دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مقاومت مصالح ۱

استاد :

جناب آقای دکتر کبیر

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

«بسم الله الرحمن الرحیم»

حمید کاظم

مقاومت مصالح ۱

جناب آقای دکتر کبیر

خلاصه مباحث درس :

فصل اول :

مفاهیم تنش : نرمال ، برشی ، لهیدگی ، مولفه های تنش بر روی سطح شیب دار ، ضریب اطمینان

فصل دوم :

بارگذاری محوری : تنش محوری ، کرنش محوری (معیار اندازه گیری تغییر شکل) ، دیاگرام تنش کرنش (رابطه بین بار و تغییر شکل) ، خزش ، خستگی ، تحلیل سازه های نامعین الاستیکی ، بارگذاری حرارتی ، ضریب پواسون ، تمرکز تنش ، قانون هوک (رابطه بین تنش و کرنش در حالت خطی) برای حالت ۲ بعدی و ۳ بعدی تنش ، تغییر شکل های ماندگار ، تنش های پس ماند .

فصل سوم :

پیچش : مقاطع دوار ، تنش برشی ناشی از پیچش ، تغییر شکل پیچشی (زاویه پیچشی) ، تمرکز تنش ، مسائل نامعین در پیچش ، طراحی محورهای انتقال قدرت ، تغییر شکل های پلاستیک (ماندگار) در پیچش ، مقاطع جدار نازک در پیچش ، مقاطع غیر دوار

فصل چهارم:

خمش (خمش خالص $\frac{۷}{۱۱}$): کلیات خمش، تعریف تنش ناشی از خمش، خمش در مقاطع مرکب، تمرکز تنش در خمش، تغییر شکل های غیر ارتجاعی، خمش نامتقارن، بارهای محوری خارج از مرکز، ترکیب تنش محوری و خمشی.

فصل پنجم:

برش: کلیات برش، تنش برشی در تیرها، مقاطع جدار نازک، مرکز برش، مقاطع مرکب، ترکیب تنش ها.

* ترکیب تنش ها جمع بندی کل چیزهایی است که خوانده ام.

Mechanics of solids
strength of materials → مقاومت مصالح

حمید کاظم

اهداف درس :

۱) استحکام strength

۲) صلبیت (میزان ایستایی در برابر بار وارده) Rigidity

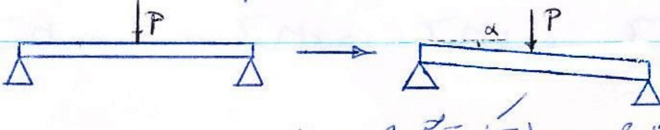
۳) پایداری الاستیک Elastic Stability

این ۳ هدف را در مکانیک جامدات به صورت زیر خلاصه و تعریف می‌کنیم : موضوعی از علم مکانیک است که با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی و تعیین میزان مقاومت (استحکام) و صلبیت (تغییر شکل) و پایداری ارتجاعی اعضای باربر می‌پردازد.

مفاهیم اساسی درس :

۱) جسم صلب (rigid body) : به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر باشد یعنی به عبارتی

Relative Displacement Between Particles = 0



هر جسمی در اثر نیرو تغییر شکل می‌دهد (حرکت جسم صلب)

۲) جسم شکل پذیر (Deformable body) : به آن جسمی گویند که در اثر اعمال نیروهای خارجی تغییر شکل نسبی بین اجزاء تشکیل دهنده آن صفر نباشد.

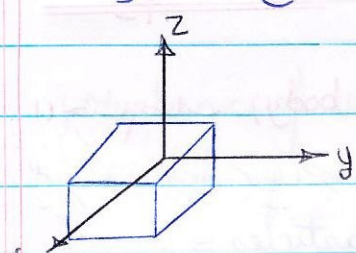
Relative Displacement Between particles $\neq 0$.

* درست برعکس جسم صلب

۳) جسم همگن (Homogen) : به جسمی گویند که چگالی آن (ρ) در تمام نقاط ثابت باشد. مثلاً فولاد (با تقریب نسبی)

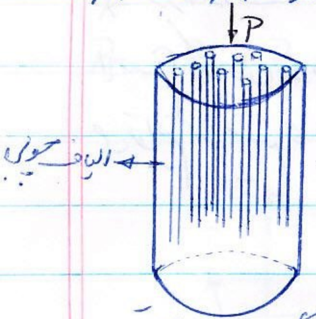
* بتن اگر خوب ویبره شود همگن می گردد. خاک همگن نیست.

۴) ایزوتروپ (Isotrop) : به جسمی گوییم که خواص مصالح آن در کلیه راستاها یکنواخت باشد.



مثلاً در مکعب مقابل از هر جهت بارگذاری کنیم یک عکس العمل نشان می دهد

ه) انیستروپ (Anistrop): به جسمی گویند که رفتارش در ۳ جهت x، y، z یکسان نیست.



بهترین مثال برای این حالت چوب است.

چوب نیروی وارده P را بهتر از P' تحمل می‌کند.

چون در حالت موازی (P) بار را الیاف تحمل می‌کنند ولی در جهت عمودی (P') مواد چسباننده الیاف به همدیگر، بار را تحمل کرده و لذا بهتر است بار به صورت موازی با الیاف اعمال شود.

۶) (Orthotrop): اجسامی که در سه راستای متعامد خواص متفاوتی داشته باشند.

تعادل اجسام: اجسام در حال تعادل از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$\sum F = 0 \quad , \quad \sum M = 0$

برای پیدا کردن فرمول‌های تعادل، ۳ جهت x و y و z را در نظر می‌گیریم و داریم:

$\sum F = 0 \rightarrow \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$

$\sum M = 0 \rightarrow \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$

* در مقاومت مصالح روابط تعادل اجسام در منظور تعیین و تحلیل نیروهای داخلی اجسام بکار می رود.

می توانیم بنویسیم :

$$\hat{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}$$ بردار کلی نیرو

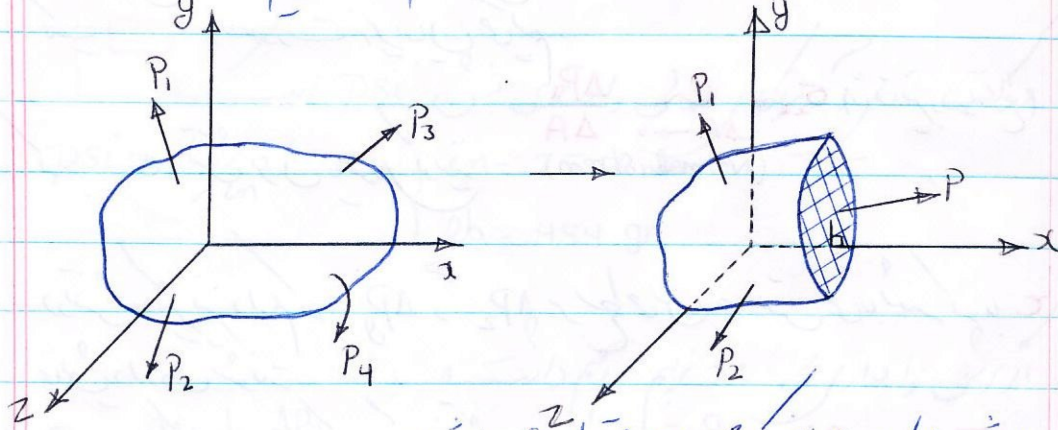
$$\hat{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}$$ بردار کلی لنگر

حمید کاظم

فصل اول

مفهوم تنش : (Concept of stress)

اگر جسمی در فضای xyz در حال تعادل تحت تاثیر نیروی P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 قرار گرفته باشد ؛ وقتی شکل را برش می زنیم خواهیم داشت :



برش را طوری می زنیم که محور x بر مقطع عمود باشد

P برآیند نیروهای داخلی در سطح مقطع می باشد که با P_1 ، P_2 دارای برآیند صفر است

برای بیان مفهوم تنش روی سطح مقطع تقسیم بندی هایی انجام می دهیم. فرض کنیم مساحت سطح مقطع A و قسمت های خیلی خورده ΔA باشد ؛ در این صورت می توان گفت به آن ΔP نیرو وارد می شود که اگر آن را به صورت برداری بنویسیم

خواهیم داشت:

$$\vec{\Delta P} = \vec{\Delta P_x}\,\hat{i} + \vec{\Delta P_y}\,\hat{j} + \vec{\Delta P_z}\,\hat{k}$$

غلط (همین $\vec{P}$ بر سطح عمود است پس ΔP نیز بر مقطع برش عمود می‌باشد). بنابراین ΔP_x بر سطح عمود و ΔP_y و ΔP_z بر سطح مماس هستند. لذا تعریف تنش در نقطه را بصورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$ (اندیس نیرو و واحد سطح)

که به σ_x تنش نرمال یا عمودی گویند (Normal stress)

دو تنش دیگر نیز داریم که ΔP_y و ΔP_z بر سطح مماس عمل می‌کنند می‌باشند که با τ نمایش داده می‌شوند.

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

xy بیانگر سطحی است که در آن تنش وارد می‌شود یعنی سطحی که نیرو بر آن عمود است

x در xy بیانگر سطح محدود تنش است و y در xy بیانگر جهت نیرو است.

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

بهتر است از لحاظ طراحی بارگذاری دو تنش در یک راستا باشند.

* اولین اندیس τ، تنش را به صفحه‌ای که روی آن عمل می‌کند مربوط می‌سازد و اندیس دوم نشان‌دهنده جهت آن می‌باشد.

در سیستم آحاد (SI) نیرو را با N یا kN و سطح را با mm^2 نمایش می دهند.
پس واحد تنش $\frac{kN}{mm^2}$ یا MPa است.

