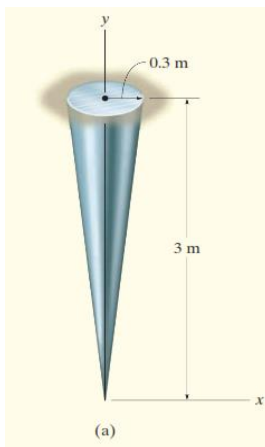
$$\delta_D = \sum \frac{NL}{AE} = \frac{[-70(10^3) \text{ N}](1.5 \text{ m})}{\pi(0.025 \text{ m})^2[200(10^9) \text{ N/m}^2]} + \frac{[-30(10^3) \text{ N}](1 \text{ m})}{\pi(0.025 \text{ m})^2[200(10^9) \text{ N/m}^2]} + \frac{[50(10^3) \text{ N}](2 \text{ m})}{\pi(0.025 \text{ m})^2[200(10^9) \text{ N/m}^2]}$$

$$\delta_D = -89.1(10^{-3}) \text{ mm}$$

علامت منفی، نشان دهنده کاهش طول میله است.

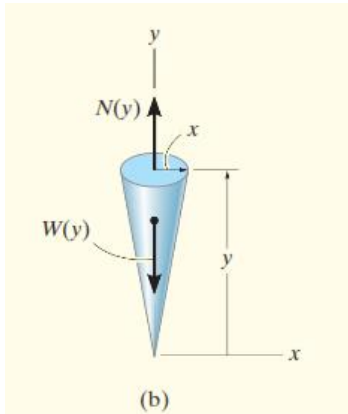
برای محاسبه تغییر مکان نقطه B نسبت به C، فقط نیروی داخلی در فاصله BC و طول این قسمت را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$\delta_{B/C} = \frac{NL}{AE} = \frac{[-30(10^3) \text{ N}](1 \text{ m})}{\pi(0.025 \text{ m})^2[200(10^9) \text{ N/m}^2]} = -76.4(10^{-3}) \text{ mm}$$



**مثال ۳:** تغییر طول میله مخروطی مطابق شکل مقابل را ناشی از وزن خودش به دست آورید.

$$E_{st} = 200 \text{ GPa} \quad ; \quad \gamma = 6 \text{ kN/m}^3$$



**حل:** نیروی محوری ناشی از وزن، در طول عضو، متغیر است. مقطعی مطابق شکل (b) به فاصله  $y$  از انتهای میله در نظر بگیرید. نیروی  $W(y)$  ناشی از وزن قطعه جدا شده در مرکز ثقل آن نشان داده شده است. از تشابه مثلث‌ها در قسمت جدا شده نسبت به کل می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{y} = \frac{0.3 \text{ m}}{3 \text{ m}}; \quad x = 0.1y$$

در نتیجه، حجم این قطعه از جسم، برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi y x^2 = \frac{\pi(0.01)}{3} y^3 = 0.01047y^3$$

می‌دانیم:  $W = \gamma V$  بنابراین، با نوشتن رابطه تعادل، خواهیم داشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad N(y) = 6(10^3)(0.01047y^3) = 62.83y^3$$

مساحت مقطع، تابعی از  $y$  است:

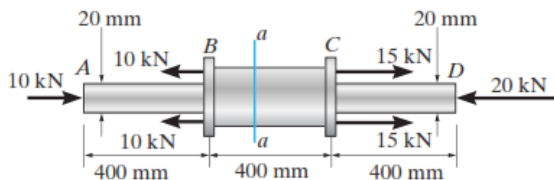
$$A(y) = \pi x^2 = 0.03142y^2$$

بنابراین، افزایش طول مخروط، در محدوده  $y = 0$  تا  $y = 3 \text{ m}$  برابر است با:

$$\delta = \int_0^L \frac{N(y) dy}{A(y) E} = \int_0^3 \frac{(62.83y^3) dy}{(0.03142y^2) 9(10^9)} = 222.2(10^{-9}) \int_0^3 y dy$$

$$= 1(10^{-6}) \text{ m} = 1 \mu\text{m}$$

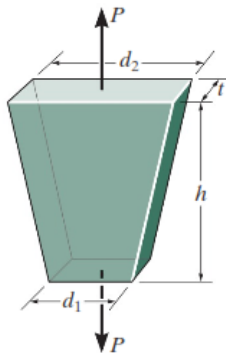
**تمرین:**

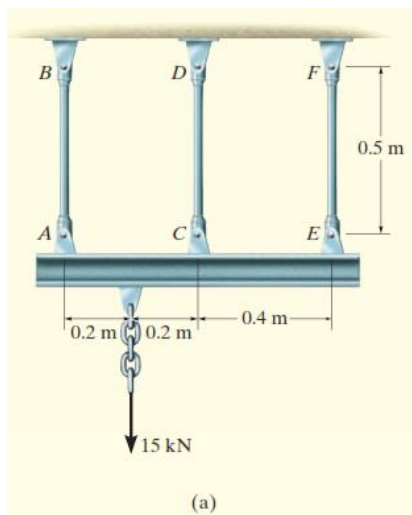


۴) اجزاء AB و CD از سازه مطابق شکل رو به‌رو، از میله صلب تشکیل شده است و قسمت میانی آن در فاصله BC با مقطع لوله‌ای نشان داده شده در شکل ساخته شده است. جابه‌جایی انتهای D را نسبت به نقطه A محاسبه کنید.

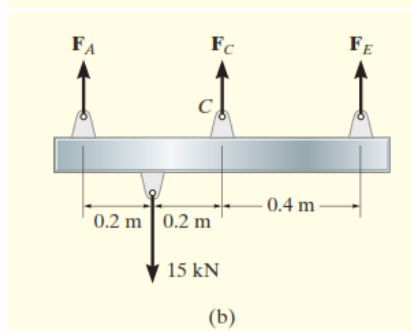
$$(E_{al} = 70 \text{ GPa})$$

۵) افزایش طول عضو مطابق شکل را محاسبه کنید.

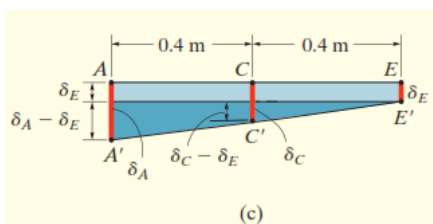




(a)



(b)



(c)

**مثال ۴:** تیر صلب مطابق شکل (a) توسط سه میله نگهداشته شده است. اگر سطح مقطع میله‌های AB و EF برابر با  $50 \text{ mm}^2$  و سطح مقطع میله CD مساوی با  $30 \text{ mm}^2$  باشد، نیروی وارد بر هر کدام از میله‌ها را محاسبه کنید.

**حل:** نمودار جسم آزاد تیر صلب در شکل (b) نشان داده شده است. معادلات تعادل نیروها و لنگر را به شرح زیر می‌توان نوشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_A + F_C + F_E - 15 \text{ kN} = 0 \quad (1)$$

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad -F_A(0.4 \text{ m}) + 15 \text{ kN}(0.2 \text{ m}) + F_E(0.4 \text{ m}) = 0 \quad (2)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سه نیروی مجهول در معادلات تعادل ظاهر می‌شود که با این دو معادله به تنهایی، قابل محاسبه نیست. بنابراین، علاوه بر این معادلات، به یک معادله دیگر نیاز داریم. این معادله می‌تواند رابطه سازگاری تغییر شکل‌ها باشد. با استفاده از تشابه مثلث‌ها در شکل (c) می‌توان نوشت:

$$\frac{\delta_A - \delta_E}{0.8 \text{ m}} = \frac{\delta_C - \delta_E}{0.4 \text{ m}}$$

$$\delta_C = \frac{1}{2} \delta_A + \frac{1}{2} \delta_E$$

تغییر طول هر کدام از میله‌ها را از رابطه مربوطه در معادله فوق قرار می‌دهیم:

$$\frac{F_C L}{(30 \text{ mm}^2) E_{st}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{F_A L}{(50 \text{ mm}^2) E_{st}} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{F_E L}{(50 \text{ mm}^2) E_{st}} \right]$$

$$F_C = 0.3F_A + 0.3F_E \quad (3)$$

از حل این سه معادله، سه مجهول نیروهای داخلی در میله‌ها به دست خواهد آمد:

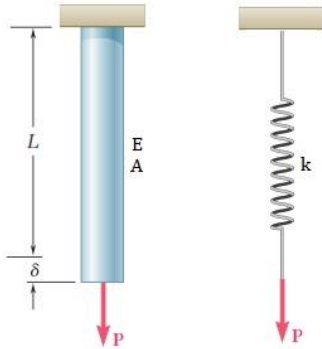
$$F_A = 9.52 \text{ kN}$$

$$F_C = 3.46 \text{ kN}$$

$$F_E = 2.02 \text{ kN}$$

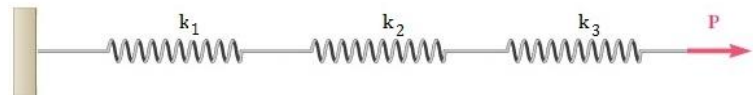
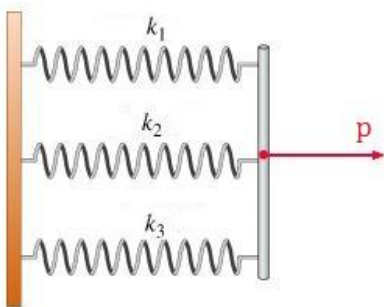


### شبیه‌سازی تغییر طول میله با فنر

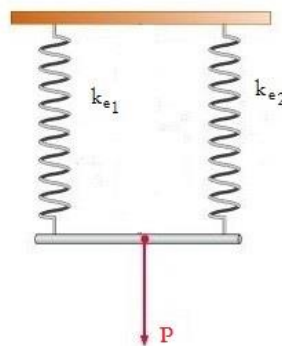
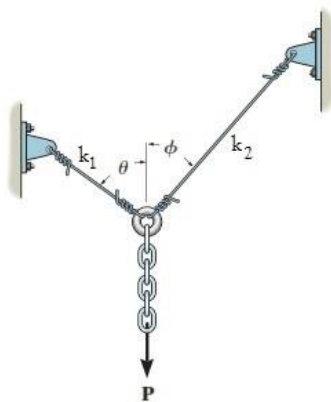


در برخی از مسائل، استفاده از فنر معادل، به جای میله مورد نظر، محاسبات را ساده‌تر می‌کند. یک میله تحت تأثیر بار محوری را می‌توانیم با یک فنر با ضریب سختی  $k = \frac{AE}{L}$  جایگزین کنیم و از روابط مربوط به آنها برای سهولت در حل مسائل استفاده کنیم.

سختی معادل فنرهای موازی را می‌توان از رابطه:  $k_e = \sum_{i=1}^n k_i$  محاسبه کرد و برای تعیین سختی معادل برای فنرهایی که به صورت سری به دنبال هم متصل شده‌اند رابطه:  $\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$  را به کار برد.



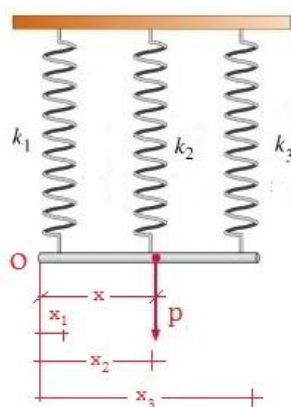
در صورتی که راستای میله‌ها با راستای نیرو یکسان نباشد، می‌توان مطابق شکل زیر، ابتدا باید سیستم فنرهای موازی معادل با سازه اصلی را جایگزین کرد، سپس قوانین مربوط به فنرها را به کار برد.



$$k_{e1} = k_1 \cos^2 \theta$$

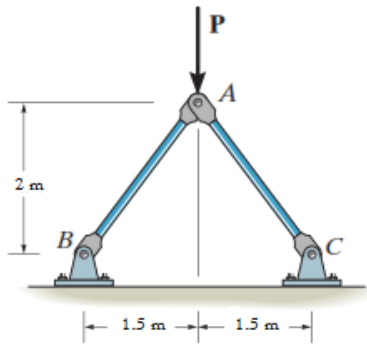
$$k_{e2} = k_2 \cos^2 \phi$$

**مرکز سختی فنرهای موازی:** برای یک سیستم فنرهای موازی که میله صلب افقی را مطابق با شکل، نگهداری می‌کنند، شرط



آن که میله صلب بعد از اعمال نیرو نیز همچنان افقی باقی بماند، آن است که نیروی خارجی بر مرکز سختی فنرها اثر کند؛ موقعیت مرکز سختی فنرها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i}{\sum_{i=1}^n k_i}$$



**مثال ۵:** سازه مطابق شکل، از دو میله فولادی با سطح مقطع  $1200 \text{ mm}^2$  ساخته شده است. مقدار نیروی P چقدر باشد، تا نقطه A به اندازه  $2 \text{ mm}$  به سمت پایین حرکت کند؟  $E_{st} = 200 \text{ GPa}$

**حل:** می توانیم سازه مورد نظر را به صورت دو فنر موازی، مانند شکل زیر فرض کنیم. سختی معادل هریک از این فنرها برابر است با:

$$k_{e1} = k_{e2} = k \cos^2 \theta$$

$$k = \frac{AE}{L} \quad ; \quad L = \sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5 \text{ m}$$

$$k = \frac{1200 \times 200 \times 10^3}{2.5 \times 10^3} = 96000 \text{ N/mm}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1.5}{2} \right) = 36.87^\circ$$

$$k_{e1} = k_{e2} = 96000 \cos^2 36.87 = 61439.84 \text{ N/mm}$$

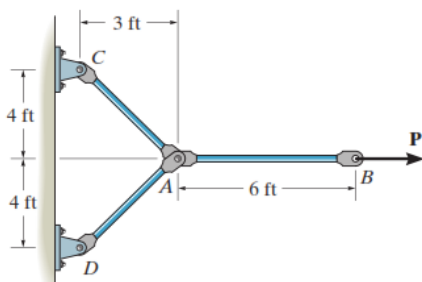
این دو فنر موازی را می توان با یک فنر معادل جایگزین کرد. سختی فنر معادل برابر است با:

$$k_e = k_{e1} + k_{e2} = 2 \times 61439.84 = 122879.68 \text{ N/mm}$$

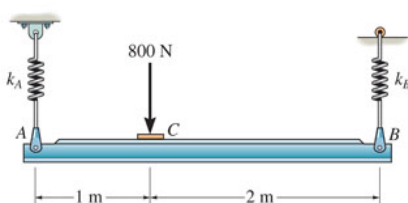
نیرویی که می تواند تغییر مکان  $2 \text{ mm}$  را در این فنر ایجاد کند، برابر است با:

$$P = k_e \delta = 122879.68 \times 2 = 245759.36 \text{ N} = 245.76 \text{ kN}$$

**تمرین:**



(۶) سازه مطابق شکل مقابل، از سه میله فولادی که با اتصال مفصلی به هم متصل شده اند، ساخته شده است. اگر قطر هر کدام از میله ها  $1 \frac{1}{4} \text{ in}$  باشد، جابه جایی افقی نقطه B را تحت اثر نیروی  $P = 60 \text{ kip}$  محاسبه کنید.



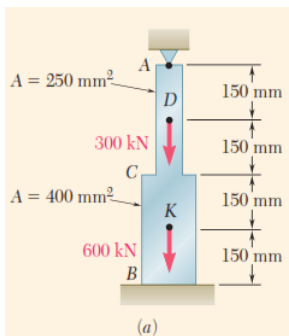
(۷) در تیر مطابق شکل رو به رو، نسبت  $\frac{k_A}{k_B}$  را طوری تعیین کنید که پس از اعمال نیرو، تیر همچنان افقی باقی بماند.

## مسائل نامعین استاتیکی (Statically Indeterminate Problems)

در برخی از مسائل نمی‌توان واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی را فقط با نوشتن معادلات تعادل، تعیین کرد. این نوع از مسائل را «نامعین استاتیکی» می‌نامند و برای تحلیل آن‌ها باید از روابط سازگاری تغییر شکل‌ها علاوه بر معادلات تعادل استفاده کرد. در ادامه، مسائلی مطرح شده است که تغییر مکان کلی میله، به دلیل گیرداری یا عدم امکان حرکت تکیه‌گاه‌ها، برابر با صفر است، اما هر نقطه از آن عضو، نسبت به موقعیت پیش از بارگذاری جابه‌جا شده است.

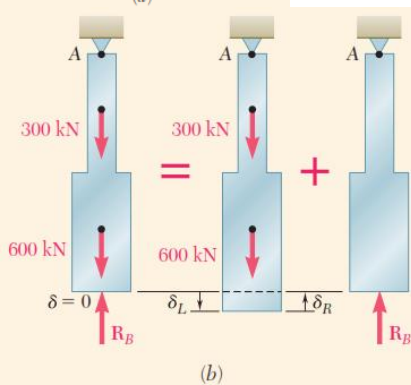
یکی از راه‌کارهای حل چنین مسائلی، استفاده از روش جمع آثار یا برهم‌نهی (Superposition Method) می‌باشد. در این روش، یکی از واکنش‌های تکیه‌گاهی مجهول را حذف می‌کنیم و به جای آن، بار مجهولی را بر عضو در نظر می‌گیریم. تغییر شکل‌های حاصل از بارهای داده شده و بار مجهول جایگزین تکیه‌گاه را به‌طور جداگانه در نظر گرفته، و با ترکیب این تغییر شکل‌ها به نتیجه لازم می‌رسیم.

**مثال ۶:** در شکل مقابل، واکنش‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و B را تعیین کنید.



**حل:** همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به بارگذاری، دو واکنش تکیه‌گاهی مجهول در نقاط A و B وجود دارد که با نوشتن رابطه تعادل، به تنهایی، قابل محاسبه نیست. واکنش تکیه‌گاه B را حذف می‌کنیم و اثر آن  $R_B$  را به عنوان بار مجهول در نظر می‌گیریم. چون باید تغییر شکل کلی میله صفر باشد، لازم است تا مجموع تغییر شکل‌های حاصل از بارهای داده شده در مسئله و بار مجهول تکیه‌گاهی برابر با صفر باشد.

میله را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم و تغییر شکل آن را ناشی از بارهای وارده محاسبه می‌کنیم.



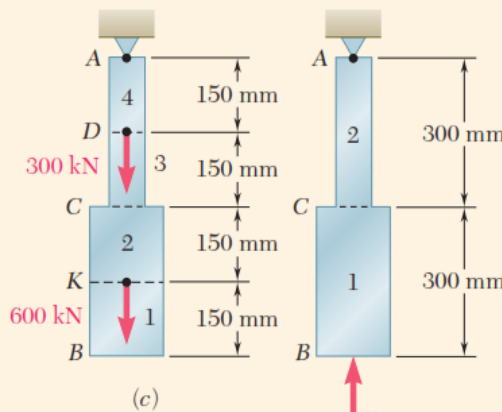
$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\delta_L = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left( 0 + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{900 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \frac{0.150 \text{ m}}{E}$$

$$\delta_L = \frac{1.125 \times 10^9}{E} \quad (1)$$

اکنون با در نظر گرفتن تغییر شکل ناشی از واکنش  $R_B$  میله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. با توجه به شکل (d) خواهیم داشت:



$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.300 \text{ m}$$

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} \quad (2)$$

می‌دانیم که تغییر شکل کلی میله باید برابر با صفر باشد:

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

از نتایج (1) و (2) داریم:

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

واکنش تکیه‌گاه A نیز از نمودار آزاد میله که در شکل (e) نشان داده شده است، به دست می‌آید. با نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم، خواهیم داشت:

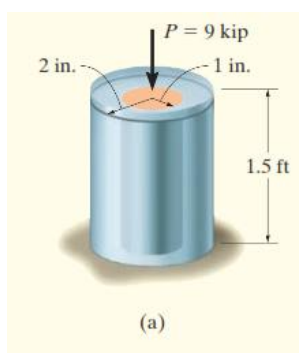
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

حال که واکنش تکیه‌گاه‌ها محاسبه شد، به راحتی می‌توان تنش‌ها و تغییرفرم‌های نسبی را در هر قسمت از میله به دست آورد.

### میله‌های مرکب در کشش و فشار

میله‌های مرکب، قطعاتی هستند که از دو یا چند میله با جنس‌های مختلف که پهلوی یا داخل هم قرار گرفته‌اند، تشکیل شده است. ستون‌های بتن‌آرمه و کامپوزیت‌ها (Composites) از این جمله‌اند. اتصال این اعضاء به یکدیگر، طوری است که با هم تغییر فرم می‌دهند و نسبت به هم جابه‌جایی و حرکت نسبی ندارند. تغییر طول این میله‌ها با هم برابر است اما تنش‌های ایجاد شده در آن‌ها، به دلیل سختی مختلف، متفاوت است. در این نوع مسائل، با مساوی هم قرار دادن تغییر طول اعضاء با هم، نیروهای داخلی و تنش‌ها در هر کدام از اجزاء به دست می‌آید.



**مثال ۷:** مقطع مرکب مطابق شکل (a)، از یک هسته برنجی با لایه خارجی آلومینیومی تشکیل شده است. نیروی فشاری  $P=9 \text{ kip}$  بر یک صفحه صلب که روی آن قرار گرفته است، وارد می‌شود. تنش عمودی متوسط را در هسته و لایه بیرونی آن محاسبه کنید.

$$E_{br} = 15000 \text{ ksi} \quad ; \quad E_{Al} = 10000 \text{ ksi}$$

**حل:** نمودار جسم آزاد برای این قطعه مرکب، در شکل (b) نشان داده شده است. چون دو نیروی مجهول مربوط به واکنش‌های تکیه‌گاهی در برنج و آلومینیوم وجود دارد، این یک مسئله نامعین استاتیکی است. معادله تعادل نیروها در امتداد قائم را می‌نویسیم:

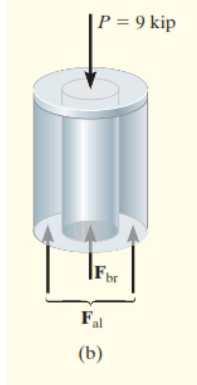
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -9 \text{ kip} + F_{al} + F_{br} = 0 \quad (1)$$

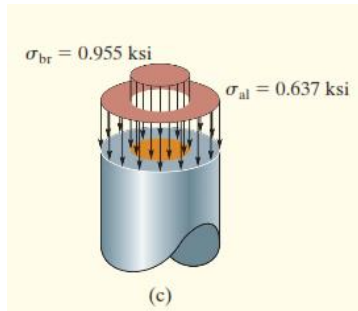
صفحه صلب واقع در لبه فوقانی، باعث می‌شود تا جابه‌جایی هر دو قسمت یکسان باشد؛ بنابراین:

$$\delta_{al} = \delta_{br}$$

رابطه تغییر طول، برای هر کدام از دو بخش، نوشته شده با هم برابر قرار داده می‌شود:

$$\frac{F_{al}L}{A_{al}E_{al}} = \frac{F_{br}L}{A_{br}E_{br}}$$





$$F_{al} = F_{br} \left( \frac{A_{al}}{A_{br}} \right) \left( \frac{E_{al}}{E_{br}} \right)$$

$$F_{al} = F_{br} \left[ \frac{\pi[(2 \text{ in.})^2 - (1 \text{ in.})^2]}{\pi(1 \text{ in.})^2} \right] \left[ \frac{10(10^3) \text{ ksi}}{15(10^3) \text{ ksi}} \right]$$

$$F_{al} = 2F_{br} \quad (2)$$

از روابط (1) و (2) نتیجه می‌گیریم:

$$F_{al} = 6 \text{ kip} \quad F_{br} = 3 \text{ kip}$$

تنش فشاری متوسط نیز در قسمت‌های آلومینیومی و برنجی برابرند با:

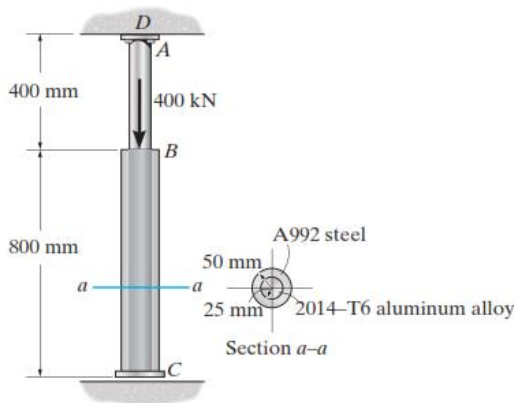
$$\sigma_{al} = \frac{6 \text{ kip}}{\pi[(2 \text{ in.})^2 - (1 \text{ in.})^2]} = 0.637 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{br} = \frac{3 \text{ kip}}{\pi(1 \text{ in.})^2} = 0.955 \text{ ksi}$$

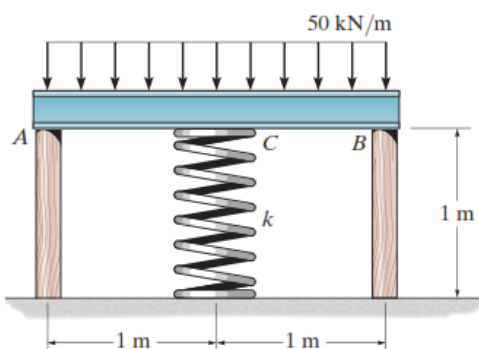
با توجه به شکل (C) معلوم می‌شود که هسته برنجی که دارای مدول الاستیسیتهٔ بیشتر، در نتیجه سختی بیش‌تری است، تحت اثر تنش بزرگ‌تری قرار می‌گیرد.

### تمرین:

۸) میلهٔ آلومینیومی مطابق شکل، در طول BC با روکش فولادی پوشیده شده است. وقتی که هنوز هیچ نیرویی بر این میله وارد نشده است، فاصلهٔ بین انتهای میله و سطح تکیه‌گاه زیر آن، مساوی 0.5 mm است. نیروی واکنش تکیه‌گاهی را وقتی که نیروی 400 kN در نقطهٔ B وارد می‌شود، محاسبه کنید.

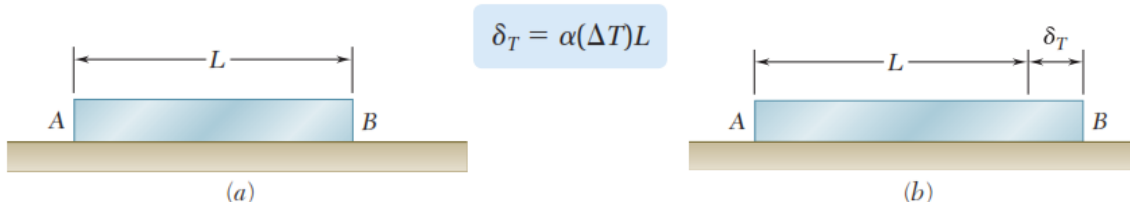


۹) تیر صلب مطابق شکل زیر، توسط دو پایهٔ چوبی و یک فنر نگهداشته شده است. سطح مقطع هریک از این پایه‌ها  $600 \text{ mm}^2$  و سختی فنر نیز برابر است با  $k = 2 \text{ MN/m}$ . طول اولیهٔ این فنر، پیش از بارگذاری، برابر با 1.02 m بوده است. مطلوب است محاسبهٔ جابه‌جایی نقاط A و B پس از اعمال بار گستردهٔ یکنواخت.



### تنش و تغییر فرم نسبی حرارتی (Thermal Stress and Strain)

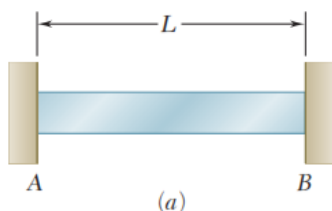
میله همگن A با مقطع عرضی یکنواخت و به طول L را روی یک سطح صاف افقی و بدون اصطکاک، مطابق شکل (a)، در نظر بگیرید. اگر دمای میله به اندازه  $\Delta T$  افزایش یابد، طول آن به اندازه  $\delta_T$  افزوده می‌شود؛ به طوری که:



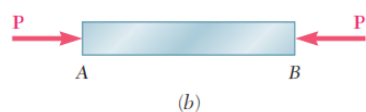
$\alpha$  مشخصه‌ای از ماده، به نام «ضریب انبساط حرارتی» است و بر حسب  $\frac{1}{^\circ\text{C}}$  یا  $\frac{1}{^\circ\text{F}}$  بیان می‌شود. تغییر شکل  $\delta_T$  با تغییر فرم نسبی  $\epsilon_T = \delta_T / L$  متناسب است. بنابراین، با توجه به رابطه فوق، می‌توان نوشت:

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

$\epsilon_T$ ، تغییر «فرم نسبی حرارتی» نامیده می‌شود. در این حالت، هیچ تنشی وجود ندارد و ازدیاد طول میله آزادانه انجام می‌گیرد. اکنون فرض می‌کنیم که میله بین دو تکیه‌گاه ثابت، به فاصله L از هم، قرار دارد. اگر دمای میله را به اندازه  $\Delta T$  افزایش دهیم، قیدهای تکیه‌گاهی مانع از افزایش طول آن می‌شوند؛ بنابراین،  $\delta_T = 0$  خواهد بود. از آنجا که میله دارای مقطع عرضی یکنواخت است، تغییر فرم نسبی در هر نقطه، برابر است با:  $\epsilon_T = \delta_T / L$  که مساوی با صفر است. پس از افزایش دما، میله که امکان افزایش طول ندارد، نیروهایی به تکیه‌گاه‌ها وارد می‌کند و موجب ایجاد واکنش‌های تکیه‌گاهی مساوی و مختلف‌الجهت P می‌شود:



برای تعیین تنش ناشی از تغییر دمای  $\Delta T$  در این حالت، با یک مسئله نامعین استاتیکی رو به‌رو هستیم. بنابراین، ابتدا باید واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه شود. همان‌طور که پیش از این نیز در حل این قبیل مسائل گفته شد، تکیه‌گاه B را حذف می‌کنیم و نیروی واکنش تکیه‌گاه P، را به جای آن در نظر می‌گیریم. افزایش طول ناشی از افزایش دما، باید با کاهش طول حاصل از نیروی وارد بر آن خنثی شود. با استفاده از اصل جمع آثار، می‌توان نوشت:



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

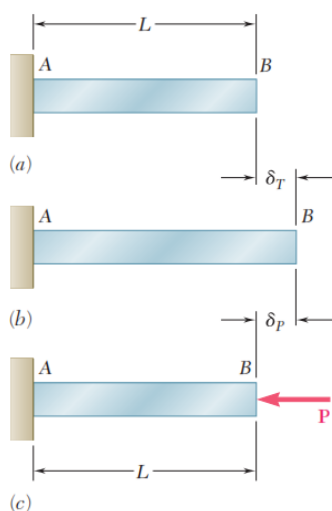
$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

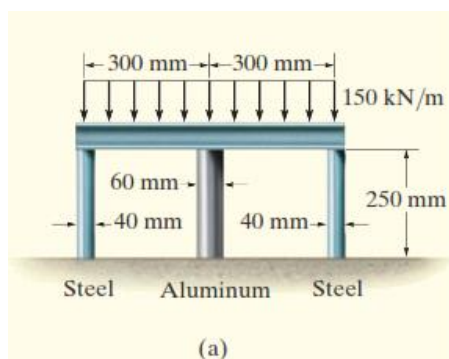
با ساده کردن رابطه فوق، نیروی واکنش تکیه‌گاه به دست می‌آید:

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

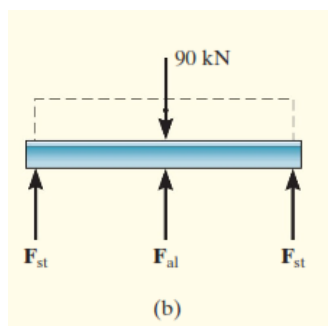
در نتیجه، تنش حاصل از افزایش دمای  $\Delta T$  برابر است با:

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

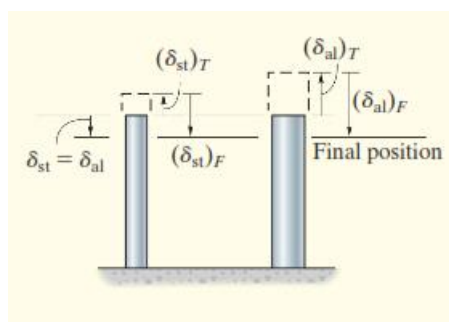




(a)



(b)



**مثال ۸:** تیر صلب نشان داده شده در شکل (a) بر روی سه پایه فولادی و آلومینیومی، به طول اولیه 250 mm متصل شده است. دمای محیط نیز  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  است. اگر دما به  $T_2 = 80^\circ\text{C}$  افزایش یابد و بار گسترده 150 kN/m بر تیر وارد شود، نیروهای ایجاد شده در هریک از پایه‌ها را محاسبه کنید.  $\alpha_{Al} = 23(10^{-6})/^\circ\text{C}$ ؛  $\alpha_{st} = 12(10^{-6})/^\circ\text{C}$

**حل:** ابتدا نمودار آزاد جسم را ترسیم می‌کنیم و رابطه تعادل نیروها را می‌نویسیم:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2F_{st} + F_{al} - 90(10^3) \text{ N} = 0 \quad (1)$$

تحت اثر بار وارده، تقارن هندسی و مصالح، نقطه فوقانی هر سه پایه، به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند. بنابراین رابطه سازگاری تغییر شکل‌ها برقرار است:

$$(+\downarrow) \quad \delta_{st} = \delta_{al} \quad (2)$$

تغییر طول هریک از پایه‌ها، با توجه به کاهش طول ناشی از نیروی فشاری وارده و ازدیاد طول حاصل از افزایش دما، مطابق شکل روبه‌رو، عبارت است از:

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad \delta_{st} &= -(\delta_{st})_T + (\delta_{st})_F \\ (+\downarrow) \quad \delta_{al} &= -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F \end{aligned}$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطه (2)، خواهیم داشت:

$$-(\delta_{st})_T + (\delta_{st})_F = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

و تغییر طول ناشی از تغییر دما از رابطه

$$\delta = \frac{NL}{AE}$$

تغییر طول حاصل از نیروی N از رابطه

به دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} -[12(10^{-6})/^\circ\text{C}](80^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})(0.250 \text{ m}) + \frac{F_{st}(0.250 \text{ m})}{\pi(0.020 \text{ m})^2 [200(10^9) \text{ N/m}^2]} \\ = -[23(10^{-6})/^\circ\text{C}](80^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})(0.250 \text{ m}) + \frac{F_{al}(0.250 \text{ m})}{\pi(0.030 \text{ m})^2 [73.1(10^9) \text{ N/m}^2]} \end{aligned}$$

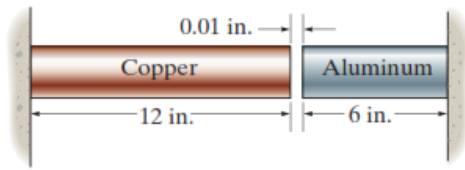
$$F_{st} = 1.216F_{al} - 165.9(10^3) \quad (3)$$

از حل معادلات (1) و (3) نتیجه می‌شود:

$$F_{st} = -16.4 \text{ kN} \quad F_{al} = 123 \text{ kN}$$

علامت منفی برای  $F_{st}$  به این معنی است که جهت آن مخالف جهتی است که در شکل (b) فرض شده است. یعنی میله‌های فولادی تحت کشش و میله آلومینیومی تحت فشار قرار دارد.

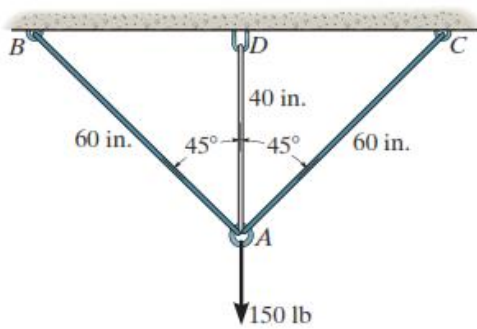
## تمرین



۱۰ دو میله آلومینیومی و مسی با مقطع دایره‌ای به قطر 1.25 in به فاصله 0.1 in از هم، در دمای  $T_1 = 60^{\circ}\text{F}$  مطابق شکل به تکیه‌گاه‌های صلب متصل شده‌اند. در صورتی که دمای محیط به  $T_2 = 400^{\circ}\text{F}$  افزایش یابد، تنش عمودی متوسط در هر یک از میله‌ها و نیز، طول میله آلومینیومی را محاسبه کنید.

$$E_{cu} = 15(10^3)ksi \quad ; \quad E_{al} = 10(10^3)ksi \quad ; \quad \alpha_{cu} = 9.4(10^{-6})/^{\circ}\text{F} \quad ; \quad \alpha_{al} = 13(10^{-6})/^{\circ}\text{F}$$

$$(\sigma_y)_{al} = 40 ksi \quad ; \quad (\sigma_y)_{cu} = 50 ksi$$



۱۱ در سازه مطابق شکل، مفتول‌های AC و AB از فولاد و میله AD از مس ساخته شده است. طول میله‌ها پیش از اعمال بار، در شکل مشخص شده است. اگر دمای محیط به اندازه  $80^{\circ}\text{F}$  افزایش یابد، نیروی داخلی اعضاء را برای تحمل بار 150 lb محاسبه کنید. سطح مقطع میله‌ها برابر است با:  $0.0123 \text{ in}^2$ .

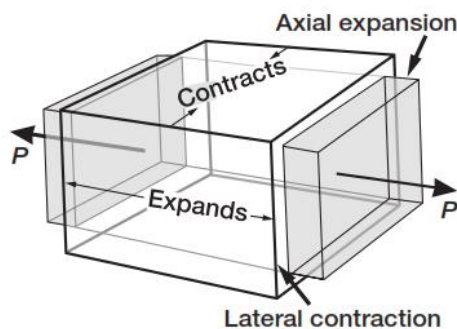
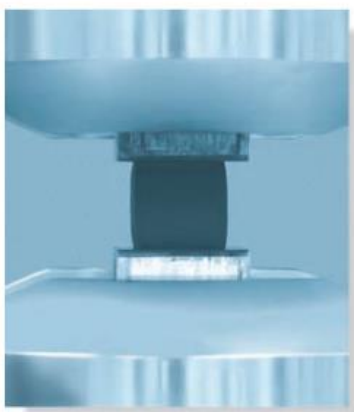
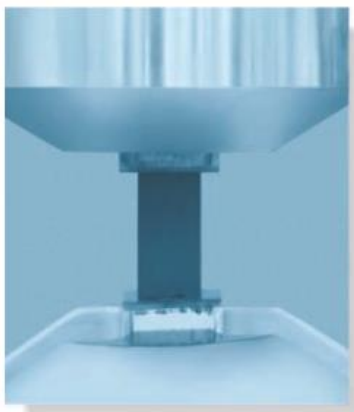
$$\alpha_{cu} = 9.4(10^{-6})/^{\circ}\text{F} \quad ; \quad \alpha_{st} = 8(10^{-6})/^{\circ}\text{F}$$

$$E_{cu} = 15(10^3)ksi \quad ; \quad E_{st} = 29(10^3)ksi$$



## نسبت پواسون (Poisson's Ratio)

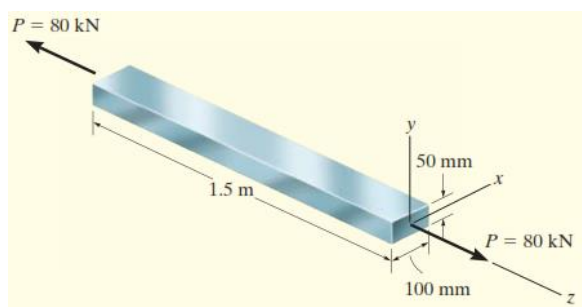
افزایش طول یک عضو تحت اثر نیروی محوری کششی، همواره با انقباض جانبی عمود بر امتداد نیرو همراه است و کاهش طول آن تحت بار فشاری، انبساط جانبی را به دنبال دارد. نسبت تغییر فرم نسبی جانبی به تغییر فرم محوری یک عضو، نسبت پواسون نامیده شده و با حرف یونانی  $\nu$  (نو) نشان داده می‌شود. این نام‌گذاری به افتخار  $\text{Siméon Denis Poisson}$  (1781-1840) ریاضی‌دان فرانسوی، انجام شده است.



اگر تغییر فرم نسبی طولی را با  $\epsilon_{\text{long}}$  و تغییر فرم نسبی جانبی را با  $\epsilon_{\text{lat}}$  نشان دهیم، نسبت پواسون را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\nu = - \frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}}$$

علامت منفی در رابطه فوق، به این دلیل است که همواره علامت تغییر فرم نسبی جانبی و محوری مخالف یکدیگر است. اما همیشه قدر مطلق آن، که مقداری است بین صفر و نیم، در نظر گرفته می‌شود. برای چوب پنبه مقدار آن برابر با صفر و مواد تراکم‌ناپذیری مثل لاستیک، برابر با 0.5 است. اما مقدار معمول آن برای مصالح ساختمانی، بین 0.25 تا 0.355 به دست آمده است.



**مثال ۹:** میله فولادی به طول 1.5 m مطابق شکل روبه‌رو، تحت اثر بار محوری  $P=80 \text{ kN}$  قرار گرفته است. تغییر طول میله و تغییر ابعاد مقطع آن را محاسبه کنید. رفتار میله را در محدوده ارتجاعی خطی فرض کنید.

$$E_{\text{st}} = 200 \text{ GPa.}$$

$$\nu_{\text{st}} = 0.32$$

**حل:** تنش عمودی در میله برابر است با:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{80(10^3) \text{ N}}{(0.1 \text{ m})(0.05 \text{ m})} = 16.0(10^6) \text{ Pa}$$

تغییر فرم نسبی در امتداد Z نیز برابر است با:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_{\text{st}}} = \frac{16.0(10^6) \text{ Pa}}{200(10^9) \text{ Pa}} = 80(10^{-6}) \text{ mm/mm}$$

بنابراین تغییر طول میله عبارت است از:

$$\delta_z = \epsilon_z L_z = [80(10^{-6})](1.5 \text{ m}) = 120 \mu\text{m}$$

تغییر فرم نسبی جانبی میله در دو امتداد X و Y برابر است با:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu_{st} \epsilon_z = -0.32[80(10^{-6})] = -25.6 \mu\text{m/m}$$

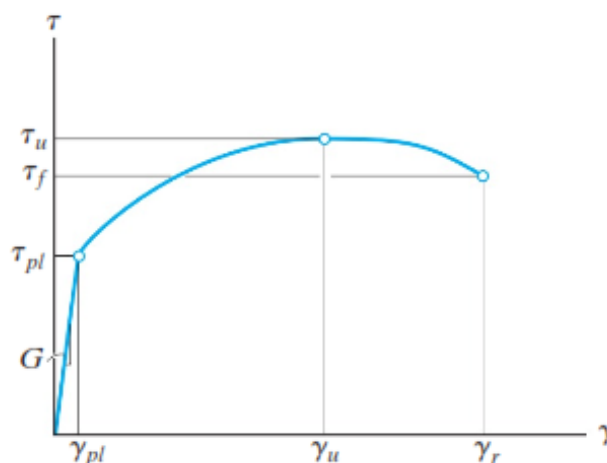
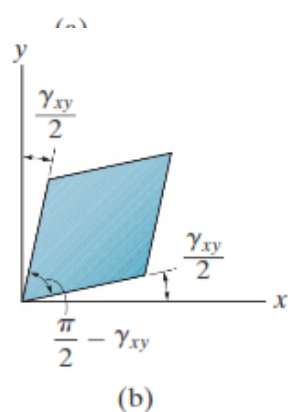
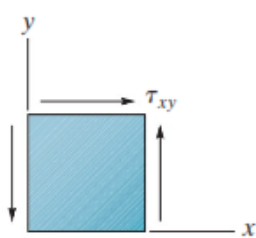
بدین ترتیب، تغییر ابعاد مقطع نیز محاسبه می‌شود:

$$\delta_x = \epsilon_x L_x = -[25.6(10^{-6})](0.1 \text{ m}) = -2.56 \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L_y = -[25.6(10^{-6})](0.05 \text{ m}) = -1.28 \mu\text{m}$$

### نمودار تنش - تغییر فرم نسبی برشی (The Shear Stress-Strain Diagram)

شکل (a) یک المان کوچک همگن و ایزوتروپ را تحت اثر برش خالص و شکل (b)، تغییر فرم نسبی برشی تحت اثر تنش‌های حاصل از آن نشان می‌دهد. نمودار تنش-تغییر فرم نسبی برشی برای مصالح انعطاف پذیر، مشابه نمودار تنش-تغییر فرم نسبی عمودی برای این نوع مصالح می‌تواند به شکل زیر ترسیم شود:

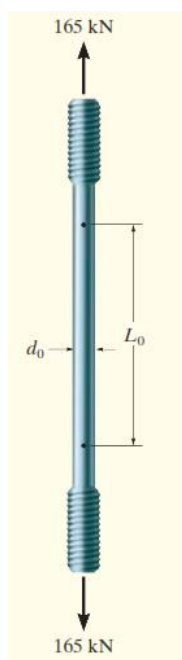


از لحظه شروع بارگذاری تا رسیدن به تنش برشی حد تناسب  $\tau_{pl}$ ، رفتار مصالح در محدوده ارتجاعی خطی قرار دارد و پس از آن تا رسیدن به تنش برشی نهایی  $\tau_u$  وارد ناحیه خمیری می‌شود و در نهایت هم در لحظه گسیختگی تنش برشی برابر با  $\tau_f$  خواهد بود. در محدوده ارتجاعی خطی رابطه هوک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tau = G\gamma$$

در این رابطه،  $G$  مدول الاستیسیته برشی نامیده می‌شود و برابر است با شیب نمودار تنش-تغییر فرم نسبی برشی. واحد آن نیز همانند تنش برشی، بر حسب Mpa یا psi بیان می‌شود. سه مشخصه ثابت مصالح ( $E$ ،  $G$  و  $\nu$ )، با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



**مثال ۱۰:** یک نمونه آلومینیومی به قطر  $d_0 = 25 \text{ mm}$  در شکل (a) نشان داده شده است، در یک آزمایش کشش، طول اندازه‌گیری آن  $L_0 = 250 \text{ mm}$ ، تحت اثر نیروی محوری  $165 \text{ kN}$ ، به اندازه  $1.2 \text{ mm}$  افزایش یافته است. مدول الاستیسیته این نمونه و تغییر قطر آن را محاسبه کنید.

$$G_{al} = 26 \text{ GPa} \quad \sigma_y = 440 \text{ MPa}$$

**حل:**

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{165 (10^3) \text{ N}}{(\pi/4) (0.025 \text{ m})^2} = 336.1 \text{ MPa}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.20 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 0.00480 \text{ mm/mm}$$

چون تنش در میله هنوز به حد تسلیم ( $\sigma_y = 440 \text{ MPa}$ ) نرسیده است، رفتار نمونه در محدوده ارتجاعی قرار دارد؛ بنابراین رابطه هوک برقرار است و مدول الاستیسیته آن برابر است با:

$$E_{al} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{336.1 (10^6) \text{ Pa}}{0.00480} = 70.0 \text{ GPa}$$

برای محاسبه تغییر قطر نمونه، نخست لازم است نسبت پواسون را به دست آوریم:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

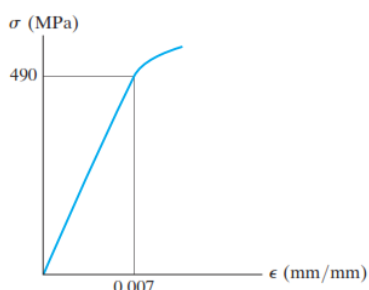
$$26 \text{ GPa} = \frac{70.0 \text{ GPa}}{2(1 + \nu)}$$

$$\nu = 0.347$$

$$0.347 = -\frac{\epsilon_{lat}}{0.00480 \text{ mm/mm}}$$

$$\delta' = (0.00166) (25 \text{ mm})$$

$$= 0.0416 \text{ mm}$$



**تمرین:** بخش ارتجاعی از نمودار تنش-تغییر فرم نسبی یک نمونه آلومینیومی به طول اندازه  $50.8 \text{ mm}$  و قطر  $12.7 \text{ mm}$  در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر نیروی کششی  $P=60 \text{ kN}$  بر این نمونه وارد شود، طول اندازه و قطر نمونه را به دست آورید.  $\nu = 0.35$

## قانون عمومی هوک (Generalized Hook's Law)

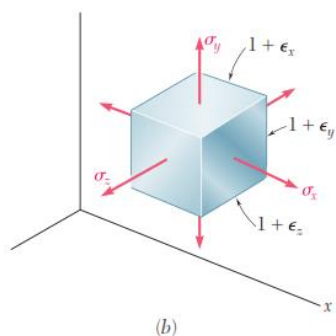
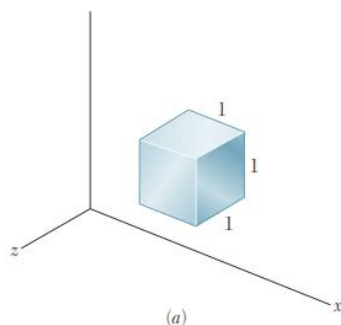
پیش از این، قانون هوک برای اعضای تحت اثر نیروی محوری تنها، با رابطه  $\sigma = E\epsilon$  بیان شد. در حالت کلی، برای اجسام همگن و ایزوتروپی که تحت اثر تنش سه محوره قرار می گیرند، قانون عمومی هوک، با روابط زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}\end{aligned}$$

نتایج حاصل از این روابط، تا وقتی که تنشها از حد تناسب فراتر نرفته باشند و تغییر شکلها کوچک باشند، صحت دارند. مقادیر مثبت، ازدیاد طول یا انبساط در هر امتداد و مقادیر منفی، کاهش طول یا انقباض را نشان می دهند. جهت مثبت تغییر زاویه نیز همان گونه که قبلاً بیان شد، تعیین می شود. در صورتی که علاوه بر تنش، تغییر درجه حرارت نیز وجود داشته باشد، به تغییر فرمهای نسبی فوق، مقدار  $\alpha\Delta T$  نیز افزوده می شود.

## اتساع و ضریب انبساطی (Dilatation and Bulk Modulus)

در این بخش، به بررسی تغییر حجم ناشی از اعمال تنشهای قائم وارد بر جزء حجم یک ماده همگن و ایزوتروپ می پردازیم. جزء کوچک نشان داده شده در شکل (a) را در نظر بگیرید. پیش از اعمال تنش، این جزء، به شکل یک مکعب با ابعاد واحد فرض شده است. تحت اثر تنشهای عمودی نشان داده شده در شکل (b)، حجم این مکعب افزایش می یابد:



$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

اگر از حاصل ضرب بی نهایت کوچکهای مرتبه دوم و سوم صرف نظر کنیم، نتیجه می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

اگر تغییر حجم المان را با  $e$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

این کمیت، تغییر حجم واحد را نشان می دهد و به آن اتساع ماده می گویند. حال اگر به جای تغییر فرمهای نسبی در رابطه فوق، از قانون عمومی هوک، مقادیر آنها را بر حسب تنش قرار دهیم، می توان نتیجه گرفت:

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

در حالت خاصی که جسم تحت فشار یکنواخت هیدرواستاتیکی  $p$  قرار دارد، هر یک از مؤلفه‌های تنش برابر با  $-p$  است؛ بنابراین رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E}p$$

با تعریف مقدار ثابت:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

رابطه به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$e = -\frac{p}{k}$$

ضریب ثابت  $k$  را ضریب انباشتگی یا مدول بالک ماده می‌گویند و همانند مدول الاستیسیته، بر حسب  $pa$  یا  $psi$  بیان می‌شوند. علامت منفی در رابطه فوق، به دلیل کاهش حجم تحت فشار هیدرواستاتیکی است. ثابت  $k$  همواره یک کمیت مثبت است؛ بنابراین مخرج کسر نیز باید مثبت باشد؛ یعنی:  $1-2\nu > 0$  یا:  $\nu < \frac{1}{2}$ . اما می‌دانیم نسبت پواسون  $\nu$ ، مقداری مثبت است، در نتیجه:

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

ماده ایده‌آلی که مقدار  $\nu$  آن مساوی صفر است، می‌تواند در یک راستا کشیده شود، بدون آن که با انقباض جانبی همراه باشد؛ از طرف دیگر، ماده ایده‌آل با  $\nu = \frac{1}{2}$  کاملاً تراکم ناپذیر است.

### حالت تنش صفحه‌ای

در المان صفحه‌ای مطابق شکل، مؤلفه‌های  $\sigma_z$ ،  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  مساوی با صفر است. این حالت، زمانی رخ می‌دهد که اولاً ضخامت در جهت  $Z$  در مقایسه با دو بعد دیگر، کم باشد؛ ثانیاً بارگذاری‌ها به موازات صفحه  $XY$  باشند و در راستای  $Z$  هیچ باری وجود نداشته باشد؛ ثالثاً اگر توزیع تنشی در امتداد  $Z$  وجود دارد، باید در راستای ضخامت بوده و در این راستا، دارای توزیع ثابت باشد. اجسام با سطح آزاد، همواره تحت تنش صفحه‌ای قرار دارند.

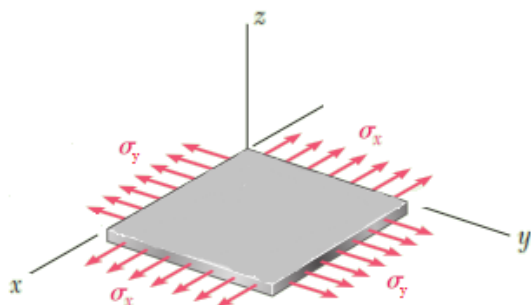
لازم به ذکر است که در این حالت، مؤلفه  $\epsilon_z$  الزاماً صفر نیست و روابط تنش-تغییر فرم نسبی (قانون هوک) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

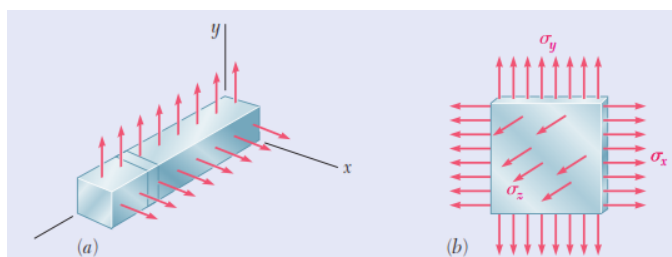
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



### حالت تغییر فرم نسبی صفحه‌ای



یک عضو منشوری طولی، با سطح مقطع یکنواخت را که تحت بارگذاری جانبی در امتداد X و Y قرار دارد، در نظر بگیرید. اگر مؤلفه‌های تغییر فرم نسبی در راستای Z برابر صفر باشد، حالت تغییر فرم نسبی صفحه‌ای بر مسئله حاکم خواهد شد. اجسام منشوری با طول بی‌نهایت، که شرایط بارگذاری در طول آنها تغییر نمی‌کند، در امتداد طولی عضو، در حالت تغییر فرم نسبی صفحه‌ای قرار می‌گیرند. روابط تنش-تغییر فرم نسبی در این حالت، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\epsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$$

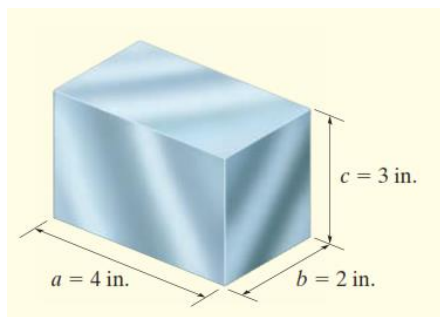
$$\epsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

$$\epsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

در جدول زیر، تنش‌ها و تغییر فرم‌های نسبی در المان تحت تنش صفحه‌ای و تغییر فرم نسبی صفحه‌ای، نشان داده شده است:

	Plane stress	Plane strain
<b>Stresses</b>	$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ $\sigma_x, \sigma_y,$ and $\tau_{xy}$ may have nonzero values	$\tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$ and $\tau_{xy}$ may have nonzero values
<b>Strains</b>	$\gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z,$ and $\gamma_{xy}$ may have nonzero values	$\epsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ $\epsilon_x, \epsilon_y,$ and $\gamma_{xy}$ may have nonzero values



**مثال ۱۱:** اگر بلوک نشان داده شده، تحت فشار یکنواخت  $p=20\text{psi}$  قرار گیرد، اتساع و تغییر طول هر لبه را تعیین کنید.

$$E=600 \text{ psi} \quad ; \quad \nu=0.45$$

**حل:** در حالی که جسم تحت فشار هیدرواستاتیکی قرار دارد، می توان نوشت:

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E}p$$

$$e = -\frac{3(1-2(0.45))}{600}(20) = -0.01$$

تغییر فرم نسبی هر لبه، با توجه به قانون هوک محاسبه می شود:

$$\epsilon = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1}{600 \text{ psi}}[-20 \text{ psi} - (0.45)(-20 \text{ psi} - 20 \text{ psi})] = -0.00333 \text{ in./in.}$$

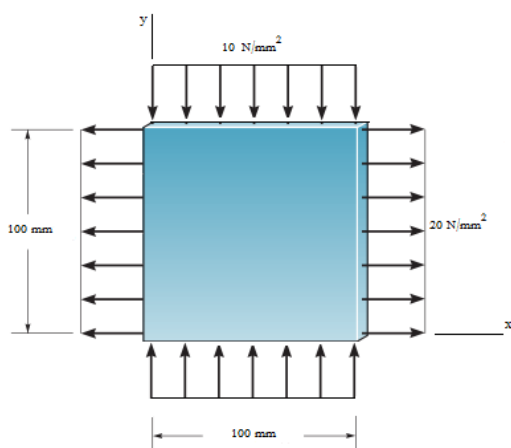
بنابراین، تغییر طول هر لبه عبارت است از:

$$\delta a = -0.00333(4 \text{ in.}) = -0.0133 \text{ in.}$$

$$\delta b = -0.00333(2 \text{ in.}) = -0.00667 \text{ in.}$$

$$\delta c = -0.00333(3 \text{ in.}) = -0.0100 \text{ in.}$$

علامت های منفی، کاهش ابعاد بلوک را نشان می دهند.



**مثال ۱۲:** صفحه مربع شکل به ابعاد 100 mm تحت اثر تنش های  $\sigma_x = 20 \text{ N/mm}^2$  و  $\sigma_y = -10 \text{ N/mm}^2$  مطابق شکل روبه رو قرار گرفته است. تغییر قطر این صفحه را پس از اعمال تنش های وارده تعیین کنید.

$$E_{st}=200 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu=0.3$$

**حل:** تغییر فرم نسبی در دو امتداد X و Y عبارتند از:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{200 \times 10^3}(20 - 0.3(-10)) = 0.000115$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{1}{200 \times 10^3}(-10 - 0.3(20)) = -0.00008$$

تغییر طول اضلاع صفحه نیز برابر است با:

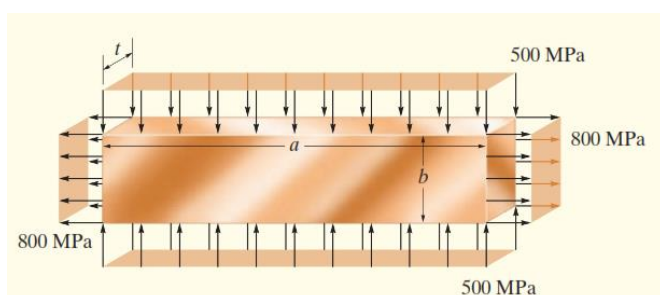
$$\begin{aligned}\Delta x &= 100\epsilon_x = 100 \times 0.000115 = 0.0115 \text{ mm} \\ \Delta y &= 100\epsilon_y = 100 \times -0.00008 = -0.008 \text{ mm}\end{aligned}$$

بنابراین، قطر صفحه پس از تغییر طول اضلاع برابر خواهد بود با:

$$D' = \sqrt{(100 + 0.0115)^2 + (100 - 0.008)^2} = 141.424 \text{ mm}$$

در نتیجه تغییر قطر صفحه برابر است با:

$$D' - D = 141.4238 - \sqrt{2 \times 100^2} = 0.00247 \text{ mm}$$



**مثال ۱۳:** میله مسی مطابق شکل، تحت بارگذاری یکنواخت در راستای لبه‌های خود به صورت نشان داده شده در شکل، قرار دارد. اگر این میله پیش از بارگذاری، دارای طول  $a=300 \text{ mm}$ ، پهنای  $b=50 \text{ mm}$  و ضخامت  $t=20 \text{ mm}$  باشد، ابعاد آن را پس از اعمال بار، تعیین کنید.

$$E_{cu}=120 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu=0.34$$

**حل:** با بررسی ظاهری، مشخص می‌شود که میله در وضعیت تنش صفحه‌ای قرار دارد. مطابق بارگذاری نشان داده شده داریم:

$$\sigma_x = 800 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -500 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_z = 0$$

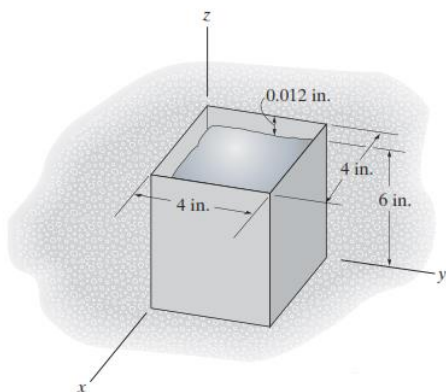
با استفاده از قانون هوک در حالت تنش صفحه‌ای، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ &= \frac{800 \text{ MPa}}{120(10^3) \text{ MPa}} - \frac{0.34}{120(10^3) \text{ MPa}}(-500 \text{ MPa} + 0) = 0.00808 \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ &= \frac{-500 \text{ MPa}}{120(10^3) \text{ MPa}} - \frac{0.34}{120(10^3) \text{ MPa}}(800 \text{ MPa} + 0) = -0.00643 \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ &= 0 - \frac{0.34}{120(10^3) \text{ MPa}}(800 \text{ MPa} - 500 \text{ MPa}) = -0.000850\end{aligned}$$

بنابراین، ابعاد جدید میله برابرند با:

$$\begin{aligned}a' &= 300 \text{ mm} + 0.00808(300 \text{ mm}) = 302.4 \text{ mm} \\ b' &= 50 \text{ mm} + (-0.00643)(50 \text{ mm}) = 49.68 \text{ mm} \\ t' &= 20 \text{ mm} + (-0.000850)(20 \text{ mm}) = 19.98 \text{ mm}\end{aligned}$$





**مثال ۱۴:** حفره صلب بدون اصطکاک از آلومینیوم مایع پر شده است. پس از خنک شدن، سطح آن به اندازه  $0.012 \text{ in}$  از بالای حفره فاصله می‌گیرد. اگر قسمت بالای حفره پوشانده شود و دما به  $200^\circ\text{F}$  افزایش یابد، مؤلفه‌های تغییر فرم نسبی  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  را در آلومینیوم تعیین کنید.

$$E_{al} = 10(10^3) \text{ksi} \quad ; \quad \alpha_{al} = 13.1(10^{-6})/^\circ\text{F}$$

**حل:** چون محفظه‌ای که آلومینیوم داخل آن قرار گرفته است، صلب و بدون تغییر شکل است، تغییر فرم آلومینیوم فقط در امتداد Z امکان‌پذیر است؛ بنابراین:

$$\epsilon_z = \frac{0.012}{6} = 0.002 \quad \text{و} \quad \epsilon_x = \epsilon_y = 0$$

با قرار دادن این مقادیر با منظور نمودن تنش‌های حرارتی در روابط هوک، خواهیم داشت:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T$$

$$0 = \frac{1}{10.0(10^3)} [\sigma_x - 0.35(\sigma_y + \sigma_z)] + 13.1(10^{-6})(200)$$

$$0 = \sigma_x - 0.35\sigma_y - 0.35\sigma_z + 26.2 \quad [1]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha\Delta T$$

$$0 = \frac{1}{10.0(10^3)} [\sigma_y - 0.35(\sigma_x + \sigma_z)] + 13.1(10^{-6})(200)$$

$$0 = \sigma_y - 0.35\sigma_x - 0.35\sigma_z + 26.2 \quad [2]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T$$

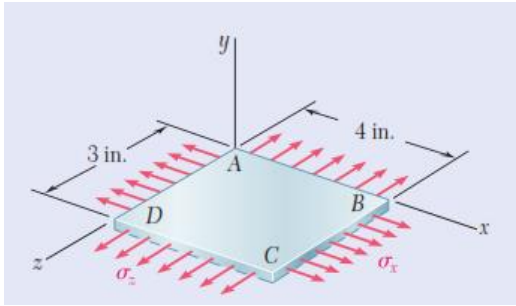
$$0.002 = \frac{1}{10.0(10^3)} [\sigma_z - 0.35(\sigma_x + \sigma_y)] + 13.1(10^{-6})(200)$$

$$0 = \sigma_z - 0.35\sigma_x - 0.35\sigma_y + 6.20 \quad [3]$$

با حل معادلات [1]، [2] و [3] خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \sigma_y = -70.0 \text{ksi} \quad \sigma_z = -55.2 \text{ksi}$$

## تمرین:

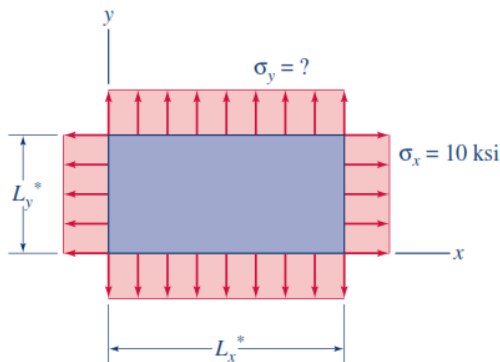


۱۲) بافتی که در سازه‌های بادشو به کار می‌رود، تحت بارگذاری دومحوره، مطابق شکل، قرار دارد و تنش‌های قائم  $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$  و  $\sigma_z = 160 \text{ MPa}$  در آن ایجاد شده است؛ اگر  $E=87 \text{ GPa}$  و  $\nu=0.34$  باشد، تغییر طول اضلاع AB، BC و قطر AC را محاسبه کنید.



۱۳) یک مخزن کرووی فولادی تحت فشار، دارای قطر داخلی 2 m و ضخامت 10 mm است و تغییرفرم‌سنجی به طول 20 mm به آن متصل شده است. هنگامی که مخزن تحت فشار قرار می‌گیرد، طول آن به اندازه 0.012 mm افزایش می‌یابد. فشاری که باعث این تغییر شکل می‌شود و حداکثر تنش برشی صفحه‌ای و مطلق را در نقطه‌ای روی سطح خارجی مخزن محاسبه کنید.

$$E_{st}=200 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu=0.3$$



۱۴) یک صفحه مستطیلی نازک به ابعاد  $2 \text{ in} \times 4 \text{ in}$  تحت بارگذاری مطابق شکل مقابل قرار گرفته و ابعاد آن به  $L_x^* = 4.00176 \text{ in}$  و  $L_y^* = 2.00344 \text{ in}$  تغییر یافته است. اولاً: نسبت پواسون برای این صفحه چقدر است؟ ثانیاً: مقدار تنش  $\sigma_y$  را به دست آورید.

$$E = 10(10^3) \text{ ksi}$$

۱۵) کره فولادی توپری به قطر 150 mm را تا عمق پنج کیلومتری دریا پایین می‌برند (فشار در این نقطه 50 MPa است)؛ مطلوب است محاسبه:

الف) کاهش قطر کره؛ ب) کاهش حجم کره؛ ج) درصد افزایش چگالی کره.

## فصل پنجم

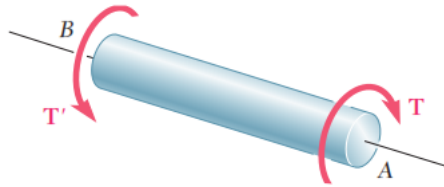
### پیچش

### Tortion



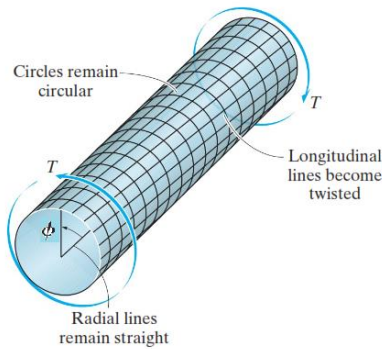
در این فصل، اثرات اعمال بارگذاری پیچشی روی یک عضو مستقیم طویل، نظیر یک محور یا لوله، مورد بررسی قرار می‌گیرد و توزیع تنش‌ها داخل عضو و زاویه پیچش آن در ناحیه ارتجاعی خطی تعیین می‌شود.

### پیچش میله با مقطع دایره‌ای (محور Shaft)



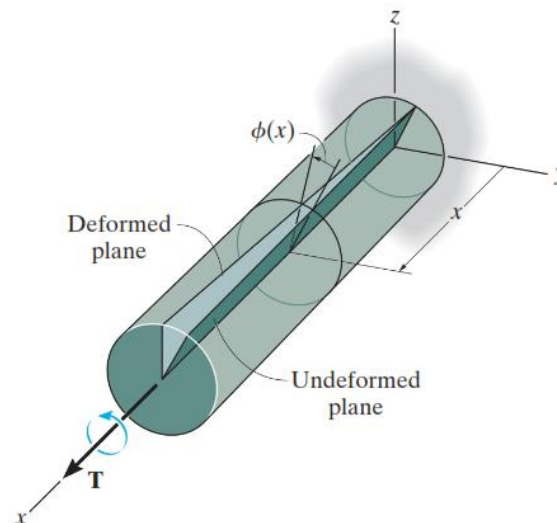
میله‌ای با مقطع دایره‌ای را که تحت اثر یک کوپل پیچشی قرار گرفته است، در نظر بگیرید. این حالت بارگذاری «پیچش خالص» نامیده می‌شود. با توجه به تقارن، می‌توان نشان داد که مقاطع عرضی میله، مانند اجسام صلبی حول محور طولی میله دوران می‌کنند؛ به طوری که شعاع‌ها، مستقیم و مقاطع عرضی به صورت دایره‌ای باقی می‌مانند.

همچنین، اگر زاویه پیچش کل میله کوچک باشد، طول میله و شعاع آن تغییر نخواهد کرد. لازم به ذکر است که در این فصل، تغییر شکل‌ها کوچک، و رابطه تنش-تغییر فرم نسبی خطی فرض می‌شود. به طور تجربی و نیز نتایج حاصل از مطالعات دقیق نشان می‌دهد که:

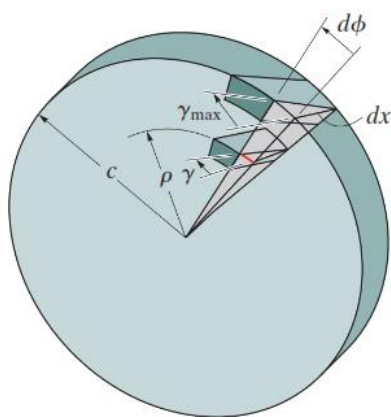
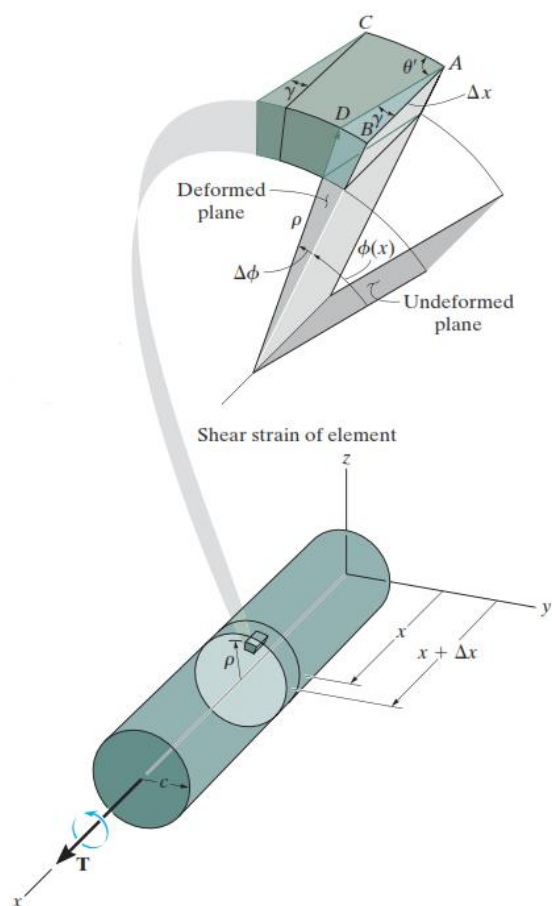


- ۱- محور میله مستقیم باقی می‌ماند؛
- ۲- مقاطع میله به صورت مدور باقی می‌مانند؛
- ۳- طول میله تغییر نمی‌کند؛
- ۴- قطر میله تغییر نمی‌کند؛
- ۵- مقاطع اولیه عمود بر محور میله، مسطح باقی می‌مانند؛
- ۶- هر قطر یا شعاع، به صورت قطر یا شعاع باقی می‌ماند.

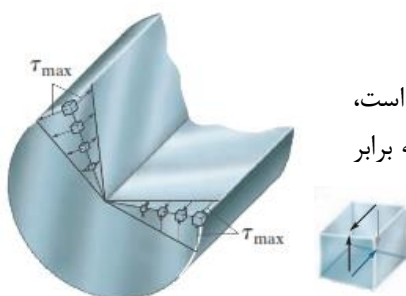
در هنگام پیچش، یک انتهای میله نسبت به انتهای دیگر آن، دورانی حول محور طولی میله خواهد داشت. برای مثال، اگر انتهای سمت راست میله را ثابت فرض کنیم، انتهای سمت چپ آن، به اندازه  $\phi$  که «زاویه پیچش» نامیده می‌شود، دوران خواهد کرد؛ در نتیجه، عنصر مستطیلی کوچک روی سطوح جانبی میله، واقع در بین دو مقطع عرضی به فاصله بسیار کوچک  $dx$  از یکدیگر، تغییر شکل داده، به صورت متوازی‌الاضلاع درمی‌آید. به عبارت دیگر، زوایای بین اضلاع عنصر سطحی، بدون آن که طول اضلاعشان تغییر یابد، در اثر پیچش تغییر خواهند کرد. بر اساس آن چه در شکل زیر نمایش داده شده است، زاویه پیچش به موقعیت  $x$  بستگی دارد و در طول محور، به صورت خطی تغییر می‌کند.



The angle of twist  $\phi(x)$  increases as  $x$  increases.



The shear strain at points on the cross section increases linearly with  $\rho$ , i.e.,  $\gamma = (\rho/c)\gamma_{max}$ .



برای تعیین تغییر فرم نسبی حاصل از این دوران، بر روی جزء کوچک  $\Delta x$  از میله، جزء کوچک شعاعی به فاصله  $\rho$  از خط مرکز محور جدا می‌کنیم. در اثر دوران ایجاد شده حاصل از پیچش، وجهی که در فاصله  $x$  از ابتدای میله قرار گرفته است، به اندازه  $\phi(x)$  و وجهی که به فاصله  $\Delta x$  از آن قرار دارد، به اندازه  $\phi(x) + \Delta\phi$  خواهد چرخید. اختلاف این چرخش‌ها موجب ایجاد تغییر فرم نسبی برشی  $\gamma$  در جزء انتخاب شده می‌گردد. زاویه بین لبه‌های  $AB$  و  $AC$  در شکل مقابل، پیش از دوران،  $\frac{\pi}{2}$  بوده است که پس از دوران به:  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \gamma$  تغییر یافته است. طول قوس  $BD$  که بر روی دایره‌ای به شعاع  $\rho$  واقع شده است، با توجه به شکل، برابر است با:

$$BD = \rho \Delta\phi \quad (1)$$

زاویه  $\gamma$  را نیز می‌توان چنین تعریف کرد:

$$\gamma = \frac{BD}{\Delta x} \quad (2)$$

بنابراین، اگر مقدار  $BD$  را از رابطه (1) در معادله (2) قرار دهیم و با در نظر گرفتن:  $\Delta x \rightarrow dx$  و  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

چون  $dx$  و  $d\phi$  برای تمام اجزای واقع در نقاط روی مقطع برش زده شده در  $x$  یکسانند، بنابراین،  $d\phi/dx$  روی سطح مقطع ثابت است و از معادله فوق می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که «مقدار تغییر فرم نسبی برشی برای هر جزء، فقط با فاصله شعاعی  $\rho$  از مرکز میله تغییر می‌کند.» به عبارت دیگر، تغییر فرم نسبی برشی داخل مقطع، به صورت خطی در طول شعاع، از صفر در مرکز میله تا حداکثر  $\gamma_{max}$  در سطح خارجی آن تغییر می‌کند. یعنی تغییر فرم نسبی برشی در هر نقطه از شعاع مقطع میله برابر است با:

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{max}$$

و با توجه به خطی بودن تغییرات زاویه دوران در طول میله، دوران کل میله برابر خواهد بود با:

$$\gamma = \rho \frac{\phi}{L} \quad \text{و} \quad \gamma_{max} = c \frac{\phi}{L}$$

در محدوده ارتجاعی خطی که تنش برشی با تغییر فرم نسبی نظیر آن متناسب است، توزیع تنش مطابق شکل مقابل خواهد بود. مقدار تنش در هر نقطه روی شعاع میله برابر است با:

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{max} \quad \text{و} \quad \tau = G\gamma = G\rho \frac{\phi}{L}$$

### رابطه بین لنگر پیچشی با تنش برشی

در هنگام اعمال لنگر پیچشی خارجی  $T$  بر میله مطابق شکل، برای حفظ تعادل مقطع، باید گشتاور پیچشی ایجاد شده به وسیله توزیع تنش برشی روی کل سطح مقطع، معادل با لنگر پیچشی وارده باشد. هر جزء سطح  $dA$  به فاصله  $\rho$  از مرکز میله، تحت اثر نیروی  $dF = \tau dA$  قرار دارد و گشتاور حاصل از آن حول مرکز، برابر است با  $dT = \rho(\tau dA)$ . بنابراین، برای کل سطح مقطع میله می توان

نوشت:

$$T = \int_A \rho(\tau dA) = \int_A \rho \left( \frac{\rho}{c} \right) \tau_{\max} dA$$

و چون  $\tau_{\max}/c$  مقدار ثابتی دارد، می تواند از انتگرال خارج شود؛ در نتیجه:

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

انتگرال فوق، تنها به هندسه محور بستگی دارد و بیان کننده «ممان اینرسی قطبی» سطح مقطع میله، حول محور طولی آن است که با  $J$  نشان داده می شود. بنابراین، معادله فوق را می توان مرتب نموده به صورت خلاصه تر به صورت زیر نوشت:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

تنش در هر نقطه به فاصله  $\rho$  از مرکز میله نیز برابر خواهد بود با:

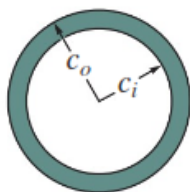
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

برای یک میله توپر با مقطع دایره ای ممان اینرسی قطبی از رابطه زیر به دست می آید:

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

و برای یک میله توخالی (محور لوله ای)، مقدار آن از رابطه زیر محاسبه می شود:

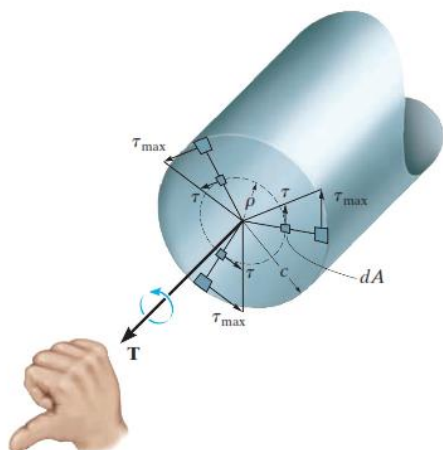
$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$



برای یک لوله جدار نازک، رابطه زیر می تواند جایگزین شود:

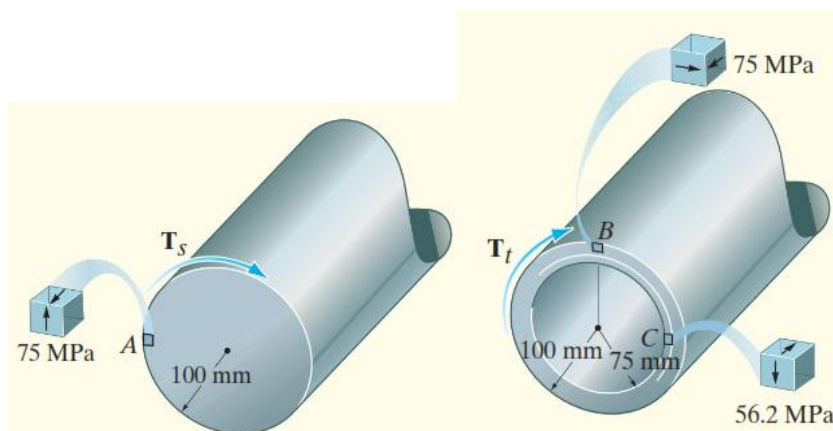
$$J = 2\pi c^3 t$$

در رابطه فوق،  $c$  شعاع متوسط و  $t$  ضخامت جدار لوله است.



Shear stress varies linearly along each radial line of the cross section.

**مثال ۱:** در شکل زیر، یک محور صلب و یک لوله هم جنس نشان داده شده است. در صورتی که تنش مجاز برشی آن‌ها برابر با 75 MPa باشد، بیش‌ترین لنگر پیچشی که می‌تواند بر سطح مقطع هر کدام وارد شود، چقدر است؟ همچنین، تنش برشی را در نقطه A از میله و نقاط B و C از لوله، محاسبه کنید.



**حل:** ممان اینرسی قطبی مقاطع توپر و لوله‌ای برابرند با:

$$J_s = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.1 \text{ m})^4 = 0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4$$

$$J_t = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{2} [(0.1 \text{ m})^4 - (0.075 \text{ m})^4] = 0.1074(10^{-3}) \text{ m}^4$$

لنگر پیچشی ماکزیمم مجاز برای هر یک از مقاطع، عبارت است از:

$$(\tau_{\max})_s = \frac{Tc}{J}; \quad 75(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{T_s(0.1 \text{ m})}{0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4}$$

$$T_s = 118 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

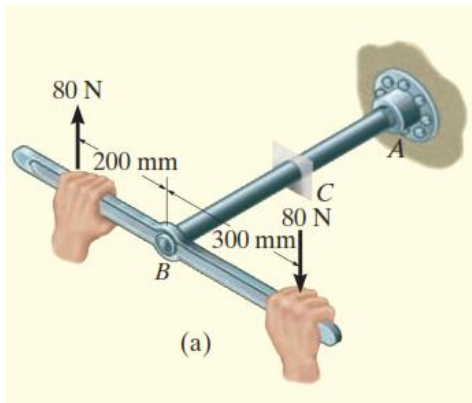
$$(\tau_{\max})_t = \frac{Tc}{J}; \quad 75(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{T_t(0.1 \text{ m})}{0.1074(10^{-3}) \text{ m}^4}$$

$$T_t = 80.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

تنش برشی در جداره داخلی لوله (نقطه C)، برابر است با:

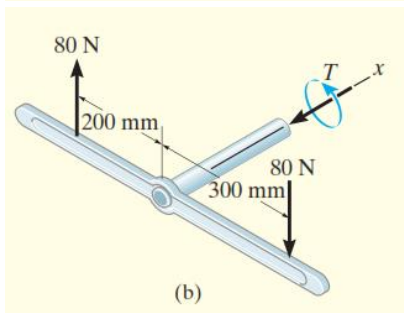
$$(\tau_i)_t = \frac{80.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (0.075 \text{ m})}{0.1074(10^{-3}) \text{ m}^4} = 56.2 \text{ MPa}$$

در وجوه خارجی A و B، همان تنش‌های برشی ماکزیمم ایجاد می‌شود که در شکل فوق نشان داده شده است. ضمناً باید توجه داشت که تنش در سطح آزاد هر یک از المان‌های نشان داده شده باید برابر با صفر باشد.



**مثال ۲:** لوله نشان داده شده در شکل روبه‌رو، دارای قطر داخلی 80 mm و قطر خارجی 100 mm است. اگر با استفاده از آچار لوله در B، انتهای لوله به تکیه‌گاه A محکم بسته شده باشد، تنش برشی به‌وجود آمده در ماده در دیواره‌های داخلی و خارجی بخش میانی لوله را، هنگامی که نیروی 80 N بر آچار وارد می‌شود، محاسبه کنید.

**حل:** محاسبه لنگر پیچشی داخلی: در موقعیت میانی C در طول محور لوله، مقطعی می‌زنیم. بر اساس نمودار جسم آزاد که در شکل (b) نشان داده شده است، تنها مجهول، لنگر پیچشی داخلی است که با نوشتن رابطه تعادل به دست می‌آید:



$$\sum M_x = 0; \quad 80 \text{ N}(0.3 \text{ m}) + 80 \text{ N}(0.2 \text{ m}) - T = 0$$

$$T = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

محاسبه ممان اینرسی قطبی مقطع:

$$J = \frac{\pi}{2} [(0.05 \text{ m})^4 - (0.04 \text{ m})^4] = 5.796 (10^{-6}) \text{ m}^4$$

تنش برشی: برای هر نقطه واقع بر سطح خارجی لوله،

$$\rho = c_o = 0.05 \text{ m}$$

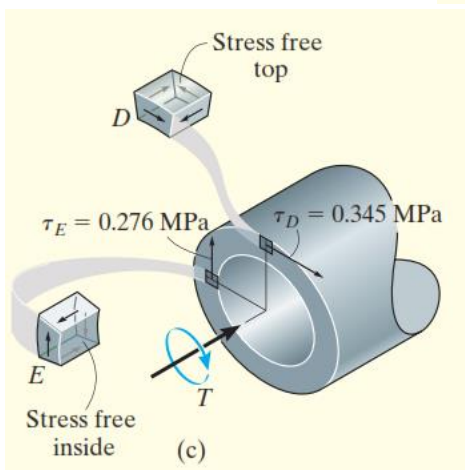
بنابراین:

$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0.05 \text{ m})}{5.796 (10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.345 \text{ MPa}$$

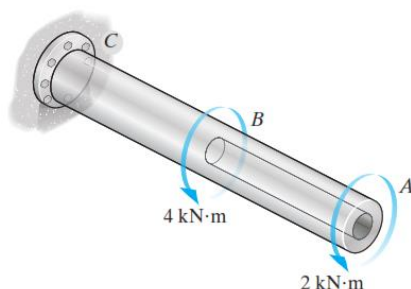
و برای هر نقطه واقع بر سطح داخلی لوله،  
در نتیجه:

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0.04 \text{ m})}{5.796 (10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.276 \text{ MPa}$$

نتایج به‌دست آمده در شکل (c) نشان داده شده است.