$1\,pa = N/m^2$ $\qquad$ $1\,MPa = 10\,kg/cm^2$

در کتب قدیمی و امریکای شمالی واحدهای تنش psi است که:

$$psi = lb/in^2 \longrightarrow \begin{cases} in = 25.4\,mm \\ lb = 454\,gr \end{cases}$$

اگر برش را موازی محور xz بزنیم خواهیم داشت:

$$\sigma_{yy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

محور y عمود $\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$ $\qquad$ $\tau_{yz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$

* تنش کمیتی تانسوری (Tensor) است. یعنی برداری است که سطح داشته باشد. در این یعنی که علاوه بر مقدار و راستا، سطحی که بر آن اعمال می شود نیز معلوم باشد.

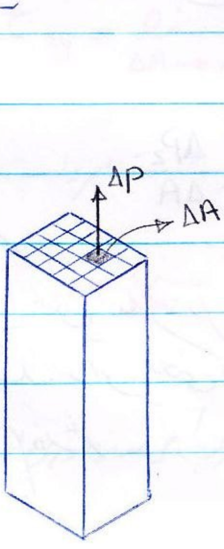
Tensor از لحاظ شکل کمیتی ابر برداری است.

ماتریس تانسور را در فضا به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\text{تانسور تنش :}\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{دارای ۹ مولفه است}$$

اگر تابع بار تابعی پیوسته باشد تنش تبدیل به دیفرانسیل می‌شود (زیاد وارد این بحث نخواهیم شد!!)

تعریف مهندسی تنش (Exact Define) :



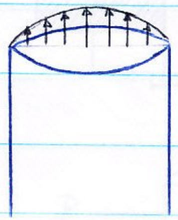
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

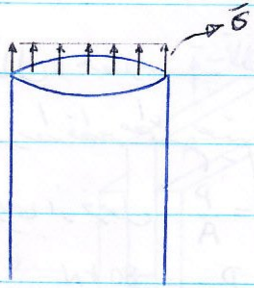
$$\bar{\sigma}_{\text{متوسط}} = \frac{P}{A}$$

در واقع وقتی P در سطح اعمال می شود، نیروها بصورت متقابل می گردند

اگر بار وارده بصورت تابعی از مختصات سطح بیان شود می توان

شدت تنش را به صورت مقابل نشان داد.

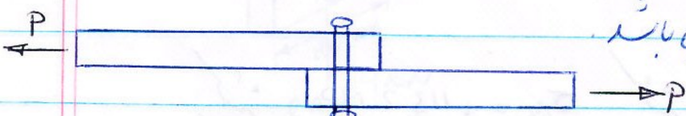


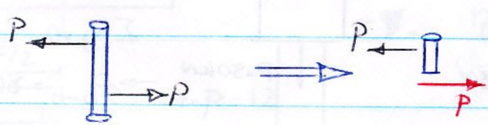


ولی در تنش متوسط نیروها بصورت مقابل فرض می شوند.

(همگی هم اندازه اند)

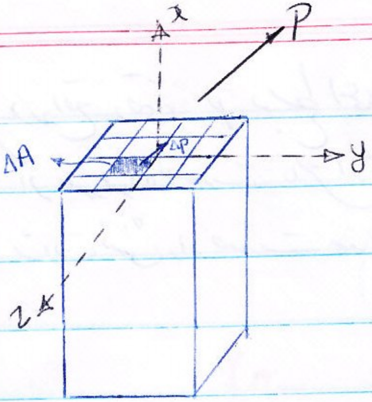
فرض کنیم عضوی به صورت مقابل باشد.





$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{P}{A}$$

* اگر به اندازه کافی دور از محل اعمال بار متمرکز شویم تنش یکنواخت می‌شود.

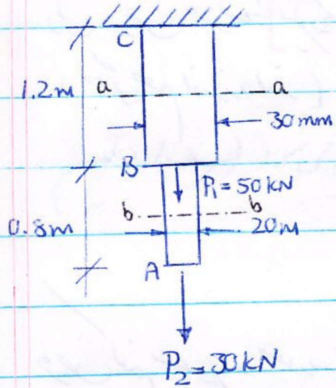


$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

مثال: مطلوبست تنش در وسط هر قطعه.



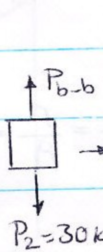
حل: در وسط قطعه مطمئن هستیم توزیع تنش یکنواخت است.

در اینجا از فرمول $\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$ استفاده می‌کنیم.

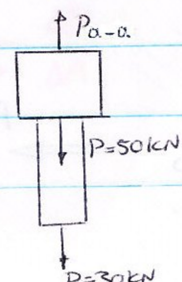
$$A_{a-a} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (30)^2}{4} \qquad P_{a-a} = 80\ kN$$

$$A_{b-b} = \frac{\pi (20)^2}{4} \qquad P_{b-b} = 30\ kN$$

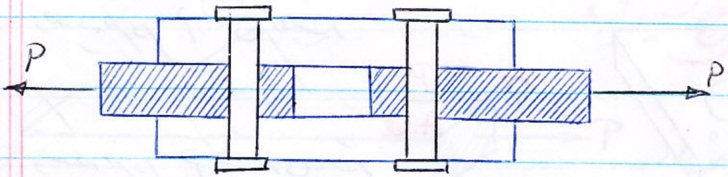
$\Rightarrow \sigma_{AB} = +95.5\ MPa$ کشش $\qquad \sigma_{BC} = +113.2\ MPa$ کشش

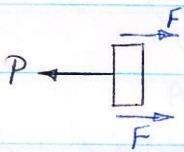


$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P_{b-b} = 30$

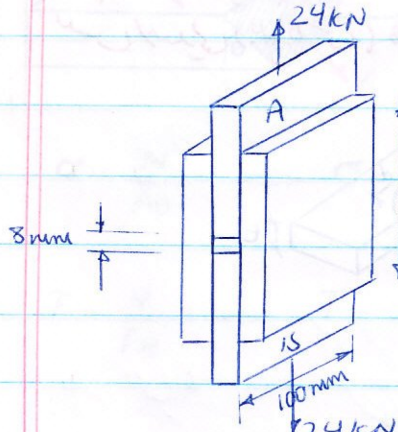


$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P_{a-a} = 80\ kN$

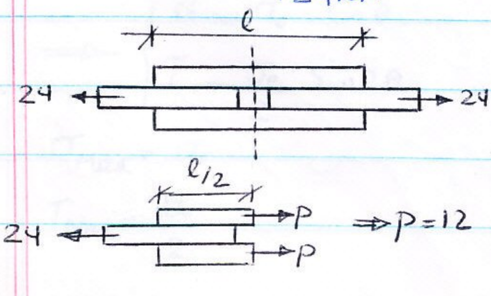




$2F = P \Rightarrow F = P/2 \Rightarrow \tau = \frac{P}{2A}$



مثال: اگر بدانیم که تنش برشی متوسط مجاز حداکثر 800 kpa باشد و فاصله دو قطعه A , B 8mm باشد، طول l چقدر باید باشد که در برابر 24kN تنش برشی از 800 kpa تجاوز نکند.



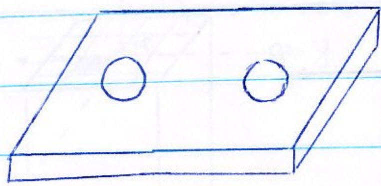
$\Rightarrow P = 12$

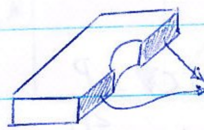
$$\tau = \frac{12 \times 10^3}{(l/2 - 4)\,100} = 800 \times 10^{-3}$$

$\Rightarrow l = 308 \text{ mm}$

وقتی که نیروی P کششی باشد

$$\sigma = \frac{P}{A_{net}}$$



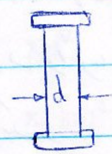


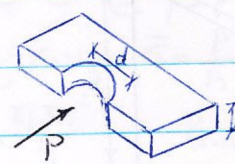
وقتی که نیروی P فشاری باشد

$$\sigma = \frac{P}{A_{\text{کل}}}$$

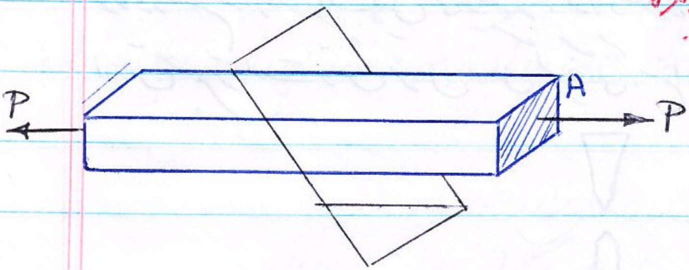
تنش لهیدگی (تکیه گاهی):

$$\sigma_b = \frac{P}{dt}$$

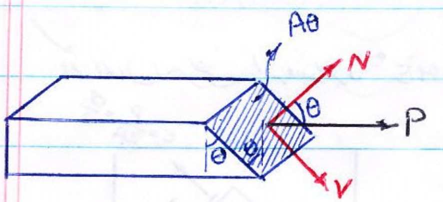




مولفه‌های تنش بر روی سطح شیبدار



تنش اولیه $\sigma_0 = \dfrac{P}{A}$



$$\begin{cases} N = P\cos\theta \\ V = P\sin\theta \end{cases} \qquad A = A_\theta \cos\theta$$

$A =$

$$\sigma = \frac{N}{A_\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P\cos\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P\sin\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$$

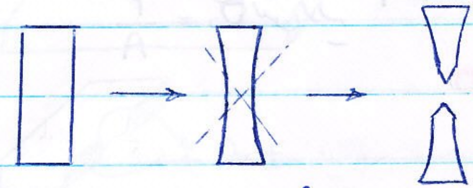
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_0 . \cos^2\theta \\ \tau = \dfrac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

$\sigma_{Max} = \sigma_0$

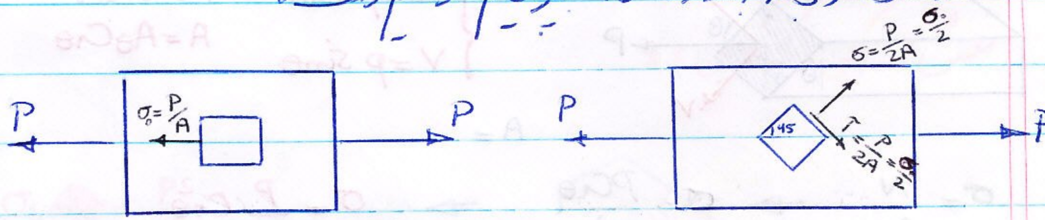
$\tau_{Max} = \dfrac{\sigma_0}{2}$

* اگر $\theta = 0$ باشد σ، ماکزیمم می‌شود.
* اگر $\theta = 45$ باشد τ، ماکزیمم می‌شود.