**تذکر:** به جهت تنش‌ها روی وجوه سایه زده شده نقاط D و E دقت کنید؛ این تنش‌ها هم‌جهت با جهت لنگر پیچشی وارد بر لوله عمل می‌کنند. همچنین، وجه بالایی در D و وجه داخلی در E به‌دلیل تماس با سطح آزاد، فاقد تنش هستند.



**تمرین**

(۱) محور نشان داده شده در شکل مقابل، از A تا B توخالی و از B تا C توپر است. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در هر قسمت از این محور را تعیین کنید. قطر خارجی محور برابر با 80 mm و ضخامت جداره قسمت لوله‌ای 10 mm است.



### رابطه زاویه پیچش با لنگر پیچشی

در طراحی یک محور تحت پیچش، علاوه بر محدودیت تنش برشی، لازم است تا میزان دوران آن نیز محدود شود. علاوه بر آن، در هنگام تحلیل محورهای نامعین استاتیکی، محاسبه زاویه پیچش برای نوشتن روابط سازگاری در کنار معادلات تعادل، برای تعیین واکنش‌های مجهول تکیه‌گاهی، ضروری است. بنابراین، تعیین زاویه پیچش  $\phi$  برای هر دو نقطه دلخواه از محور نسبت به یکدیگر، اهمیت دارد.

در شکل زیر، یک محور دایره‌ای توپر که تحت لنگر پیچشی وارده به صورت ارتجاعی خطی عمل می‌کند، نشان داده شده است. اگر همان‌طور که پیش از این در مورد میله تحت بار محوری ذکر شد، از اثر تمرکز تنش در نقاط اعمال پیچش و مناطق دارای تغییر ناگهانی در مقطع، چشم‌پوشی کنیم، می‌توانیم تغییر زاویه را در محدوده بین هر دو نقطه‌ای که لنگر پیچشی در آن اعمال شده است، خطی فرض کنیم. جزء کوچکی به طول  $dx$ ، در موقعیت  $x$ ، از میله جدا شده و در شکل (b) نشان داده شده است. لنگر پیچشی  $T(x)$  وارد بر این جزء، باعث چرخشی به اندازه  $d\phi$  در یکی از وجوه، نسبت به وجه دیگر آن می‌گردد. در نتیجه این چرخش، تغییر فرم نسبی برشی  $\gamma$  در جزء مشخص شده در شکل، با شعاع دلخواه  $\rho$ ، پدید می‌آید. در قسمت قبل نشان دادیم که مقادیر  $\gamma$  و  $d\phi$  با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

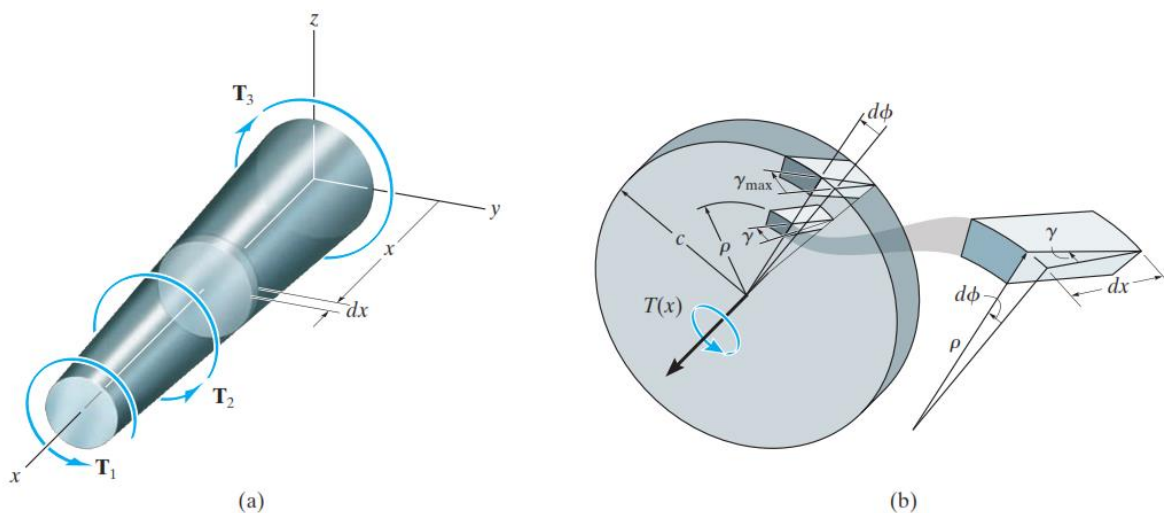
$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \rightarrow d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho}$$

با قرار دادن مقدار  $\gamma$  از قانون هوک:  $\gamma = \tau/G(x)$  و  $\tau$  از رابطه‌ای که بین لنگر پیچشی و تنش برشی حاصل از آن به دست آمد:  $\tau = T(x)\rho/J(x)$  در رابطه فوق، به معادله زیر می‌رسیم:

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G(x)} dx$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه بر روی کل طول  $L$ ، زاویه پیچش کل محور به دست می‌آید:

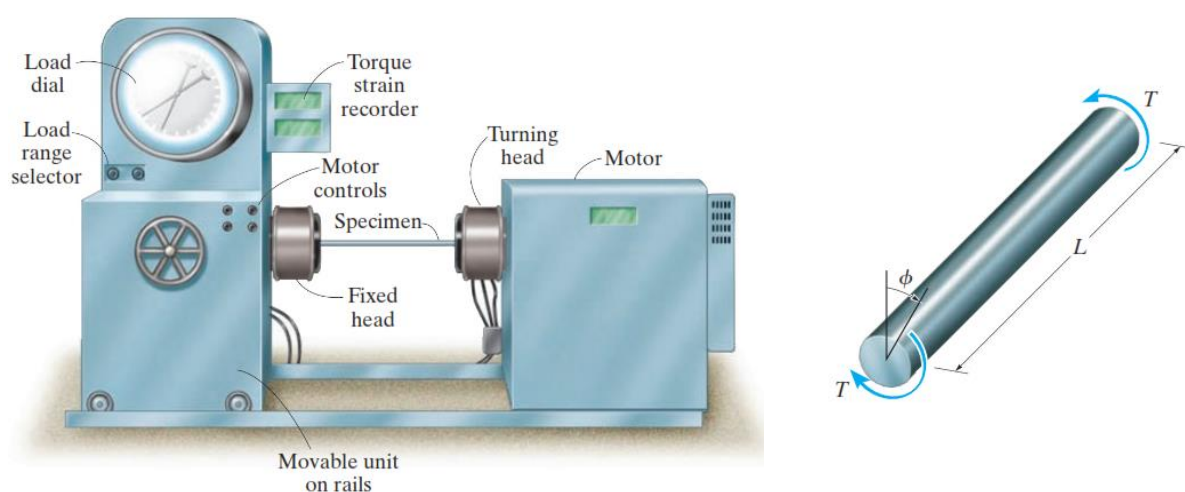
$$\phi = \int_0^L \frac{T(x) dx}{J(x)G(x)}$$



**لنگر پیچشی و سطح مقطع ثابت:** در کاربردهای مهندسی، معمولاً از مصالح همگن استفاده می‌شود، بنابراین  $G$  ثابت است. همچنین، اگر سطح مقطع و لنگر پیچشی وارده در طول محور ثابت باشند، رابطه فوق می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

از این رابطه برای به دست آوردن مدول الاستیسیته برشی مصالح استفاده می‌شود. به این ترتیب که نمونه‌ای با طول و قطر معلوم در دستگاهی مطابق شکل زیر تحت پیچش قرار می‌گیرد و با اعمال لنگر پیچشی در محدوده ارتجاعی، از رابطه مقدار  $G = TL/J\phi$  آن محاسبه می‌شود. البته مقدار دقیق  $G$  از میانگین حاصل از چندین آزمایش به دست می‌آید.

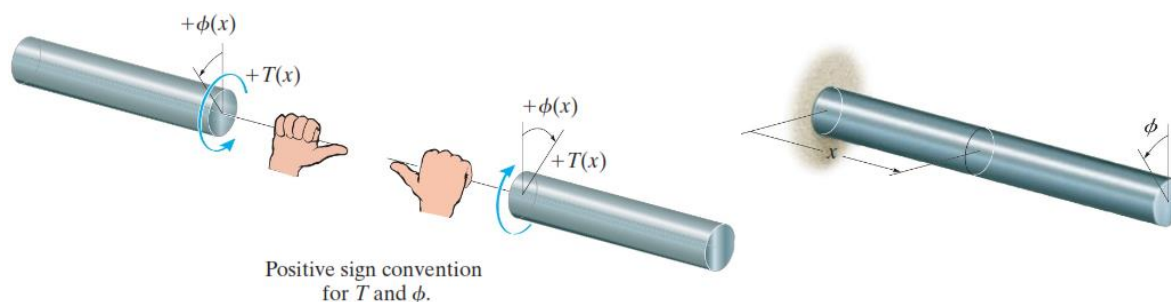


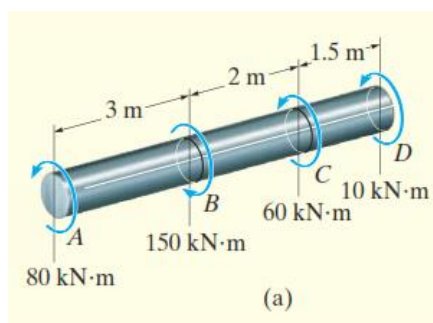
### پیچش‌های متعدد وارد بر محور:

اگر محور تحت تأثیر چندین لنگر پیچشی مختلف قرار بگیرد، یا آن که سطح مقطع یا مدول برشی به طور ناگهانی تغییر کند، می‌توان برای هر قسمت از این محور که همه کمیت‌های مربوطه در آن ثابت باشند، رابطه فوق را به کار برد؛ آن‌گاه زاویه پیچش کلی را با جمع برداری زوایای به دست آمده از هر قسمت محاسبه کرد. بنابراین رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

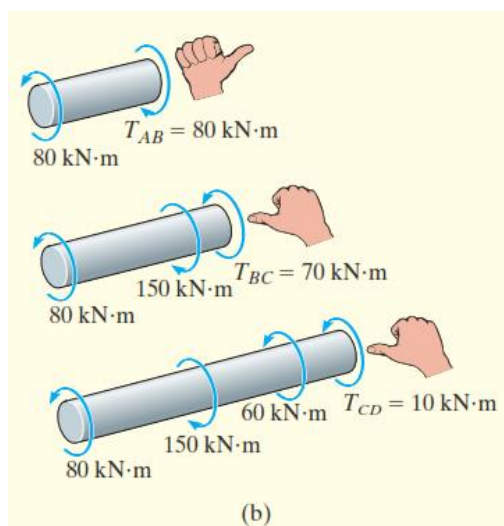
**قرارداد علامت:** در به کار بستن رابطه فوق برای محاسبه  $\phi$ ، نیاز به تعیین علامت مثبت یا منفی برای لنگرهای پیچشی وارد بر محور و دوران حاصل از آن داریم. بدین منظور از قانون دست راست، مطابق شکل زیر، برای تعیین علامت مثبت، استفاده می‌کنیم.



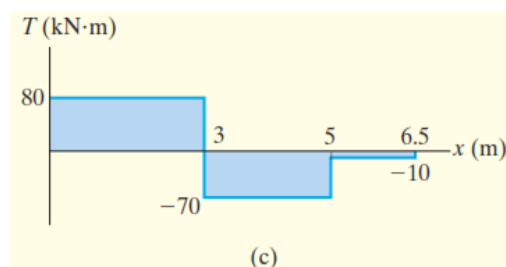


**مثال ۳:** زاویهٔ پیچش انتهای A از محور مطابق شکل (a) را محاسبه کنید. همچنین دوران نقطه A را نسبت به C تعیین کنید. قطر محور را مساوی با 200 mm و  $G=75 \text{ GPa}$  فرض کنید.

**حل:**



محاسبهٔ لنگرهای پیچی داخلی در محور: با مقطع زدن در سه ناحیهٔ مختلف این محور، لنگرهای پیچی در فواصل AB، BC و CD مطابق با شکل (b) به دست می‌آید. با توجه به علامت لنگرها، نمودار لنگر پیچی در طول عضو، مطابق شکل (c) ترسیم می‌شود:



زاویهٔ پیچش A: ممان اینرسی قطبی میله برابر است با:

$$J = \frac{\pi}{2} (0.1 \text{ m})^4 = 0.1571 (10^{-3}) \text{ m}^4$$

دوران نقطه A نسبت به ابتدای محور D عبارت است از:

$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{80(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (3 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)} + \frac{-70(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (2 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)} + \frac{-10(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (1.5 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)}$$

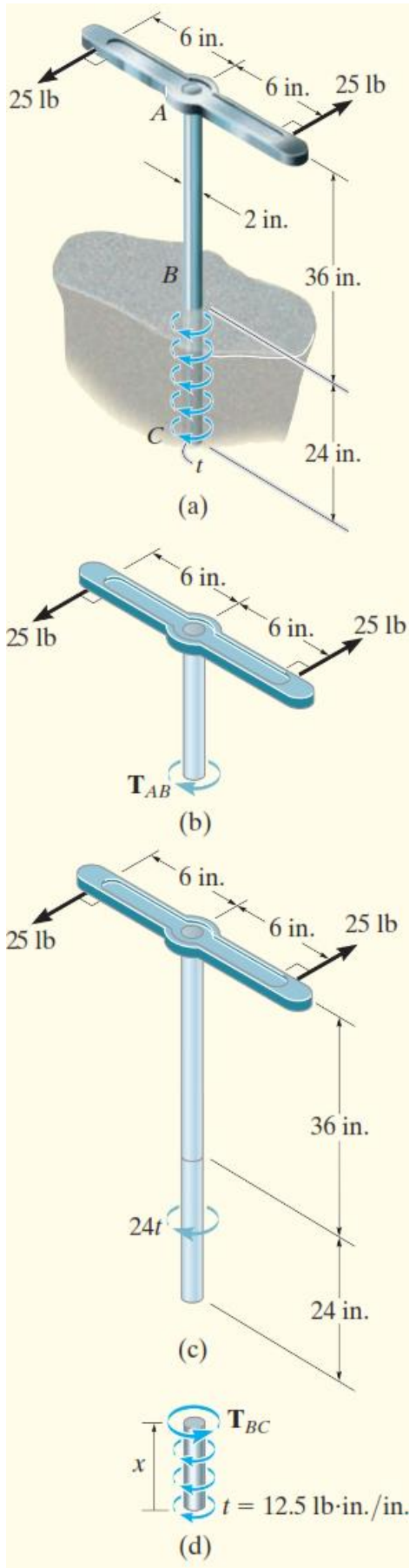
$$\phi_A = 7.22(10^{-3}) \text{ rad}$$

زاویهٔ پیچش A نسبت به C: با در نظر گرفتن پیچش دو قسمت AB و BC داریم:

$$\phi_{A/C} = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{80(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (3 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)} + \frac{-70(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (2 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)}$$

$$\phi_{A/C} = 8.49(10^{-3}) \text{ rad}$$

این که هر دو پاسخ به دست آمده مقادیر مثبتی هستند، نشان می‌دهد که اگر شست دست راست رو به بیرون محور باشد، انتهای A در جهت بسته شدن چهار انگشت، می‌چرخد.



**مثال ۴:** دیرک توپر چدنی به قطر 2 in به اندازه 24 in در خاک فرو رفته است. اگر با استفاده از یک آچار صلب، پیچشی مطابق شکل (a) بر آن وارد شود، حداکثر تنش برشی و زاویه پیچش بالای آن (نقطه B) را تعیین کنید. فرض کنید، بارگذاری پیچشی در آستانه چرخاندن دیرک است. مقاومت پیچشی خاک، به طور یکنواخت، در طول 24 in تماس آن با میله، برابر با  $G=5.5(10^3) \text{ ksi}$  است.

**حل:**

**تعیین پیچش داخلی در میله:** لنگر پیچشی در فاصله AB مقدار ثابتی دارد. از روی نمودار جسم آزاد شکل (b) می توان نوشت:

$$\sum M_z = 0; \quad T_{AB} = 25 \text{ lb} (12 \text{ in.}) = 300 \text{ lb}\cdot\text{in.}$$

شدت توزیع لنگر پیچشی یکنواخت ناشی از واکنش خاک را نیز در طول مدفون میله می توان از رابطه تعادل محاسبه کرد:

$$\sum M_z = 0 \quad 25 \text{ lb} (12 \text{ in.}) - t(24 \text{ in.}) = 0$$

$$t = 12.5 \text{ lb}\cdot\text{in./in.}$$

بنابراین، از روی نمودار جسم آزاد مقطعی از دیرک در فاصله x از نقطه B (شکل (d)، داریم:

$$\sum M_z = 0; \quad T_{BC} - 12.5x = 0$$

$$T_{BC} = 12.5x$$

**تنش برشی ماکزیمم:** بیشترین تنش برشی در ناحیه AB ایجاد می شود؛ زیرا با ثابت بودن مقطع، لنگر پیچشی بیشترین مقدار را دارد. با استفاده از رابطه پیچش، خواهیم داشت:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{ABC}}{J} = \frac{(300 \text{ lb}\cdot\text{in.})(1 \text{ in.})}{(\pi/2)(1 \text{ in.})^4} = 191 \text{ psi}$$

**زاویه پیچش:** برای محاسبه زاویه پیچش بالای دیرک نسبت به پایین آن، باید زوایای پیچش دو قسمت بیرون از خاک و داخل خاک را محاسبه و با هم جمع کنیم:

$$\phi_A = \frac{T_{AB} L_{AB}}{JG} + \int_0^{L_{BC}} \frac{T_{BC} dx}{JG}$$

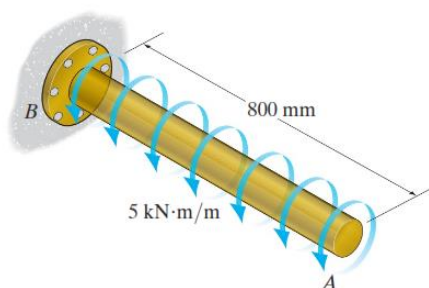
$$= \frac{(300 \text{ lb}\cdot\text{in.}) 36 \text{ in.}}{JG} + \int_0^{24 \text{ in.}} \frac{12.5x dx}{JG}$$

$$= \frac{10800 \text{ lb}\cdot\text{in}^2}{JG} + \frac{12.5[(24)^2/2] \text{ lb}\cdot\text{in}^2}{JG}$$

$$= \frac{14400 \text{ lb}\cdot\text{in}^2}{(\pi/2)(1 \text{ in.})^4 5500(10^3) \text{ lb/in}^2} = 0.00167 \text{ rad}$$

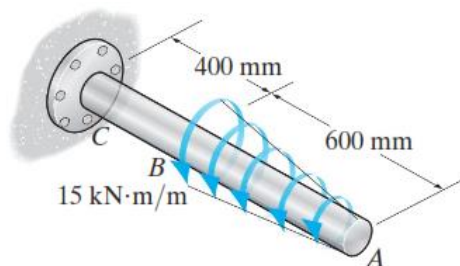
## تمرین:

۲) محور فولادی AB به قطر 80 mm تحت پیچش گسترده یکنواخت قرار گرفته است، زاویه پیچش انتهای A را نسبت B تعیین کنید.



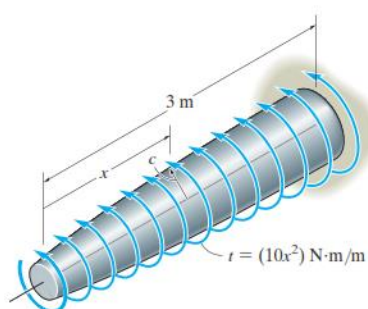
$$G=75 \text{ GPa}$$

۳) محور فولادی AC به قطر 80 mm در طول AB تحت پیچش با توزیع مثلثی قرار گرفته است. زاویه پیچش انتهای A نسبت به B و C تعیین کنید.



$$G=75 \text{ GPa}$$

۴) محور مخروطی شکل به طول 3 m و شعاع متغیر C تحت بارگذاری پیچشی مطابق شکل قرار گرفته است. اگر تنش برشی مجاز این محور 80 MPa باشد، نسبت  $\frac{C}{x}$  را به دست آورید.

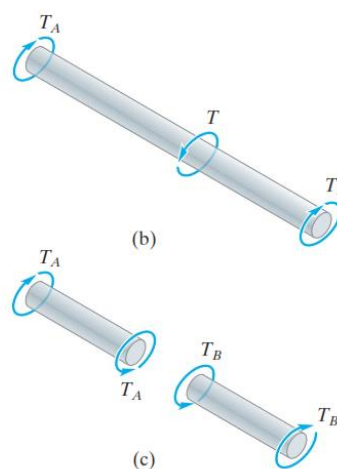
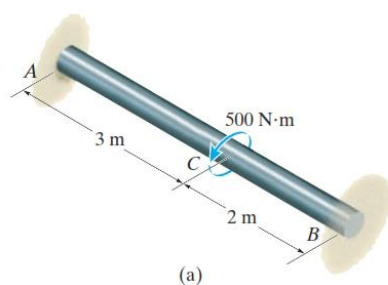


$$G=75 \text{ GPa}$$

## اعضای نامعین استاتیکی تحت پیچش

هنگامی که معادله تعادل حول خط مرکزی یک محور تحت پیچش، به تنهایی، برای محاسبه لنگرهای پیچشی مجهول کافی نباشد، از شرط سازگاری استفاده می شود.

**مثال ۵:** محور مطابق شکل زیر بین دو تکیه گاه گیردار و تحت اثر لنگر پیچشی متمرکز 500 N·m قرار گرفته است، واکنش های تکیه گاهی را محاسبه کنید.



**حل:** همان طور که در نمودار آزاد جسم در شکل (b) نشان داده شده است، واکنش های پیچشی در تکیه گاه های A و B مجهولند. تنها یک رابطه تعادل لنگری حول محور مرکزی، می تواند نوشته شود، که برای محاسبه این دو مجهول کافی نیست:

$$\Sigma M = 0; \quad 500 \text{ N} \cdot \text{m} - T_A - T_B = 0$$

شرط سازگاری ایجاب می کند که زاویه پیچش یک انتهای محور، نسبت به انتهای دیگر آن، مساوی صفر باشد (به دلیل گیردار بودن تکیه گاه ها، امکان دوران محور در این نقاط وجود ندارد)، بنابراین:

$$\phi_{A/B} = 0$$

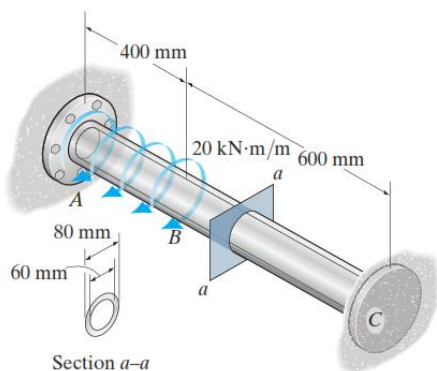
در صورتی که بارگذاری محور در محدوده ارتجاعی خطی صورت گیرد، می توان رابطه مربوط به زاویه پیچش ( $\phi$ ) را به کار گرفت و شرط سازگاری را برحسب پیچش های مجهول بیان کرد. با توجه به شکل (c)، پیچش داخلی در قسمت AC برابر با  $+T$  و در BC مساوی با  $-T$  است، می توان نوشت:

$$\frac{T_A(3 \text{ m})}{JG} - \frac{T_B(2 \text{ m})}{JG} = 0$$

با حل دو معادله فوق، خواهیم داشت:

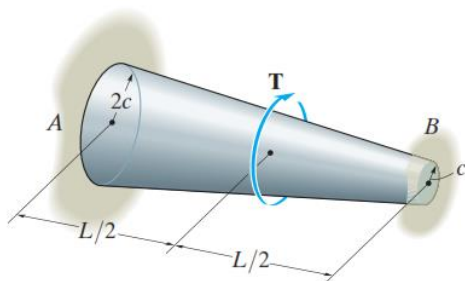
$$T_A = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{and} \quad T_B = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### تمرین



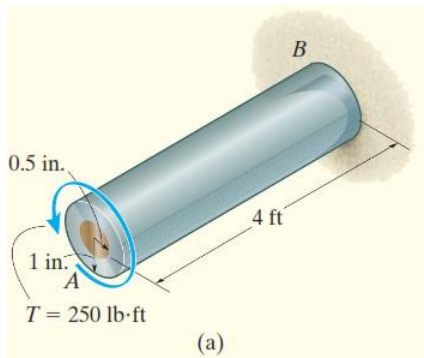
۵) محور آلومینیومی مطابق شکل، در طول AB، تحت پیچش با توزیع یکنواخت قرار گرفته و در دو انتها ثابت شده است. حداکثر تنش برشی پدید آمده در طول میله چقدر است؟

۶) محور مخروطی مطابق شکل، بین دو تکیه گاه ثابت A و B مقید شده است. اگر لنگر پیچشی T بر نقطه میانی آن وارد شود، واکنش تکیه گاه ها را تعیین کنید.



### محورهای با مقطع مرکب

در محورهای با مقطع ساخته شده از مصالح مختلف، اگر اجزای تشکیل دهنده به طور کامل چنان به هم متصل شده باشند که محور به صورت یکپارچه عمل کند، سازگاری تغییر شکل ها در تک تک اجزای مختلف آن برقرار خواهد بود.



**مثال ۶:** محور نشان داده شده در شکل (a) از لوله فولادی با یک هسته برنجی چسبیده به آن ساخته شده است. توزیع تنش برشی در طول خط شعاعی مقطع این محور را تحت اثر لنگر پیچی متمرکز وارده در انتهای آن را نشان دهید.

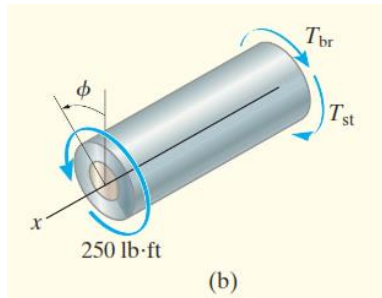
$$G_{br} = 5.20(10^3) \text{ ksi}; G_{st} = 11.4(10^3) \text{ ksi}$$

**حل: تعادل:** نمودار آزاد محور، در شکل (b) نشان داده شده است. واکنش‌های تکیه‌گاهی مجهول در B با  $T_{st}$  در فولاد و  $T_{br}$  در برنج نشان داده شده است. تعادل ایجاب می‌کند که:

$$-T_{st} - T_{br} + (250 \text{ lb} \cdot \text{ft})(12 \text{ in./ft}) = 0 \quad (1)$$

**سازگاری:** به دلیل یکپارچگی لوله و هسته، باید زاویهٔ پیچش انتهای A برای فولاد و برنج یکسان باشد. بنابراین:

$$\phi = \phi_{st} = \phi_{br}$$



$$\phi = TL/JG,$$

$$\frac{T_{st}L}{(\pi/2)[(1 \text{ in.})^4 - (0.5 \text{ in.})^4] 11.4(10^3) \text{ kip/in}^2}$$

$$= \frac{T_{br}L}{(\pi/2)(0.5 \text{ in.})^4 5.20(10^3) \text{ kip/in}^2}$$

$$T_{st} = 32.88 T_{br} \quad (2)$$

با حل معادلات (1) و (2) خواهیم داشت:

$$T_{st} = 2911.5 \text{ lb} \cdot \text{in.} = 242.6 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$T_{br} = 88.5 \text{ lb} \cdot \text{in.} = 7.38 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

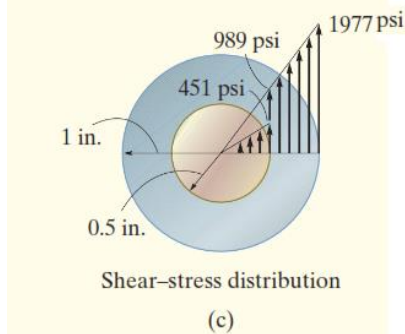
تنش برشی در هستهٔ برنجی از صفر در مرکز محور، تا مقدار حداکثر در فصل مشترک تماس با لولهٔ فولادی تغییر می‌کند. با استفاده از فرمول پیچش، می‌توان نوشت:

$$(\tau_{br})_{\max} = \frac{(88.5 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.5 \text{ in.})}{(\pi/2)(0.5 \text{ in.})^4} = 451 \text{ psi}$$

برای فولاد، حداقل و حداکثر تنش‌های برشی عبارتند از:

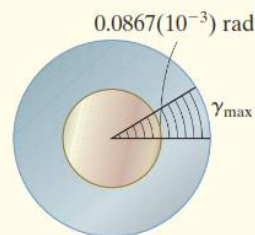
$$(\tau_{st})_{\min} = \frac{(2911.5 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.5 \text{ in.})}{(\pi/2)[(1 \text{ in.})^4 - (0.5 \text{ in.})^4]} = 989 \text{ psi}$$

$$(\tau_{st})_{\max} = \frac{(2911.5 \text{ lb} \cdot \text{in.})(1 \text{ in.})}{(\pi/2)[(1 \text{ in.})^4 - (0.5 \text{ in.})^4]} = 1977 \text{ psi}$$



Shear-stress distribution

(c)



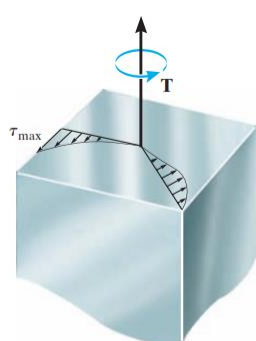
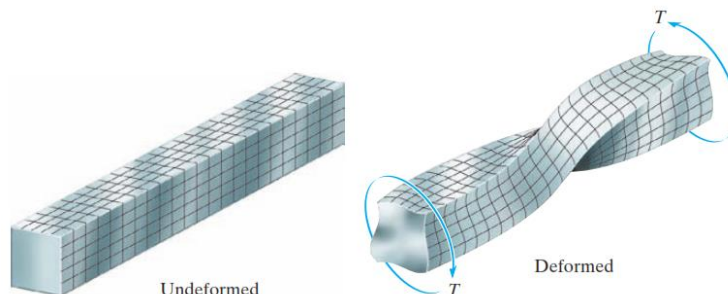
Shear-strain distribution

(d)

این نتایج در شکل (c) نشان داده شده‌اند. به ناپیوستگی تنش برشی در فصل مشترک برنج و فولاد توجه کنید. فولاد، به خاطر سختی بیشتر، تنش برشی بیش‌تری نسبت به برنج دارد؛ اما تغییر فرم نسبی هر دو با هم برابر است.

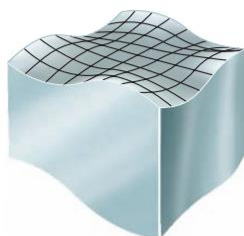
## پیچش میله‌های غیر دایره‌ای توپُر

میله‌های با مقاطع غیر دایره‌ای، از جمله مقاطع مستطیلی که فاقد تقارن محوری هستند، شرایط کاملاً متفاوتی نسبت به آنچه در مورد محورهای با مقطع دایره‌ای بیان شد، دارند. مقاطع عمود بر محور، در اثر پیچش، دچار تابیدگی می‌شوند و دیگر به صورت مسطح باقی نمی‌مانند.



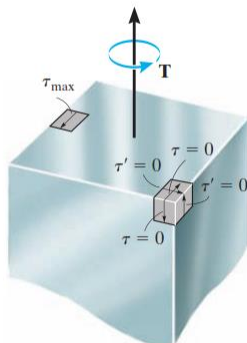
Shear stress distribution along two radial lines

(a)



Warping of cross-sectional area

(b)



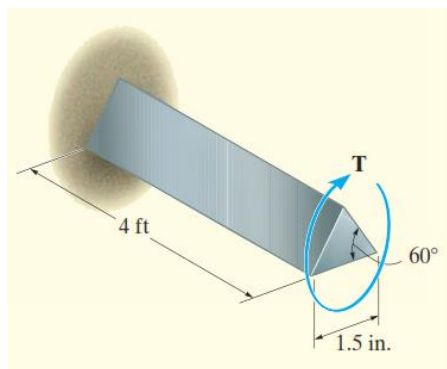
(c)

توزیع تنش‌های برشی در این مقاطع به‌طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به مقاطع دایره‌ای پیچیده‌تر است و با استفاده از تحلیل ریاضی بر پایه تئوری الاستیسیته، می‌تواند تعیین شود. در این درس بدون آن که وارد جزئیات محاسبه تنش و تغییر فرم نسبی حاصل از پیچش شویم، به نتایج به دست آمده از آن تحلیل اشاره می‌گردد. شکل (a) نمونه‌ای از توزیع تنش برشی داخل یک محور با مقطع مربعی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تنش برشی در وسط اضلاع، ماکزیمم و در گوشه‌ها صفر است. شکل (b) تابیدگی سطح مقطع را تحت پیچش نمایش می‌دهد و در شکل (c) المان تنش واقع در گوشه مقطع نشان داده شده است که به دلیل آن که دو وجه المان روی سطح خارجی محور قرار گرفته‌اند، الزاماً تنشی نمی‌تواند بر روی آن‌ها ایجاد شود. بدین ترتیب، برای حفظ تعادل، روی سایر وجوه این المان هم باید تنش برشی مساوی صفر باشد.

بر پایه نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته، مقادیر تنش‌های ماکزیمم و زاویه پیچش برای مقاطع مربع، مثلث و بیضی، در جدول زیر ارائه شده است.

Shape of cross section	$\tau_{\max}$	$\phi$
<b>Square</b> 	$\frac{4.81 T}{a^3}$	$\frac{7.10 TL}{a^4 G}$
<b>Equilateral triangle</b> 	$\frac{20 T}{a^3}$	$\frac{46 TL}{a^4 G}$
<b>Ellipse</b> 	$\frac{2 T}{\pi a b^2}$	$\frac{(a^2 + b^2) TL}{\pi a^3 b^3 G}$





**مثال ۷:** محور آلومینیومی مطابق شکل، مقطعی به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع دارد. اگر تنش برشی مجاز،  $\tau_{allow} = 8 \text{ ksi}$  و زاویه پیچش محور به  $\phi_{allow} = 0.02 \text{ rad}$  محدود باشد، بیش‌ترین لنگر پیچشی قابل اعمال بر انتهای محور را تعیین کنید. لنگر پیچشی قابل اعمال بر محوری با مقطع دایره‌ای و ساخته شده از همین ماده، چقدر است؟

$$G = 3.7(10^6) \text{ lb/in}^2$$

**حل:** با استفاده از جدول فوق، می‌توان نوشت:

$$\tau_{allow} = \frac{20T}{a^3}; \quad 8(10^3) \text{ lb/in}^2 = \frac{20T}{(1.5 \text{ in.})^3}$$

$$T = 1350 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

همچنین:

$$\phi_{allow} = \frac{46TL}{a^4 G_{al}}; \quad 0.02 \text{ rad} = \frac{46T(4 \text{ ft})(12 \text{ in./ft})}{(1.5 \text{ in.})^4 [3.7(10^6) \text{ lb/in}^2]}$$

$$T = 170 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

با مقایسه دو مقدار به دست آمده برای T، معلوم می‌شود که لنگر پیچشی وارد بر مقطع، با محدودیت زاویه پیچش کنترل شده است.

**مقطع دایره‌ای:** اگر بخواهیم مقطع دایره‌ای با همین مصالح و مشخصات مشابه بسازیم، شعاع مقطع دایره‌ای باید برابر باشد با:

$$A_{\text{circle}} = A_{\text{triangle}}; \quad \pi c^2 = \frac{1}{2} (1.5 \text{ in.}) (1.5 \sin 60^\circ)$$

$$c = 0.557 \text{ in.}$$

محدودیت تنش و زاویه پیچش را برای مقطع دایره‌ای در نظر می‌گیریم:

$$\tau_{allow} = \frac{Tc}{J}; \quad 8(10^3) \text{ lb/in}^2 = \frac{T(0.557 \text{ in.})}{(\pi/2)(0.557 \text{ in.})^4}$$

$$T = 2170 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

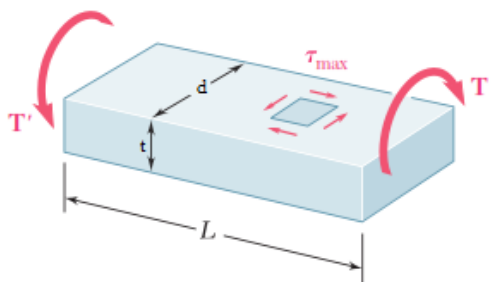
$$\phi_{allow} = \frac{TL}{JG_{al}}; \quad 0.02 \text{ rad} = \frac{T(4 \text{ ft})(12 \text{ in./ft})}{(\pi/2)(0.557 \text{ in.})^4 [3.7(10^6) \text{ lb/in}^2]}$$

$$T = 233 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

مقایسه نتایج به دست آمده از مقاطع دایره‌ای و مثلثی، نشان می‌دهد که محور دایره‌ای می‌تواند 37% بیش‌تر از مقطع مثلثی پیچش تحمل کند.

## میله‌های مستقیم با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی

اگر طول میله را با  $L$ ، طول ضلع مقطع عرضی آن را با  $d$  و عرض آن را با  $t$  نشان دهیم، ماکزیمم تنش برشی تحت اثر لنگر پیچشی  $T$ ، در امتداد خط میانی وجه عریض تر میله ایجاد می‌شود و برابر است با:



$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha dt^2}$$

زاویه پیچش نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi = \frac{TL}{GJ}, \text{ where } J = \beta dt^3$$

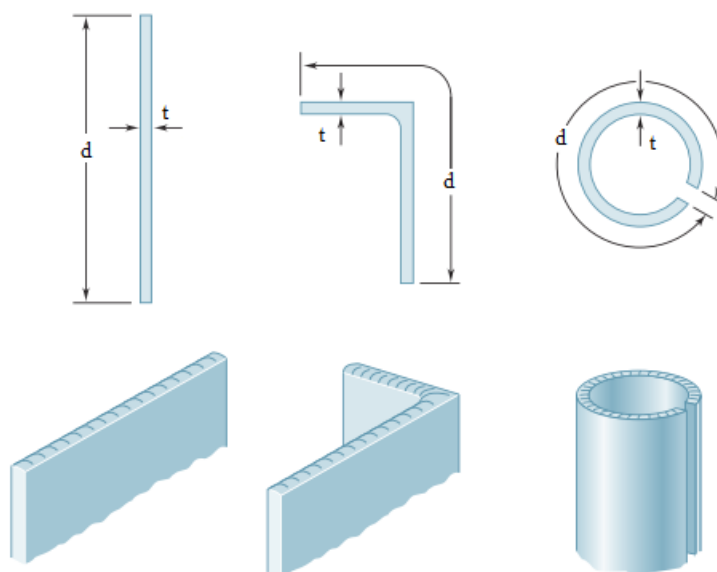
ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  فقط به نسبت  $d/t$  بستگی دارند و مقادیر آن‌ها را می‌توان از جدول زیر به دست آورد.

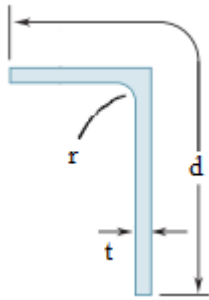
$d/t$	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.298	0.307	0.312	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.298	0.307	0.312	0.333

می‌توان ثابت کرد که برای هر عضو جدار نازک با ضخامت یکنواخت و با شکل دلخواه، ماکزیمم تنش برشی مانند ماکزیمم تنش برشی در یک میله مستطیلی که نسبت  $d/t$  بسیار بزرگی دارد، به دست آورد. در این حالت،  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  خواهد بود و روابط فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{dt^2} \quad ; \quad \phi = \frac{3T}{Gdt^3}$$

به عنوان مثال، تنش برشی ماکزیمم، تحت اثر لنگر پیچشی یکسان، در میله‌های با مقاطع نشان داده شده در شکل‌های زیر باهم برابرند. البته لازم به ذکر است که به دلیل تمرکز تنش، مقدار تنش برشی در گوشه‌ها افزایش می‌یابد که می‌تواند با اعمال ضریب تمرکز تنش، محاسبه شود.





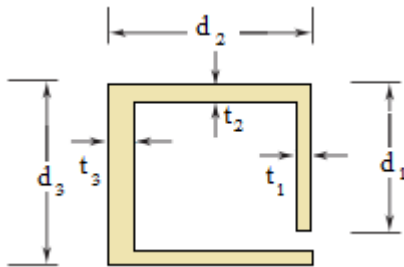
**تمرکز تنش:** در گوشه‌های مقاطع به دلیل تمرکز تنش، باید تنش برشی به دست آمده از رابطه فوق، در یک ضریب افزایش  $k$  که از جدول زیر به دست می‌آید، ضرب شود. در نتیجه تنش ماکزیمم در گوشه مقاطع برابر است با:

$$\tau_{max} = k \frac{3T}{dt^2}$$

r/t	1	0.5	0.25	0.125
k	1.75	2	2.25	2.5

### مقاطع ساخته شده از اجزای با ضخامت‌های مختلف (مقاطع جدارنازک باز)

در صورتی که مقطع میله‌ای که تحت پیچش قرار می‌گیرد، از  $n$  قسمت با طول‌های  $d_i$  و ضخامت‌های  $t_i$ ، به طوری که نسبت طول به ضخامت‌ها زیاد باشد، تشکیل شده باشد، مقادیر  $J$  و  $\tau$  و  $\phi$  از روابط زیر محاسبه می‌شود:



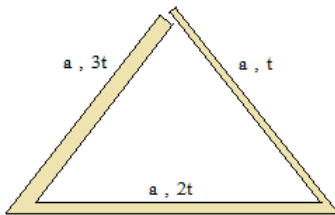
$$J_i = \frac{1}{3} b_i t_i^3$$

$$\tau_i = \frac{T t_i}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3}$$

$$\phi = \frac{TL}{G \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3}$$

تنش ماکزیمم در وسط مستطیلی که ضخامت بیش‌تری دارد ایجاد می‌شود.

**مثال ۸:** در مقطع جدارنازک باز مثلثی مطابق شکل، تنش برشی متوسط ماکزیمم تحت اثر لنگر پیچشی  $T$  چقدر است؟

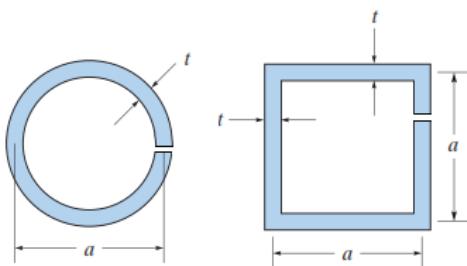


**حل:** تنش برشی متوسط ماکزیمم، در وسط ضلعی که ضخامت بیش‌تری دارد، رخ می‌دهد؛ بنابراین:

$$\tau_i = \frac{T t_i}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3} = \frac{T (3t)}{\frac{1}{3} (at^3 + a(2t)^3 + a(3t)^3)} = \frac{T}{4at^2}$$

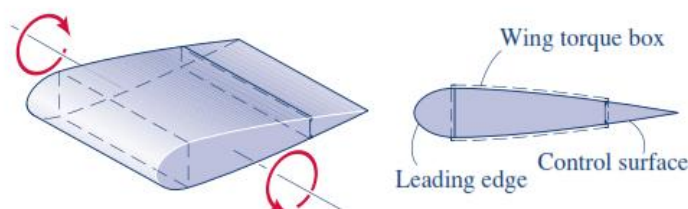
### تمرین:

$\gamma$  زاویه پیچش دومیله هم‌جنس با مقاطع مطابق شکل را با هم مقایسه کنید.