فولاد و بتن سازه‌ها را تشکیل می‌دهند. فولاد معمولاً گسیختگی‌اش به صورت برشی است.
اما بتن جسمی ترد است و تنش نرمال عامل گسیختگی آن است.



اگر المان مربعی را به اندازه $45°$ بچرخانیم خواهیم داشت:



بار نهایی: حداکثر باری که یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود. به عبارت دیگر بار آستانهٔ گسیختگی را بار نهایی گوییم.

تنش نهایی: حداکثر تنشی که یک جسم می‌تواند تحمل کند تا گسیخته شود.

بار مجاز (بار طراحی) : Manufacturing : بار برده شدن فولادها به علت بعضی

جاها هوا بیشتر می‌خورد و زودتر سرد می‌شود، بعضی جاها دیرتر سرد می‌شود. پس داخل فولاد تنش‌های

داخلی ایجاد می‌شود.

Transportation : به علت ضربه‌ای که در حمل به فولاد وارد می‌شود.

Instatation : نصب . هنگام نصب ممکن است در قطعات تنش‌های ناخواسته ایجاد شود.

Loading : بارهایی که در نظر گرفته می‌شود کمتر از مقدار باری که واقعاً اعمال می‌شود.

بار زنده و مرده

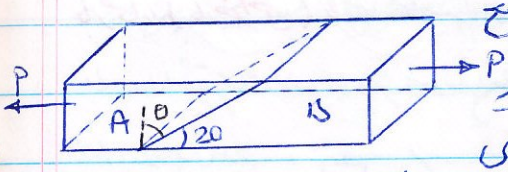
Environment, Material :

تمام این عوامل نشان می‌دهد ما باید بار نهایی را اعمال کنیم. نسبت به بار مجاز اعمال می‌کنیم.

$$\text{ضریب اطمینان} = \frac{\text{بار نهایی}}{\text{بار مجاز}}$$

بار مجاز را نسبت به بار نهایی کمتر در نظر می‌گیریم. ضریب اطمینان مشخص است که در مبحث دهم

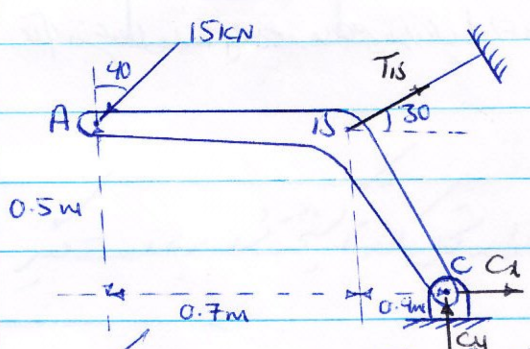
ذکر شده است.



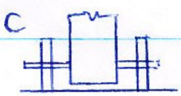
مثال: دو جسم چوبی A , B دارای سطح مقطع یکنواخت $70 \times 110\ mm^2$ توسط چسب به هم متصل شده‌اند. اگر بدانیم تنش مجاز برشی برای چسب 500 kpa فرض شود تعیین کنید حداکثر نیروی P که می‌توان به این عضو وارد نمود چیست؟

$$\theta = 90 - 20 = 70 \qquad \tau = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta = 500 \times 10^{-3}\ (P\ Mpa)$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{500 \times 10^{-3} \times 2 \times (70 \times 110)}{\sin(2 \times 70)} = 11979\ N = 12\ kN$$



مثال: اگر جسم نشان داده شده از فولاد باشد و فولاد دارای تنش برشی نهایی $\tau = 350\ MPa$ می‌باشد. این عدد برای پین فولادی نقطه C نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر ضریب اطمینان مورد نظر در این مسئله 3.5 در نظر گرفته شود، قطر پین فولادی C را محاسبه کنید.

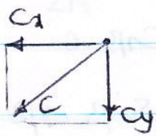


$$\tau_{allowable} = \frac{350}{3.5} = 100\ MPa$$

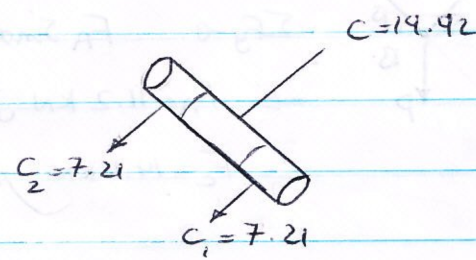
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow T_{IJ}(0.4 \sin 30 + 0.5 \cos 30) - 15(1.1 \times \cos 40)$$
$$-15(0.5 \sin 40) = 0 \Rightarrow T_{IJ} = 27.58 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -15 \sin 40 + 27.58 \cos 30 + C_x = 0$$
$$\Rightarrow C_x = -14.24$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -15 \cos 40 + T_{IJ} \sin 30 + C_y = 0$$
$$\Rightarrow C_y = -2.3 \text{ kN}$$

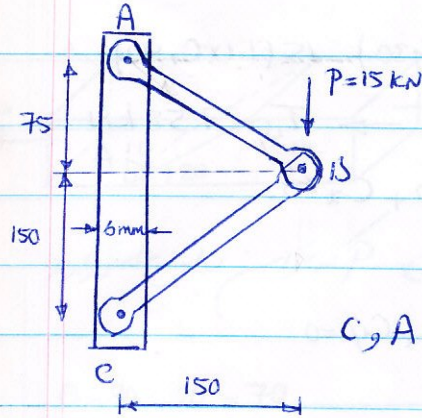


$C = 14.42 \text{ kN}$

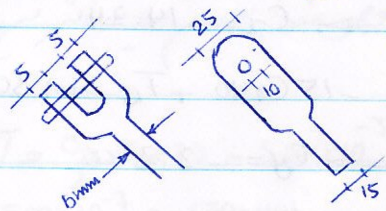


$$\tau_{allowable} = \frac{C/2}{A} = \frac{14.42 \times 10^3}{2 \times \pi (d^2)/4} = 100 \Rightarrow d = 9.58 \text{ mm}$$

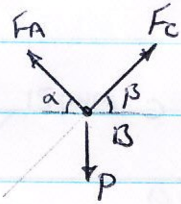
مثال: مطلوبست تعیین تنش های قائم در اعضای میله ای AB و BC و همچنین تنش لهیدگی برای پین در C. (قطر تمام پین های به کار رفته در این سازه 10mm فرض کنید)



A و C:



$$\begin{cases} \alpha = 25.56 \\ \beta = 45 \end{cases}$$



$$\xrightarrow{+} \quad \Sigma F_x = 0 \qquad -F_A \cos\alpha + F_C \cos\beta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_A \sin\alpha + F_C \sin\beta = P$$

$$\Longrightarrow F_A = 11.2\ kN$$ کششی

$$F_C = 14.1\ kN$$ فشاری

محاسبه تنش های قائم:

میله $\sigma_{AB} = \dfrac{F_A}{A_A} = \dfrac{11.2\times10^3}{6\times15} = 124\ Mpa$ کششی

در محل پین $\sigma_{AB} = \dfrac{F_A}{A_{net}} = \dfrac{11.2\times10^3}{2(25-10)5} = 74.7\ Mpa$ کششی

میله $\sigma_{BC} = \dfrac{F_C}{A} = \dfrac{14.1\times10^3}{6\times15} = 156.67\ Mpa$ فشاری

* چون فشاری است A_{net} نمی خواهد — فشاری

$$\sigma_{BC} = \frac{F_C}{A} = \frac{14.1\times10^3}{2\times25\times5} = 56.4\ \text{Mpa}$$ در کل تسمه

حال تنش لهیدگی بین پین و تسمه ها

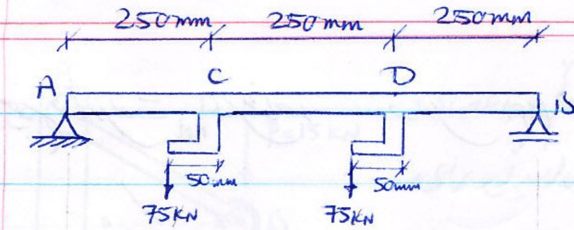
$$\sigma_b = \frac{F_C}{A} = \frac{14.1\times10^3}{2\times10\times5} = 141\ \text{Mpa}$$

حال تنش لهیدگی بین پین و صفحه اصلی ها

$$\sigma_b = \frac{F_C}{A_{\text{مفصل}}} = \frac{14.1\times10^3}{10\times6} = 235\ \text{Mpa}$$

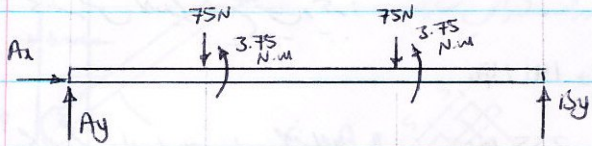
$$\tau = \frac{P}{2A} = \frac{14.1\times10^3}{2\times\pi(10)^2/4} = 89.8\ \text{Mpa}$$

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی

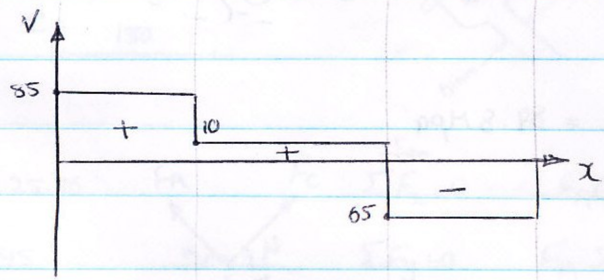


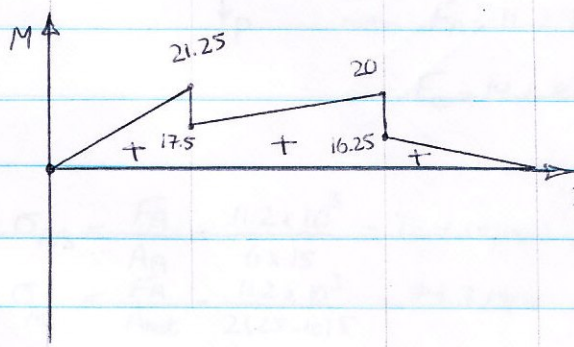
$$\Sigma M_A = 0 \quad , \quad \Sigma F_y = 0$$

$$B_y = 65N \qquad A_y = 85N$$

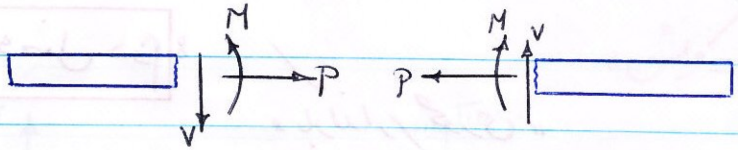


$$\begin{cases} V_2 - V_1 = \int q\,dx \\ M_2 - M_1 = \int V\,dx \end{cases}$$





قرارداد:



سؤالات پیشنهادی Beer-Johnston:

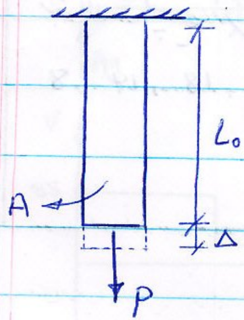
فصل 1: 8, 14, 18, 20, 24, 26, 36, 41, 49, 55

فصل 7: 19, 20, 30, 66

حمید کاظم

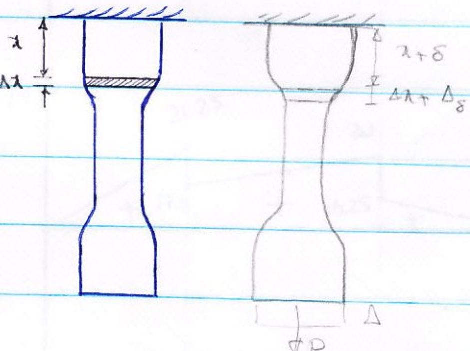
فصل دوم:

«بارگذاری محوری»



$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

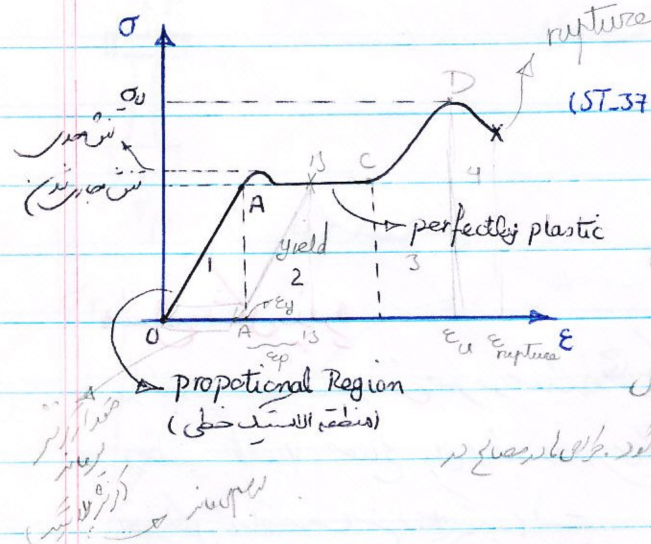
ε کرنش (strain) است و بدون واحد است .



$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

رسم دیاگرام تنش ـ کرنش :

مصالح شکل پذیر : فولاد ساختمانی (ST-37)



کرنش جاری شدن تمایلی در هم وارد می‌شود

که بعد از تنش جاری شدن کرنش افزایش پیدا می‌کند

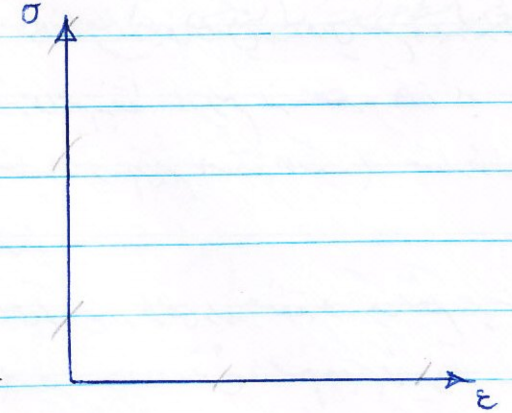
تا برسیم

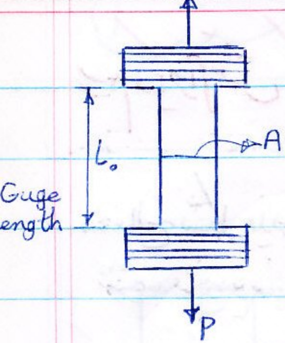
در OA اگر بار برداریم تغییر شکل به حالت اول

برمی‌گردد و اگر تنش اعمال شده حذف می‌شود. طراحی با در مصالح در

منطقه OA انجام می‌شود.

مصالح ترد :





مصالح شکل پذیر یا مصالحی هستند که دامنه تغییر شکل‌های آن زیاد است

مصالح شکل پذیر

* در منطقه ۱ با اضافه شدن بار تنش به صورت خطی زیاد می‌شود و تغییر شکل خطی بود 1: Linear elastic

* در منطقه yield مصالح روان می‌شود و جاری می‌شود و هیچ مقاومتی از خود نشان نمی‌دهد
تغییر شکل کاملاً غیرقابل برگشت (پلاستیک) است 2: yield

فولادهای ساختمانی و مس جزو مصالحی هستند که این رفتار را نشان می‌دهند.

اگر کرنش را در نقطه C رسم کنیم از نقطه A تا C که ε_p است. از نقطه C خطی موازی خط OA رسم می‌کنیم (منطقه الاستیک) مقدار طولی از صفر که بدست می‌آید مقدار کرنش باقیمانده گویند.

سعی می‌کنیم در طراحی وارد منطقه پلاستیک نشویم چون در سیستم اثر باقی می‌ماند

* در CD تنش دوباره صعود می‌گیرد 3: strain hardening
منطقه کرنش‌های سخت شونده. در هیچ کاری در طراحی وارد این منطقه نمی‌شوند.

شیب منطقه ۳ از منطقه ۱ کوچکتر است. نقطه D حداکثر بار را در جسم تحمل می‌کند

Ultimate stren بدان تنش حد نهایی

در نقطه D و E

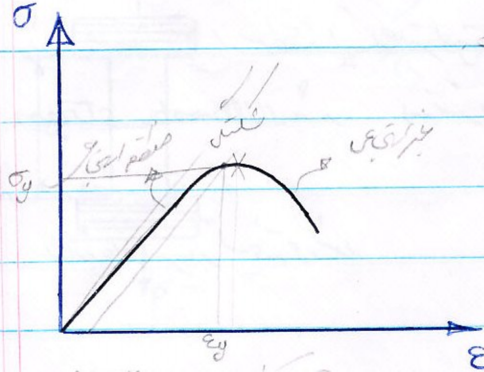
نهایتاً با افزایش بار گسیخته می‌شود.

4B necking

تنش واقعی: تنش حاصل از تقسیم نیرو بر سطح مقطع واقعی

$$\text{True stren } \sigma = \frac{P}{A_T}$$

تغییر شکل پلاستیک در این مصالح را با توجه به سطح مقطع است که T_{max} وجود دارد.

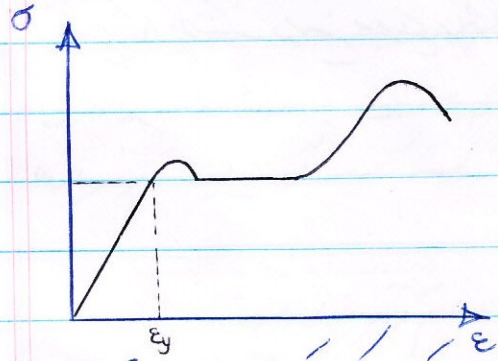


مصالح ترد: مصالحی هستند که تغییر شکل آن‌ها محدود است.

مثل بتن. $\varepsilon_{بتن} = 0.003$

علت اینکه در بتن فولاد می‌گذاریم این است که شکل‌پذیری را بالا ببریم. در بتن نقطه‌ای به نام yield نداریم یعنی نقطه‌ای به این نام نداریم.

برای پیدا کردن منطقه‌ی ارتجاعی، خط ارتجاعی از نقطه اولیه مماس بر منحنی رسم می‌کنیم. به اندازه‌ی 0.2% جابه‌جا می‌کنیم (انحراف می‌کنیم) و بعد موازی شیب منحنی را رسم می‌کنیم. از نقطه اولیه تا نقاط مشخص منطقه ارتجاعی داریم.



$\sigma = E\varepsilon$

این فرمول مربوط است به منطقه‌ی الاستیک خطی. E برمی‌گردد به جنس مصالح.