## لوله‌های جدارنازک بسته

لوله‌های جدارنازک با مقاطع غیر دایره‌ای، کاربردهای گوناگونی از جمله در ساخت بال هواپیما دارد. در این قسمت، رفتار این مقاطع، با سطح مقطع ثابت و ضخامت متغیر، بدون هیچ شکافی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای درک رفتار چنین مقطعی، ابتدا به تعریف مفهوم «جریان برش» می‌پردازیم.



## جریان برش

در شکل (a) یک جزء کوچک به طول محدود  $s$  و پهنای  $dx$  از یک لوله جدارنازک، با ضخامت متغیر انتخاب شده که در شکل (b) تنش‌های برشی بر روی این جزء، تحت اثر لنگر پیچشی  $T$ ، نشان داده شده است. به علت تفاوت ضخامت‌ها در طرفین این جزء، تنش‌های برشی  $\tau_A$  و  $\tau_B$  در نقاط  $A$  و  $B$  با هم متفاوت خواهد بود. با توجه به مساوی بودن  $dx$  در دو وجه، تعادل نیروها ایجاب می‌کند که:

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B$$

یعنی:

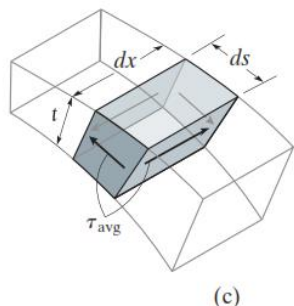
حاصل ضرب تنش برشی متوسط در ضخامت لوله در هر نقطه روی سطح مقطع لوله یکسان است.

این حاصل ضرب، «جریان برش» نامیده می‌شود ( $q$ )، و می‌تواند با رابطه زیر بیان شود:

$$q = \tau_{avg} t$$

چون  $q$  روی سطح مقطع ثابت است، بیش‌ترین تنش برشی متوسط در جایی که لوله ضخامت کمتری دارد، ایجاد می‌شود. اکنون یک جزء کوچک به ضخامت  $t$ ، طول  $ds$  و پهنای  $dx$  از لوله را مطابق شکل (c) در نظر بگیرید. مساحت وجه جلوی جزء که تنش برشی متوسط روی آن عمل می‌کند، برابر است با:  $dA = t ds$ ، بنابراین،  $dF = \tau_{avg} (t ds) = q ds$ ، یا:  $q = dF/ds$ . به عبارت دیگر، جریان برش نیرو بر واحد طول را در راستای سطح مقطع لوله اندازه می‌گیرد.

## تنش برشی متوسط

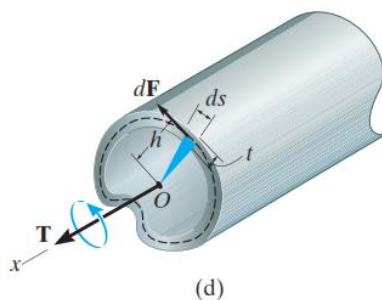


تنش برشی متوسط را می‌توان با در نظر گرفتن لنگر پیچشی به وجود آمده از این تنش، حول نقطه دلخواه  $O$  در داخل مرکز لوله، به پیچش  $T$  مطابق شکل (d) مربوط کرد. تنش برشی متوسط  $\tau_{avg}$  در مساحت  $dA = t ds$  باعث ایجاد نیروی  $dF$  روی جزء لوله می‌شود. این نیرو مماس بر خط مرکز جداره لوله عمل می‌کند و اگر بازوی لنگر آن  $h$  فرض شود، لنگر پیچشی برابر خواهد بود با:

$$dT = h(dF) = h(\tau_{avg} t ds)$$

و برای کل سطح مقطع، خواهیم داشت:

$$T = \oint h \tau_{avg} t ds$$



در این رابطه، انتگرال روی خط، بیانگر آن است که انتگرال گیری باید حول تمامی مرکز سطح انجام شود. چون جریان برش برابر با:  $q = \tau_{avg} t$  ثابت است، می‌تواند از انتگرال خارج شود و در نتیجه:

$$T = \tau_{avg} t \oint h ds$$

می‌توان یک ساده‌سازی ترسیمی برای محاسبه انتگرال انجام داد. برای این کار، باید توجه داشت سطح متوسط که با مثلث تیره‌رنگ در شکل (d) مشخص شده است، عبارت است از:  $dA_m = \frac{1}{2} h ds$ . بنابراین:

$$T = 2\tau_{avg} t \int dA_m = 2\tau_{avg} t A_m$$

با حل این معادله برای  $\tau_{avg}$  داریم:

$$\tau_{avg} = \frac{T}{2tA_m}$$

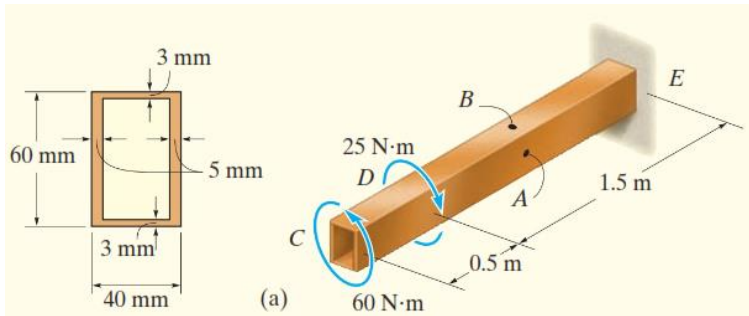
در این رابطه،  $A_m$ ، سطح متوسط محصور در داخل مرکز تار میانی ضخامت لوله است. جریان برش نیز در سرتاسر سطح مقطع ثابت و برابر است با:

$$q = \frac{T}{2A_m}$$

## زاویه پیچش

زاویه پیچش یک لوله جدارنازک به طول  $L$  را می‌توان با استفاده از روش‌های انرژی تعیین کرد. اگر ماده به صورت ارتجاعی خطی عمل کند، و  $G$  مدول برشی آن باشد، زاویه پیچشی، بر حسب رادیان از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$



**مثال ۹:** لوله برنزی نشان داده شده در شکل (a)، در تکیه‌گاه E ثابت شده و تحت لنگرهای پیچشی در نقاط C و D قرار گرفته است. تنش برشی متوسط را در نقاط A و B تعیین کنید. همچنین زاویهٔ پیچش انتهای C چقدر است؟  $G = 38 \text{ GPa}$

**حل:**

**تنش برشی متوسط:** اگر از نقاط A و B برش زده شود، نمودار جسم آزاد به صورت نشان داده شده در شکل (b) و لنگر پیچشی در این مقطع برابر با 35 N.m خواهد بود. با توجه به شکل (d)، سطح متوسط عبارت است از:

$$A_m = (0.035 \text{ m})(0.057 \text{ m}) = 0.00200 \text{ m}^2$$

در نقطه A که ضخامت جداره،  $t_A = 5 \text{ mm}$  است، تنش برشی متوسط برابر است با:

$$\tau_A = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35 \text{ N}\cdot\text{m}}{2(0.005 \text{ m})(0.00200 \text{ m}^2)} = 1.75 \text{ MPa}$$

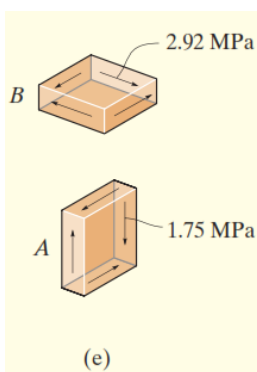
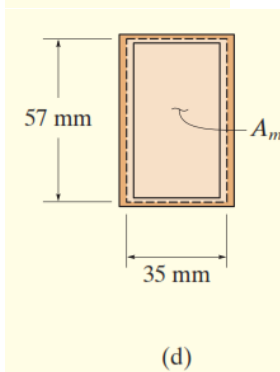
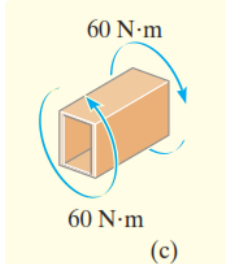
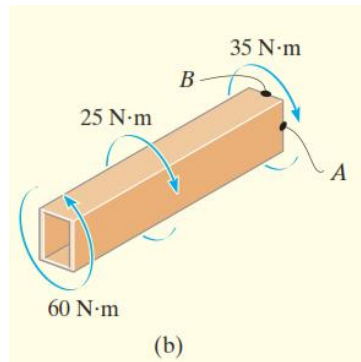
و در نقطه B ضخامت برابر است با  $t_B = 3 \text{ mm}$ ، بنابراین:

$$\tau_B = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35 \text{ N}\cdot\text{m}}{2(0.003 \text{ m})(0.00200 \text{ m}^2)} = 2.92 \text{ MPa}$$

این نتایج روی اجزای واقع در نقاط A و B در شکل (e) نشان داده شده است. به جهت لنگر پیچشی بر میله و جهت تنش‌های ایجاد شده در پشت هر یک از این اجزاء دقت کنید (جهت تنش برشی در مقاطع جدارنازک بسته، در خلاف جهت لنگر پیچشی وارد است).

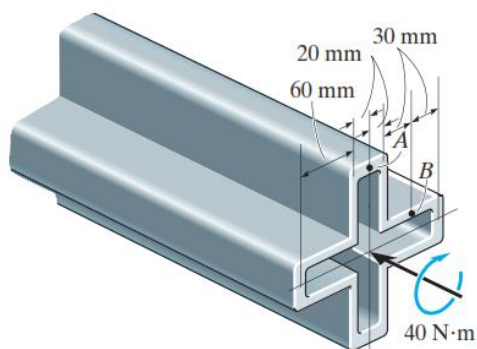
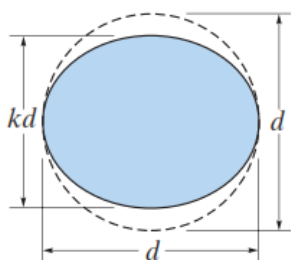
**زاویهٔ پیچش:** بر اساس آن چه در نمودارهای جسم آزاد نشان داده شده در شکل‌های (b) و (c) مشاهده می‌شود، لنگرهای پیچشی داخلی در نواحی DE و CD به ترتیب عبارتند از 60 N.m و 35 N.m. همان طور که قبلاً گفته شد، این لنگرهای پیچشی، مثبتند؛ بنابراین زاویهٔ پیچش برابر است با:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \\ &= \frac{60 \text{ N}\cdot\text{m} (0.5 \text{ m})}{4(0.00200 \text{ m}^2)^2 (38(10^9) \text{ N/m}^2)} \left[ 2\left(\frac{57 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) + 2\left(\frac{35 \text{ mm}}{3 \text{ mm}}\right) \right] \\ &\quad + \frac{35 \text{ N}\cdot\text{m} (1.5 \text{ m})}{4(0.00200 \text{ m}^2)^2 (38(10^9) \text{ N/m}^2)} \left[ 2\left(\frac{57 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) + 2\left(\frac{35 \text{ mm}}{3 \text{ mm}}\right) \right] \\ &= 6.29(10^{-3}) \text{ rad} = 0.360^\circ \end{aligned}$$



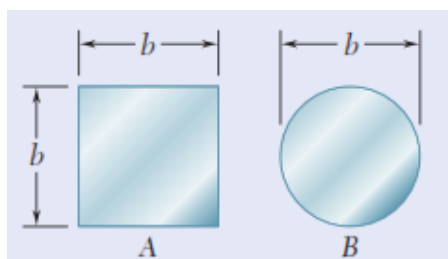
## تمرین

۸) برای مقابله با پیچش، میله‌ای با مقطع دایره‌ای مورد نیاز بوده؛ اما در فرایند ساخت، به صورت بیضی درآمده است. مطابق شکل، یکی از ابعاد، با ضریب  $k$  کوچک‌تر از بعد دیگر است. ضریب افزایش حداکثر تنش برشی را تعیین کنید.

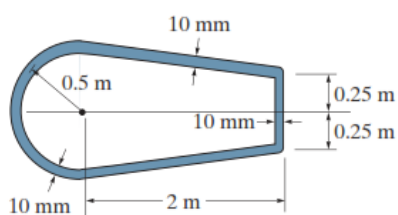


۹) لوله فولادی مطابق شکل، به ضخامت ثابت 5 mm تحت پیچش  $T=40 \text{ N}\cdot\text{m}$  قرار می‌گیرد؛ تنش برشی متوسط پدید آمده در نقاط A و B را تعیین کنید. تنش برشی روی جزء حجم‌های واقع در این نقاط را نشان دهید.

$$G=75 \text{ GPa}$$

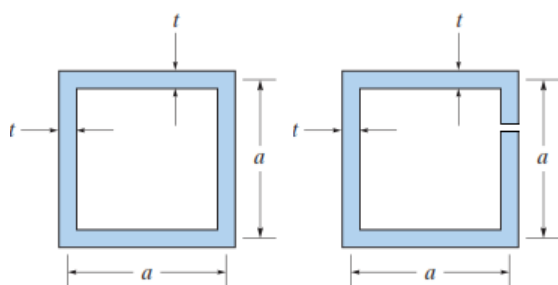


۱۰) دو محور هم‌جنس با مقاطع عرضی مربعی و دایره‌ای مطابق شکل، تحت اثر لنگرهای پیچشی یکسان قرار می‌گیرند. نسبت ماکزیمم تنش متوسط در محور با مقطع مربعی به دایره‌ای را به دست آورید.



۱۱) ابعاد متوسط سطح مقطع لبه راهنما و جعبه پیچش بال یک هواپیما را می‌توان به صورت تقریبی، مطابق شکل روبه‌رو نشان داد. اگر این مقطع تحت پیچش 4.5 MN.m قرار گیرد، تنش برشی متوسط و زاویه پیچش در هر متر طول تیر را تعیین کنید.

$$G=27 \text{ GPa}$$

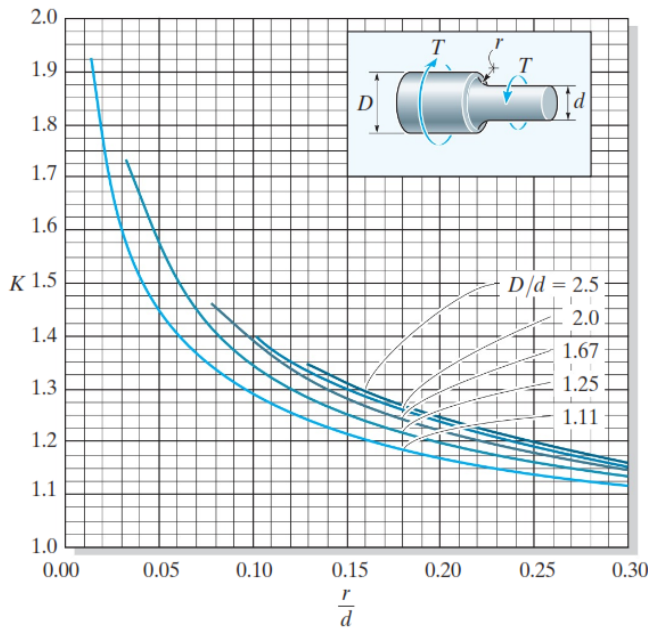


۱۲) تنش برشی متوسط ماکزیمم و زاویه پیچش را تحت اثر لنگر پیچشی T وارد بر میله‌های هم‌جنس با مقاطع مطابق شکل، مقایسه کنید.

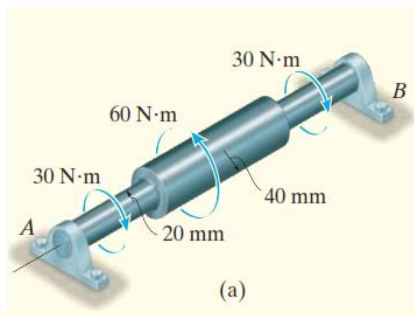
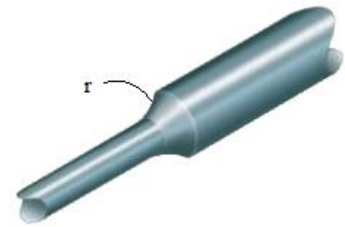
## تمرکز تنش در محورهای دایره‌ای

در محل تغییرات ناگهانی در مقطع، توزیع تنش برشی در محور پیچیده است و با روابطی که برای محاسبه آن بیان شد، به دست نمی‌آید و نیاز به محاسبات پیچیده‌ای دارد. در موارد کاربردی، تنش برشی ماکزیمم در محل ناپیوستگی محور را می‌توان با اعمال ضریب تمرکز تنش بر تنش برشی متوسط آن محاسبه کرد. این ضریب  $K$ ، می‌تواند از نمودار زیر به دست آید.

$$\tau_{max} = K\tau_{avg} = K \frac{Tc}{J}$$



با توجه به نمودار ملاحظه می‌گردد که افزایش شعاع قوس، در محل ناپیوستگی، باعث کاهش مقدار  $K$  می‌شود؛ بنابراین، برای کاهش تنش برشی ماکزیمم، باید شعاع این قوس را افزایش دهیم.



**مثال ۱۰:** محور نشان داده شده در شکل (a)، به وسیله یاتاقان‌های A و B نگهداشته شده و است، حداکثر تنش برشی در محور، بر اثر تحت اثر لنگرهای پیچشی وارده، تعیین کنید. شعاع قوس در محل باریک شدن محور،  $r=6$  mm است.

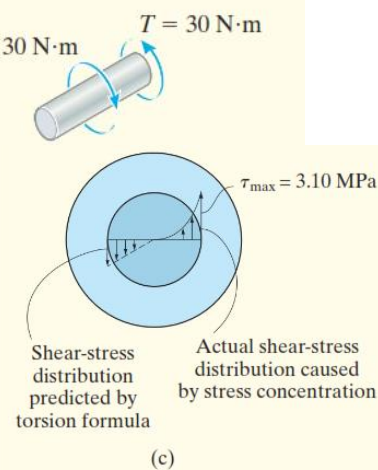
**حل:**

**لنگر پیچشی داخلی:** با توجه به تعادل، می‌توان دریافت که بیشترین تنش برشی، تحت لنگر پیچشی 30 N.m، در قسمتی که قطر محور کم‌تر است، پدید می‌آید.

**حداکثر تنش برشی:** ضریب تمرکز تنش، از نمودار فوق به دست می‌آید:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{d} &= \frac{2(40 \text{ mm})}{2(20 \text{ mm})} = 2 \\ \frac{r}{d} &= \frac{6 \text{ mm}}{2(20 \text{ mm})} = 0.15 \end{aligned} \right\} K=1.3$$

$$\tau_{max} = K \frac{Tc}{J}; \quad \tau_{max} = 1.3 \left[ \frac{30 \text{ N} \cdot \text{m} (0.020 \text{ m})}{(\pi/2)(0.020 \text{ m})^4} \right] = 3.10 \text{ MPa}$$



توزیع واقعی تنش و توزیع تنش خطی بر اساس رابطه پیچش، در شکل (c) نشان داده شده است.



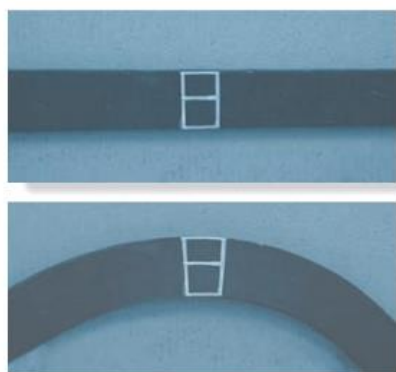
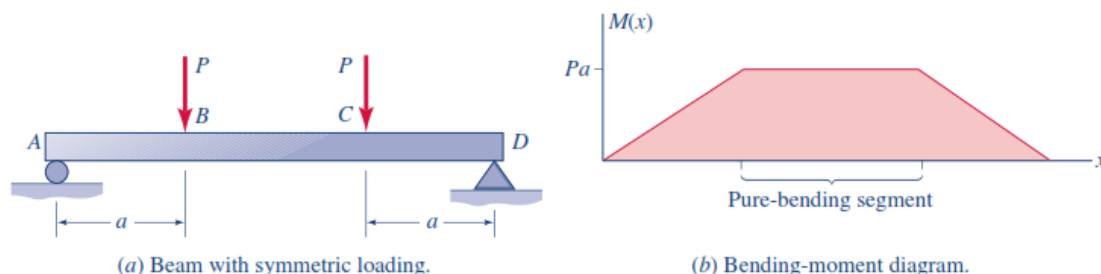
## فصل ششم

### خمش و ترکیب خمش و بار محوری

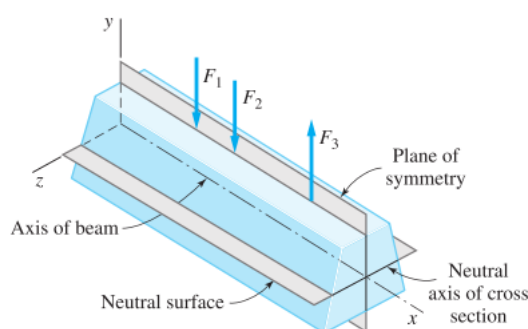


### خمش خالص (pure bending)

در هر مقطع از تیری که تحت اثر بارهای جانبی قرار گرفته است، در حالت کلی، نیروهای داخلی شامل نیروی برشی و لنگر خمشی ایجاد می‌شود. حالت خاصی که در مقطع تیر فقط لنگر خمشی اثر کند و نیروی برشی در آن صفر باشد، خمش خالص نامیده می‌شود. در شکل زیر، ناحیه بین دو بار متمرکز، تحت اثر خمش خالص قرار دارد.



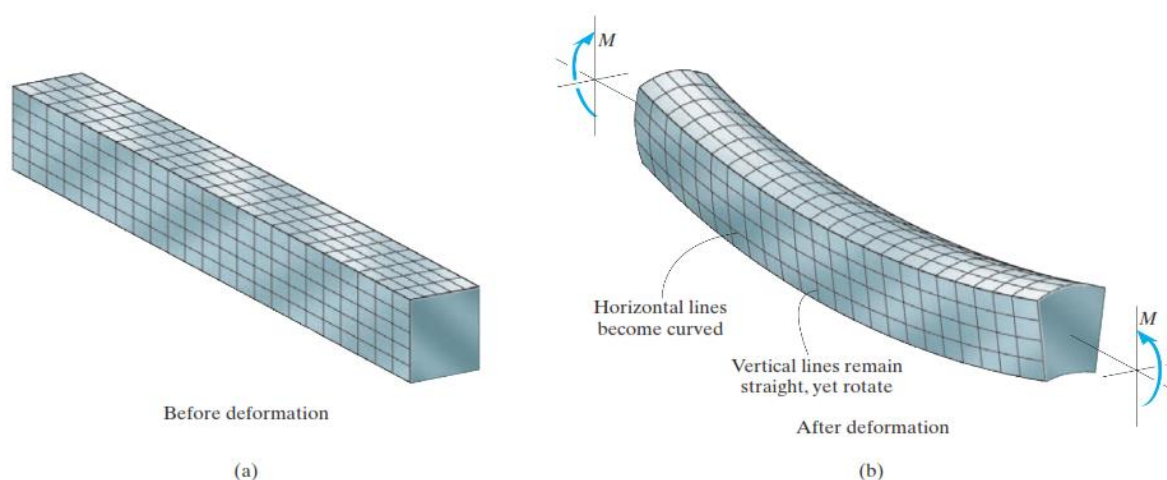
در این فصل، تنش‌ها و تغییر فرم‌های نسبی حاصل از خمش خالص بررسی می‌شود. برای دست یافتن به فرمول تنش، لازم است ابتدا تغییر شکل تیر ناشی از خمش مورد مطالعه قرار گیرد. برای این منظور، قطعه‌ای از یک میله لاستیکی با مقطع متقارن را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشاهده می‌گردد، در اثر اعمال لنگر خمشی بر این نمونه، تارهای قسمت فوقانی، تحت کشش، دچار افزایش طول می‌شود و از طول تارهای قسمت تحتانی آن، تحت فشار، کاسته می‌شود. در این بین، می‌توان خطی را یافت که طول آن تغییر نمی‌کند. صفحه‌ای که از امتداد این خط عبور می‌کند، صفحه خنثی نامیده می‌شود و محل تلاقی این صفحه را با هر مقطع عمودی از تیر، محور خنثی می‌نامند. در شکل زیر، صفحه تقارن، محور طولی تیر، محور خنثی و صفحه خنثی در یک تیر تحت خمش خالص، نشان داده شده است:



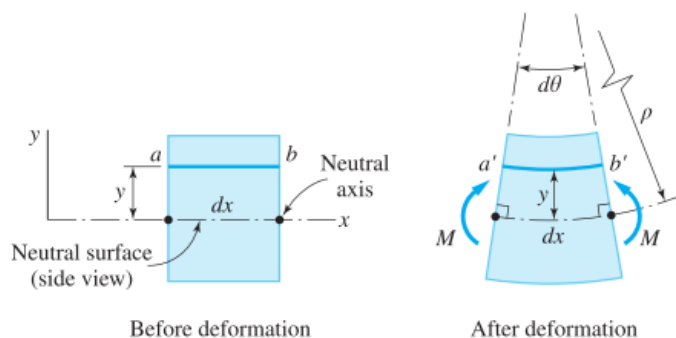
در این فصل، فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

- ✓ بارگذاری به صورت تدریجی بر تیر اثر می‌کند و تکان یا ضربه‌ای به هنگام بارگذاری وارد نمی‌شود.
- ✓ تیرها تحت بارگذاری پایدارند و دچار کمناش نمی‌شوند.
- ✓ مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور تیر، پس از خمش نیز به صورت صفحه‌ای باقی می‌مانند.
- ✓ تغییرات تغییر فرم نسبی در تارهای طولی موازی صفحه خنثی، خطی است؛ به عبارت دیگر، متناسب با فاصله از محور خنثی، تغییر فرم نسبی افزایش یا کاهش می‌یابد.

✓ همان طور که در شکل زیر دیده می شود، خطوط افقی به صورت منحنی تغییر شکل می دهند ولی خطوط عمودی مستقیم باقی مانده، می چرخند.



برای محاسبه تغییر فرم نسبی ایجاد شده در اثر لنگر خمشی، جزء کوچکی از این تیر را به طول  $dx$  مطابق شکل زیر، در نظر می گیریم. در اثر اعمال لنگر خمشی مثبت  $M$ ، این جزء، دچار تغییر فرم می شود به طوری که طول خط واقع در صفحه خنثی تغییری نمی کند اما خطوط واقع در زیر آن، بلندتر و خطوط واقع در روی آن، کوتاه تر می شوند.



اندازه  $dx$  را می توان بر حسب شعاع انحنای  $\rho$  و زاویه بین لبه های جزء  $d\theta$  بیان کرد:

$$dx = \rho d\theta$$

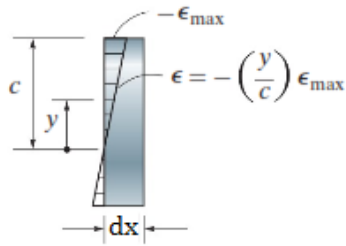
طول کاهش یافته  $a'b'$ ، به فاصله  $y$  از صفحه خنثی نیز به همین ترتیب برابر است با:

$$\overline{a'b'} = (\rho - y) d\theta$$

از آن جا که طول اولیه آن  $ab$  با  $dx$  برابر بوده است، تغییر فرم نسبی در فاصله  $y$  نسبت به صفحه خنثی برابر است با:

$$\epsilon = \frac{\overline{a'b'} - \overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{(\rho - y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

این نتیجه مهم نشان می دهد که تغییر فرم نسبی عمودی هر جزء از تیر، بستگی به موقعیت  $y$  آن نسبت به صفحه خنثی و



Normal strain distribution

شعاع انحنای محور طولی تیر در آن نقطه دارد. به عبارت دیگر، برای هر مقطع خاص، تغییر فرم نسبی عمودی به صورت خطی با فاصله  $y$  از محور خنثی تغییر می‌کند. این مقدار، برای خطوط واقع در بالای محور خنثی ( $+y$ )، با کاهش ( $-ε$ ) و برای خطوط واقع در زیر محور خنثی، با افزایش ( $+ε$ ) همراه است. بدین ترتیب معلوم می‌شود که حداکثر تغییر فرم نسبی عمودی در دورترین فاصله از محور خنثی ( $y=c$ ) رخ می‌دهد:  $ε_{max} = c/ρ$  بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{ε}{ε_{max}} = -\left(\frac{y/ρ}{c/ρ}\right)$$

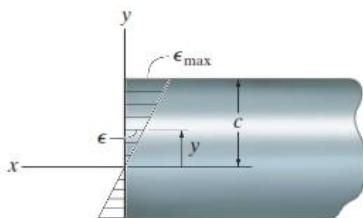
و نتیجه گرفت:

$$ε = -\left(\frac{y}{c}\right)ε_{max}$$

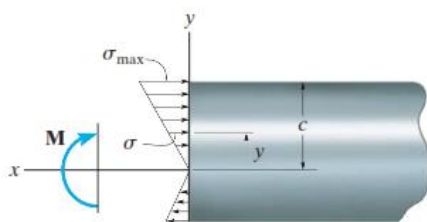
### فرمول خمش

در این بخش، در پی یافتن معادله‌ای هستیم که رابطه بین توزیع تنش در مقطع تیر و لنگر خمشی وارد بر آن را بیان کند. با فرض آن که رفتار مصالح به کار رفته به صورت ارتجاعی خطی باشد، با توجه به رابطه هوک ( $σ = Eε$ )، از تغییرات خطی تغییر فرم نسبی، می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات تنش نیز بر روی مقطع باید خطی باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$σ = -\left(\frac{y}{c}\right)σ_{max}$$

Normal strain variation  
(profile view)

(a)

Bending stress variation  
(profile view)

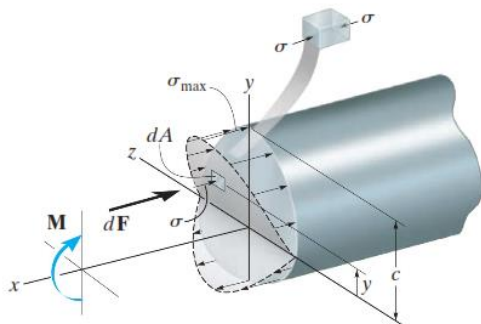
(b)

این معادله، توزیع تنش بر روی سطح مقطع تیر را بیان می‌کند. برای لنگر خمشی  $+M$  که در جهت  $+z$  عمل می‌کند، به‌ازای مقادیر مثبت  $y$ ، مقدار  $σ$  منفی (تنش فشاری) به دست می‌آید و مقادیر منفی  $y$ ، منجر به مقادیر مثبت برای  $σ$  (تنش کششی) می‌شود.

### موقعیت محور خنثی

برای تعیین موقعیت محور خنثی روی مقطع تیر، برآیند نیروهای حاصل از توزیع تنش بر روی مقطع را مساوی صفر قرار می‌دهیم. با توجه به شکل مقابل، نیروی  $dF = σdA$  روی جزء سطح دلخواه  $dA$  اثر می‌کند؛ از این رو می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} F_R = \Sigma F_x; \quad 0 &= \int_A dF = \int_A \sigma dA \\ &= \int_A -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{max} dA \\ &= \frac{-\sigma_{max}}{c} \int_A y dA \end{aligned}$$



Bending stress variation

چون  $\sigma_{max}/c$  صفر نیست، پس:

$$\int_A y dA = 0$$

به عبارت دیگر، گشتاور اول سطح مقطع عضو باید حول محور خنثی صفر باشد. این شرط تنها در صورتی می‌تواند برقرار باشد که محور خنثی بر محور افقی که از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند، منطبق باشد.

### لنگر خمشی

لنگر داخلی  $M$  باید با لنگر پدید آمده از توزیع تنش حول محور خنثی برابر باشد. مطابق شکل فوق، لنگر  $dF$  حول محور خنثی عبارت است از:  $dM = y dF$ . و چون:  $dF = \sigma dA$ . با توجه به رابطه  $\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{max}$ ، برای کل سطح مقطع می‌توان نوشت:

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \quad M = \int_A y dF = \int_A y (\sigma dA) = \int_A y \left(\frac{y}{c} \sigma_{max}\right) dA$$

یا:

$$M = \frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y^2 dA$$

انترگرال فوق بیان گر گشتاور اینرسی سطح مقطع حول محور خنثی است و مقدار آن را با  $I$  نشان می‌دهیم. در نتیجه، معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}$$

همچنین، تنش عمودی در یک نقطه میانی به فاصله  $y$  از محور خنثی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

علامت منفی در این رابطه، به این دلیل است که در جهت مثبت  $y$  تنش فشاری (منفی) ایجاد می‌شود.

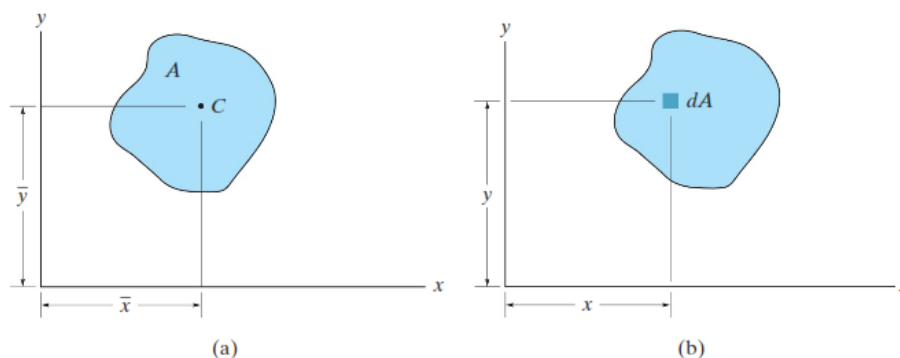
### خواص هندسی سطح

#### مرکز سطح

مرکز سطح یک مساحت عبارت است از نقطه‌ای که مرکز هندسی سطح را تعریف می‌کند. اگر سطح دارای شکل دلخواه باشد، مطابق شکل زیر، مختصات  $x$  و  $y$  بیان کننده موقعیت مرکز سطح  $C$  با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شود:

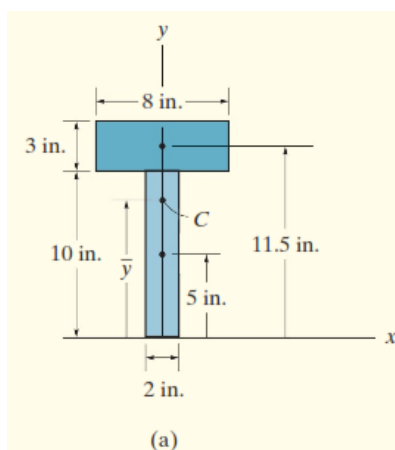
$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

صورت کسرها در این روابط به ترتیب عبارتند از: «گشتاور» جزء سطح  $dA$  حول محورهای  $y$  و  $x$  و مخرج کسرها بیان گر مساحت کل شکل هستند.



در صورتی که شکل دارای محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور قرار می‌گیرد. بنابراین اگر شکلی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز سطح آن بر محل تلاقی محورهای تقارن منطبق است. موقعیت مرکز سطح مرکب را می‌توان با تقسیم کردن آن به شکل‌های ساده‌تر تعیین کرد. در این صورت، به‌جای انتگرال‌گیری می‌توان از روابط زیر موقعیت مرکز سطح را به‌دست آورد:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

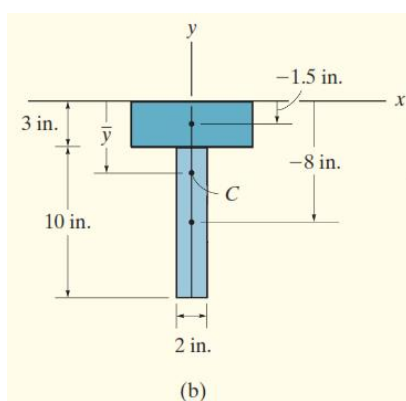


**مثال ۱:** موقعیت مرکز سطح مقطع T شکل نشان داده شده در شکل (a) را تعیین کنید.

**حل I:**

محور  $y$  محور تقارن شکل است، در نتیجه:  $\bar{x} = 0$  است. برای به دست آوردن  $\bar{y}$ ، محور  $x$  را روی لبه پایین سطح قرار می‌دهیم. سطح به دو مستطیل تقسیم می‌شود و با استفاده از رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{[5 \text{ in.}](10 \text{ in.})(2 \text{ in.}) + [11.5 \text{ in.}](3 \text{ in.})(8 \text{ in.})}{(10 \text{ in.})(2 \text{ in.}) + (3 \text{ in.})(8 \text{ in.})} = 8.55 \text{ in.}$$



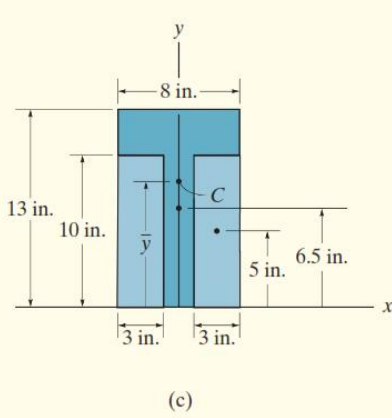
**حل II:**

محور  $x$  را در لبه بالای سطح در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{[-1.5 \text{ in.}](3 \text{ in.})(8 \text{ in.}) + [-8 \text{ in.}](10 \text{ in.})(2 \text{ in.})}{(3 \text{ in.})(8 \text{ in.}) + (10 \text{ in.})(2 \text{ in.})} = -4.45 \text{ in.}$$

**حل III:**

همچنین، می‌توان سطح مقطع را به صورت یک مستطیل بزرگ در نظر گرفت که دو مستطیل کوچک کم شده باشد، در نظر گرفت.

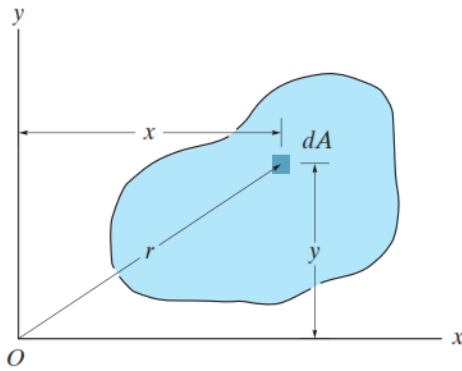


$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{[6.5 \text{ in.}](13 \text{ in.})(8 \text{ in.}) - 2[5 \text{ in.}](10 \text{ in.})(3 \text{ in.})}{(13 \text{ in.})(8 \text{ in.}) - 2(10 \text{ in.})(3 \text{ in.})}$$

$$= 8.55 \text{ in.}$$

**گشتاور اینرسی سطح**

این کمیت، خاصیت هندسی است که حول محورهای  $x$  و  $y$  به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

گشتاور اینرسی برخی از سطوح، نسبت به محورهایی که از مرکز آن سطح می‌گذرند، در جدول زیر نشان داده شده است:

<p>Triangular area</p>	<p>Rectangular area</p>
<p>Semicircular area</p>	<p>Circular area</p>
<p>Quarter circle area</p>	<p>Circular sector area</p>

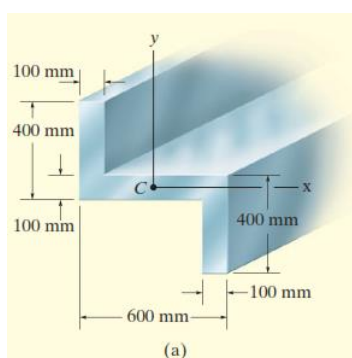
## سطوح مرکب

بسیاری از سطح مقطع‌ها از تعدادی شکل ساده‌تر متصل به هم تشکیل شده‌اند. برای تعیین گشتاور اینرسی چنین سطح مقطعی حول یک محور مشخص، ابتدا لازم است سطح را به بخش‌های ترکیب شده‌اش تقسیم کرد و فاصله عمودی از آن محور تا محور موازی آن که از مرکز سطح هر بخش عبور می‌کند، مشخص نمود. گشتاور اینرسی هر بخش نسبت به محور تعیین شده از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

سپس با جمع زدن نتایج مربوط به بخش‌های ترکیب شده گشتاور اینرسی کل سطح حول آن محور به‌دست می‌آید.



**مثال ۲:** گشتاور اینرسی مقطع نشان داده شده در شکل (a) را حول محورهای  $x$  و  $y$  که از مرکز سطح آن عبور می‌کنند، به‌دست آورید.

**حل:** مقطع نشان داده شده را به سه مستطیل A، B و D تقسیم می‌کنیم و با توجه به جدول فوق، گشتاور اینرسی هرکدام را حول محورهایی که از مرکز سطح آن‌ها عبور می‌کند، به‌دست می‌آوریم:

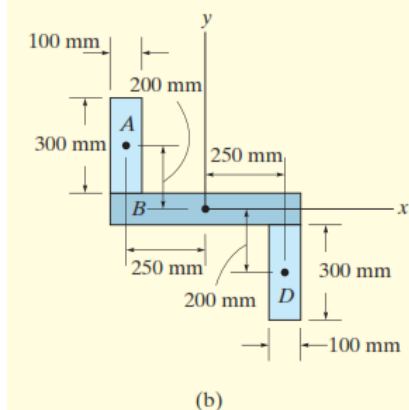
برای مستطیل‌های A و D داریم:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$

$$= 1.425(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$

$$= 1.90(10^9) \text{ mm}^4$$



برای مستطیل B نیز می‌توان نوشت:

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9) \text{ mm}^4$$

با جمع کردن مقادیر فوق، گشتاور اینرسی مقطع نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  که از مرکز سطح عبور می‌کنند، به‌دست می‌آید:

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$

$$= 2.90(10^9) \text{ mm}^4$$

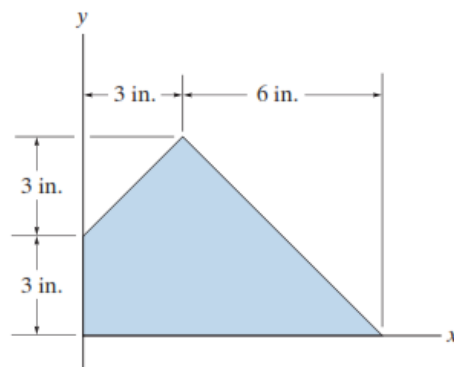
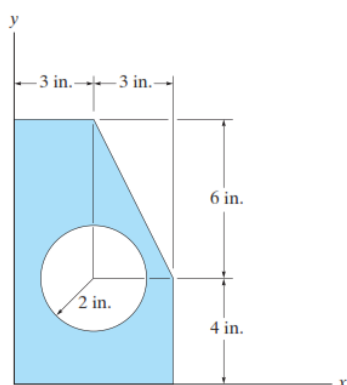
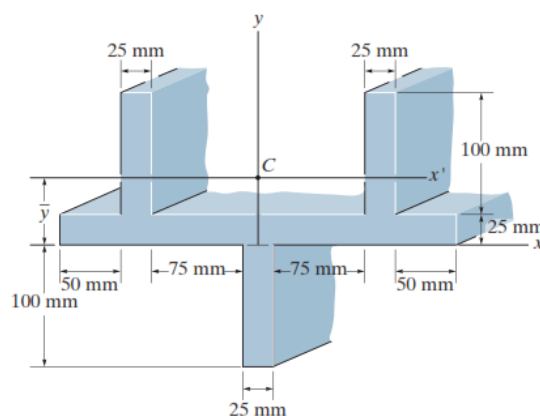
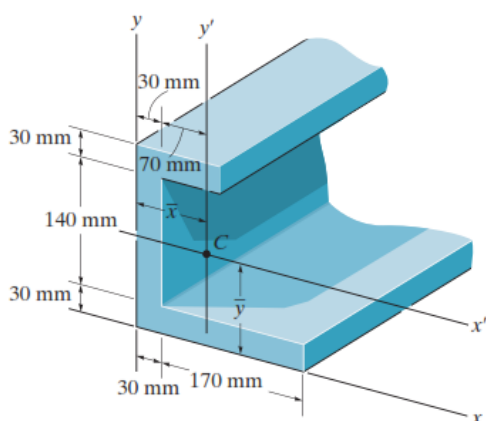
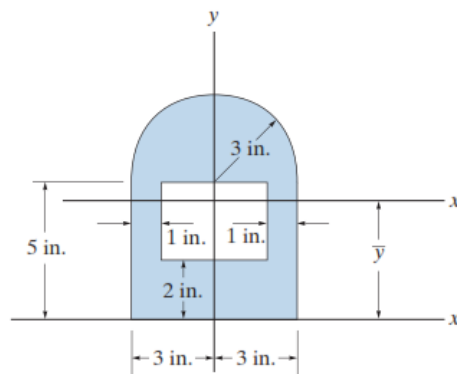
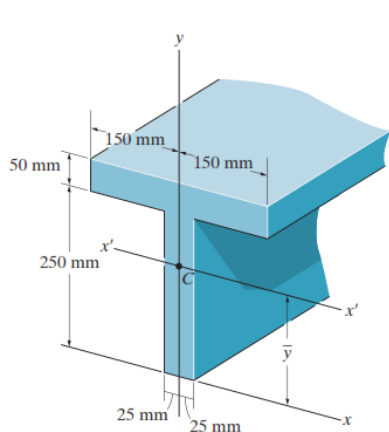
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

$$= 5.60(10^9) \text{ mm}^4$$

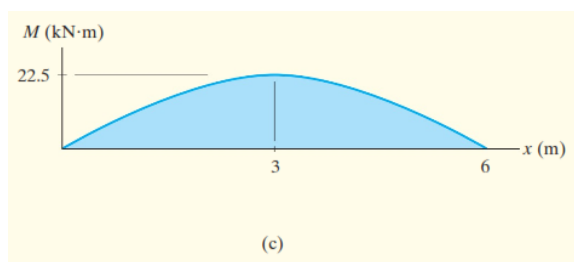
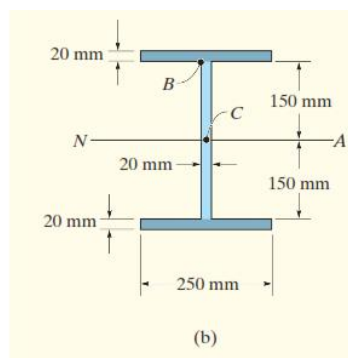
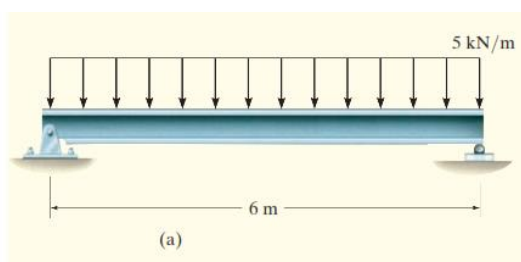


**تمرین**

(۱) پس از محاسبه موقعیت مرکز سطح هریک از مقاطع زیر، گشتاور اینرسی آن را نسبت به محورهایی که از این نقطه عبور می‌کنند، محاسبه کنید.



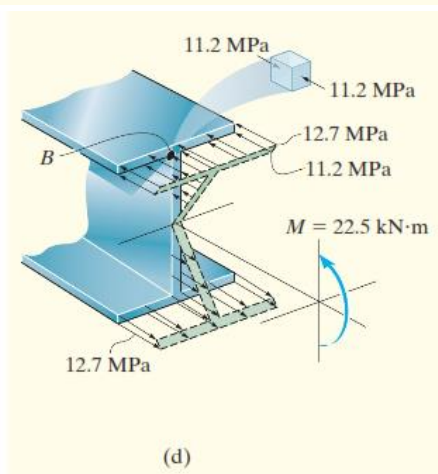
**مثال ۳:** تیر ساده نشان داده شده در شکل (a) دارای مقطع مطابق شکل (b) است. حداکثر تنش خمشی مطلق را در تیر به دست آورید و توزیع تنش روی سطح مقطع را در این موقعیت ترسیم کنید. همچنین، تنش در نقطه B را تعیین کنید.



**حل:**

**حداکثر لنگر خمشی داخلی:** با توجه به نمودار لنگر خمشی تیر، معلوم می‌شود که لنگر خمشی ماکزیمم در وسط دهانه و برابر است با:  $M = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

**ممان اینرسی مقطع:** به دلیل تقارن مقطع تیر، محور خنثی، از مرکز سطح مقطع که در وسط ارتفاع آن قرار دارد، عبور می‌کند.



$$I = \sum (\bar{I} + Ad^2)$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{12} (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.160 \text{ m})^2 \right]$$

$$+ \left[ \frac{1}{12} (0.020 \text{ m})(0.300 \text{ m})^3 \right]$$

$$= 301.3(10^{-6}) \text{ m}^4$$

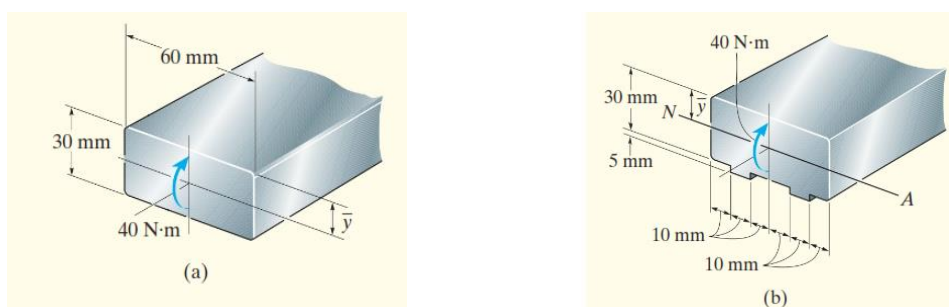
**تنش ماکزیمم:**

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\max} = \frac{22.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 12.7 \text{ MPa}$$

**تنش در نقطه B:** به همین ترتیب، با قرار دادن y نقطه B در فرمول خمش، تنش در آن نقطه حاصل می‌شود.

$$\sigma_B = -\frac{My_B}{I}; \quad \sigma_B = -\frac{22.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.150 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = -11.2 \text{ MPa}$$

**مثال ۴:** عضو دارای مقطع مستطیلی، مطابق شکل (a)، طوری طراحی شده است تا در برابر لنگر خمشی  $40 \text{ kN} \cdot \text{m}$  مقاومت کند. به منظور استحکام و صلبیت آن، پیشنهاد شده است که دو دنده (rib) به لبه پایین آن اضافه شود (شکل b). حداکثر تنش عمودی در عضو را در هریک از دو حالت، تعیین کنید.

**حل: بدون دنده‌ها:**

بدیهی است که محور خنثی در مرکز سطح مقطع مستطیلی قرار دارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\bar{y} = c = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m.}$$

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 = 0.135(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ N} \cdot \text{m})(0.015 \text{ m})}{0.135(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4.44 \text{ MPa}$$

**با دنده‌ها: تعیین موقعیت مرکز سطح:**

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} \\ &= \frac{[0.015 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2[0.0325 \text{ m}](0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}{(0.03 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2(0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})} \\ &= 0.01592 \text{ m} \end{aligned}$$

فاصله دورترین لبه مقطع از محور خنثی:

$$c = 0.035 \text{ m} - 0.01592 \text{ m} = 0.01908 \text{ m}$$

گشتاور اینرسی نسبت به محور خنثی:

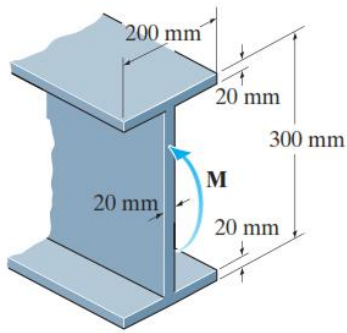
$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{1}{12}(0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.01592 \text{ m} - 0.015 \text{ m})^2 \right] \\ &+ 2 \left[ \frac{1}{12}(0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})^3 + (0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})(0.0325 \text{ m} - 0.01592 \text{ m})^2 \right] \\ &= 0.1642(10^{-6}) \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}(0.01908 \text{ m})}{0.1642(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4.65 \text{ MPa}$$

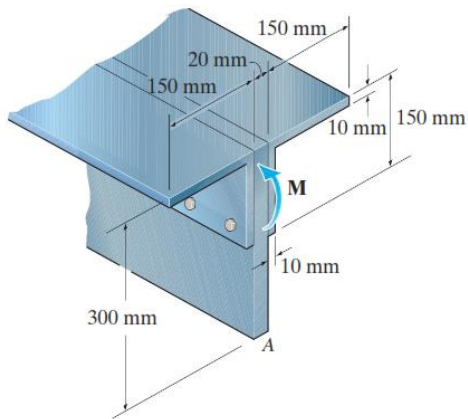
حداکثر تنش عمودی:

**تذکر:** این نتیجه حیرت‌آور نشان می‌دهد که اضافه کردن دنده‌ها به مقطع، به جای کاستن از حداکثر تنش عمودی، موجب افزایش آن شده است. بنابراین باید حذف شوند.

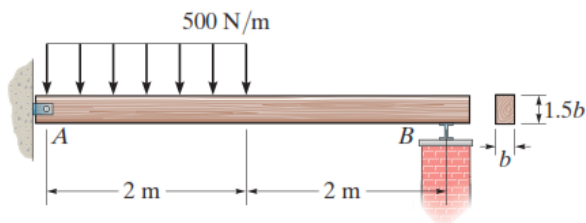
## تمرین:



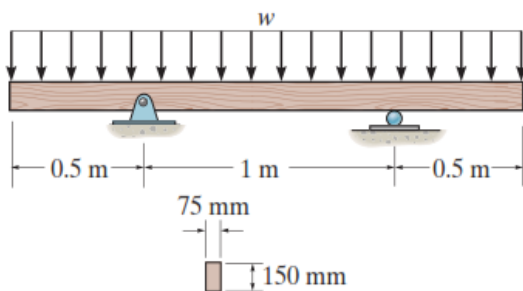
۲) در صورتی که مقطع تیر مطابق شکل، تحت اثر لنگر خمشی  $M = 50 \text{ kN.m}$  قرار گیرد، حداکثر تنش عمودی را به دست آورید.



۳) مقطع تیر مطابق شکل از یک ورق و دو نبشی ساخته شده است. اگر این مقطع تحت اثر لنگر خمشی  $M = 75 \text{ kN.m}$  قرار گیرد، تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم را محاسبه کنید.



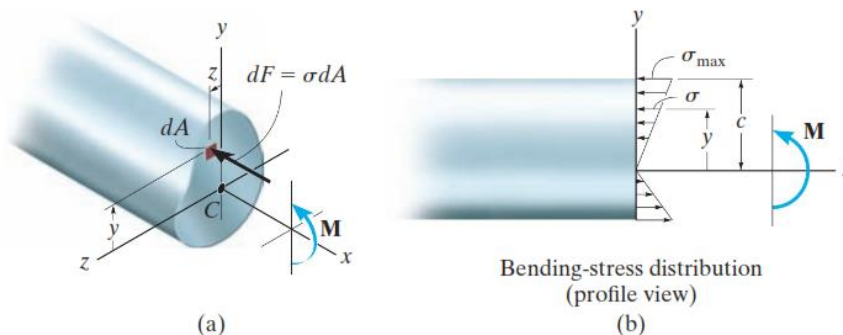
۴) تیر چوبی مطابق شکل، دارای سطح مقطع با نسبت ابعاد نشان داده شده است. اگر تنش عمودی مجاز  $\sigma_{allow} = 10 \text{ MPa}$  باشد، مقدار  $b$  را تعیین کنید.



۵) اگر  $w = 10 \text{ kN/m}$  باشد، حداکثر تنش عمودی ناشی از خمش را در تیر تعیین کنید. توزیع تنش‌ها روی سطح مقطع را ترسیم کنید.

## خمش نامتقارن - خمش دومتقارن

سطح مقطع نامتقارن یک تیر، مطابق شکل (a) را تحت اثر لنگر خمشی  $M$  حول محور  $Z$  در نظر بگیرید. مبدأ مختصات را در نقطه  $C$ ، مرکز سطح مقطع، فرض می‌کنیم.



نیروی عمودی وارد بر جزء کوچک  $dA$ ، دارای برون‌محوری  $Z$  نسبت به محور  $y$  و برون‌محوری  $y$  نسبت به محور  $Z$  است. برای حفظ تعادل در مقطع، باید برآیند تنش‌های وارد بر مقطع، مساوی با صفر باشد. بنابراین، اگر  $dF = \sigma dA$  نیروی وارد بر  $dA$  باشد، خواهیم داشت:

$$F_R = \Sigma F_x; \quad 0 = - \int_A \sigma dA$$

مجموع لنگرهای خمشی حاصل از نیروهای داخلی، حول محور  $Z$  نیز باید با لنگر خمشی خارجی وارد بر مقطع،  $M$  برابر باشد:

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \quad M = \int_A y \sigma dA$$

همچنین لنگر خمشی برآیند حاصل از نیروهای داخلی مقطع حول محور  $y$  نیز باید مساوی صفر باشد (لنگر خمشی خارجی حول محور  $y$  اثر نمی‌کند)؛ یعنی:

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad 0 = - \int_A z \sigma dA$$

اگر در این رابطه،  $\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{max}$  را که در آن  $\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}$  است، قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$0 = \frac{-\sigma_{max}}{c} \int_A yz dA$$

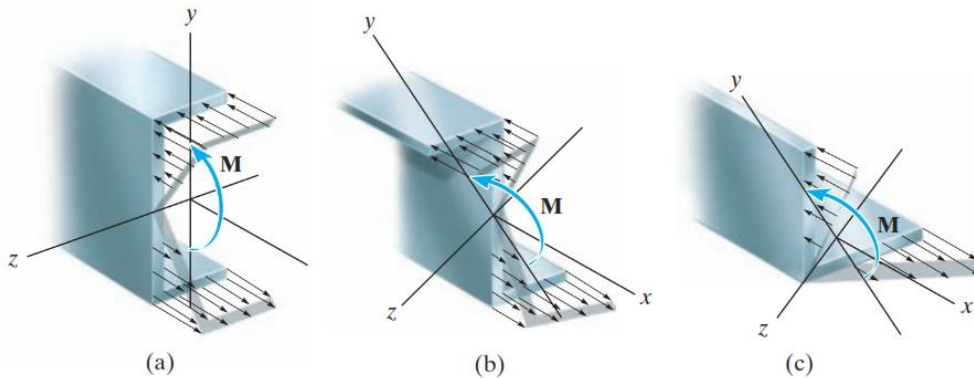
این رابطه ایجاب می‌کند که:

$$\int_A yz dA = 0$$

این انتگرال، حاصل ضرب اینرسی سطح مقطع نامیده می‌شود و در صورتی که محورهای  $y$  و  $Z$  به عنوان محورهای اصلی اینرسی انتخاب شوند، مقدار آن برابر با صفر خواهد بود. اگر سطح مورد نظر دارای یک محور تقارن باشد، محورهای اصلی، همواره در راستای محور تقارن و عمود بر آن هستند.

به‌عنوان مثال، در شکل (a) که دارای یک محور تقارن است، محورهای اصلی، با توجه به تقارن تعیین می‌شوند؛ اما برای شکل‌های

(b) و (c) باید محوره‌های اصلی را با استفاده از معادلات تبدیل اینرسی یا دایره مور اینرسی تعیین شوند که در ضمیمه این فصل آمده است. در ادامه، فقط مقطعی که دارای حداقل یک محور تقارن باشند، در نظر گرفته می‌شوند.



### لنگر خمشی وارد بر مقطع که حول هیچ کدام از محوره‌های اصلی مقطع عمل نمی‌کند.

در این صورت، باید لنگر را به مؤلفه‌هایش در راستای محوره‌های اصلی تجزیه کرد؛ سپس می‌توان از فرمول خمش برای تعیین تنش عمودی حاصل از هر یک از مؤلفه‌های لنگر، استفاده کرد. در نهایت نیز با استفاده از روش جمع آثار، تنش عمودی در نقطه مورد نظر را تعیین کرد.

در شکل (a)، لنگر  $M$  با زاویه  $\theta$  نسبت به محور  $Z$  اثر می‌کند. زاویه  $\theta$  را زمانی مثبت فرض می‌کنیم که جهت آن از محور  $+Z$  به سمت  $+Y$  باشد.

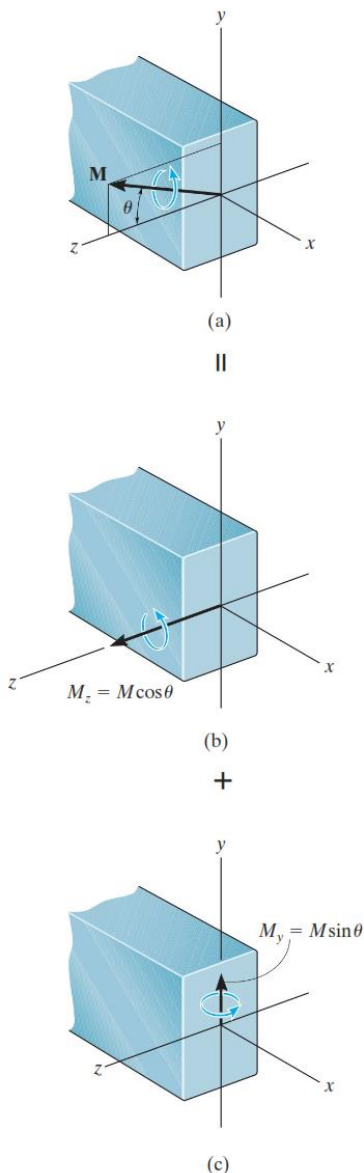
در شکل‌های (b) و (c) لنگر خمشی  $M$  که به مؤلفه‌هایش در راستای  $Z$  و  $Y$  تجزیه شده، نشان داده شده است. توزیع تنش‌های عمودی حاصل از این لنگرها نیز در شکل‌های (d)، (e) و (f) نشان داده شده است. در این شکل‌ها فرض شده است که:

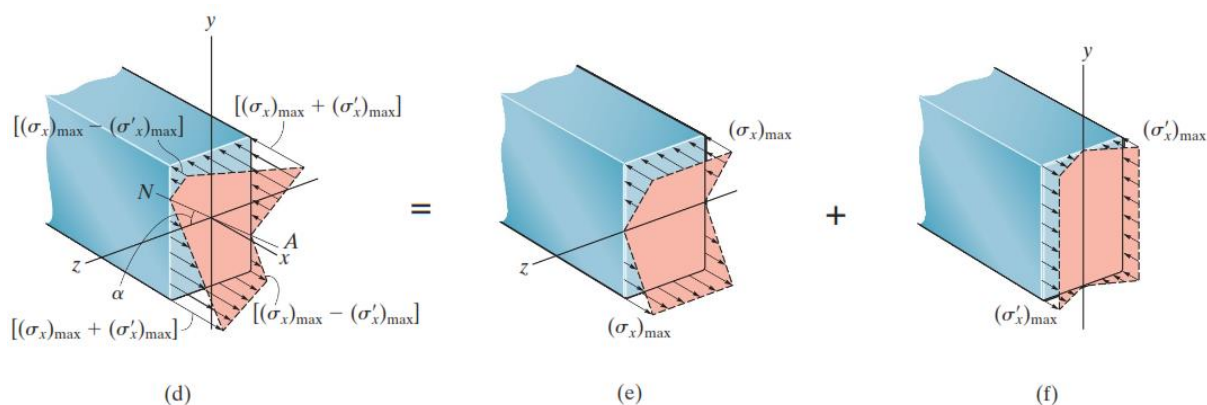
$$(\sigma_x)_{max} > (\sigma'_x)_{max}$$

با توجه به شکل‌ها، معلوم می‌شود که حداکثر تنش‌های کششی و فشاری:  $[(\sigma_x)_{max} + (\sigma'_x)_{max}]$  در دو گوشه مخالف سطح مقطع پدید می‌آید. با به کارگیری فرمول خمش برای هر یک از مؤلفه‌های خمش و جمع جبری نتایج، تنش عمودی در هر نقطه روی سطح مقطع، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

لنگرهای  $M_y$  و  $M_z$  وقتی مثبتند که در جهت مثبت محوره‌های  $Z$  و  $Y$  باشند. تنش عمودی، زمانی مثبت خواهد بود که تنش حاصل از لنگر خمشی، نقطه مورد نظر را تحت کشش قرار دهد و بالعکس، زمانی که تحت فشار قرار می‌گیرد، منفی است.





### معادله محور خنثی و امتداد آن

زاویه  $\alpha$  بین محور خنثی و محور Z در شکل (d) را می‌توان با قرار دادن  $\sigma = 0$  در معادله فوق تعیین کرد؛ چرا که روی محور خنثی، هیچ تنش عمودی وارد نمی‌شود. بنابراین داریم:

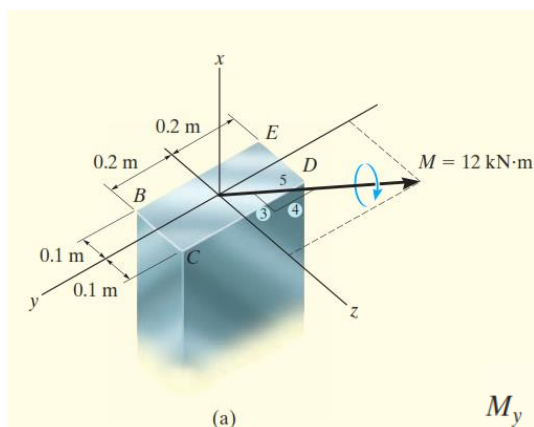
$$y = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

چون  $M_y = M \sin \theta$  و  $M_z = M \cos \theta$  است، پس می‌توان معادله محور خنثی را به صورت زیر نوشت:

$$y = \left( \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) z$$

شیب این خط را که عبارت است از:  $\tan \alpha = y/z$ ، می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$



**مثال ۵:** مقطع نشان داده شده در شکل (a) تحت اثر لنگر خمشی  $M = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$  قرار دارد. تنش‌های عمودی ایجاد شده در گوشه‌های این مقطع را تعیین کنید.

**حل:** با توجه به تقارن، معلوم می‌شود که محورهای Y و Z محورهای اصلی اینرسی هستند. لنگر خمشی وارده را به مؤلفه‌های آن در این دو جهت تجزیه می‌کنیم:

$$M_y = -\frac{4}{5}(12 \text{ kN}\cdot\text{m}) = -9.60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

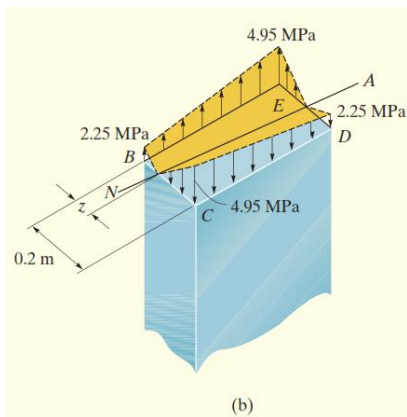
$$M_z = \frac{3}{5}(12 \text{ kN}\cdot\text{m}) = 7.20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

ممان اینرسی حول محورهای Y و Z عبارتند از:

$$I_y = \frac{1}{12}(0.4 \text{ m})(0.2 \text{ m})^3 = 0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.2 \text{ m})(0.4 \text{ m})^3 = 1.067(10^{-3}) \text{ m}^4$$

تنش‌های عمودی در گوشه‌های مقطع، ناشی از لنگرهای خمشی حول محورهای  $Y$  و  $Z$ ، به شرح زیر محاسبه می‌شوند:



$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = 2.25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = -4.95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = -2.25 \text{ MPa}$$

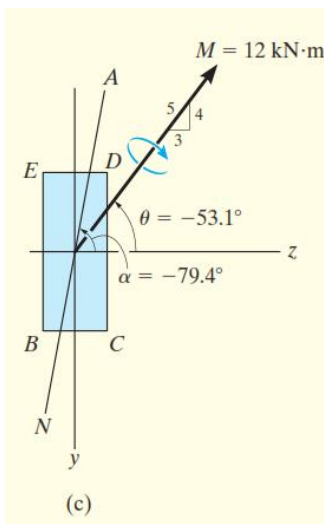
$$\sigma_E = -\frac{7.20(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(-0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = 4.95 \text{ MPa}$$

**امتداد محور خنثی:** موقعیت  $Z$  محور خنثی ( $N.A$ ) را می‌توان با تناسب بین دو مثلث تنش در وجوه  $BC$  و  $DE$  به دست آورد:

$$\frac{2.25 \text{ MPa}}{z} = \frac{4.95 \text{ MPa}}{(0.2 \text{ m} - z)}$$

$$0.450 - 2.25z = 4.95z$$

$$z = 0.0625 \text{ m}$$



به همین ترتیب، فاصله محور خنثی از  $D$  را نیز می‌توان محاسبه کرد. می‌توانیم راستای  $N.A$  را با استفاده از رابطه مربوطه به دست می‌آوریم. این معادله برای تعیین زاویه  $\alpha$  که این محور با  $Z$  یا محور اصلی ماکزیمم می‌سازد، به کار می‌رود. براساس قراردادی که پیش از این ذکر شد،  $\theta$  باید از محور  $+Z$  به سمت  $+Y$  سنجیده شود. در نتیجه، با توجه به جهت‌های مثبت محورهای مختصات،  $\theta$  برابر است با:

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{4}{3} = -53.1^\circ \text{ (or } \theta = +306.9^\circ)$$

در نتیجه، زاویه محور خنثی با محور  $Z$ ، برابر است با:

$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

$$\tan \alpha = \frac{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} \tan(-53.1^\circ)$$

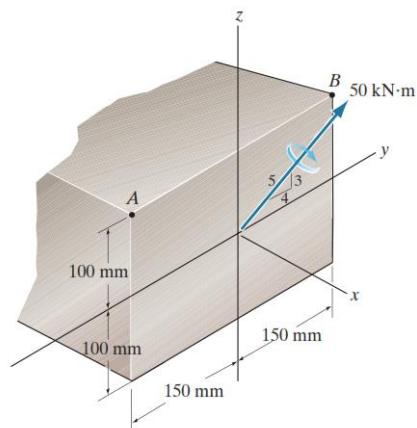
$$\alpha = -79.4^\circ$$

این نتایج در شکل (c) نشان داده شده‌اند.

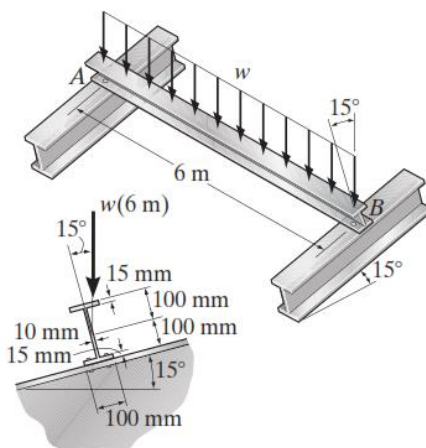


## تمرین:

۶) تنش خمشی به وجود آمده در گوشه‌های A و B و راستای محور خنثی را تعیین کنید.

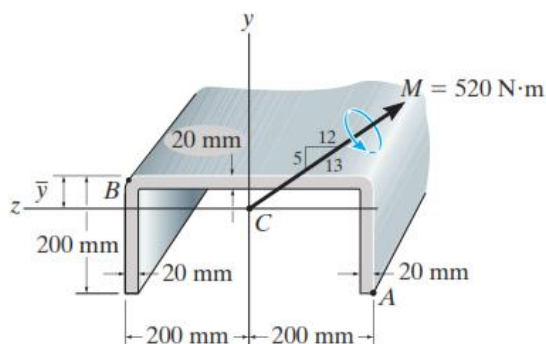


۷) حداکثر شدت بار گسترده  $w$  یکنواخت وارد بر تیر مطابق شکل را که تیر قادر به تحمل آن باشد، تعیین کنید. تکیه‌گاه‌های تیر ساده فرض شوند.  $\sigma_{allow} = 165 \text{ MPa}$

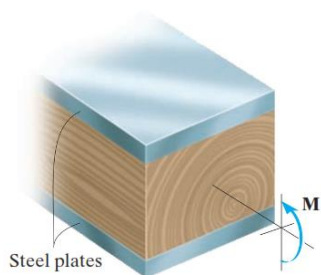


پاسخ:  $w = 4.37 \text{ kN/m}$

۸) ضمن تعیین موقعیت مرکز سطح مقطع تیر مطابق شکل زیر، حداکثر تنش خمشی و راستای محور خنثی را تعیین کنید.



## تیرهای با مقطع مرکب



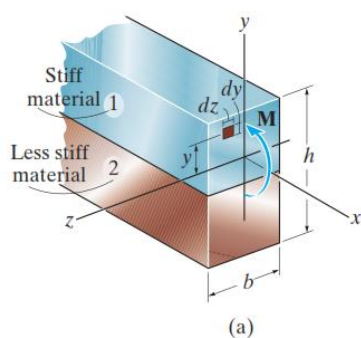
تیرهایی که از دو یا چند ماده مختلف ساخته شده باشند، تیرهای مرکب نامیده می‌شوند. برای مثال، تیر مطابق شکل، از چوب و تسمه‌های فولاد در بالا و پایین، برای استحکام بیشتر آن، ساخته شده است. فرمول خمش برای اعضای همگن به دست آمده است و نمی‌تواند مستقیماً برای تعیین تنش‌های عمودی در تیر مرکب استفاده شود. در این بخش، روشی برای «تبدیل» یک مقطع مرکب به مقطع همگن معادل آن معرفی شده است.

بدین منظور، تیر مرکب مطابق شکل زیر را که از دو ماده ۱ و ۲، با سختی متفاوت

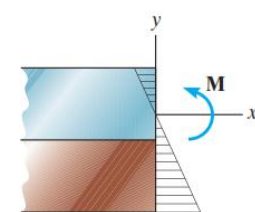
ساخته شده است را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم اتصال بین دو ماده کامل باشد و تغییر شکل مقطع در محل اتصال پیوسته باشد. اگر یک لنگر خمشی بر این تیر اعمال شود، همانند یک تیر همگن، سطح مقطع کل پس از خمش به صورت صفحه باقی می‌ماند. بنابراین، تغییر فرم نسبی عمودی به‌طور خطی، از صفر در محل محور خنثی، تا مقدار حداکثر آن در دورترین فاصله از محور خنثی تغییر می‌کند. اگر ماده را ارتجاعی خطی فرض کنیم، در هر نقطه در ماده ۱، تنش عمودی از رابطه  $\sigma = E_1 \epsilon$  به دست می‌آید و در برای ماده ۲، توزیع تنش از رابطه  $\sigma = E_2 \epsilon$  حاصل می‌شود. اگر ماده ۱ سخت‌تر از ماده ۲ باشد،  $E_1 > E_2$  بوده و بنابراین، توزیع تنش شبیه مشابه شکل‌های (c) و (d) خواهد بود. به ناپیوستگی تنش در محل اتصال دو ماده توجه کنید. با وجود آن که تغییر فرم نسبی یکسان است، به دلیل تغییر ناگهانی در مدول الاستیسیته، تنش نیز دچار تغییر ناگهانی می‌شود. برای آن که توزیع تنش ساده‌تر شود، مقطع تبدیل یافته معادل را جایگزین می‌کنیم. بدین صورت که تیر را ساخته شده از ماده ۱ یا ماده ۲ فرض می‌کنیم. اگر مقطع معادل را از جنس ماده ۲ که دارای سختی کمتر است فرض کنیم، باید بخش بالایی تیر را پهن‌تر در نظر بگیریم تا بتواند باری معادل با آنچه توسط ماده سخت‌تر حمل می‌کند را تحمل کند. پهنای لازم را می‌توان با در نظر گرفتن نیروی  $dF$  عمل‌کننده روی سطح  $dA$  تعیین کرد. این نیرو برابر است با:  $dF = \sigma dA = (E_1 \epsilon) dz dy$ . با فرض آن که جزء متناظر با ارتفاع  $dy$  در شکل (e) برابر با  $n dz$  باشد، می‌توان نوشت:  $dF' = \sigma' dA' = (E_2 \epsilon) n dz dy$  با مساوی قرار دادن این نیروها، به طوری که گشتاور یکسانی حول محور  $Z$  (محور خنثی) ایجاد کنند خواهیم داشت:

$$(E_1 \epsilon) dz dy = (E_2 \epsilon) n dz dy \text{ و در نتیجه:}$$

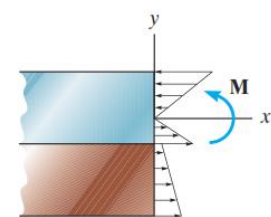
$$n = \frac{E_1}{E_2}$$



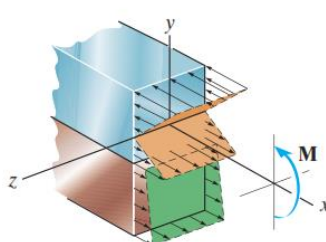
(a)

Normal strain variation  
(profile view)

(b)

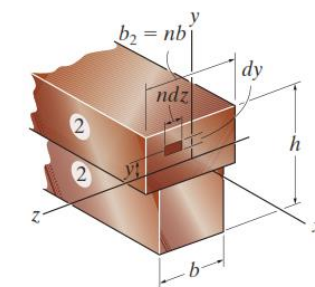
Bending stress variation  
(profile view)

(c)



Bending stress variation

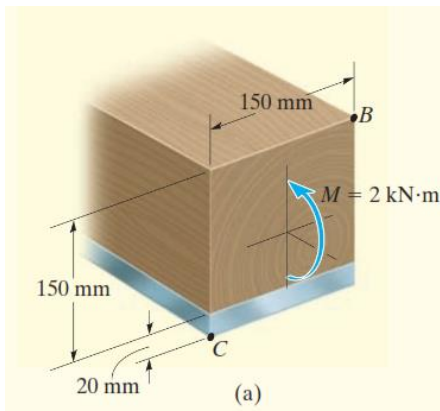
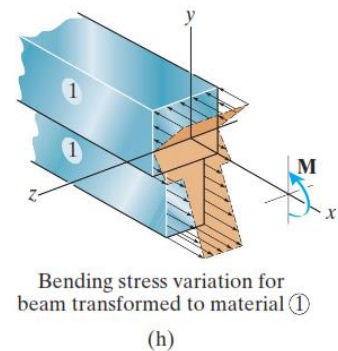
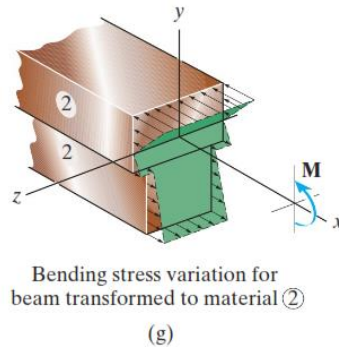
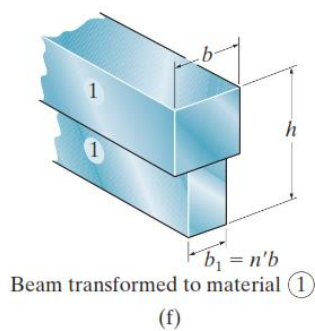
(d)



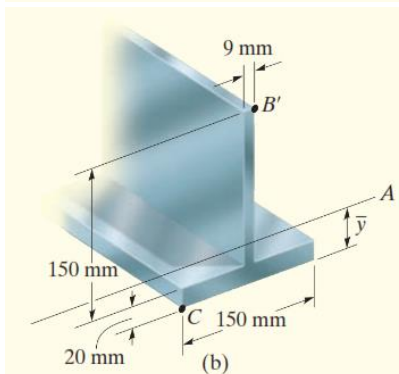
Beam transformed to material (2)

(e)

عدد بدون بعد  $n$  ضریب تبدیل نامیده می‌شود. این عدد نشان می‌دهد که مقدار پهنای سطح مقطع اولیه در ناحیه با سختی بیش‌تر،  $b$ ، باید در مقطع تبدیل‌یافته به  $b_2 = nb$  افزایش یابد. به‌طور مشابه، اگر ماده نرم‌تر به ماده سخت‌تر تبدیل شود، سطح مقطع، شبیه آنچه در شکل (f) نشان داده شده است، خواهد بود. که در آن  $n' = E_2/E_1$  است. در این حالت، ضریب تبدیل  $n'$  کمتر از یک خواهد بود، چون  $E_1 > E_2$  است. توزیع تنش عمودی روی سطح مقطع تبدیل‌یافته، به‌صورت خطی و مطابق شکل‌های (g) و (h) خواهد بود. در نتیجه، می‌توان با تعیین مرکز سطح (محل محور خنثی) و گشتاور اینرسی سطح تبدیل‌یافته، فرمول خمش را برای تعیین تنش در هر نقطه از تیر تبدیل‌یافته به کار برد. برای ماده تبدیل‌نشده، تنش در تیر تبدیل‌یافته و تیر واقعی یکسان است اما برای محاسبه تنش در ماده تبدیل‌شده، تنش به‌دست آمده را باید در  $n$  (یا  $n'$ ) ضرب کرد.



**مثال ۶:** تیر مرکب مطابق شکل، تحت تأثیر لنگر خمشی  $M = 2 \text{ kN}\cdot\text{m}$  قرار دارد. تنش‌های عمودی را در نقاط B و C تعیین کنید.  $E_w = 12 \text{ GPa}$  و  $E_{st} = 200 \text{ GPa}$



**حل:** مقطع تبدیل‌یافته را تماماً از فولاد فرض می‌کنیم. چون فولاد سختی بیشتری دارد، باید پهنای چوب کاهش یابد تا به مقدار معادل فولادی برسد. در این حالت،  $n = E_w/E_{st}$  فرض شده است. بدین ترتیب:

$$b_{st} = nb_w = \frac{12 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}} (150 \text{ mm}) = 9 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{[0.01 \text{ m}](0.02 \text{ m})(0.150 \text{ m}) + [0.095 \text{ m}](0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})}{0.02 \text{ m}(0.150 \text{ m}) + 0.009 \text{ m}(0.150 \text{ m})}$$

$$= 0.03638 \text{ m}$$

$$I_{NA} = \left[ \frac{1}{12} (0.150 \text{ m})(0.02 \text{ m})^3 + (0.150 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.03638 \text{ m} - 0.01 \text{ m})^2 \right]$$

$$+ \left[ \frac{1}{12} (0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})^3 + (0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})(0.095 \text{ m} - 0.03638 \text{ m})^2 \right]$$

$$= 9.358(10^{-6}) \text{ m}^4$$

گشتاور اینرسی نسبت به محور خنثی:

تنش‌های عمودی: با استفاده از فرمول خمش، تنش عمودی در نقاط  $B'$  و  $C$  عبارتند از:

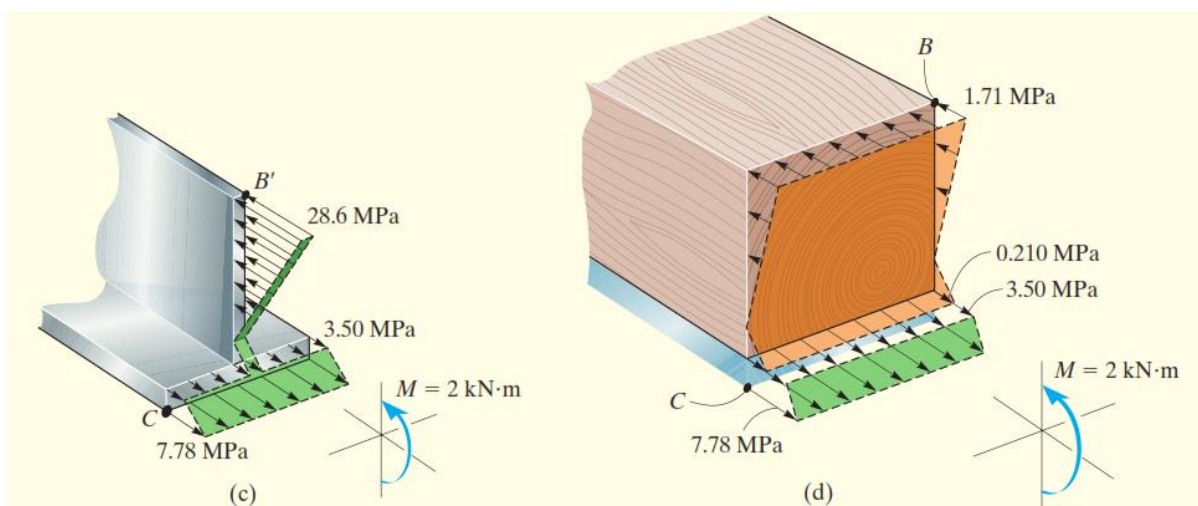
$$\sigma_{B'} = \frac{2(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m} - 0.03638 \text{ m})}{9.358(10^{-6}) \text{ m}^4} = 28.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{2(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.03638 \text{ m})}{9.358(10^{-6}) \text{ m}^4} = 7.78 \text{ MPa}$$

تنش عمودی در نقطه  $B$ ، چوب برابر است با:

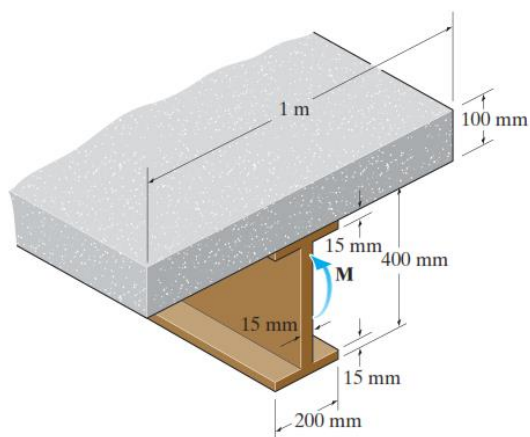
$$\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}}(28.56 \text{ MPa}) = 1.71 \text{ MPa}$$

توزیع تنش در مقطع معادل، در شکل (c)، و توزیع تنش در مقطع مرکب، در شکل (d) نشان داده شده است.