تعریف E: مقدار تنشی که کرنش واحد را به وجود آورد. به E مدول ارتجاعی یا مدول یانگ گویند. ← مدول کشسانی ورق

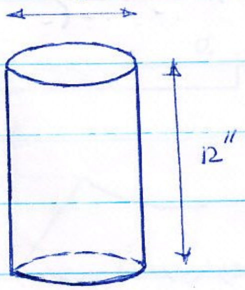
فولاد $E = 200\,GPa = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$

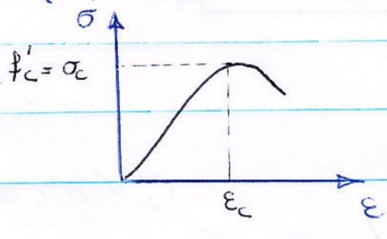
بتن $E \cong 2\times10^{5}\ kg/cm^2$

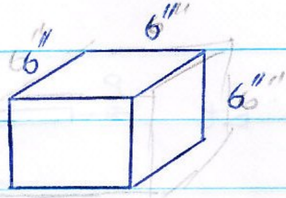
عمده مصالح ترد مقاومت کششی و فشاری یکسانی ندارد. بتن مقاومت کششی اش به مراتب کمتر از فشاری است.

شیشه و سنگ و گچ مقاومت کششی کمی دارند.

استاندارد ACI برای محاسبه مقاومت فشاری بتن





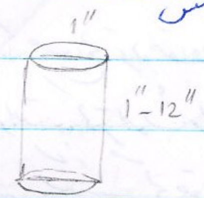


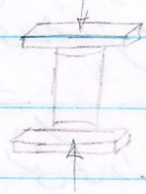
استاندارد انگلیس ۶ (در این حالت چون مقاومت فشاری بتن زیاد بدست می‌آید آن را تقسیم بر 1.2 می‌کنند.)

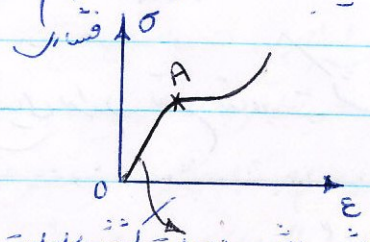
تست فشار فولادها

مقاومت فشاری و کششی اگر مصالح شکل پذیر مانند فولاد در محدوده الاستیک خطی یکسان بوده و شیب منحنی ارتجاعی نیز با هم برابر است.

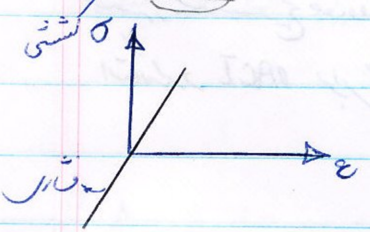
$E_{\text{کشش}} = E_{\text{فشار}}$



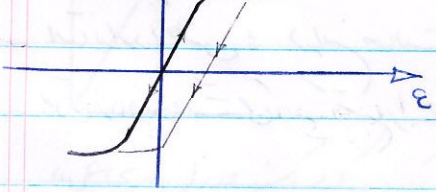


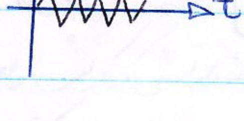


این شیب با شیب در حالت کشش برابر است.

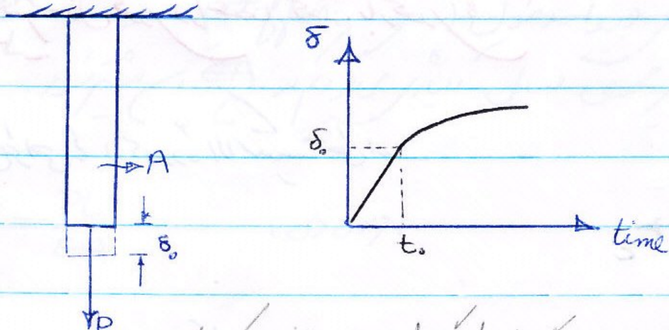


اگر بارگذاری فشاری کردیم و بعد بار را برداشتیم

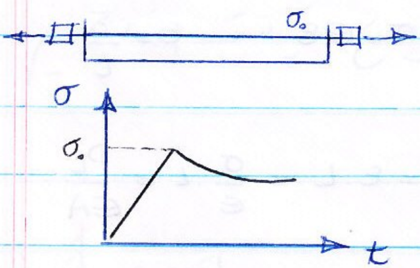




خزش:



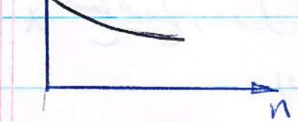
بعضی مصالح وقتی تحت بار ثابت قرار می‌گیرند طی گذشت زمان تغییر شکل‌های پیوسته‌ای می‌یابند.



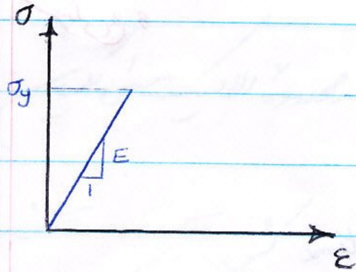
خستگی:

قطعاتی که تحت بارگذاری و باربرداری باشند تحت زمان خسته می‌شوند

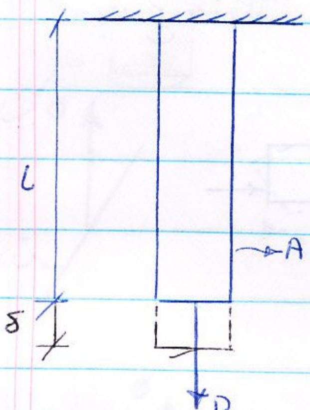
مقاومتش را کم کرده



تغییر شکل محوری در اعضا تحت بار محوری :



کل طراحی ها در محدوده الاستیک خطی است.



عضو مقابل عضو با مقطع منشوری است.

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon . L = \frac{\sigma}{E} . L = \frac{PL}{EA}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

* هرچه نیرو بیشتر باشد δ بیشتر است. هرچه طول عضو بیشتر شود δ بیشتر می شود
* سطح مقطع و مدول الاستیک با δ رابطه عکس دارد.

1) $\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow P = \frac{EA}{L}\,\delta$ (فرمول سختی)

$\frac{EA}{L} \rightarrow$ (stiffness) ثابت سختی محوری در واحد طول

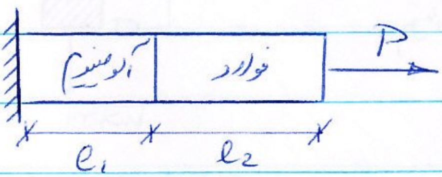
برای پایین آمدن تغییر محوری دنبال اشیائی می‌گردیم که $\frac{EA}{L}$ آن بیشتر شود.

2) $\delta = \frac{PL}{EA}$ (فرمول کلی)

$\frac{L}{EA} \rightarrow$ (Compliance) ثابت نرمی محوری در واحد طول

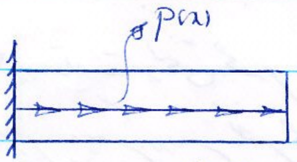
نکته: در میله‌ها نیروی P و سطح مقطع A و جنس مصالح باید ثابت باشد تا بتوانیم از فرمول $\delta = \frac{PL}{EA}$ استفاده کنیم.

مثال: تغییر طول محوری عضو مقابل را حساب کنید.



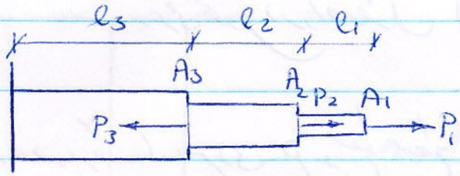
$$\delta = \frac{Pl_1}{AE_1} + \frac{Pl_2}{AE_2}$$

مثال: تغییر مکان عضو مقابل را بدست آورید.



$$\delta = \int_0^l \frac{P(x)\,dx}{AE}$$

مثال: تغییر مکان انتهای عضو را حساب کنید.



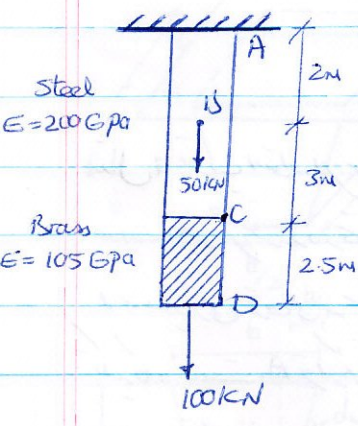
$$\delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i L_i}{E_i\ i}$$

← هرگاه در مقاطع خاصی بصورت ناگهانی تغییراتی در سطح مقطع یا نیروی محوری یا جنس مصالح داشته باشیم آنگاه:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

هرگاه در مقطع خاصی در طول عضو نیروی محوری، سطح مقطع و مدول ارتجاعی به صورت توابعی پیوسته بیان شوند به طوری که این توابع ناپیوسته نباشند این تغییرات با الگوی ذکر شده در طول عضو باشد آنگاه فرمول تغییر شکل محوری از رابطه زیر بیان خواهد شد.

$$\delta = \int_0^{l} \frac{P(x)\,dx}{E(x)\,A(x)}$$



مثال: قطر عضو برای کل میله ثابت و 36 mm است. از وزن میله صرف نظر شود مطلوب است میزان تغییر شکل محوری در نقاط C و D.

* هرگاه تغییرات به طور پیوسته صورت گیرد از انتگرال استفاده می‌کنیم اما اگر به طور ناگهانی صورت پذیرد از Σ استفاده می‌کنیم.