### تمرین

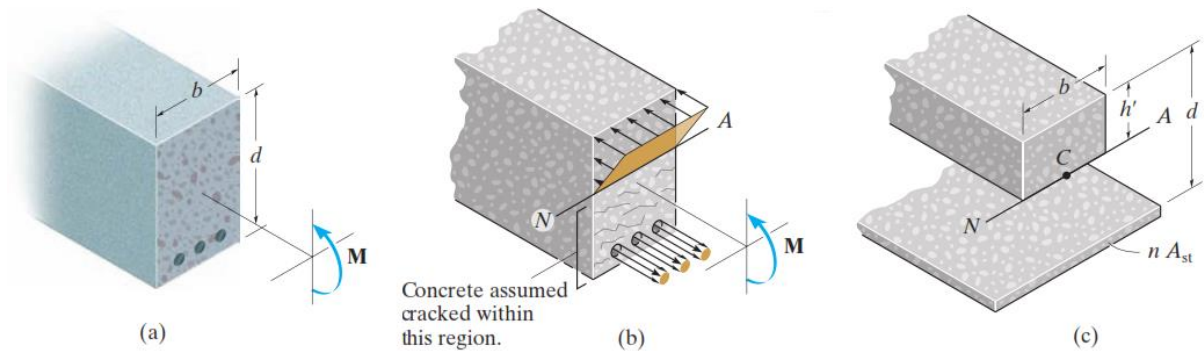
۹) در تیر مرکب بتنی-فولادی مطابق شکل، در صورتی که:  $(\sigma_{allow})_{st} = 165 \text{ MPa}$  و  $(\sigma_{allow})_{con} = 10 \text{ MPa}$  باشد، حداکثر لنگر خمشی مجاز قابل اعمال بر تیر را تعیین کنید.



$$E_{con} = 22.1 \text{ GPa} \text{ و } E_{st} = 200 \text{ GPa}$$

## تیرهای بتن آرمه

در تیرهای بتن آرمه، با فرض آن که تحت اثر تنش‌های کششی، بتن ترک بخورد، با صرف نظر کردن از توزیع تنش در ناحیه کششی مقطع، چنین فرض می‌شود که تنش‌های کششی فقط توسط فولادها تحمل شود؛ بنابراین، توزیع تنش‌ها بر روی مقطع، مطابق شکل (b) خواهد بود.

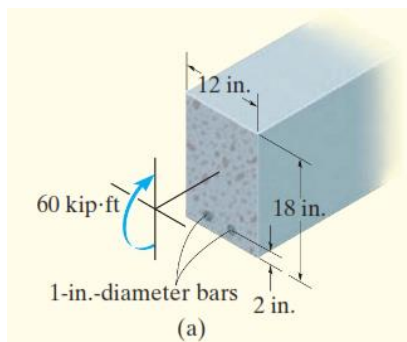


برای تحلیل تنش، لازم است ابتدا موقعیت محور خنثی و حداکثر تنش در فولاد و بتن مشخص شوند. برای این منظور، ابتدا سطح فولاد،  $A_{st}$ ، با استفاده از ضریب تبدیل  $n = E_{st}/E_{con}$  به سطحی معادل بتن تبدیل می‌شود ( $n > 1$ ). نخست لازم است موقعیت محور خنثی معلوم شود. برای محاسبه فاصله لبه فوقانی مقطع تا محور خنثی،  $h'$ ، گشتاور دو سطح،  $\sum \tilde{y}A$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم، زیرا:  $\bar{y} = \sum \tilde{y}A / \sum A = 0$  است. بنابراین:

$$bh' \left( \frac{h'}{2} \right) - nA_{st}(d - h') = 0$$

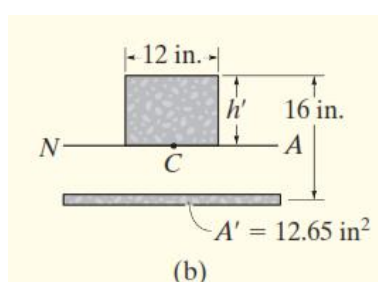
$$\frac{b}{2}h'^2 + nA_{st}h' - nA_{st}d = 0$$

آنگاه پس از محاسبه گشتاور اینرسی مقطع تبدیل یافته حول محور خنثی، با استفاده از فرمول خمش، تنش‌ها در بتن و فولاد محاسبه می‌شوند.



**مثال ۷:** تیر بتن آرمه با مقطع نشان داده شده در شکل (a)، تحت اثر لنگر خمشی  $M = 60 \text{ kip}\cdot\text{ft}$  قرار دارد. تنش عمودی در هر یک از میله‌های فولادی و حداکثر تنش عمودی در بتن را محاسبه کنید.

$$E_{con} = 3.6(10^3) \text{ ksi} \text{ و } E_{st} = 29(10^3) \text{ ksi}$$



**حل:** با صرف نظر کردن از بتن کششی، مقطع تبدیل یافته مطابق شکل (b) خواهد بود.

$$A_{st} = 2[\pi(0.5 \text{ in.})^2] = 1.571 \text{ in}^2$$

$$A' = nA_{st} = \frac{29(10^3) \text{ ksi}}{3.6(10^3) \text{ ksi}} (1.571 \text{ in}^2) = 12.65 \text{ in}^2$$

لازم است مرکز سطح روی محور خنثی قرار گیرد، بنابراین:  $\sum \tilde{y}A = 0$  یا:

$$12 \text{ in.} \cdot (h') \frac{h'}{2} - 12.65 \text{ in}^2 (16 \text{ in.} - h') = 0$$

$$h'^2 + 2.11h' - 33.7 = 0 \quad \longrightarrow \quad h' = 4.85 \text{ in.}$$

گشتاور اینرسی مقطع تبدیل یافته حول محور خنثی:

$$I = \left[ \frac{1}{12} (12 \text{ in.}) (4.85 \text{ in.})^3 + 12 \text{ in.} (4.85 \text{ in.}) \left( \frac{4.85 \text{ in.}}{2} \right)^2 \right] + 12.65 \text{ in}^2 (16 \text{ in.} - 4.85 \text{ in.})^2 = 2029 \text{ in}^4$$

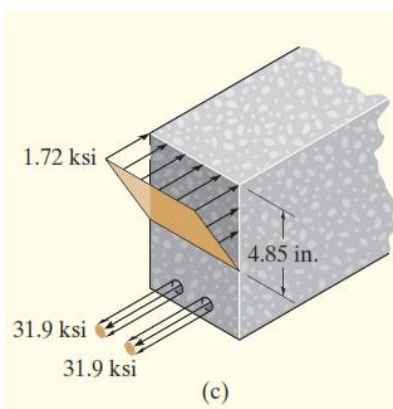
تنش عمودی در بتن:

$$(\sigma_{\text{conc}})_{\text{max}} = \frac{[60 \text{ kip} \cdot \text{ft} (12 \text{ in./ft})] (4.85 \text{ in.})}{2029 \text{ in}^4} = 1.72 \text{ ksi}$$

تنش عمودی در نوار بتنی که به جای فولاد قرار گرفته است:

$$\sigma'_{\text{conc}} = \frac{[60 \text{ kip} \cdot \text{ft} (12 \text{ in./ft})] (16 \text{ in.} - 4.85 \text{ in.})}{2029 \text{ in}^4} = 3.96 \text{ ksi}$$

در نتیجه، تنش عمودی در هر یک از دو میله فولادی عبارت است از:



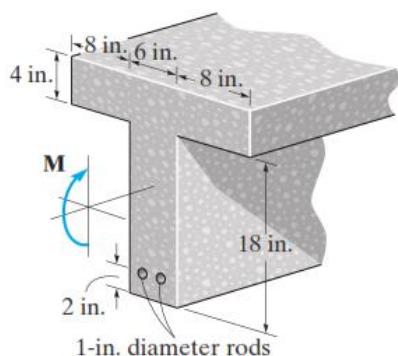
$$\sigma_{\text{st}} = n\sigma'_{\text{conc}} = \left( \frac{29(10^3) \text{ ksi}}{3.6(10^3) \text{ ksi}} \right) 3.96 \text{ ksi} = 31.9 \text{ ksi}$$

توزیع تنش در مقطع، در شکل (C) نشان داده شده است.

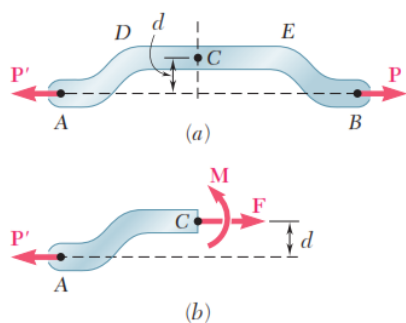
### تمرین

۱۰ در تیر بتن آرمه با مقطع مطابق شکل زیر، اگر تنش کششی مجاز فولاد،  $(\sigma_{\text{allow}})_{\text{st}} = 40 \text{ ksi}$  و تنش فشاری مجاز بتن،  $(\sigma_{\text{allow}})_{\text{con}} = 3 \text{ ksi}$  باشد، حداکثر لنگر خمشی قابل تحمل برای این مقطع چقدر است؟ (فرض کنید بتن نمی تواند تنش کششی تحمل کند).

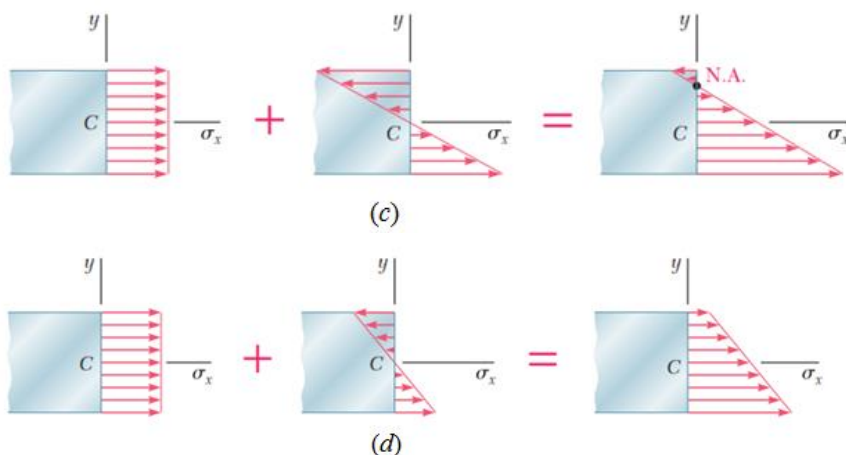
$$E_{\text{con}} = 3.8(10^3) \text{ ksi} \quad \text{و} \quad E_{\text{st}} = 29(10^3) \text{ ksi}$$



## بارگذاری محوری خارج از مرکز (ترکیب تنش‌های ناشی از لنگر خمشی و بار محوری)

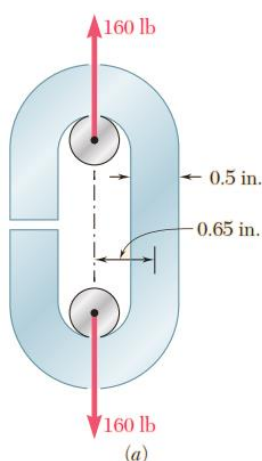


هرگاه خط اثر بار محوری وارده از مرکز سطح مقطع عبور نکند، بارگذاری محوری خارج از مرکز، مطابق شکل رو به‌رو پدید می‌آید. در نقطه C از میله، علاوه بر نیروی محوری، لنگر خمشی نیز ایجاد می‌شود. تنش عمودی روی مقطعی از میله که از این نقطه عبور می‌کند، حاصل از ترکیب تنش‌های محوری و خمشی، در شکل زیر نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، محور خمشی روی مقطع، هنگامی مشخص می‌شود که تنش کششی حاصل از نیروی محوری، از تنش فشاری ناشی از لنگر خمشی بیشتر باشد (شکل C). در غیر این صورت مقطع تماماً تحت فشار قرار می‌گیرد و توزیع تنش، همانند شکل (d) خواهد بود.



تنش عمودی در هر نقطه از مقطع، می‌تواند از رابطه زیر به‌دست آید. علامت مثبت، نشان‌دهنده تنش کششی و علامت منفی تنش فشاری است.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$



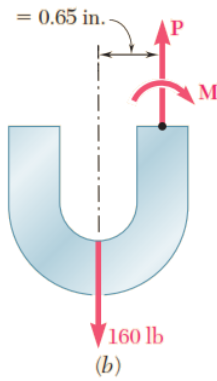
**مثال ۸:** با خم کردن میله‌های فولادی، به قطر 0.5 in، زنجیر مطابق شکل مقابل ساخته شده است. اگر نیروی 700 N بر این زنجیر وارد شود، اولاً ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری در قسمت مستقیم میله را به‌دست آورید؛ ثانیاً فاصله بین خط گذرا از مرکز سطح و محور خمشی مقطع عرضی را تعیین کنید.

**حل:**

**ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری:** نیروهای داخلی در مقطع عرضی، معادلند با نیروی P و لنگر خمشی M که در شکل (b) نشان داده شده است.

$$P = 160 \text{ lb}$$

$$M = Pd = (160 \text{ lb})(0.65 \text{ in.}) = 104 \text{ lb}\cdot\text{in.}$$



توزیع تنش‌های عمودی ناشی از نیروی محوری و لنگر خمشی، در شکل‌های (c) و (d) نشان داده شده‌اند. این تنش‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A = \pi c^2 = \pi(0.25 \text{ in.})^2 = 0.1963 \text{ in}^2$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{160 \text{ lb}}{0.1963 \text{ in}^2} = 815 \text{ psi}$$

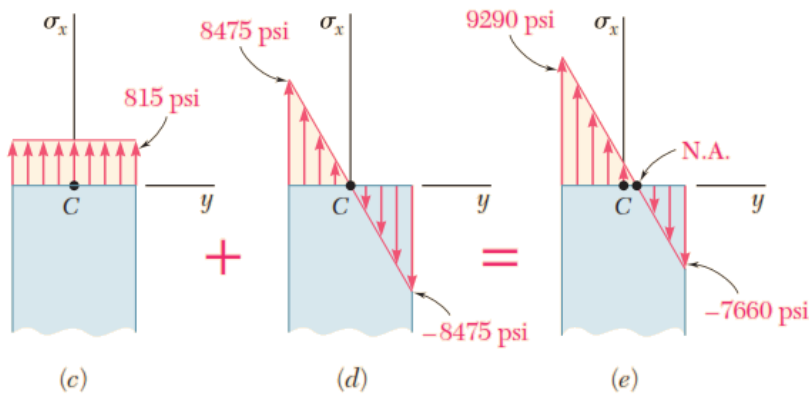
$$I = \frac{1}{4} \pi c^4 = \frac{1}{4} \pi (0.25 \text{ in.})^4 = 3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(104 \text{ lb}\cdot\text{in.})(0.25 \text{ in.})}{3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4} = 8475 \text{ psi}$$

از ترکیب این دو توزیع تنش، ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری در مقطع، به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 815 + 8475 = 9290 \text{ psi}$$

$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m = 815 - 8475 = -7660 \text{ psi}$$



این تنش‌ها در شکل (e) نشان داده شده‌اند.

فاصله بین محور گذرا از مرکز سطح و محور خنثی: با مساوی صفر قرار دادن  $\sigma_x$ ، فاصله مرکز سطح نسبت به محور خنثی،  $y_0$  به دست می‌آید:

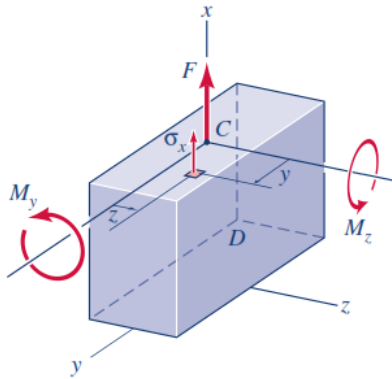
$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$

$$y_0 = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{I}{M}\right) = (815 \text{ psi}) \cdot \frac{3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4}{104 \text{ lb}\cdot\text{in.}}$$

$$y_0 = 0.0240 \text{ in.}$$



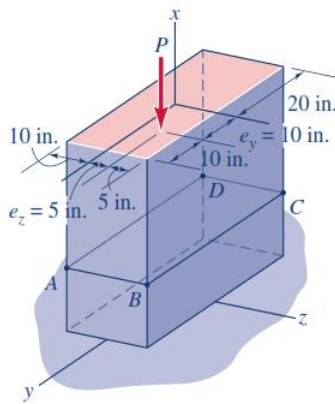
حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز (ترکیب تنش‌های حاصل از بار محوری و خمش دومحوره)



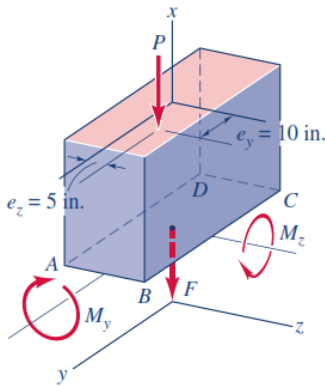
در شکل زیر عضوی که تحت اثر نیروی محوری  $F$  و لنگرهای خمشی  $M_y$  و  $M_z$  قرار دارد نشان داده شده است. محورهای  $Y$  و  $Z$  محورهای اصلی سطح مقطع این عضو هستند که از مرکز سطح آن عبور می‌کنند. تنش عمودی حاصل از این بارگذاری را در نقطه دلخواهی با مختصات  $Y$  و  $Z$ ، می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

مثال ۹:



بار محوری فشاری 800 kips، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، به صورت خارج از مرکز، بر یک ستون کوتاه با مقطع مستطیلی وارد می‌شود. توزیع تنش عمودی بر روی مقطع ABCD از این ستون و موقعیت محور خمشی را تعیین کنید (برای جلوگیری از تأثیر تمرکز تنش، این مقطع به اندازه کافی از محل اثر نیرو فاصله دارد).



حل: با رسم نمودار جسم آزاد، نیروهای داخلی در مقطع ABCD، به شرح زیر به دست می‌آیند:

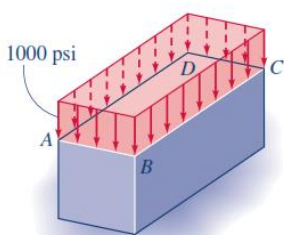
$$\begin{aligned} F &= -P \\ M_y &= -Pe_z \\ M_z &= Pe_y \end{aligned}$$

تنش‌های حاصل از این نیرو و لنگرهای خمشی، عبارتند از:

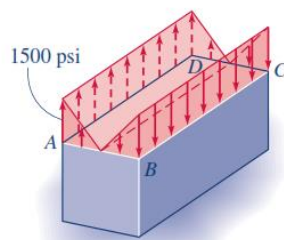
$$(\sigma_x)_F = \frac{-P}{A} = \frac{-800 \text{ kips}}{(40 \text{ in.})(20 \text{ in.})} = -1000 \text{ psi}$$

$$(\sigma_x)_{M_y} = \frac{(-Pe_z)z}{I_y} = \frac{(-800 \text{ kips})(5 \text{ in.})z}{[\frac{1}{12}(40 \text{ in.})(20 \text{ in.})^3]} = -150z \text{ psi}$$

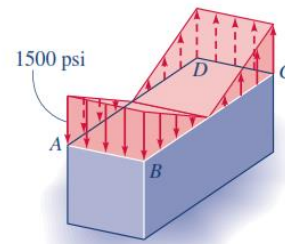
$$(\sigma_x)_{M_z} = \frac{-(Pe_y)y}{I_z} = \frac{-(800 \text{ kips})(10 \text{ in.})y}{[\frac{1}{12}(20 \text{ in.})(40 \text{ in.})^3]} = -75y \text{ psi}$$



(a) Stress distribution due to  $F$ .



(b) Stress distribution due to  $M_y$ .



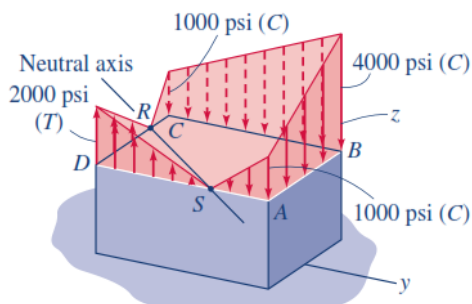
(c) Stress distribution due to  $M_z$ .

تنش‌های ماکزیمم، در لبه‌های مقطع ایجاد می‌شود، با قرار دادن  $Z$  و  $Y$  مربوط به لبه‌های مقطع، می‌توان نوشت:

$$\text{Max}|(\sigma_x)M_y| = 150z|_{z=10 \text{ in}} = 150(10 \text{ in.}) = 1500 \text{ psi}$$

$$\text{Max}|(\sigma_x)M_z| = 75y|_{y=20 \text{ m}} = 75(20 \text{ in.}) = 1500 \text{ psi}$$

**ترکیب تنش‌ها:** با جمع جبری تنش‌ها در گوشه‌های مقطع، می‌توان نوشت:



$$(\sigma_x)_A = -1000 + 1500 - 1500 = -1000 \text{ psi}$$

$$(\sigma_x)_B = -1000 - 1500 - 1500 = -4000 \text{ psi}$$

$$(\sigma_x)_C = -1000 - 1500 + 1500 = -1000 \text{ psi}$$

$$(\sigma_x)_D = -1000 + 1500 + 1500 = 2000 \text{ psi}$$

**موقعیت محور خنثی:**

$\sigma_x$  را مساوی با صفر قرار دهیم. با قرار

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

برای تعیین موقعیت محور خنثی، باید در رابطه دادن مقادیر به دست آمده می‌توان نوشت:

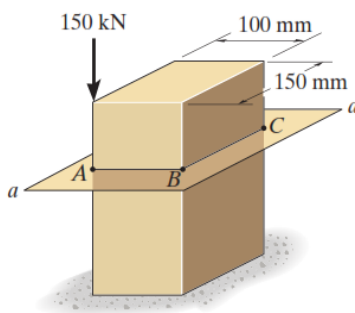
$$0 = -100 - 75y - 150z$$

مختصات نقطه  $R$  از محور خنثی واقع در لبه  $CD$ : با مساوی قرار دادن  $y = -20 \text{ in}$  در معادله فوق،  $z = 3.33 \text{ in}$  به دست می‌آید.

مختصات نقطه  $S$  از محور خنثی واقع در لبه  $AB$ : با مساوی قرار دادن  $z = -10 \text{ in}$  در معادله فوق،  $y = 6.67 \text{ in}$  به دست می‌آید.

**تمرین:**

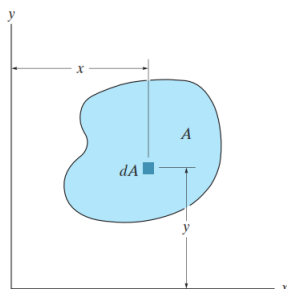
(۱) تنش‌های حاصل از تأثیر بار محوری فشاری نشان داده شده در شکل زیر را در گوشه‌های مقطع واقع در صفحه  $a-a$  از پایه مطابق شکل زیر را محاسبه کنید و موقعیت محور خنثی را تعیین کنید.



## پیوست فصل ششم:

## حاصل ضرب اینرسی سطح

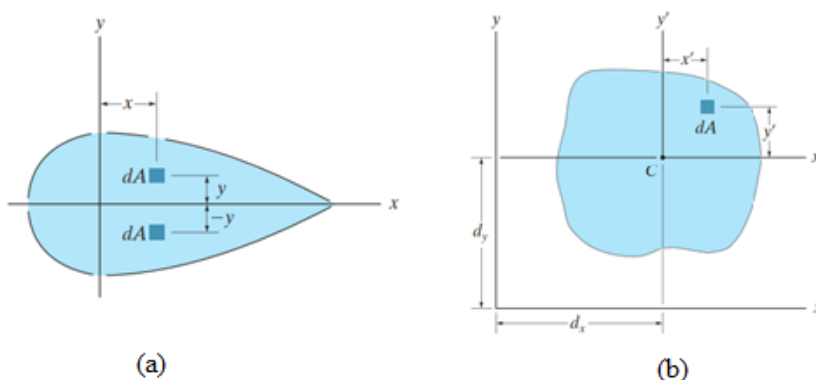
در حالت کلی، گشتاور اینرسی یک سطح محاسبه شده حول هر محور متفاوت است. در برخی کاربردهای طراحی مهندسی، لازم است جهت گیری محورهایی را بدانیم که به ترتیب، بیشترین و کمترین گشتاور اینرسی برای سطح را به دست می‌دهند. روش تعیین این محورها، در بخش بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد؛ اما برای استفاده از این روش، ابتدا باید حاصل ضرب اینرسی و نیز گشتاور اینرسی سطح را برای محورهای مفروض  $X$  و  $Y$  تعیین کرد.



حاصل ضرب اینرسی برای سطح  $A$  در شکل مقابل، چنین تعریف می‌شود:

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

مشابه با گشتاور اینرسی، حاصل ضرب اینرسی نیز دارای بعد طول به توان چهار است (مثلاً:  $m^4$ ،  $mm^4$ )؛ اما از آنجا که  $x$  یا  $y$  ممکن است کمیت‌هایی منفی باشند، در حالی که  $dA$  همواره کمیتی مثبت است، حاصل ضرب اینرسی ممکن است مثبت یا منفی باشد که این موضوع به موقعیت و جهت گیری محورهای مختصات بستگی دارد. برای مثال، اگر محور  $x$  یا  $y$  محور تقارن سطح باشد، حاصل ضرب اینرسی  $I_{xy}$ ، برای یک سطح مساوی با صفر خواهد بود. برای نشان دادن این مطلب، سطح سایه زده شده در شکل (a) را در نظر بگیرید که در آن برای هر جزء  $dA$  واقع در نقطه  $(x, y)$ ، یک جزء متناظر واقع در  $(x, -y)$  وجود دارد. چون حاصل ضرب اینرسی برای این جزءها به ترتیب عبارتند از:  $xy \, dA$  و  $-xy \, dA$ ، جمع جبری آنها یا انتگرال تمام جزء سطح‌های انتخاب شده به این طریق با هم حذف می‌شوند؛ در نتیجه، حاصل ضرب اینرسی برای کل سطح صفر خواهد شد.



قضیهٔ محورهای موازی: سطح سایه زده شده در شکل (b) را در نظر بگیرید که در آن  $x'$  و  $y'$  بیانگر محورهای مرکز سطحی و  $x$  و  $y$  نشان‌دهندهٔ محورهای متناظر موازی با آنها هستند. چون حاصل ضرب اینرسی  $dA$  نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  عبارتند از  $dI_{xy} = (x' + d_x)(y' + d_y) \, dA$ ، پس برای کل سطح داریم:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A (x' + d_x)(y' + d_y) \, dA \\ &= \int_A x'y' \, dA + d_x \int_A y' \, dA + d_y \int_A x' \, dA + d_x d_y \int_A dA \end{aligned}$$

جمله اول در سمت راست، بیانگر حاصل ضرب اینرسی  $\bar{I}_{x'y'}$  سطح نسبت به محورهای مرکز سطحی است. جملات دوم و سوم صفرند، چرا که گشتاورهای سطح نسبت به محورهای مرکز سطحی در نظر گرفته شده است. با توجه به این که انتگرال چهارم بیانگر کل مساحت سطح است، خواهیم داشت:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$$

### گشتاورهای اینرسی حول محورهای مایل

در طراحی مهندسی، گاهی لازم است گشتاورها و حاصل ضرب اینرسی  $I_{x'}$ ،  $I_{y'}$  و  $I_{x'y'}$  برای سطح را نسبت به محورهای مایل  $x'$  و  $y'$ ، با وجود معلوم بودن  $I_x$ ،  $I_y$  و  $I_{xy}$  محاسبه کنیم. همان طور که در شکل زیر نشان داده شده است، مختصات از جزء سطح  $dA$  تا هریک از این دو دستگاه مختصات، توسط معادلات تبدیل به هم مربوطند.

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

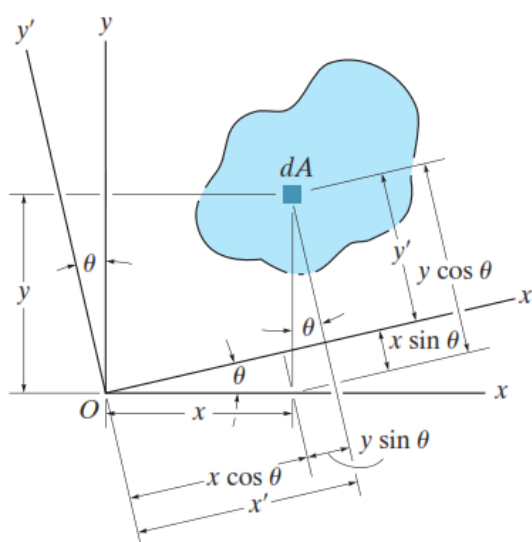
$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

با استفاده از معادلات، گشتاورها و حاصل ضرب اینرسی  $dA$  حول محورهای  $x'$  و  $y'$  تبدیل خواهند شد به:

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y' dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$



با بسط هر یک از روابط و انتگرال گیری و توجه به این که  $I_x = \int y^2 dA$ ،  $I_y = \int x^2 dA$  و  $I_{xy} = \int xy dA$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 I_{x'} &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
 I_{y'} &= I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
 I_{x'y'} &= I_x \sin \theta \cos \theta - I_y \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

این معادلات را می‌توان با استفاده از تساوی‌های مثلثاتی:  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$  and  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  ساده‌تر کرد که در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 I_{x'} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \\
 I_{y'} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \\
 I_{x'y'} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta
 \end{aligned}$$

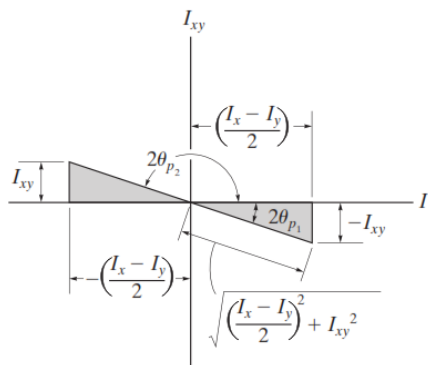
**گشتاورهای اصلی اینرسی:** باید توجه کرد که  $I_{x'}$ ،  $I_{y'}$  و  $I_{x'y'}$  به زاویه  $\theta$  و محورهای  $x'$  و  $y'$  بستگی دارند. اکنون جهت‌گیری ویژه‌ای از این محورها را تعیین می‌کنیم که حول آن‌ها گشتاورهای اینرسی سطح  $I_{x'}$  و  $I_{y'}$  حداکثر و حداقل باشند. این وضعیت خاص محورها، **محورهای اصلی** اینرسی نامیده می‌شود و گشتاورهای اینرسی متناظر حول این محورها، گشتاورهای اصلی اینرسی نام دارند. به‌طور کلی، برای هر مبدأ انتخابی  $O$ ، یک مجموعه محورهای اصلی وجود دارد؛ اما در مقاومت مصالح، مرکز سطح مهم‌ترین موقعیت برای  $O$  است.

می‌توان زاویه  $\theta = \theta_p$  را که جهت‌گیری محورهای اصلی سطح را مشخص می‌کند، با مشتق‌گیری از اولین رابطه از معادلات فوق نسبت به  $\theta$  و صفر قرار دادن نتیجه به‌دست آورد. بنابراین:

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2 \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

بنابراین در  $\theta = \theta_p$ .

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

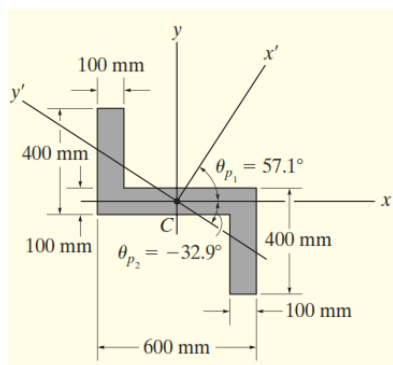


این معادله دارای دو ریشه  $\theta_{p1}$  و  $\theta_{p2}$  است که  $90^\circ$  باهم اختلاف دارند و بنابراین، زاویه شیب هریک از محورهای اصلی را مشخص می‌سازند. سینوس و کسینوس زوایای  $2\theta_{p1}$  و  $2\theta_{p2}$  را می‌توان از روی مثلث‌های نشان داده شده در شکل مقابل، که بر پایه معادله فوق قرار دارند، به‌دست آورد.

اگر این روابط مثلثاتی در اولین یا دومین رابطه از معادلات مربوط به  $I_{x'}$  و  $I_{y'}$  قرار داده شده و روابط ساده شوند، به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

بسته به علامت انتخاب شده، این نتیجه، حداکثر یا حداقل گشتاور اینرسی سطح را به دست می دهد. همچنین، اگر روابط مثلثاتی فوق برای  $\theta_{p1}$  و  $\theta_{p2}$  در رابطه مربوط به  $I_{x'y'}$  قرار داده شوند، ملاحظه می شود که  $I_{x'y'} = 0$  یعنی حاصل ضرب اینرسی نسبت به محورهای اصلی صفر است. قبلاً گفتیم که حاصل ضرب اینرسی نسبت به هر محور تقارن صفر است؛ بنابراین نتیجه می گیریم که هر محور تقارن و محور عمود بر آن، بیانگر محورهای اصلی اینرسی سطح هستند.



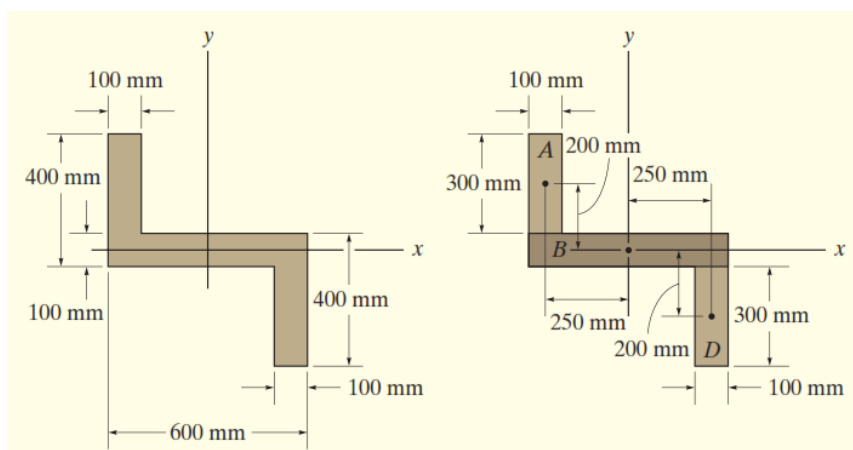
**مثال:** گشتاورهای اصلی اینرسی را برای مقطع نشان داده شده در شکل رو به رو، نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح C تعیین کنید.

**حل:**

گشتاورهای اینرسی این مقطع، در مثال ۲ فصل ششم محاسبه شده اند:

$$I_x = 2.90(10^9) \text{ mm}^4 \quad I_y = 5.60(10^9) \text{ mm}^4$$

محاسبه حاصل ضرب اینرسی سطح مقطع:



#### Rectangle A:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \\ &= 0 + (300 \text{ mm})(100 \text{ mm})(-250 \text{ mm})(200 \text{ mm}) \\ &= -1.50(10^9) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

#### Rectangle B:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Rectangle D:**

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \\ &= 0 + (300 \text{ mm})(100 \text{ mm})(250 \text{ mm})(-200 \text{ mm}) \\ &= -1.50(10^9) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

بنابراین، حاصل ضرب اینرسی برای کل سطح مقطع، برابر است با:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= [-1.50(10^9) \text{ mm}^4] + 0 + [-1.50(10^9) \text{ mm}^4] \\ &= -3.00(10^9) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

گشتاورهای اصلی اینرسی نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح:

$$\begin{aligned} \tan 2\theta_p &= \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{3.00(10^9)}{[2.90(10^9) - 5.60(10^9)]/2} = -2.22 \\ 2\theta_{p_1} &= 114.2^\circ \quad \text{and} \quad 2\theta_{p_2} = -65.8^\circ \end{aligned}$$

$$\theta_{p_1} = 57.1^\circ \quad \text{and} \quad \theta_{p_2} = -32.9^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{\min} &= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ &= \frac{2.90(10^9) + 5.60(10^9)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{2.90(10^9) - 5.60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3.00(10^9)]^2} \\ &= 4.25(10^9) \pm 3.29(10^9) \end{aligned}$$

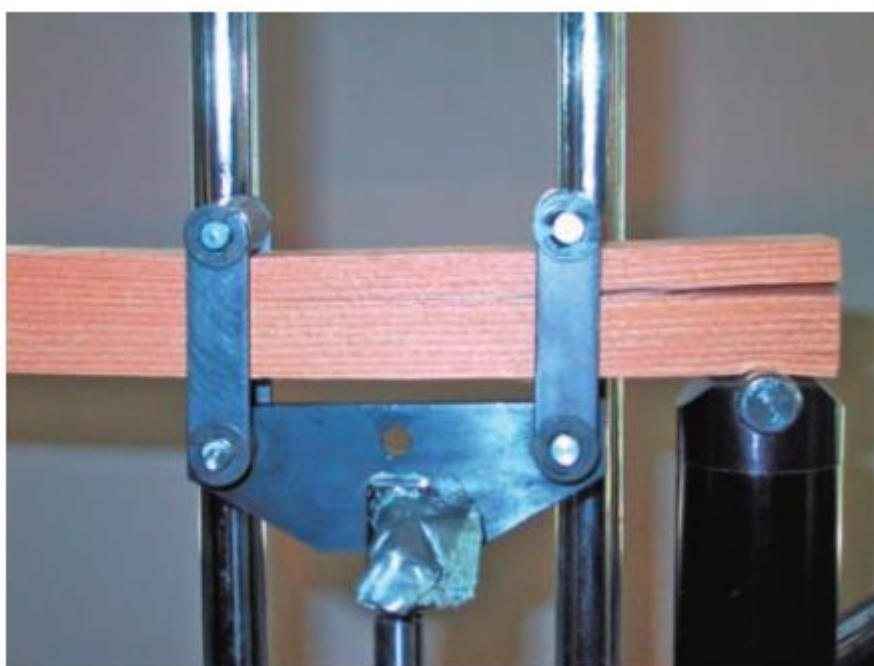
or

$$I_{\max} = 7.54(10^9) \text{ mm}^4 \quad I_{\min} = 0.960(10^9) \text{ mm}^4$$

حداکثر گشتاور اینرسی، حول محور (محور اصلی بزرگتر) رخ می‌دهد، چرا که با توجه به شکل، معلوم می‌شود که بخش عمده‌ای از سطح در فاصله دورتری از این محور قرار دارند.

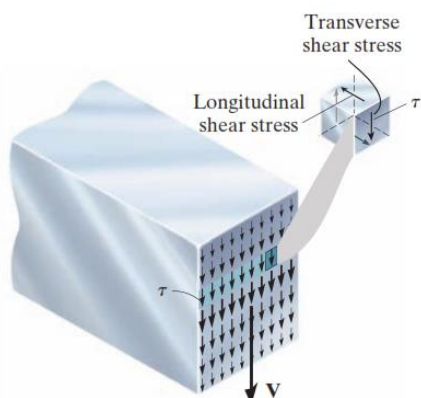
## فصل هفتم

### برش عرضی





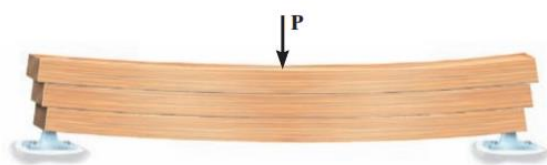
## برش در تیرها



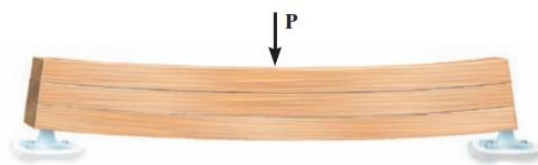
در حالت کلی، یک تیر علاوه بر لنگر خمشی، تحت اثر نیروی برشی نیز قرار می‌گیرد. تنش‌های برشی حاصل از نیروی برشی  $V$  در یک مقطع از تیر، در شکل مقابل نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، در یک جزء کوچک، تنش برشی طولی به‌همراه تنش برشی عرضی تشکیل می‌شود.

برای نشان دادن این اثر، تیر مطابق شکل زیر را که از سه تخته مجزا ساخته شده است را در نظر بگیرید. اگر سطوح بالا و پایین هر تخته، صاف و بدون اصطکاک باشد و تخته‌ها به هم نچسبیده باشند، نیروی  $P$  باعث می‌شود که در هنگام تغییرشکل، تخته‌ها نسبت به یکدیگر بلغزند (شکل a)، اما در

صورتی که تخته‌ها به هم چسبیده باشند، تنش‌های برشی طولی ایجاد شده بین آن‌ها از لغزش نسبی جلوگیری می‌کند و تیر به صورت یکپارچه عمل می‌کند (شکل b).



Boards not bonded together  
(a)

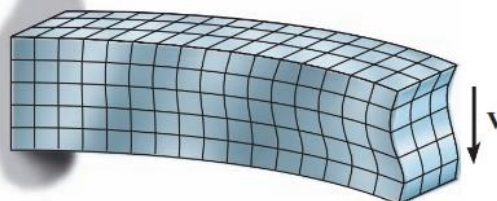


Boards bonded together  
(b)

در شکل زیر تغییر شکل یک تیر تحت اثر نیروی برشی  $V$  نشان داده شده است. توزیع غیر یکنواخت تغییرفرم نسبی برشی، باعث تاب برداشتن مقطع شده است.



(a) Before deformation

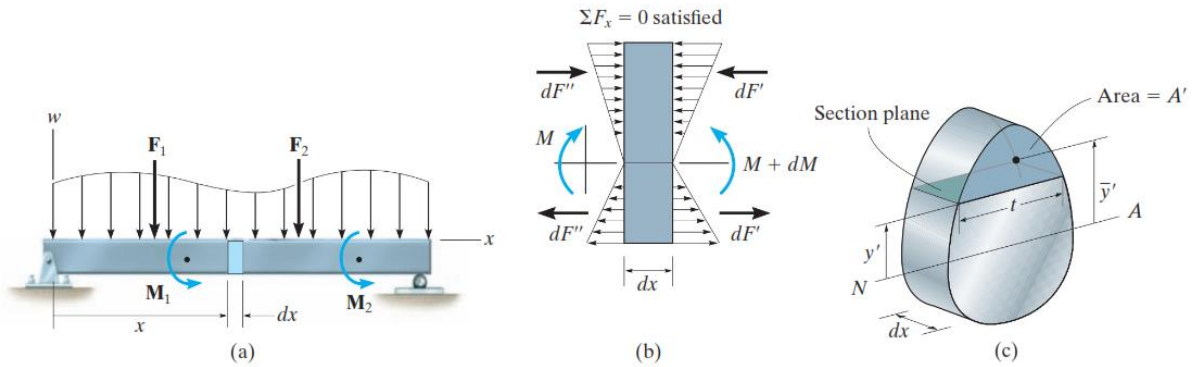


(b) After deformation

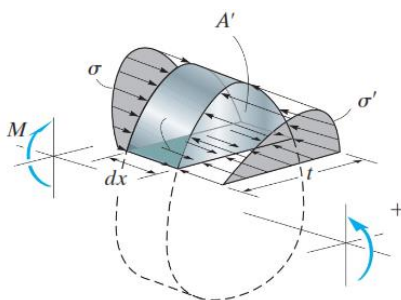
بنابراین، هنگامی که یک تیر تحت اثر توأم نیروی برشی و لنگر خمشی قرار می‌گیرد، سطح مقطع تیر، به‌صورتی که در خمش فرض شد، دیگر مسطح باقی نخواهد ماند. با این وجود، می‌توانیم به دلیل کوچک بودن تابیدگی سطح مقطع، از آن صرف نظر کنیم و در جهت ساده‌سازی محاسبات، همچنان سطح مقطع را به‌صورت صفحه‌ای فرض کنیم. این فرض در مورد تیرهایی که نسبت دهانه به ارتفاع مقطع آن زیاد باشد، خطای نسبتاً کمی دارد.

## فرمول برش

تیر مطابق شکل (a) را در نظر بگیرید. نمودار جسم آزاد جزء کوچکی از آن در شکل (b) نشان داده شده است. مقطع سایه زده شده در فاصل،  $y'$  از محور خنثی با مساحت  $A'$  و پهنای  $t$ ، در شکل (c) مشخص شده است. فرض می‌کنیم تنش برشی در پهنای  $t$  وجه پایین ثابت باشد. این تنش برشی روی سطح  $t dx$  عمل می‌کند.



با به کارگیری تعادل نیروی افقی و استفاده از فرمول خمش می توان نوشت.



Three-dimensional view

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad & \int_{A'} \sigma' dA' - \int_{A'} \sigma dA' - \tau(t dx) = 0 \\ & \int_{A'} \left( \frac{M + dM}{I} \right) y dA' - \int_{A'} \left( \frac{M}{I} \right) y dA' - \tau(t dx) = 0 \\ & \left( \frac{dM}{I} \right) \int_{A'} y dA' = \tau(t dx) \end{aligned}$$

با حل این معادله برای  $\tau$ ، خواهیم داشت:

$$\tau = \frac{1}{It} \left( \frac{dM}{dx} \right) \int_{A'} y dA'$$

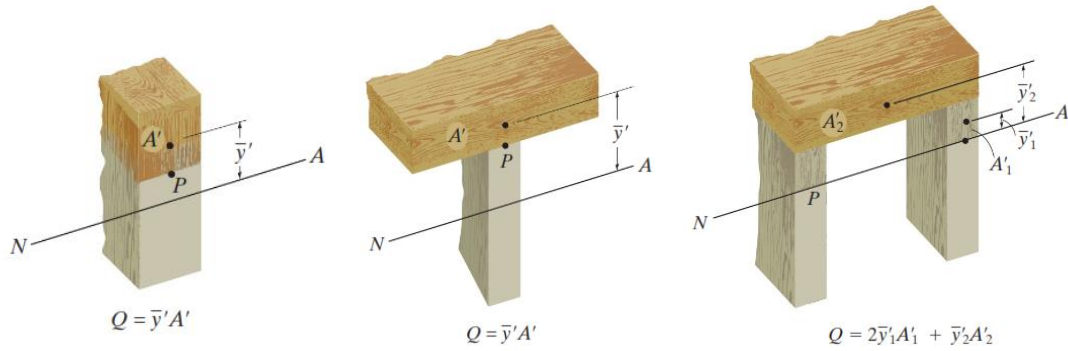
با توجه به معادله  $V = dM/dx$ ، می توان رابطه فوق را ساده کرد. مقدار انتگرال، بیانگر لنگر اول سطح  $A'$  حول محور خنثی است. چون موقعیت مرکز سطح  $A'$  از رابطه  $\bar{y}' = \int_{A'} y dA' / A'$  تعیین می شود، می توان نوشت:

$$Q = \int_{A'} y dA' = \bar{y}' A'$$

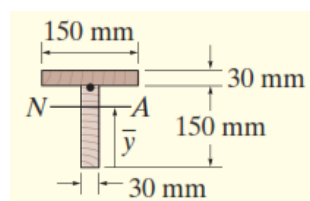
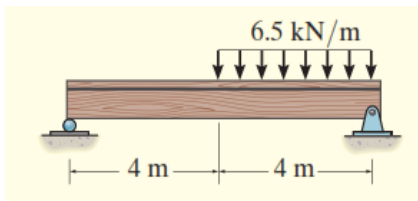
بنابراین، فرمول برش را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

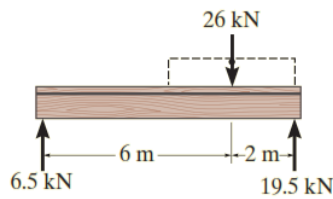
اگرچه در به دست آوردن این فرمول، تنها تنش های برشی عمل کننده روی صفحات طولی تیر را در نظر گرفتیم، از آن برای یافتن تنش برشی عرضی روی سطح مقطع تیر نیز استفاده می شود. همچنین لازم است ماده به صورت ارتجاعی خطی رفتار کند و دارای مدول الاستیسیته یکسان در کشش و فشار باشد. در شکل زیر، محاسبه  $Q$  برای یک مقطع مستطیلی، مقطع T شکل و  $\Pi$  شکل، نشان داده شده است.



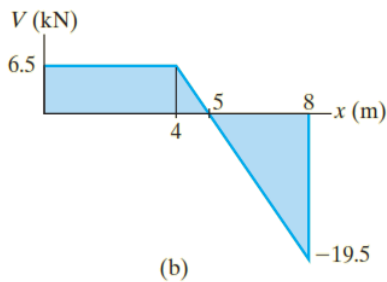
**مثال ۱:** تیر نشان داده شده در شکل (a) از دو تخته به هم پیوسته ساخته شده است. حداکثر تنش برشی مورد نیاز در چسب را که برای در کنار هم نگهداشتن تخته‌ها در محل درز لازم است، محاسبه کنید.



(a)



**حل:** واکنش‌های تکیه‌گاهی و نمودار نیروی برشی تیر در شکل (b) نشان داده شده است. بیشترین نیروی برشی در طول تیر برابر با 19.5 kN به دست آمده است. حداکثر تنش برشی حاصل از این نیروی برشی به شرح زیر محاسبه می‌شود:

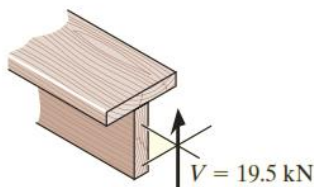


(b)

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

$$= \frac{[0.075 \text{ m}](0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m}) + [0.165 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})}{(0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m}) + (0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})}$$

$$= 0.120 \text{ m}$$



Plane containing glue



(c)

$$I = \left[ \frac{1}{12}(0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})^3 + (0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.120 \text{ m} - 0.075 \text{ m})^2 \right]$$

$$+ \left[ \frac{1}{12}(0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})(0.165 \text{ m} - 0.120 \text{ m})^2 \right]$$

$$= 27.0(10^{-6}) \text{ m}^4$$

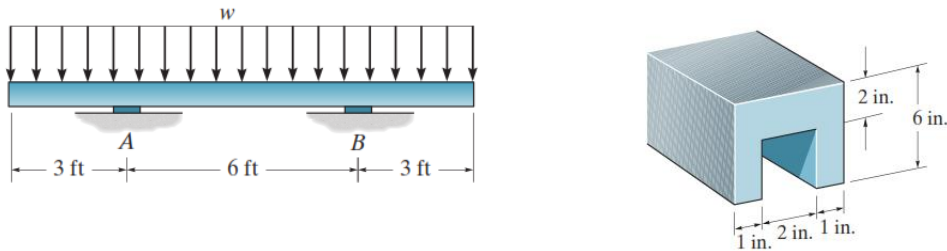
$$Q = \bar{y}'A' = [0.180 \text{ m} - 0.015 \text{ m} - 0.120 \text{ m}](0.03 \text{ m})(0.150 \text{ m})$$

$$= 0.2025(10^{-3}) \text{ m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{19.5(10^3) \text{ N}(0.2025(10^{-3}) \text{ m}^3)}{27.0(10^{-6}) \text{ m}^4(0.030 \text{ m})} = 4.88 \text{ MPa}$$

## تمرین:

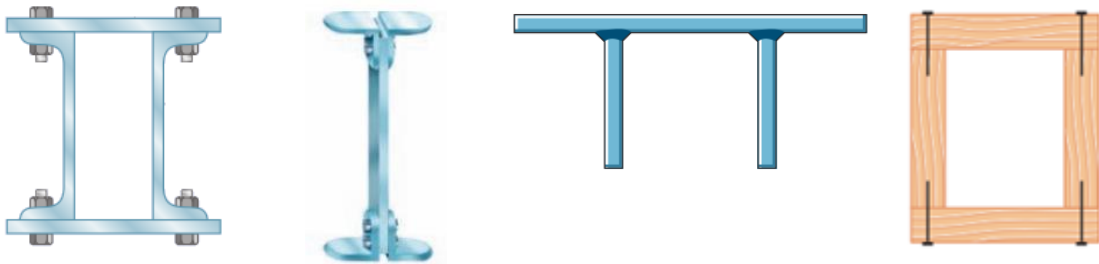
(۱) بیشترین مقدار بار گسترده یکنواختی که می‌تواند بر تیر مطابق شکل زیر وارد شود، چقدر است؟ ( $\tau_{allow} = 800 \text{ psi}$ )



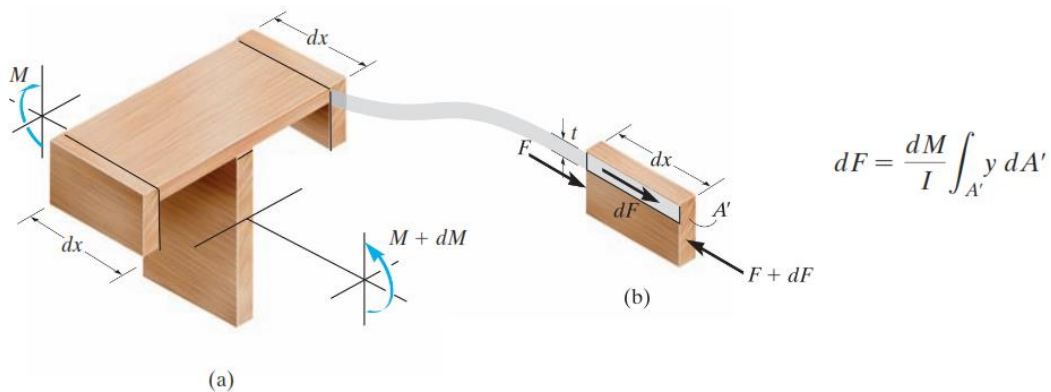
(۲) در صورتی که  $w = 800 \text{ lb/ft}$  باشد، تنش برشی ماکزیمم مطلق در تیر فوق را تعیین کنید.

## جریان برش در اعضای مرکب از چند قطعه

در تیرهای مرکب از قطعات مختلف، برای جلوگیری از لغزش اعضای اتصال، از جوش، میخ، پرچ یا پیچ، مطابق شکل‌های زیر استفاده می‌شود:

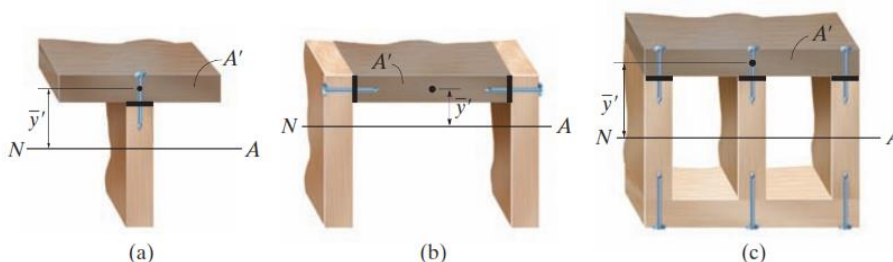


برای طراحی این اتصالات، باید از مقدار نیروی برشی که به وسیله آن‌ها تحمل می‌شود، اطلاع داشته باشیم. بارگذاری برشی بر این تیرها، هنگامی که به صورت نیرو بر واحد طول اندازه‌گیری می‌شود، «جریان برش» نامیده می‌شود. مقدار جریان برش،  $q$ ، را می‌توان با استفاده از روشی مشابه با آنچه برای یافتن تنش برشی در تیر به کار رفت، تعیین کرد. برای نشان دادن این موضوع، محل اتصال بخش عمودی به قسمت افقی (بال) را در تیر مطابق شکل (a) در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل (b) نشان داده شده است، سه نیروی افقی باید روی این قسمت عمل کنند. دو نیرو از این نیروها،  $F$  و  $F+dF$  به ترتیب به وسیله تنش‌های قائم حاصل از لنگرهای  $M$  و  $M+dM$  به وجود می‌آیند. نیروی سوم که برای برقراری تعادل باید برابر با  $dF$  باشد، در محل اتصال عمل می‌کند و باید به وسیله اتصال‌دهنده تحمل شود. با توجه به این موضوع که نتیجه  $dM$  است، همانند فرمول برش، می‌توان نوشت:



انتگرال در رابطه فوق، بیانگر کمیت  $Q$  (گشتاور اول سطح  $A'$  حول محور خنثای کل مقطع) است. چون طول این بخش،  $dx$  است، جریان برش، یا نیرو بر واحد طول در راستای تیر، عبارت است از  $q = dF/dx$ . بنابراین، با تقسیم کردن هر دو سمت رابطه بر  $dx$  و توجه به این که  $V = dM/dx$  است، می توان نوشت:

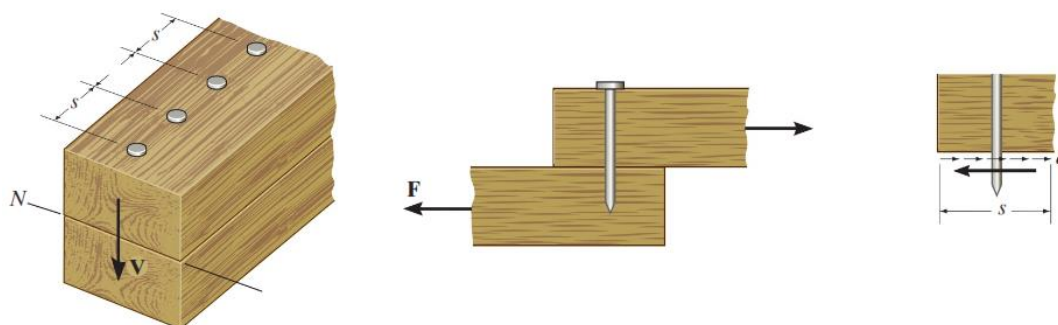
$$q = \frac{VQ}{I}$$



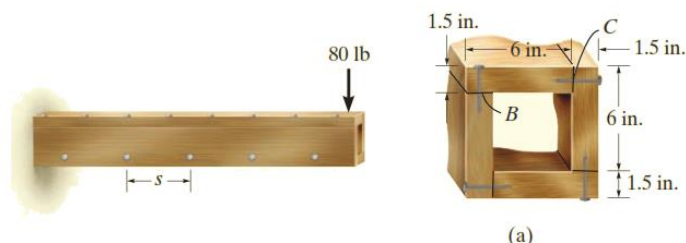
### محاسبه فاصله بستها

وقتی قطعات یک تیر توسط بست‌هایی همچون میخ، پیچ یا پرچ به هم متصل می‌شوند، لازم است فاصله بین این بست‌ها محاسبه شوند. مثلاً اگر بیشترین نیروی برشی قابل تحمل برای هرکدام از بست‌ها برابر با  $F$  باشد، با توجه به شکل‌های زیر، می توان نوشت:  $F = q \cdot s$  در نتیجه، فاصله بین بست‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$s = \frac{F}{q}$$

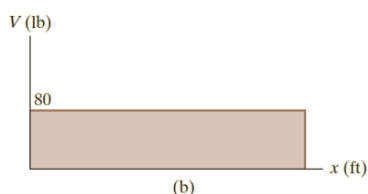


**مثال ۲:** تیر قوطی شکل زیر از به هم پیوستن چهار تخته با میخ‌هایی مطابق شکل زیر ساخته شده است؛ اگر هر میخ بتواند نیروی برشی 30 lb را تحمل کند، حداکثر فاصله میخ‌ها را در B و C را طوری تعیین کنید که تیر بتواند در برابر برش عمودی 80 lb مقاومت کند.



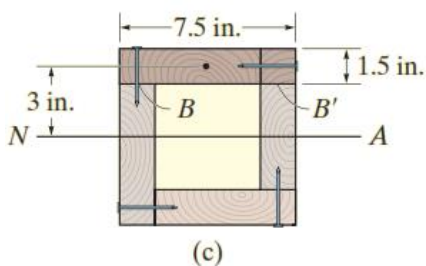
**حل:**

نیروی برشی داخلی: نمودار نیروی برشی تیر، مطابق شکل مقابل است:



## خواص مقطع:

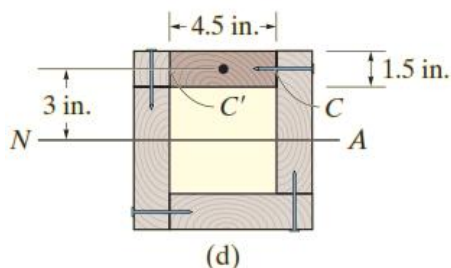
$$I = \frac{1}{12}(7.5 \text{ in.})(7.5 \text{ in.})^3 - \frac{1}{12}(4.5 \text{ in.})(4.5 \text{ in.})^3 = 229.5 \text{ in}^4$$



جریان برش در B با استفاده از  $Q_B$  که از سطح مشخص شده شکل (c) به دست می آید، تعیین می شود. همین بخش از تیر است که در کنار سایر قسمت های آن، به وسیله میخ ها روی سمت چپ و به وسیله الیاف تخته، روی سمت راست نگه داشته می شود. بنابراین:

$$Q_B = \bar{y}'A' = [3 \text{ in.}](7.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in.}) = 33.75 \text{ in}^3$$

به طور مشابه، جریان برش در C را می توان با استفاده از سطح مشخص شده در شکل (d) تعیین کرد:



$$Q_C = \bar{y}'A' = [3 \text{ in.}](4.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in.}) = 20.25 \text{ in}^3$$

## جریان برش:

$$q_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{80 \text{ lb}(33.75 \text{ in}^3)}{229.5 \text{ in}^4} = 11.76 \text{ lb/in.}$$

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{80 \text{ lb}(20.25 \text{ in}^3)}{229.5 \text{ in}^4} = 7.059 \text{ lb/in.}$$

چون هر میخ می تواند نیروی برشی 30 lb را تحمل کند، فواصل میخ ها در B و C عبارتند از:

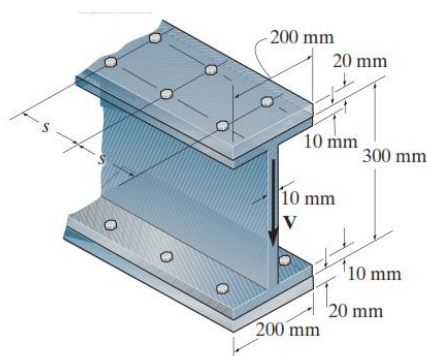
$$s_B = \frac{30 \text{ lb}}{(11.76/2) \text{ lb/in.}} = 5.10 \text{ in.} \quad \text{Use } s_B = 5 \text{ in.}$$

$$s_C = \frac{30 \text{ lb}}{(7.059/2) \text{ lb/in.}} = 8.50 \text{ in.} \quad \text{Use } s_C = 8.5 \text{ in.}$$

## تمرین:

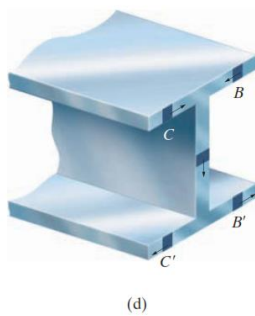
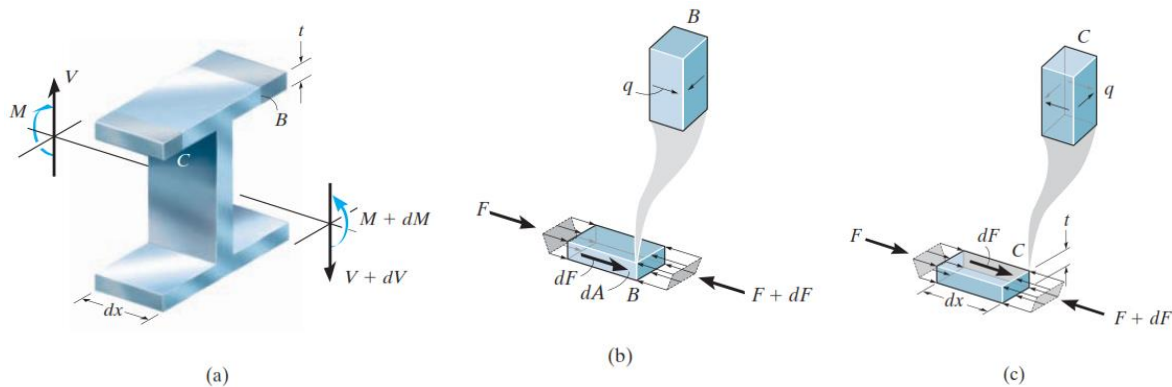
۳) تیر مطابق شکل زیر از یک نیمرخ فولادی I شکل و دو صفحه فولادی یکسان که با پیچ هایی به بال های بالا و پایین آن متصل شده اند، تشکیل شده است. اگر این تیر تحت نیروی برشی  $V = 300 \text{ kN}$  قرار گیرد، بیشترین فاصله مجاز پیچ ها را تعیین کنید و تا نزدیک ترین عدد صحیح برحسب میلی متر گرد کنید. هر

پیچ می تواند نیروی برشی  $30 \text{ kN}$  را تحمل کند.

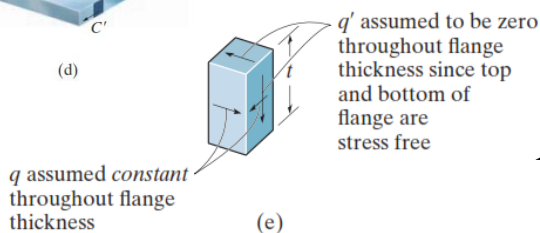


## جریان برش در اعضای جدارنازک

در این بخش، می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه معادلهٔ جریان برش را می‌توان برای یافتن توزیع جریان برش در سرتاسر سطح مقطع عضو به کار برد. فرض می‌کنیم که عضو دارای جدارهٔ نازکی است؛ یعنی ضخامت دیوارهٔ آن، در مقایسه با ارتفاع یا پهناي مقطع کوچک است. همانند تنش برشی، جریان برش هم روی صفحات طولی و هم روی صفحات عرضی عمل می‌کند. برای نشان دادن چگونگی راستای آن، جزء کوچکی به طول  $dx$  از یک تیر آهن بال‌پهن را مطابق شکل (a) در نظر بگیرید. نمودار جسم آزاد دو قسمت  $B$  و  $C$  از بال فوقانی در شکل‌های (b) و (c) نشان داده شده‌اند. نیروی  $dF$  باید در راستای مقطع طولی عمل کند تا نیروهای عمود بر سطح  $F$  و  $F+dF$  را که به ترتیب بر اثر لنگرهای  $M$  و  $M+dM$  به وجود آمده‌اند را متعادل سازد. اگر جزءهای واقع در گوشه‌های  $B$  و  $C$  از هر قسمت برداشته شوند، مؤلفه‌های عرضی  $q$  روی سطح مقطع مطابق شکل‌های (b) و (c) عمل خواهند کرد.

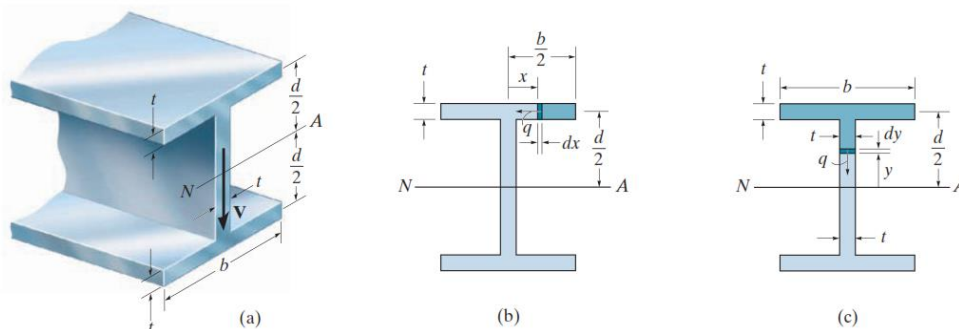


با استفاده از این روش، می‌توان نشان داد که جریان برش در نقاط متناظر  $B'$  و  $C'$  روی بال پایین مقطع، نشان داده شده در شکل (d) نیز مشابه نقاط  $B$  و  $C$  است.



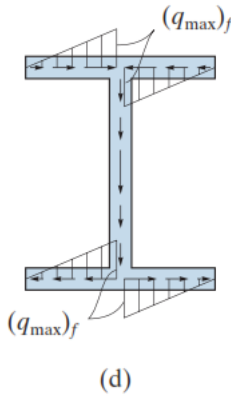
با توجه به شکل (e)، به دلیل نازک بودن بال تیر و عاری بودن سطوح بالا و پایین آن از تنش، می‌توان از مؤلفه‌های عمودی جریان برش، صرف‌نظر کرد. بنابراین، فقط مؤلفه‌هایی از جریان برش که به موازات لبه‌های بالا عمل می‌کنند، در نظر گرفته خواهد شد.

پس از تعیین راستای جریان برش در هر بال، اکنون می‌توانیم توزیع آن را در طول سمت راست بال فوقانی تیر در شکل (a) بیابیم. برای این منظور، جریان برش  $q$  را در نظر بگیرید که روی جزء تیره‌رنگ، به فاصلهٔ  $x$  از مرکز سطح مقطع عمل می‌کند.



در این جا،  $Q = \bar{y}'A' = [d/2](b/2 - x)t$  است؛ بنابراین می توان نوشت:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V[d/2](b/2 - x)t}{I} = \frac{Vtd}{2I} \left( \frac{b}{2} - x \right)$$

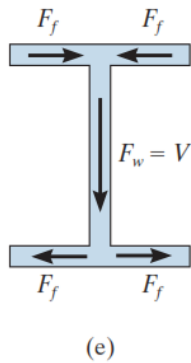


با توجه به رابطه فوق، معلوم می شود که توزیع تنش خطی است (بر حسب  $x$ )؛ که از مقدار  $q = 0$  در  $x = b/2$  تا مقدار  $(q_{\max})_f = Vtdb/4I$  در  $x = 0$  تغییر می کند (از ضخامت جان تیر صرف نظر شده است). به دلیل تقارن و با تحلیلی مشابه، توزیع جریان برش در سایر بال ها نیز به همین صورت خواهد بود. نتایج در شکل (d) نشان داده شده است. کل نیروی ایجاد شده در بال نیز می تواند با انتگرال گیری تعیین شود. چون نیروی روی جزء  $dx$  در شکل (b) برابر است با  $dF = q dx$ ، بنابراین:

$$F_f = \int q dx = \int_0^{b/2} \frac{Vtd}{2I} \left( \frac{b}{2} - x \right) dx = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

همچنین می توانیم این نتیجه را با یافتن سطح زیر مثلث، در شکل (d) تعیین کنیم:

$$F_f = \frac{1}{2} (q_{\max})_f \left( \frac{b}{2} \right) = \frac{Vtdb^2}{16I}$$



هر چهار نیروی  $F_f$  در شکل (e) نشان داده شده است و با توجه به جهت این نیروها، ملاحظه می شود که تعادل نیروهای افقی در سطح مقطع برقرار است.

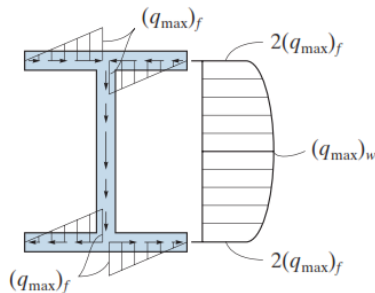
با استفاده از شکل (c) می توانیم جریان برش را در جان تیر محاسبه کنیم. در اینجا لازم است  $q$  به سمت پایین عمل کند؛ در جزء  $dy$  داریم:

$$Q = \Sigma \bar{y}'A' = [d/2](bt) + [y + (1/2)(d/2 - y)]t(d/2 - y) = bt d/2 + (t/2)(d^2/4 - y^2)$$

در نتیجه:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vt}{I} \left[ \frac{db}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

برای جان تیر، جریان برش به صورت سهمی تغییر می کند؛ از مقدار  $q = 2(q_{\max})_f = Vtdb/2I$  در  $y = d/2$  تا  $(q_{\max})_w = (Vtd/I)(b/2 + d/8)$  در  $y = 0$  که در شکل (f) نشان داده شده است.



Shear-flow distribution

(f)

با انتگرال گیری برای تعیین نیرو در جان تیر،  $f_w$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_w &= \int q dy = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Vt}{I} \left[ \frac{db}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \right] dy \\ &= \frac{Vt}{I} \left[ \frac{db}{2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} y - \frac{1}{3} y^3 \right) \right] \Big|_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{Vtd^2}{4I} \left( 2b + \frac{1}{3} d \right) \end{aligned}$$



رابطه فوق را می‌توان ساده کرد و با توجه به آن که گشتاور اینرسی برای سطح مقطع برابر است با:

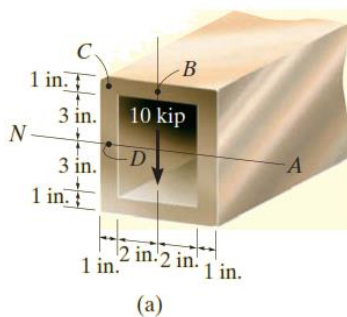
$$I = 2 \left[ \frac{1}{12} bt^3 + bt \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} td^3$$

و صرف نظر کردن از جمله اول به دلیل کوچک بودن ضخامت بال‌ها، می‌توان نوشت:

$$I = \frac{td^2}{4} \left( 2b + \frac{1}{3}d \right)$$

با جای گذاری در معادله فوق، ملاحظه می‌شود که  $F_W = V$  است، که قابل انتظار بود (شکل e).

**مثال ۳:** تیر قوطی شکل (a) تحت نیروی برشی 10 kip قرار دارد. تغییرات جریان برش را در سرتاسر مقطع آن تعیین کنید.



**حل:**

به دلیل تقارن، محور خنثی از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند. برای اعضای جدارنازک، می‌توانیم از ابعاد خط میانی جداره مقطع در محاسبه گشتاور اینرسی استفاده کنیم.

$$I = \frac{1}{12} (2 \text{ in.}) (7 \text{ in.})^3 + 2 [(5 \text{ in.}) (1 \text{ in.}) (3.5 \text{ in.})^2] = 179.7 \text{ in.}^4$$

تنها لازم است جریان برش در نقاط B، C و D تعیین شوند. برای نقطه B، مساحت  $A'$  تقریباً برابر با صفر است (شکل b). چرا که می‌توان این مساحت را به طور کامل در نقطه B در نظر گرفت. بنابراین:

$$Q_B = 0 \quad \text{پس: } Q_B = \bar{y}' A' = 0$$

برای نقطه C، مساحت  $A'$  در شکل (c) مشخص شده است. در این شکل از ابعاد متوسط استفاده شده است؛ چون نقطه C روی تقاطع خطوط میانی جداره‌های مقطع قرار دارد. می‌توان نوشت:

$$Q_C = \bar{y}' A' = (3.5 \text{ in.}) (5 \text{ in.}) (1 \text{ in.}) = 17.5 \text{ in.}^3$$

و چون دو نقطه اتصال وجود دارد:

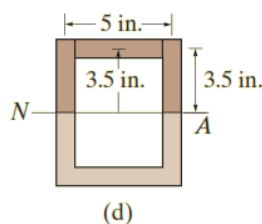
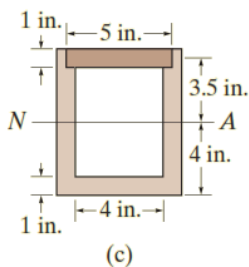
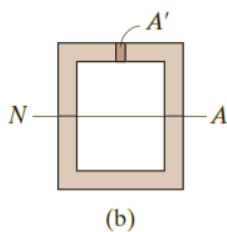
$$q_C = \frac{1}{2} \left( \frac{V Q_C}{I} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{10 \text{ kip} (17.5 \text{ in.}^3)}{179.7 \text{ in.}^4} \right) = 0.487 \text{ kip/in.}$$

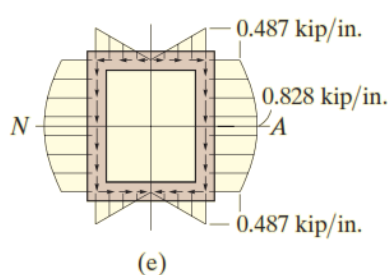
جریان برش در D با استفاده از سه مستطیل مشخص شده در شکل (d) محاسبه می‌شود:

$$Q_D = \Sigma \bar{y}' A' = 2 \left[ \frac{3.5 \text{ in.}}{2} \right] (1 \text{ in.}) (3.5 \text{ in.}) + [3.5 \text{ in.}] (5 \text{ in.}) (1 \text{ in.}) = 29.75 \text{ in.}^3$$

چون دو نقطه اتصال وجود دارد:

$$q_D = \frac{1}{2} \left( \frac{V Q_D}{I} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{10 \text{ kip} (29.75 \text{ in.}^3)}{179.7 \text{ in.}^4} \right) = 0.828 \text{ kip/in.}$$

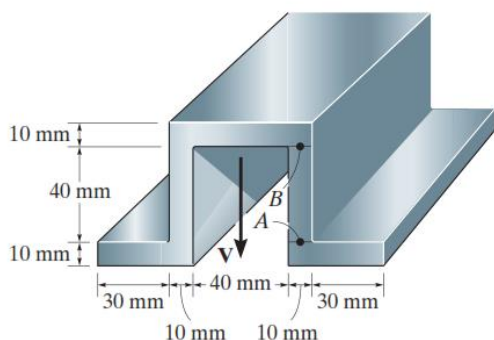




با استفاده از این نتایج و تقارن سطح مقطع، توزیع جریان برش مطابق شکل (e) خواهد بود. همان طور که ملاحظه می‌شود، در راستای افقی (عمود بر  $V$ )، به صورت خطی و در راستای بخش عمودی (موازی  $V$ )، به صورت سهمی است.

### تمرین

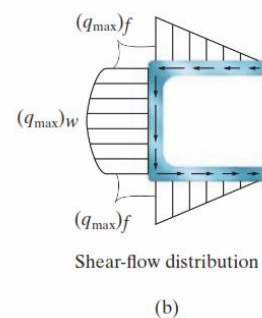
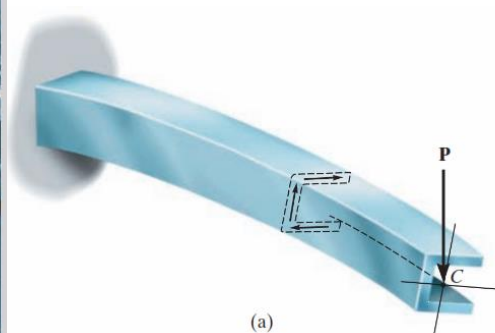
۴) تیر آلومینیومی با مقطع نشان داده شده در شکل زیر، تحت نیروی برشی  $V = 150 N$  قرار دارد. جریان برش در نقاط A و B و همچنین حداکثر جریان برش را در این تیر تعیین کنید.



### مرکز برش در مقاطع جدارنازک باز

در این قسمت، اثر اعمال نیرو در راستای یک محور اصلی که محور تقارن نباشد را برای مقاطع جدارنازک باز، مطرح می‌شود. در شکل (a) یک تیر طره‌ای با مقطع ناودانی نشان داده شده که تحت اثر نیروی  $P$  قرار گرفته است. اگر این نیرو از امتداد مرکز سطح،  $C$ ، عبور کند، علاوه بر حرکت این نقطه به سمت پایین، همان طور که ملاحظه می‌شود، باعث پیچش آن در جهت ساعت‌گرد نیز خواهد شد.

برای درک این موضوع، توزیع جریان برش در طول بال‌ها و جان تیر در شکل (b) نشان داده شده است. اگر از این توزیع روی سطوح بال و جان انتگرال‌گیری کنیم، نیروی  $F_f$  را در هر بال و نیروی  $V = P$  در جان تیر، به دست می‌آید. اگر لنگر این نیروها حول نقطه  $A$  با هم جمع شود، ملاحظه می‌شود که کوپل پیچشی ایجاد شده، به وسیله نیروهای بال، باعث پیچش مقطع می‌شود.

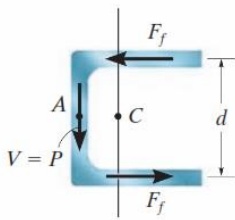




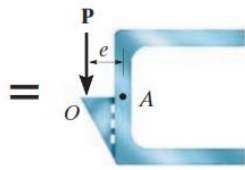
برای جلوگیری از این پیچش، لازم است نیروی  $P$  را مطابق شکل (d) در نقطه  $O$ ، به فاصله  $e$  از جان تیر، وارد کنیم. برای تعادل مقطع لازم است  $\Sigma M_A = F_f d = Pe$  باشد. بنابراین:

$$e = \frac{F_f d}{P}$$

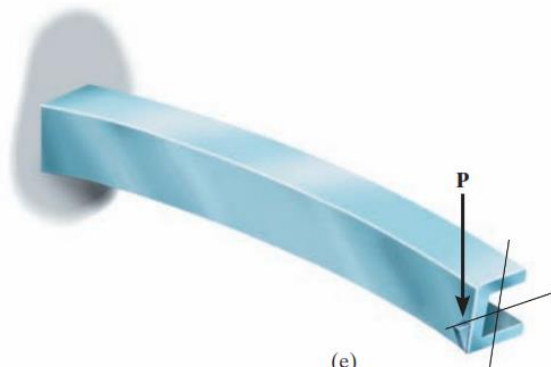
نقطه  $O$  که بدین صورت محاسبه شد، مرکز برش یا مرکز خمش نامیده می‌شود. باید توجه داشت که مرکز برش، همواره روی محور تقارن سطح مقطع عضو، واقع می‌شود.



(c)

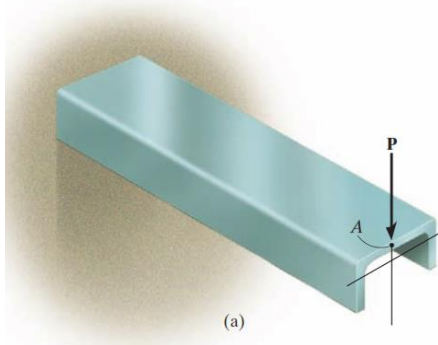


(d)

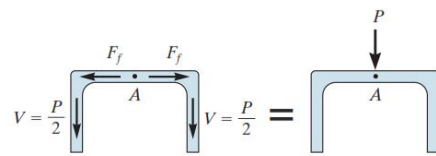


(e)

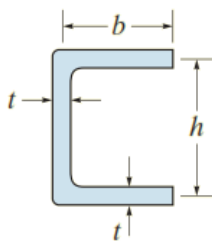
اگر این ناودانی را  $90^\circ$  بچرخد، و نیروی  $P$  در نقطه  $A$  وارد شود، مطابق شکل زیر، هیچ پیچشی اتفاق نمی‌افتد؛ زیرا جریان برش در جان و بال‌ها متقارن است و برآیند آن‌ها حول نقطه  $A$ ، لنگری ایجاد نمی‌کند. همین‌طور، واضح است که اگر مقطع تیر دارای دو محور تقارن باشد، مرکز برش منطبق بر محل تلاقی این محورها، یا همان مرکز سطح، واقع می‌شود.



(a)



(b)

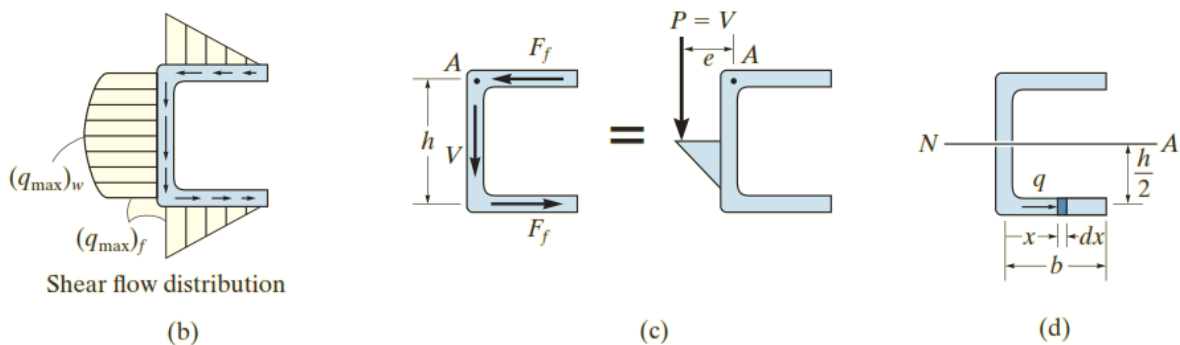


(a)

**مثال ۴:** موقعیت مرکز برش را برای مقطع ناودانی جدارنازک دارای ابعاد نشان داده شده در شکل (a) را تعیین کنید.

**حل:** همان‌طور که پیش از این نیز بیان شد، توزیع جریان برش حاصل از اعمال نیروی قائم  $P$  مطابق شکل (b) خواهد بود. این جریان، باعث ایجاد نیروهای  $F_f$  در بال‌ها و  $V$  در جان تیر می‌شود. با لنگرگیری نسبت به نقطه  $A$ ، کافی است فقط نیروی  $F_f$  در بال پایین تعیین شود. برای محاسبه جریان برش در بال پایین، نیاز به محاسبه گشتاور اینرسی سطح حول محور خنثی داریم که عبارت است از:

$$I = \frac{1}{12} th^3 + 2 \left[ bt \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] = \frac{th^2}{2} \left( \frac{h}{6} + b \right)$$



با استفاده از شکل (d) مقدار  $q$  در موقعیت دلخواه  $x$  عبارت است از:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(h/2)[b-x]t}{(th^2/2)[(h/6)+b]} = \frac{V(b-x)}{h[(h/6)+b]}$$

بنابراین، نیروی  $F_f$  برابر خواهد بود با:

$$F_f = \int_0^b q dx = \frac{V}{h[(h/6)+b]} \int_0^b (b-x) dx = \frac{Vb^2}{2h[(h/6)+b]}$$

البته همین نتیجه را می توانستیم با یافتن  $(q_{max})_f$  و سپس تعیین مساحت مثلث  $(F_f = \frac{1}{2}b(q_{max})_f)$  نیز به دست آوریم.

**تعیین مرکز برش:** با لنگرگیری نسبت به نقطه  $A$  در شکل (c)، خواهیم داشت:

$$Ve = F_f h = \frac{Vb^2 h}{2h[(h/6)+b]}$$

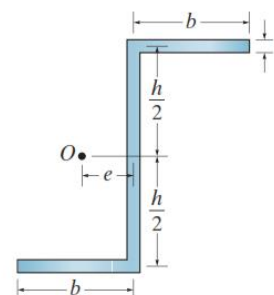
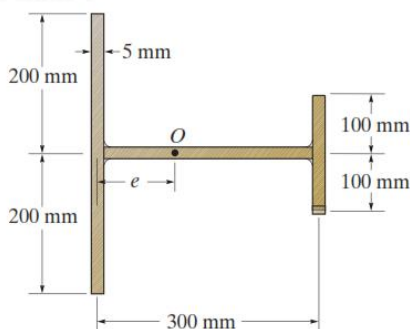
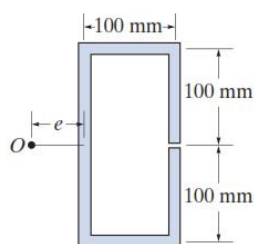
در نتیجه:

$$e = \frac{b^2}{[(h/3)+2b]}$$

همان طور که ملاحظه می شود، مرکز برش فقط به هندسه سطح مقطع بستگی دارد.

### تمرین

(۵) موقعیت مرکز برش را برای مقاطع زیر محاسبه کنید.