$\delta_{D/A}$: تغییر شکل محوری D نسبت به A.

$$\delta_{D/A} = \delta_D - \delta_A^{\,0} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

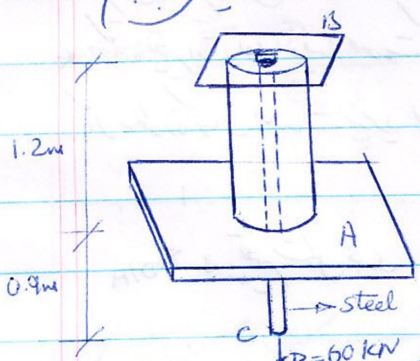
$$\delta_{C/A} = \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{100\times10^3\times3}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(0.036)^2} + \frac{150\times10^3\times2}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}(0.036)^2} = 2.95\,mm$$

$$\delta_D = \delta_{D/C} + \delta_{C/A} = \delta_{D/C} + 2.95\,mm$$

$$= \frac{100\times10^3\times2.5}{105\times10^9\times\frac{\pi}{4}(36)^2\times10^{-6}} + 2.95\,mm = 2.34 + 2.95 = 5.29\,mm$$

مثال: تیوب استوانه ای بر روی میز پایه قرار دارد. تیوب خالی است. میله ای به جسم صلب جوش خورده و تحت نیروی P قرار میگیرد.



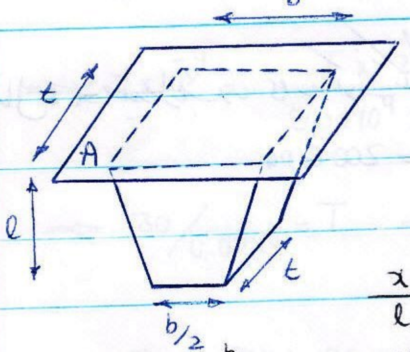
و سیلندری توخالی به سطح مقطع $1100\,mm^2$ بر روی تکیه گاه ثابت A قرار گرفته است. میله فولادی BC به قطر 15mm مطابق شکل از یک صفحه صلب که در بالای استوانه قرار گرفته است آویخته شده. اگر بدانیم مدول الاستیسیته فولاد 200GPa و آلومینیوم 70GPa باشد، مطلوبست تغییر شکل نقطه C اگر بار 60 kN P وارد شود.

$$\delta_C = \underset{\text{میله}}{\delta_{C/B}} + \underset{\text{تیوب}}{|\delta_{B/A}|}$$

$$= \frac{60\times10^3 \times 2.1}{200\times10^9 \times \frac{\pi}{4}(15)^2\times10^{-6}} + \frac{60\times10^3\times1.2}{70\times10^9\times1100\times10^{-6}} =$$

$$= 3.56\,mm + 0.935\,mm = 4.495\,mm$$

مثال: صفحه ذوزنقه‌ای همگن با چگالی ثابت
ضخامت t از مرکز A معلق می‌باشد
اگر ρ را غلظت $\left(\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}\right)$ جسم فرض
کنیم، مطلوبست تغییر شکل صفحه تحت
وزن آن.



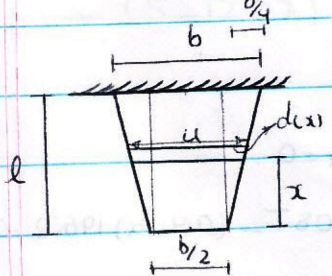
$$\frac{x}{l} = \frac{d(x)}{b/4} \Rightarrow d(x) = \frac{bx}{4l}$$

$$\rightarrow u(x) = \frac{b}{2} + 2d(x) = \frac{b}{2}(1 + x/l)$$

$$A(x) = u(x)\,t = \frac{bt}{2}(1 + x/l)$$

$$p(x) = m(x)g = \rho V(x) g = \rho g t \left(\frac{b/2 + u(x)}{2}\right) x$$

$$= \rho g t x \left(\frac{b/2(2 + x/l)}{2}\right)$$



$$\delta = \int_0^l \frac{P(x)\,dx}{E A(x)} = \int_0^l \rho g t x \left(\frac{b(2 + x/l)}{4}\right) \frac{dx}{E\,\frac{bt}{2}(1 + \frac{x}{l})} = \int_0^l$$

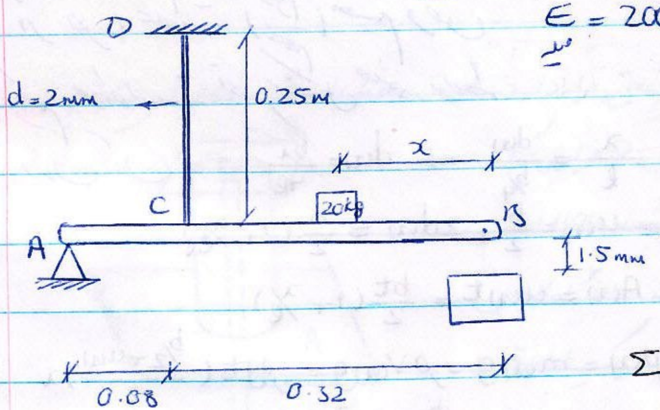
$$= \frac{\rho g}{2E} \int_0^{l} x \left(\frac{2 + x/l}{1 + x/l} \right) dx \qquad 1 + x/l = v \Rightarrow dx = l\,dv$$

$$= \frac{\rho g}{2E} \int_1^{2} l(v-1) \frac{v+1}{v}\, l\,dv = \frac{\rho g}{2E} l^2 \int_1^{2} \frac{v^2-1}{v} dv = \frac{\rho g}{2E} l^2 \int_1^{2} (v - \tfrac{1}{v}) dv$$

$$= \frac{\rho g l^2}{2E} \left(\tfrac{1}{2} v^2 - \ln v \right) \Big]_1^2 = \frac{\rho g l^2}{2E} \left(3/2 - \ln 2 \right) = 0.403 \frac{\rho g l^2}{E}$$

مثال: x چقدر باشد تا کنار تیر به تکیه‌گاه تماس پیدا کند

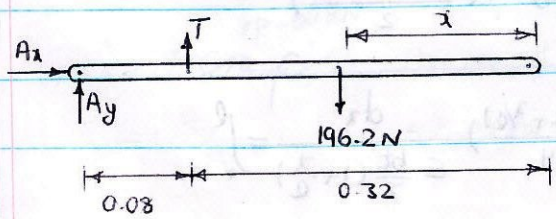
$E_{\text{میله}} = 200\ Gpa$

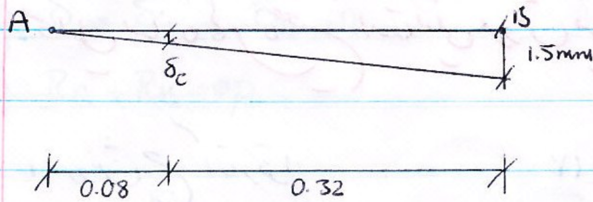


$\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow 0.08T - (0.4 - x)\,196.2 = 0$

$\Rightarrow T = (5 - 12.5x)\,196.2$





$$\frac{1.5\times10^{-3}}{0.4} = \frac{\delta_c}{0.08} \Longrightarrow \delta_c = 0.3\times10^{-3}$$

$$\Longrightarrow 3\times10^{-4} = \frac{T\times 25\times10^{-2}}{200\times10^{9}\times\frac{\pi}{4}(4)\times10^{-6}} \Longrightarrow 3\times10^{-4} = T(0.0398)\times10^{-5}$$

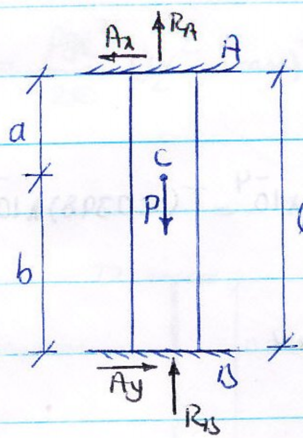
$$\Longrightarrow 30/_{0.0398} = T \Longrightarrow T = 753.77\ N$$

$$\rightarrow (5-12.5x)\,196.2 = 753.77 \Longrightarrow x = 0.092\,m$$

تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی بروش نیرو

۱) روش جمع آثار قوا (روش) ۲) روش سازگاری تغییر شکل‌ها

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی در A , B را بدست آورید.

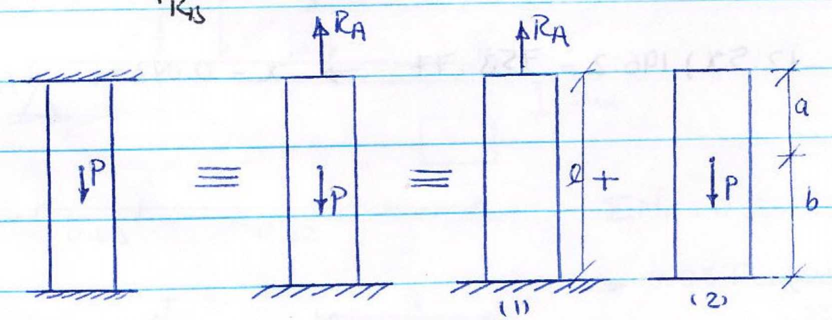


$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow A_x a + A_y b = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = A_y$$

$$\Rightarrow A_x (a+b) = 0 \Rightarrow A_x = A_y = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$



$$\delta_A = \underset{(1)}{\delta_A^{R_A}} + \underset{(2)}{\delta_A^{P}} = 0 \longrightarrow$$ رابطه سازگاری تغییر شکل

$$\begin{cases} \delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \\ R_A + R_B = \cancel{0}P \end{cases}$$

$$\delta = \delta_A^{R_A} + \delta_A^{P} = 0 \Longrightarrow \frac{R_A L}{E.A} - \frac{P.b}{EA} = 0$$

$$\Longrightarrow R_A = \frac{P.b}{L}$$

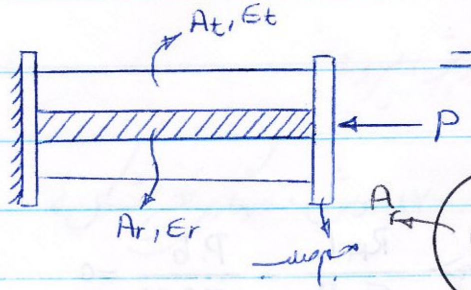
$$R_A + R_B = P \Longrightarrow \frac{P.b}{L} + R_B = P \Longrightarrow R_B = P - \frac{P.b}{L} = \frac{P.a}{L}$$

$$\Longrightarrow R_A = \frac{P.b}{L} \qquad R_B = \frac{P.a}{L}$$

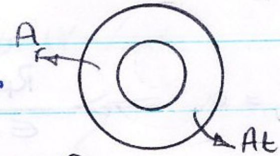
پس برای حل باید از روش جمع آثار قوا و روش سازگاری تغییر شکل استفاده کنیم.