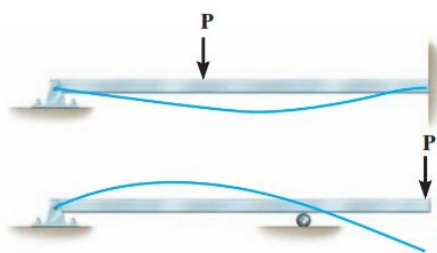


## فصل هشتم

# تغییر شکل (خنزیر) تیرها و مسائل تیرهای نامعین

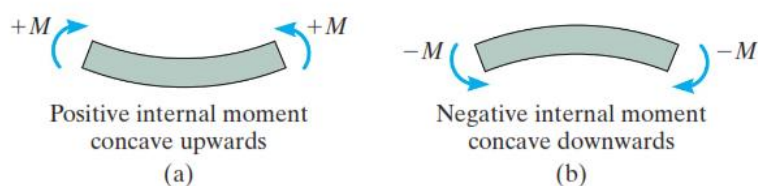


## منحنی ارتجاعی تیر

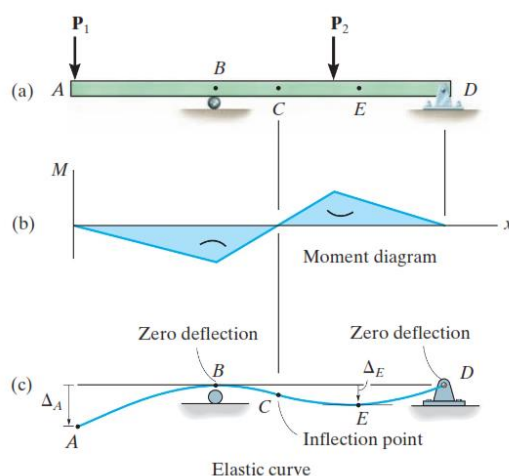


برای حفظ یکپارچگی و پایداری سازه‌ها و اطمینان از عملکرد مطلوب آن‌ها در زمان بهره‌برداری، تغییر فرم یا خیز تیرها باید محدود شود. علاوه بر آن، در تحلیل تیرهای نامعین استاتیکی و یافتن واکنش‌های تکیه‌گاهی آن، تعیین منحنی ارتجاعی تیر، ضرورت دارد.

منحنی تغییرشکل محور طولی تیر که از مرکز سطح تمام مقاطع عرضی می‌گذرد، «منحنی ارتجاعی» نام دارد. با معلوم بودن نمودار لنگر خمشی تیر، منحنی ارتجاعی به آسانی ترسیم می‌شود. تحت لنگر خمشی مثبت، تقعر منحنی به سمت بالا و تحت لنگر خمشی منفی، تقعر به سمت پایین است.

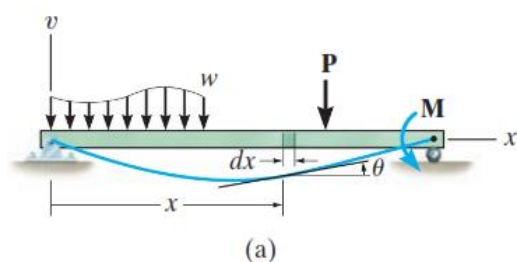


به عنوان نمونه، نمودار لنگر خمشی و منحنی ارتجاعی یک تیر مطابق شکل زیر ترسیم شده است. با توجه به منحنی ارتجاعی، تغییر مکان نقاط مختلف تیر، از جمله نقاط دارای بیشترین تغییر مکان و نقاط بدون تغییر مکان، قابل مشاهده است. محل تغییر علامت لنگر خمشی (جایی که لنگر صفر است)، نقطه عطف منحنی ارتجاعی است.



## رابطه لنگر-انحنای

برای یافتن شیب و تغییر مکان نقاط واقع در منحنی ارتجاعی، لازم است معادله‌ای که رابطه بین لنگر داخلی و شعاع انحنای منحنی ارتجاعی  $\rho$  را نشان می‌دهد، به دست آید. برای به دست آوردن این رابطه، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن یک تیر



مستقیم، تحت بارهای وارده عمود بر امتداد محور  $x$  مطابق شکل (a) قرار گرفته باشد. هنگامی که لنگر خمشی داخلی  $M$  باعث تغییرشکل جزء تیر  $dx$  می‌شود، زاویه بین مقاطع طرفین این جزء، برابر با  $d\theta$  خواهد بود که در شکل (b) نشان داده شده است. با مراجعه به صفحه ۱۱۵، رابطه بین تغییر فرم نسبی و شعاع انحنای

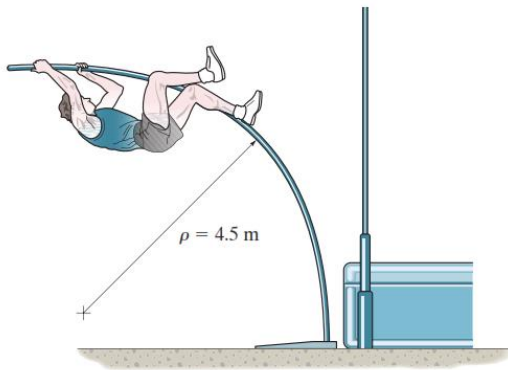
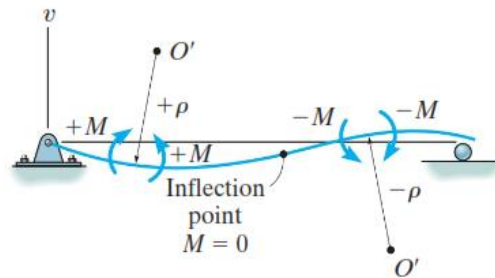
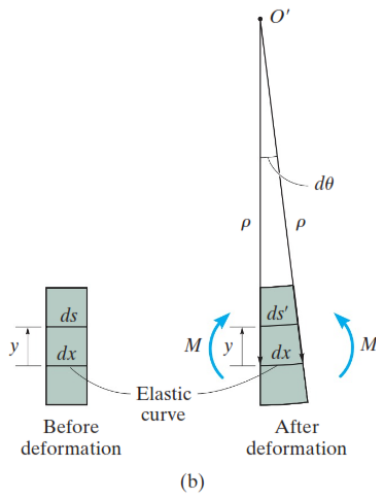
$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}$$

منحنی ارتجاعی عبارت است از:

در صورتی که ماده همگن باشد و رفتار ارتجاعی خطی داشته باشد، با استفاده از قانون هوک و فرمول خمش، می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

حاصل ضرب  $EI$  در این معادله، صلبیت خمشی نامیده می‌شود و همواره یک کمیت مثبت است. بنابراین، علامت  $\rho$  به جهت لنگر بستگی دارد. همان‌طور که در شکل زیر نشان داده شده است، اگر  $M$  مثبت باشد، امتداد  $\rho$  در بالای تیر و اگر منفی باشد، در پایین تیر یا جهت منفی  $v$  قرار می‌گیرد.



**مثال ۱:** از مردی در حال پرش با نیزه عکس گرفته شده و حداقل شعاع انحنای میله نیزه 4.5 m تخمین زده شده است. اگر میله به قطر 40 mm و از پلاستیک تقویت‌شده با شیشه با  $E_g = 131 \text{ Gpa}$  ساخته شده باشد، حداکثر تنش خمشی میله چقدر است؟

**حل:**

با استفاده از روابط  $M = \frac{I}{c} \sigma$  و  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$  می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{I}{c} \sigma}{EI}$$

$$\sigma = \frac{c}{\rho} E = \left( \frac{0.02}{4.5} \right) [131(10^9)] = 582 \text{ MPa}$$

## محاسبه شیب و جابه‌جایی تیر با استفاده از انتگرال گیری

معادله منحنی ارتجاعی یک تیر را می‌توان از نظر ریاضی به صورت  $v = f(x)$  بیان کرد. برای به‌دست آوردن این معادله، ابتدا باید انحنا ( $1/\rho$ ) را بر حسب  $v$  و  $x$  نوشت. براساس کتاب‌های حساب دیفرانسیل، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI}$$

در مسائل عملی، تغییر فرم‌های خمشی تیرها چندان زیاد نیست؛ به عبارت دیگر، شیب نمودار منحنی ارتجاعی ( $dv/dx$ ) مقدار کوچکی دارد. بنابراین می‌توان از جمله  $(dv/dx)^2$  در مخرج کسر، در مقابل عدد واحد صرف نظر کرد. از این رو رابطه فوق می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

این معادله می‌تواند به دو صورت دیگر نیز نوشته شود. با مشتق گرفتن از طرفین این رابطه و با توجه به آن‌که:  $V = dM/dx$  خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = V(x)$$

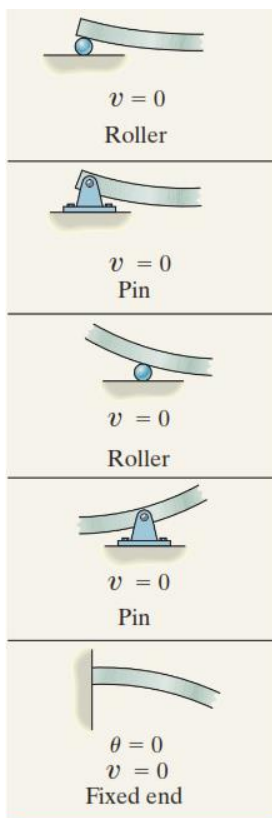
با مشتق‌گیری مجدد و استفاده از معادله  $w = dV/dx$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = w(x)$$

از آنجا که در اکثر مسائل مهندسی، صلبیت خمشی در طول تیر ثابت است، نتایج فوق را می‌توان به صورت معادلات زیر مرتب کرد:

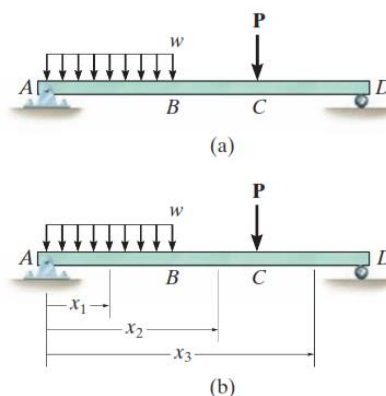
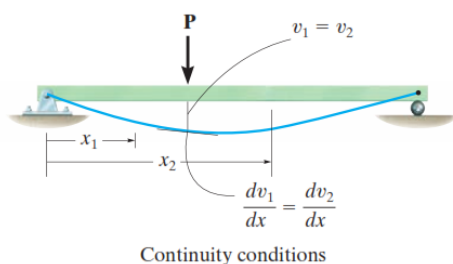
$$\begin{aligned} EI \frac{d^4v}{dx^4} &= w(x) \\ EI \frac{d^3v}{dx^3} &= V(x) \\ EI \frac{d^2v}{dx^2} &= M(x) \end{aligned}$$



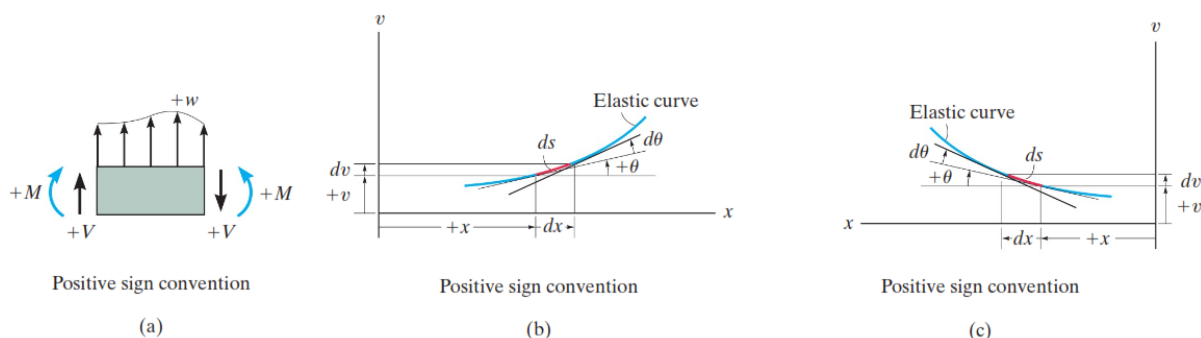


**شرایط مرزی:** برای به دست آوردن تغییرمکان منحنی ارتجاعی تیر، باید از این معادلات به طور متوالی انتگرال گیری کرد. در هر مرحله از انتگرال گیری، یک ثابت انتگرال ظاهر می شود که برای رسیدن به یک پاسخ واحد، باید مقادیر آن ها معلوم شود. این ثابت ها با اعمال شرایط مرزی که در شکل مقابل برای شرایط مختلف تکیه گاهی و انتهایی تیر مشخص شده است، به دست می آیند.

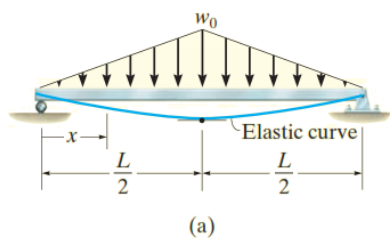
**شرایط پیوستگی:** اگر نتوان منحنی ارتجاعی را با استفاده از یک مختصه بیان کرد، باید از شرایط پیوستگی استفاده کرد تا برخی از ثابت های انتگرال محاسبه شوند. مثلاً در تیر مطابق شکل زیر، لنگر داخلی تیر در نواحی  $AB$ ،  $BC$  و  $CD$  را می توان برحسب مختصات انتخاب شده نسبت به نقطه  $A$  نوشت. توابع به دست آمده از انتگرال گیری، شیب و تغییرمکان تیر را برای هر ناحیه از تیر که در آن معتبرند به دست می دهد. هر چند منحنی ارتجاعی در طول این تیر از یک معادله تبعیت نمی کند، اما از پیوستگی منحنی تغییر شکل در نقاط مشترک نواحی مختلف، یعنی  $B$  و  $C$ ، می توان معادلاتی به دست آورد که در محاسبه ثابت های انتگرال مورد استفاده قرار گیرد.



**قرارداد علامت و مختصات:** تغییرمکان تیر رو به بالا مثبت فرض می شود و اگر جهت مثبت  $x$  به سمت راست باشد، زاویه شیب  $\theta$  نسبت به محور  $x$  در جهت پادساعتگرد، مثبت فرض می شود. از طرف دیگر، اگر جهت مثبت  $x$  به سمت چپ فرض شود، آنگاه  $\theta$  در جهت ساعتگرد مثبت خواهد بود.



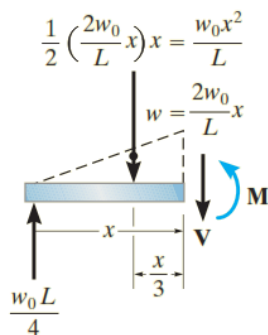
از آنجا که  $dv/dx \approx 0$ ، طول افقی اولیه محور تیر و کمان منحنی ارتجاعی آن، تقریباً برابر خواهد بود. به عبارت دیگر،  $ds$  در شکل های بالا را می توان مساوی با  $dx$  فرض کرد. در نتیجه، نقاط روی منحنی ارتجاعی فقط در جهت قائم جابه جا خواهند شد. همچنین، چون زاویه شیب  $\theta$  بسیار کوچک است، مقدار آن برحسب رادیان می تواند از رابطه  $\theta \approx \tan \theta = dv/dx$  تعیین شود.



**مثال ۲:** بیشترین مقدار تغییرمکان قائم تیر مطابق شکل (a) را تحت بارگذاری مثلثی تعیین کنید.

**حل:** این مثال را به دو روش حل می‌کنیم:

**روش اول:** با توجه به تقارن، حداکثر تغییرمکان تیر در وسط دهانه ایجاد می‌شود و کافی است فقط محدوده  $0 \leq x \leq L/2$  در نظر گرفته شود.



**معادله لنگر:** با توجه به نمودار جسم آزاد نشان داده شده در شکل (b) معادله بارگذاری گسترده عبارت است از:

$$w = \frac{2w_0}{L}x \quad (1)$$

بنابراین:

$$\zeta + \sum M_{NA} = 0; \quad M + \frac{w_0 x^2}{L} \left( \frac{x}{3} \right) - \frac{w_0 L}{4} (x) = 0$$

$$M = -\frac{w_0 x^3}{3L} + \frac{w_0 L}{4} x$$

**شیب و منحنی ارتجاعی:** با دو مرتبه انتگرال‌گیری از معادله لنگر خواهیم داشت:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L} x^3 + \frac{w_0 L}{4} x \quad (2)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L} x^4 + \frac{w_0 L}{8} x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L} x^5 + \frac{w_0 L}{24} x^3 + C_1 x + C_2$$

ثابت‌های انتگرال، با اعمال شرایط مرزی:  $\left\{ \begin{matrix} x=0 \\ v=0 \end{matrix} \right\}$  و با توجه به شرط تقارن:  $\left\{ \begin{matrix} x=L/2 \\ dv/dx=0 \end{matrix} \right\}$  به دست می‌آیند:

$$C_1 = -\frac{5w_0 L^3}{192} \quad C_2 = 0$$

بنابراین:

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L} x^4 + \frac{w_0 L}{8} x^2 - \frac{5w_0 L^3}{192}$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L} x^5 + \frac{w_0 L}{24} x^3 - \frac{5w_0 L^3}{192} x$$

با قرار دادن  $x = L/2$  در رابطه منحنی ارتجاعی، بیشترین تغییرمکان قائم در وسط دهانه به دست می‌آید:

$$v_{\max} = -\frac{w_0 L^4}{120EI}$$

**روش دوم:** چون بار گسترده رو به پایین عمل می‌کند، طبق قرارداد، منفی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به مقدار به دست

آمده برای  $w$  از معادله (۱) می‌توان نوشت:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{2w_0}{L} x$$

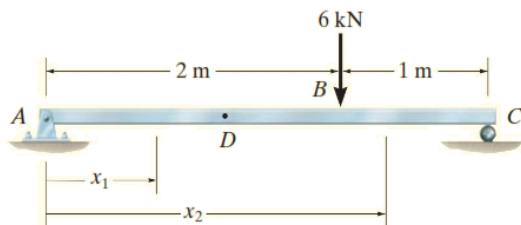
$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L} x^2 + C_1'$$

چون در  $x = 0$ ،  $V = +w_0 l/4$  است،  $C_1' = w_0 l/4$  به دست می‌آید. با انتگرال‌گیری مجدد، داریم:

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L} x^2 + \frac{w_0 L}{4}$$

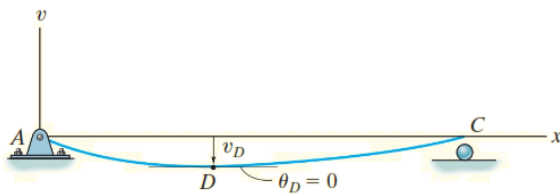
$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L} x^3 + \frac{w_0 L}{4} x + C_2'$$

با توجه به آن که در  $x = 0$ ،  $M = 0$  است، بنابراین:  $C_2' = 0$ . در نتیجه، معادله (۲) به دست خواهد آمد و مانند روش قبلی ادامه می‌یابد.



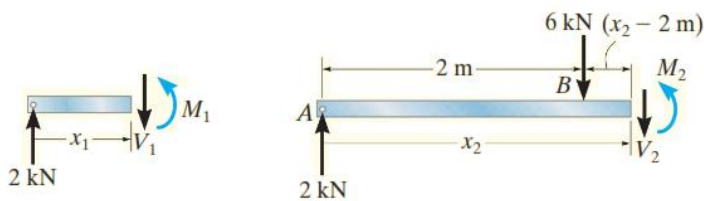
(a)

**مثال ۳:** حداکثر تغییرمکان قائم تیر مطابق شکل (a) را تحت نیروی متمرکز P محاسبه کنید (EI در طول تیر ثابت است).



(b)

**حل:** تغییرشکل تیر تحت بار متمرکز، به صورت نشان داده شده در شکل (b) خواهد بود. با توجه به ناپیوستگی منحنی لنگر در محل اثر بار، دو مقطع، یکی قبل و دیگری بعد از محل اثر نیرو در نظر گرفته می‌شود. نمودارهای آزاد این دو مقطع در شکل (c) نشان داده شده است. لنگرهای خمشی در این دو موقعیت، عبارتند از:



(c)

$$M_1 = 2x_1$$

$$M_2 = 2x_2 - 6(x_2 - 2) = 4(3 - x_2)$$

**شیب و منحنی ارتجاعی:** با استفاده از معادله دیفرانسیل لنگر در ناحیه  $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ m}$  و دو بار انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = x_1^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{1}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad (2)$$

به همین ترتیب در ناحیه  $2 \leq x_1 \leq 3 \text{ m}$  نیز می‌توان نوشت:

$$EI \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} = 4(3 - x_2)$$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = 4 \left( 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) + C_3 \quad (3)$$

$$EI v_2 = 4 \left( \frac{3}{2} x_2^2 - \frac{x_2^3}{6} \right) + C_3 x_2 + C_4 \quad (4)$$

برای به دست آوردن چهار ثابت انتگرال، از دو شرط مرزی:  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$  و  $\begin{cases} x_2 = 3 \text{ m} \\ v_2 = 0 \end{cases}$  و دو شرط پیوستگی در B:  $\begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \text{ m} \\ dv_1/dx_1 = dv_2/dx_2 \end{cases}$  (شیب منحنی ارتجاعی در نقطه B در دو ناحیه یکسان است) و  $\begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \text{ m} \\ v_1 = v_2 \end{cases}$  استفاده می‌کنیم.

$$v_1 = 0 \text{ at } x_1 = 0; \quad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ at } x_2 = 3 \text{ m}; \quad 0 = 4 \left( \frac{3}{2} (3)^2 - \frac{(3)^3}{6} \right) + C_3(3) + C_4$$

$$\left. \frac{dv_1}{dx_1} \right|_{x=2\text{m}} = \left. \frac{dv_2}{dx_2} \right|_{x=2\text{m}}; \quad (2)^2 + C_1 = 4 \left( 3(2) - \frac{(2)^2}{2} \right) + C_3$$

$$v_1(2 \text{ m}) = v_2(2 \text{ m});$$

$$\frac{1}{3} (2)^3 + C_1(2) + C_2 = 4 \left( \frac{3}{2} (2)^2 - \frac{(2)^3}{6} \right) + C_3(2) + C_4$$

با حل این معادلات خواهیم داشت:

$$C_1 = -\frac{8}{3} \quad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{44}{3} \quad C_4 = 8$$

بنابراین، معادلات (1) تا (4) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = x_1^2 - \frac{8}{3} \quad (5)$$

$$EI v_1 = \frac{1}{3} x_1^3 - \frac{8}{3} x_1 \quad (6)$$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = 12x_2 - 2x_2^2 - \frac{44}{3} \quad (7)$$

$$EI v_2 = 6x_2^2 - \frac{2}{3} x_2^3 - \frac{44}{3} x_2 + 8 \quad (8)$$

با نگاهی به منحنی ارتجاعی تیر، معلوم می‌شود که بیشترین تغییر مکان قائم تیر در نقطه D، در فاصله AB رخ می‌دهد. در این نقطه باید شیب نمودار صفر باشد. طبق معادله (5) خواهیم داشت:

$$x_1^2 - \frac{8}{3} = 0$$

$$x_1 = 1.633$$

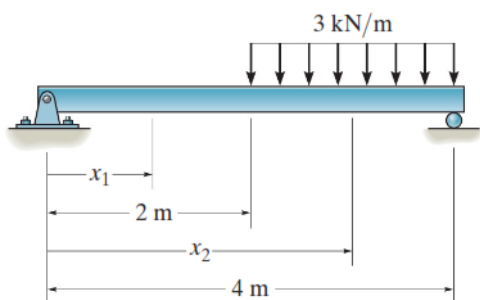
با جایگذاری در معادله (6) بیشترین جابه‌جایی قائم تیر برابر خواهد بود با:

$$v_{\max} = -\frac{2.90 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

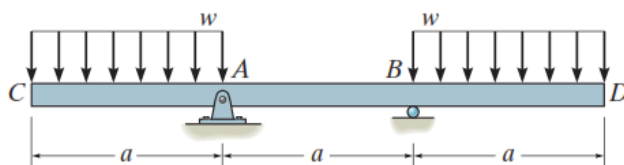
علامت منفی، تغییر مکان رو به سمت پایین را نشان می‌دهد.

## تمرین

(۱) بیشترین جابه‌جایی قائم تیر مطابق شکل را محاسبه کنید

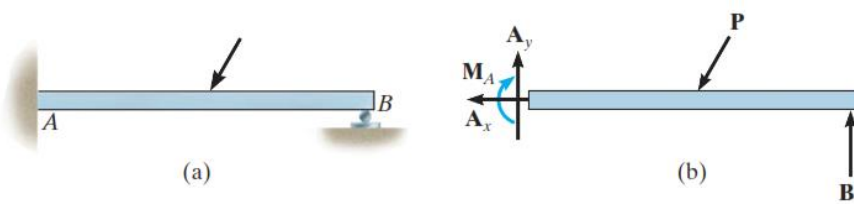


(۲) بیشترین جابه‌جایی قائم تیر مطابق شکل را محاسبه کنید



## تیرهای استاتیکی نامعین

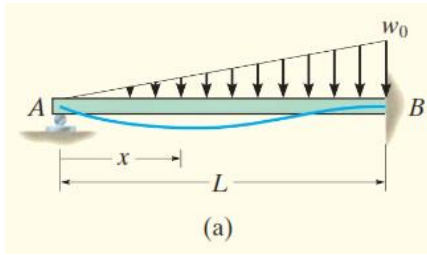
یک عضو، در صورتی استاتیکی نامعین در نظر گرفته می‌شود که تعداد واکنش‌های مجهول آن از تعداد معادلات تعادل بیشتر باشد. به واکنش‌های تکیه‌گاهی اضافی روی تیر، که برای نگهداشتن آن در تعادل پایدار نیازی نیست، واکنش‌های زائد گفته می‌شود و تعداد آن‌ها درجه نامعینی تیر را نشان می‌دهد. برای مثال، تیر نشان داده شده در شکل زیر، برای محاسبه چهار واکنش تکیه‌گاهی مجهول که در نمودار جسم آزاد تیر، در شکل (b)، نشان داده شده است، سه معادله تعادل کافی نیست؛ بنابراین، این تیر، یک درجه نامعین است.



برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی تیرهای نامعین، ابتدا باید واکنش‌های اضافی را مشخص کنیم؛ این واکنش‌ها را می‌توان با استفاده از معادلاتی که براساس شرایط سازگاری نوشته می‌شوند، به دست آورد.

## روش انتگرال‌گیری

در این روش، لنگر خمشی داخلی  $M$ ، بر حسب  $x$  و زواید مجهول نوشته می‌شود. پس از دو بار انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل  $d^2v/dx^2 = M/EI$  دو ثابت انتگرال و مجهولات را می‌توان با استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی محاسبه کرد.



**مثال ۴:** در تیر تحت بارگذاری نشان داده شده در شکل (a) واکنش‌های تکیه‌گاهی را تعیین کنید.

**حل:** همان‌طور که از نمودار جسم آزاد تیر شکل (b) مشاهده می‌شود، تیر یک درجه نامعینی دارد. تابع لنگر را بر حسب  $x$  مطابق شکل (c)، می‌توان به صورت زیر نوشت:

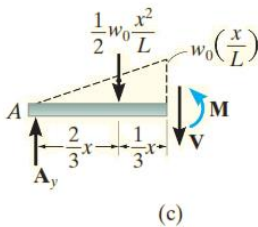
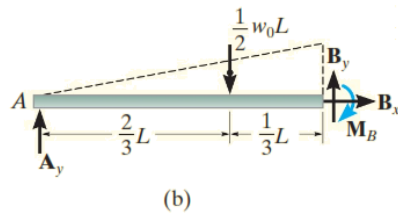
$$M = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

با نوشتن معادله دیفرانسیل لنگر خمشی و دو بار انتگرال‌گیری، داریم:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} A_y x^2 - \frac{1}{24} w_0 \frac{x^4}{L} + C_1$$

$$EI v = \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{120} w_0 \frac{x^5}{L} + C_1 x + C_2$$



سه مجهول  $A_y$ ،  $C_1$  و  $C_2$  با استفاده از شرایط مرزی:  $\begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases} \begin{cases} v=0 \\ v=0 \end{cases}$  و  $\begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases} \begin{cases} dv/dx=0 \\ dv/dx=0 \end{cases}$  محاسبه می‌شوند.

$$x = 0, v = 0; \quad 0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$x = L, \frac{dv}{dx} = 0; \quad 0 = \frac{1}{2} A_y L^2 - \frac{1}{24} w_0 L^3 + C_1$$

$$x = L, v = 0; \quad 0 = \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{120} w_0 L^4 + C_1 L + C_2$$

و از آنجا:

$$A_y = \frac{1}{10} w_0 L$$

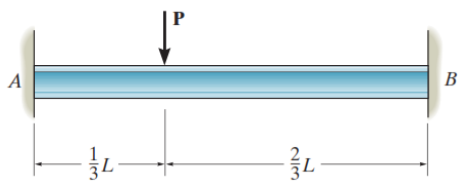
$$C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3 \quad C_2 = 0$$

پس از محاسبه واکنش تکیه‌گاهی  $A_y$ ، واکنش‌های تکیه‌گاهی در B را می‌توان با استفاده از معادلات تعادل محاسبه کرد.

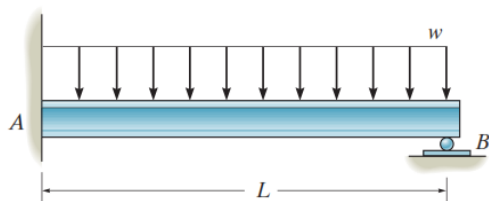
$$B_x = 0 \quad ; \quad B_y = \frac{2w_0 L}{5} \quad ; \quad M_B = \frac{w_0 L^2}{15}$$

## تمرین:

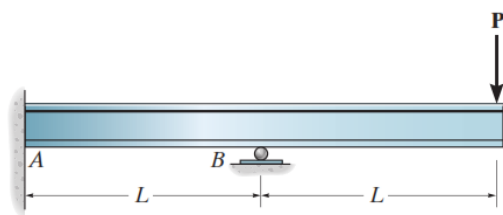
۳) واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر مطابق شکل زیر را تعیین کنید (EI در طول تیر ثابت است).



۴) واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر مطابق شکل زیر را تعیین کنید (EI در طول تیر ثابت است).

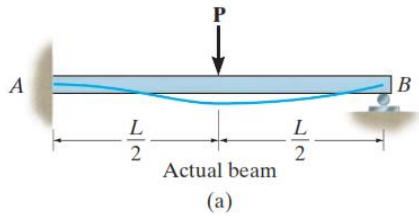


۵) واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر مطابق شکل زیر را تعیین کنید (EI در طول تیر ثابت است).



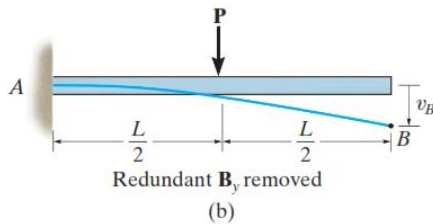
## روش جمع آثار (برهم‌نهی) Method of Superposition

در این روش، ابتدا با حذف واکنش‌های زائد تکیه‌گاهی از تیر، «تیر اصلی» را که معین و پایدار است، مشخص و تحت اثر بارهای وارده، آنالیز می‌کنیم. سپس نیروهای مربوط به واکنش‌های اضافی را بر روی تیر اصلی قرار می‌دهیم و تغییر شکل تیر را در آن نقطه، بر حسب این نیروها محاسبه می‌کنیم. از ترکیب این دو اثر، و با استفاده از شرایط سازگاری، واکنش‌های مجهول به‌دست



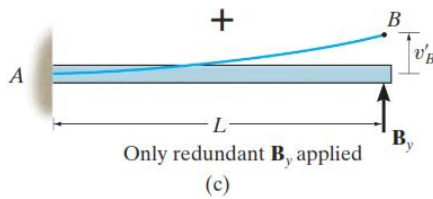
می‌آیند. برای روشن شدن این مفاهیم، تیر نشان داده شده در شکل (a) را در نظر بگیرید. اگر واکنش  $B_y$  را زاید فرض کنیم، تیر اصلی به صورت نشان داده شده در شکل (b) و تیری که واکنش زاید  $B_y$  روی آن عمل می‌کند، مطابق شکل (c) خواهد بود. چون در محل تکیه‌گاه غلطکی باید جابه‌جایی قائم تیر صفر باشد، بنابراین معادله سازگاری در تکیه‌گاه B عبارت است از:

$$(+\uparrow) \quad 0 = -v_B + v'_B$$



جابه‌جایی‌های  $v_B$  و  $v'_B$  را می‌توان با استفاده از روش‌هایی که در قسمت قبل مورد بحث قرار گرفت، محاسبه کرد. همچنین می‌توانیم از جدول صفحه بعد این مقادیر را تعیین کنیم. این روابط بین بار و تغییرمکان عبارتند از:

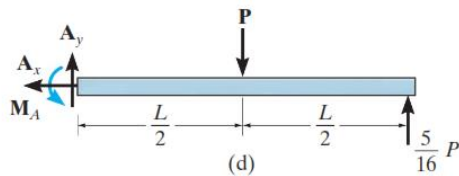
$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} \quad \text{و} \quad v'_B = \frac{B_y L^3}{3EI}$$



با جایگذاری در معادله سازگاری خواهیم داشت:

$$0 = -\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{B_y L^3}{3EI}$$

$$B_y = \frac{5}{16} P$$

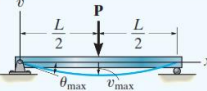
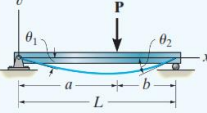
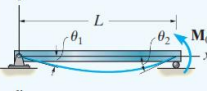
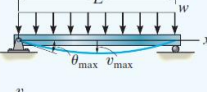
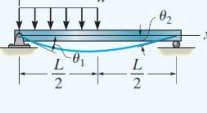
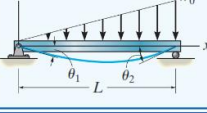


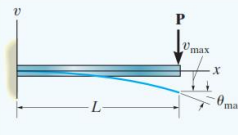
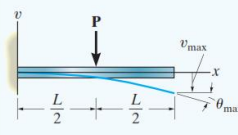
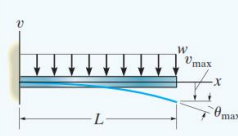
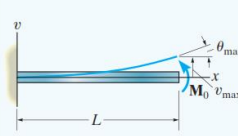
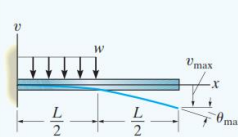
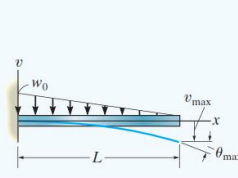
با معلوم شدن  $B_y$ ، سه واکنش تکیه‌گاه A را می‌توان با نوشتن معادلات تعادل به‌دست آورد. نتایج عبارتند از:

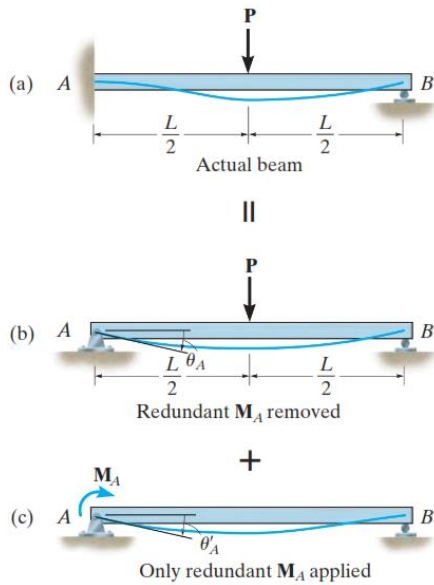
$$A_x = 0 \quad A_y = \frac{11}{16} P$$

$$M_A = \frac{3}{16} PL$$



Simply Supported Beam Slopes and Deflections			
Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{\max} = \frac{-PL^2}{16EI}$	$v_{\max} = \frac{-PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$ $0 \leq x \leq L/2$
	$\theta_1 = \frac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v _{x=a} = \frac{-Pba}{6EIL} (L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \frac{-Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \leq x \leq a$
	$\theta_1 = \frac{-M_0L}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{M_0L}{3EI}$	$v_{\max} = \frac{-M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$ at $x = 0.5774L$	$v = \frac{-M_0x}{6EIL} (L^2 - x^2)$
	$\theta_{\max} = \frac{-wL^3}{24EI}$	$v_{\max} = \frac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \frac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v _{x=L/2} = \frac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{\max} = -0.006563 \frac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \frac{-wx}{384EI} (16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-wL}{384EI} (8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \leq x < L$
	$\theta_1 = \frac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{\max} = -0.00652 \frac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \frac{-w_0x}{360EIL} (3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

Cantilevered Beam Slopes and Deflections			
Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{\max} = \frac{-PL^2}{2EI}$	$v_{\max} = \frac{-PL^3}{3EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI} (3L - x)$
	$\theta_{\max} = \frac{-PL^2}{8EI}$	$v_{\max} = \frac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px^2}{12EI} (3L - 2x) \quad 0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-PL^2}{48EI} (6x - L) \quad L/2 \leq x \leq L$
	$\theta_{\max} = \frac{-wL^3}{6EI}$	$v_{\max} = \frac{-wL^4}{8EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{\max} = \frac{M_0L}{EI}$	$v_{\max} = \frac{M_0L^2}{2EI}$	$v = \frac{M_0x^2}{2EI}$
	$\theta_{\max} = \frac{-wL^3}{48EI}$	$v_{\max} = \frac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI} (x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2)$ $0 \leq x \leq L/2$ $v = \frac{-wL^3}{384EI} (8x - L)$ $L/2 \leq x \leq L$
	$\theta_{\max} = \frac{-w_0L^3}{24EI}$	$v_{\max} = \frac{-w_0L^4}{30EI}$	$v = \frac{-w_0x^2}{120EIL} (10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$



همان طور که پیش از این نیز بیان شد، انتخاب واکنش زاید اختیاری است، اما باید «تیر اصلی» پایدار باشد. به عنوان مثال، در تیر مطابق شکل (a)، لنگر خمشی  $M_A$  را نیز می توان واکنش زاید فرض کرد. اگر شیب منحنی ارتجاعی حاصل از اعمال بار  $P$  در تکیه گاه  $A$  را با  $\theta_A$  و شیب حاصل از لنگر  $M_A$  را با  $\theta'_A$  نشان دهیم، معادله سازگاری برای شیب در  $A$  ایجاب می کند:

$$0 = \theta_A + \theta'_A \quad (\zeta +)$$

با استفاده از جدول صفحه قبل داریم:

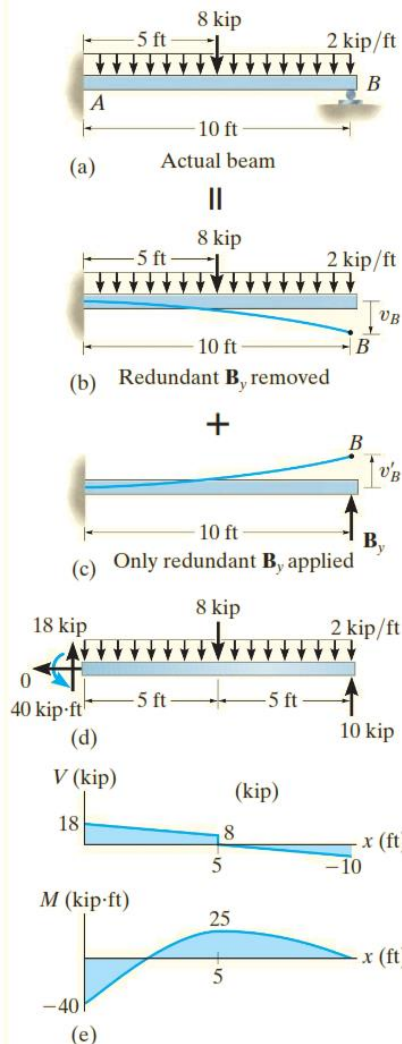
$$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI} \quad \text{و} \quad \theta'_A = \frac{M_A L}{3EI}$$

بنابراین:

$$0 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_A L}{3EI}$$

$$M_A = -\frac{3}{16} PL$$

این همان نتیجه ای است که قبلاً نیز به دست آمده بود. علامت منفی، نشان می دهد که جهت لنگر در  $A$ ، در خلاف جهت فرض شده است.



**مثال ۵:** واکنش تکیه گاه  $B$  را در تیر مطابق شکل زیر به دست آورید؛ سپس نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کنید.

**حل:** با توجه به شرایط تکیه گاهی، معلوم می شود که تیر یک درجه نامعین است. با حذف واکنش تکیه گاهی  $B_y$ ، و به کارگیری اصل جمع آثار، معادله سازگاری در  $B$  عبارت است از:

$$0 = v_B - v'_B \quad (1) \quad (+\downarrow)$$

با استفاده از جدول، خواهیم داشت:

$$v_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{5PL^3}{48EI} = \frac{2 \text{ kip/ft}(10 \text{ ft})^4}{8EI} + \frac{5(8 \text{ kip})(10 \text{ ft})^3}{48EI} = \frac{3333 \text{ kip} \cdot \text{ft}^3}{EI} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y (10 \text{ ft})^3}{3EI} = \frac{333.3 \text{ ft}^3 B_y}{EI} \uparrow$$

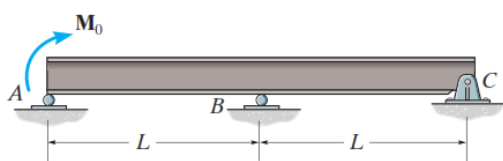
جای گذاری در معادله (1) و حل آن، نتیجه می دهد:

$$0 = \frac{3333}{EI} - \frac{333.3 B_y}{EI}$$

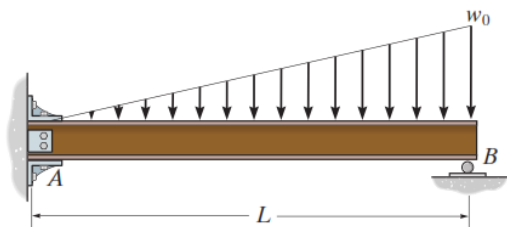
$$B_y = 10 \text{ kip}$$

در نتیجه، با نوشتن روابط تعادل در نمودار جسم آزاد (شکل d)، می توان نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم کرد.

## تمرین:



۶) واکنش‌ها در تکیه‌گاه‌های A و B را تعیین کنید (EI در طول تیر ثابت است).



۷) واکنش‌ها را در تکیه‌گاه گیردار A و غلطکی B تعیین کنید (EI در طول تیر ثابت است).

## مراجع

- 1) R. C. Hibbeler, *Mechanics of materials*, Tenth edition, 2017.
- 2) Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr, *Mechanics of materials*, Seventh edition, 2015.
- 3) Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas, *Mechanics of materials*, Second edition, 2012.
- 4) Roy R. Craig, Jr, *Mechanics of materials*, Third edition, 2011.
- 5) James M. Gere, *Mechanics of materials*, Sixth edition, 2004
- 6) Popov, E. P. (Egor Paull), *Engineering mechanics of solids*, 1990.
- 7) Victor Dias da Silva, *Mechanics and Strength of Materials*, 2006.

۸) مهدی فرشاد، مکانیک مهندسی، جلد سوم، مقاومت مصالح، چاپ چهارم، ۱۳۶۸.

۹) حجت الله عادل، مقاومت مصالح، چاپ هفتم، ۱۳۷۵.