اصل سوپر پوزیسیون (Super-position principal) :

اصل سوپر پوزیسیون (اصل جمع قوا جمع آثار) می گوید: تنش ها و تغییر شکل های ناشی از یک مجموعه نیرو بر روی یک سیستم برابر است با جمع جبری تنش ها و تغییر شکل ها.



مثال: تنش های موجود در میله و استوانه را بدست آورید (تنش های لوله و میله). یک درپوش صلب وجود دارد.



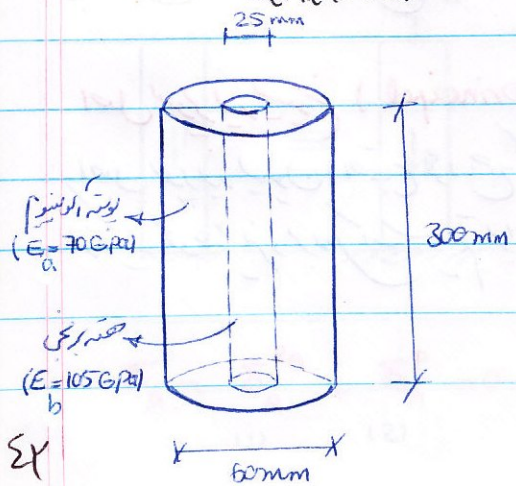
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_t + P_r = P \quad (1)$$

چون در هر دو سازه تغییر شکل ها به صورت مقابل است.

$$\delta_t = \delta_r$$

$$\Rightarrow \frac{P_t \cdot \cancel{L}}{E_t \cdot A_t} = \frac{P_r \cdot \cancel{L}}{E_r \cdot A_r} \Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_r \cdot A_r} P_r$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{E_t \cdot A_t}{E_t A_t + A_r E_r} P \quad , \quad P_r = \frac{E_r A_r}{E_t A_t + A_r E_r} P$$



مثال: اگر طول کل مجموعه به اندازه 0.4mm کوتاه گردد، این کوتاه شدگی توسط نیروی محوری P بوجود آمده است. مطلوبست: میزان نیروی وارده بر این مجموعه و تنش بوجود آمده در هسته برنجی.

$$P = P_a + P_b$$

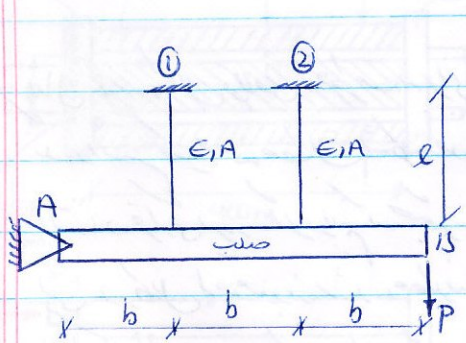
$$\delta_a = \delta_b = -0.4\ mm = \delta$$

$$P = \left(\frac{E_a A_a + E_b A_b}{L}\right)\delta$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_a = \frac{\pi}{4}(60^2 - 25^2) = 2336.6\ mm^2 \\ L = 300\ mm \\ A_b = \frac{\pi}{4}(25)^2 = 490.9\ mm^2 \end{array}\right.$$

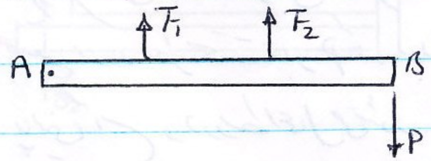
$$\Rightarrow P = -287\ kN$$

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{\frac{E_b \cdot \cancel{A_b} \cdot \delta}{L}}{\cancel{A_b}} = \frac{105 \times 10^3 \times (-0.04)}{300} = 0.14\ Gpa$$



مثال ؛ از عضو افقی AB را صلب فرض کنیم تنش های بوجود آمده در کابل های ① و ② چقدر است

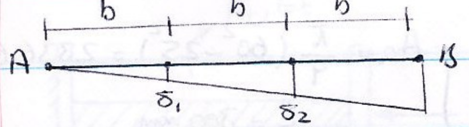
چون عضو صلب است پس تغییر شکل ندارد.



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_A = 0 \rightarrow$$

$$F_1 \times b + F_2(2b) - P(3b) = 0$$

$$\rightarrow F_1 + 2F_2 = 3P \quad (\mathrm{I})$$

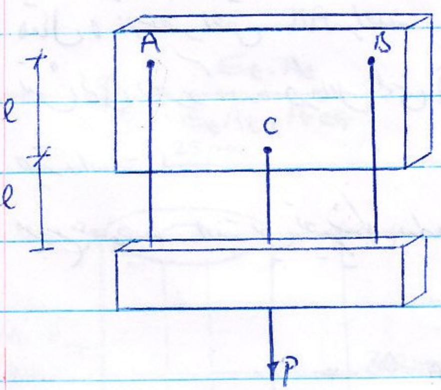


$$\delta_1 = \frac{1}{2}\delta_2$$

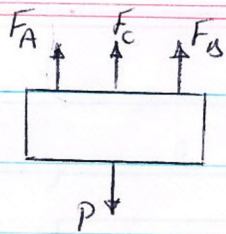
$$\Longrightarrow \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_2 L}{2EA} \longrightarrow F_2 = 2F_1 \quad \text{II}$$

$$\text{I}, \text{II} \Longrightarrow 5F_1 = 3P \Longrightarrow F_1 = \frac{3}{5}P \quad , \quad F_2 = \frac{6P}{5}$$

$$\Longrightarrow \sigma_1 = \frac{3P}{5A} \qquad \sigma_2 = \frac{6P}{5A}$$



مثال 8 سه کابل فولادی با مقطع مشابه برای نگه داشتن یک صفحه مطابق شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر بدانیم که هیچگونه لقی در کابل‌ها موجود نباشد، مطلوبست نیروهای کششی موجود در کابل‌ها هرگاه صفحه مورد نظر تحت بار P که بر لبه پایینی آن و در وسط اعمال می‌شود.

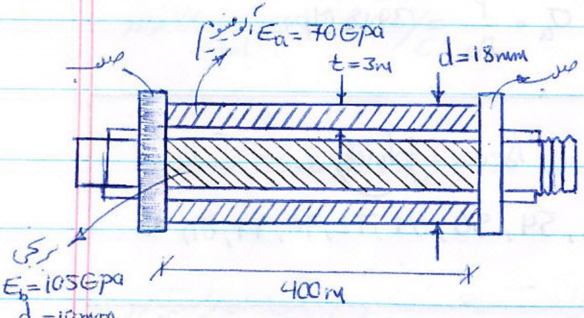


$$F_A + F_B + F_C = P \quad (\Sigma F_y = 0)$$

$$F_A = F_B \quad (\Sigma M = 0)$$

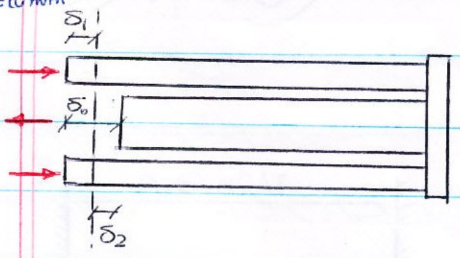
$$\delta_A = \delta_B = \delta_C \Rightarrow \frac{F_A (2L)}{EA} = \frac{F_C . L}{EA} \Rightarrow F_C = 2F_A = 2F_B$$

$$F_A + F_A + 2F_A = P \Rightarrow F_A = P/4 \ , \ F_B = P/4 \ , \ F_C = P/2$$



مثال ۶ اگر طول حرکت رزوه 2mm باشد و مهره اندازه 1/4 دور پیچ را بچرخانیم مطلوب است تنش نرمال ایجاد شده در Bolt برنجی و تیوب آلومینیومی.

فرض کنیم صفحه صلب خم نشد



$$\delta_0 = \frac{1}{4}(2mm) = 0.5mm$$

δ_1 ← فشرده شدن آلومینیوم (لوله)

δ_2 ← کشیده شدن Bolt برنجی

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_0 = 0.5mm$$

رابطه سازگاری تغییر شکل

$$P_a = P_b = P$$

آلومینیم (تویی)
$$\delta_1 = \frac{P_a \cdot L}{A_a E_a} = \frac{P_a \cdot L}{70\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(18^2-12^2)}$$

$$\delta_2 = \frac{P_b L}{A_b E_b} = \frac{P_b \cdot L}{105\times10^3 \times \frac{\pi}{4}(10)^2}$$

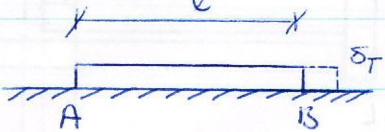
$$\Longrightarrow P_a = P_b = 5.621\,kN$$

$$\sigma_b = \frac{P}{A_b} = 71.6\,Mpa \qquad \sigma_a = \frac{P}{A_a} = 39.8\,Mpa$$

سؤالات پیشنهادی Beer-Johnston

فصل ۲ : 13, 14, 26, 30, 43, 52, 54, 56, 64, 72, 76, 77, 84, 88
96, 102, 112, 118

مسائل مربوط به بارگذاری حرارتی (نامعین):



α : ضریب انبساط طولی

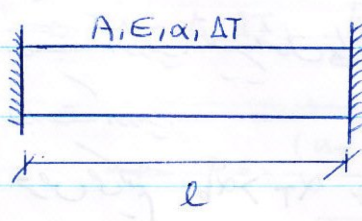
ΔT : اختلاف دما

$$\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \longrightarrow \delta_T = \int_0^L \alpha \cdot T_{(x)} \cdot dx$$

فولاد $\alpha_{steel} = 12 \times 10^{-6} \, {}^{1}/_{{}^\circ C}$

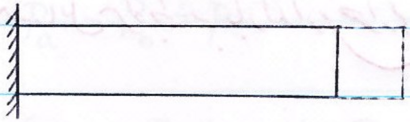
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \cdot \Delta T$$

* در مسائل معین استاتیکی افزایش یا کاهش حرارت باعث تنش نمی‌شود ولی این در مقاومت مصالح بررسی نمی‌شود.

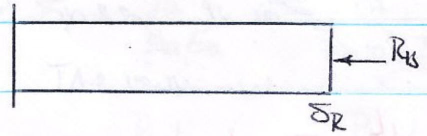


مثال: عضو مقابل دارای مخصوصیت مشخص می‌باشد. تعیین کنید تنش نرمال ایجاد شده در تیر بر اثر افزایش ΔT دما.

سازه یک درجه نامعین است.



$\delta_T = \alpha . L . \Delta T$

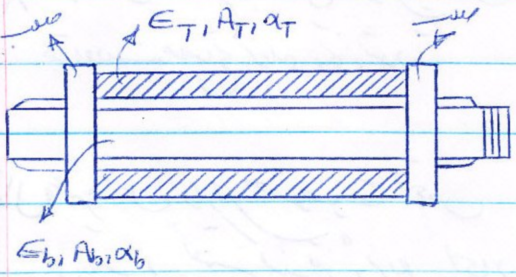


$\delta_R = \frac{R_B . L}{EA}$

رابطه سازگاری تغییر شکل : $\delta_T = \delta_R \Rightarrow \alpha . \cancel{L} . \Delta T = \frac{R_B . \cancel{L}}{AE} \Rightarrow R_B = \alpha \Delta T AE$

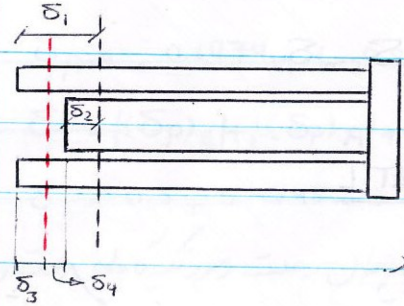
$\Rightarrow \sigma_B = E \alpha \Delta T$

راه دوم : رابطه هوک ← $\sigma = E . \varepsilon_T = E \alpha . \Delta T$



مثال : تنش‌های ایجاد شده در Bolt و پوسته بر اثر اعمال حرارت ΔT را بدست آورید. تغییر طول را نیز بدست آورید.

فرض می‌کنیم $\alpha_T > \alpha_b$. * اگر $\alpha_T = \alpha_b$ باشد تنشی ایجاد نمی‌شود.



هم صفحه سمت چپ را داریم

موقعیت نهایی صفحه صلب در راستای

خط چین قرار است.

در این حالت لوله فشرده می شود و Bolt کشیده می شود.

رابطه سازگاری تغییر شکل

$$\overset{\text{لوله}}{\delta_1 - \delta_3} = \overset{\text{پیچ (Bolt)}}{\delta_2 + \delta_4} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T \\ \delta_2 = \alpha_b \cdot L \, \Delta T \end{cases}$$

$$(2) \quad P_b = P_t = P$$

برای δ_3 و δ_4: تغییر طول را به علت کوچک بودن در نظر نمی گیریم و طول را همان l در نظر می گیریم. (به جای $l+\delta_2$)

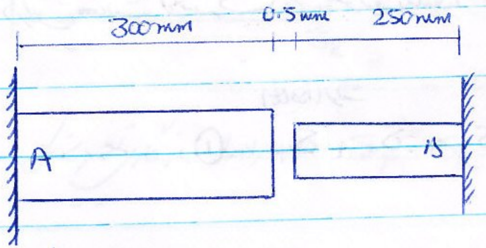
$$\delta_3 = \frac{P.L}{E_T . A_T} \qquad \delta_4 = \frac{P.L}{E_b \cdot A_b}$$

$$(1),(2) \Longrightarrow \alpha_T \cdot L \cdot \Delta T - \frac{P.L}{E_T A_T} = \alpha_b L \, \Delta T + \frac{PL}{E_b A_b}$$

$$\Longrightarrow P = \frac{(\alpha_T - \alpha_b) \cdot \Delta T}{\frac{1}{E_T A_T} + \frac{1}{E_b A_b}}$$

تغییر شکل نهایی $\delta = \delta_1 - \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$

$$\Rightarrow \delta = \frac{(\alpha_T E_T A_T + \alpha_b E_b A_b)\,\Delta T \cdot L}{E_T A_T + E_b A_b}$$



مثال ۶: فرض کنیم در ابتدا دمای اولیه برابر $20^\circ C$ باشد، محاسبه کنید در چه دمای تنش نرمال در عضو فولادی به مقدار $\sigma = -150\ Mpa$ خواهد رسید؟ در این دما طول دقیق عضو فولادی را حساب کنید.

A: آلومینیوم: $A = 2000\ mm^2$, $E = 70\ Gpa$, $\alpha = 23 \times 10^{-6}\ /^\circ C$

B: فولاد: $A = 800\ mm^2$, $E = 190\ Gpa$, $\alpha = 18 \times 10^{-6}\ /^\circ C$

فشاری $P = \sigma A_B = -150(800) = -120\ kN$

$$(\delta_p)_B = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 250}{190 \times 10^3 \times 800} = -0.1974\ mm$$

$$(\delta_p)_A = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{-120 \times 10^3 \times 300}{70 \times 10^3 \times 2000} = -0.2571\ mm$$

$$\delta_P = -0.1974 + (-0.2571) = -0.4545 \text{ mm}$$

$$\delta_T = |(\delta_P)_{st}| + |(\delta_P)_A| + 0.5\text{mm} = |\delta_P| + 0.5\text{mm}$$

$$\delta_T = 0.5 + 0.4545 = 0.9545 \text{ mm}$$

تا 0.5mm کاملاً تغییر طول دیده می‌شود. از این به بعد تغییر طول به علت وجود تکیه‌گاه‌های راست و چپ خودش را به شکل تنش و تولید نیرو نشان می‌دهد.

$$\delta_T = \sum \alpha_T . L . \Delta T = 18\times10^{-6} \times 250 \times \Delta T + 23\times10^{-6} \times 300 \times \Delta T = 0.9545$$

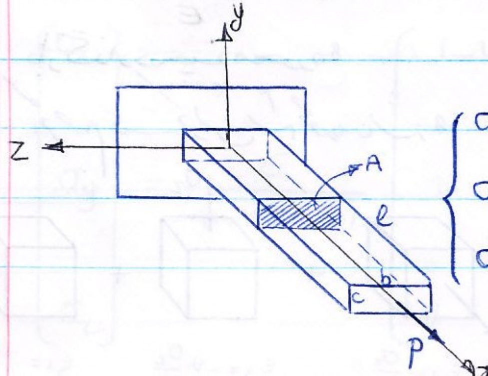
$$\Rightarrow \Delta T = 83.7^\circ$$

$$\rightarrow T = 20 + 83.7 = 103.7^\circ$$

مقدار طول واقعی فولاد $= 250 + 18\times10^{-6}(250\times83.7) - 0.1974 = 250.179$ m

---

ضریب پواسون 8



$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{P}{A} \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA}$$

اگر عضوی تحت کشش قرار گیرد ابعاد جانبی اش کوچک می شوند (b ، c)

ثابت می شود برای اجسام ایزوتروپ $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ است

وقتی تنش (اعمال نیرو) در راستای محور x باشد:

$$\nu = \left|\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

ε_z ، ε_y با ε_x مختلف العلامه هستند.

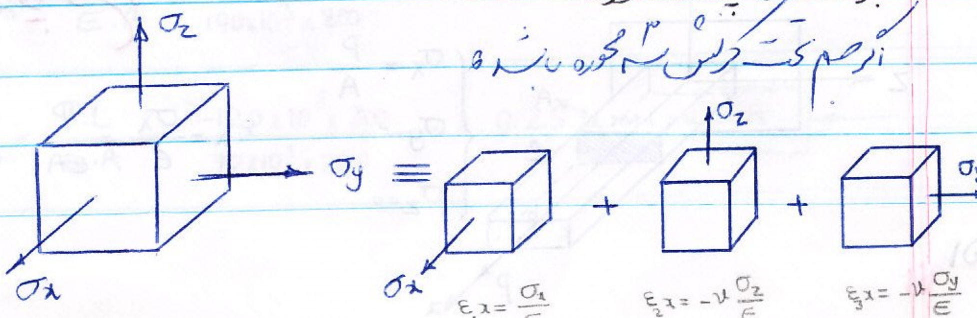
فولاد $\nu = 0.29 - 0.31$ بتن $\nu = 0.2 - 0.25$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

بارگذاری چند محوره:

اگر جسم تحت کرنش ۳ محوره باشد:

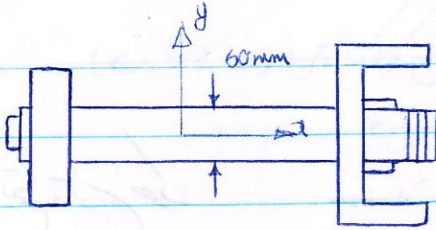


$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \nu \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases} \longrightarrow$$ تعمیم قانون هوک

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu}{E} & -\dfrac{\nu}{E} \\[2ex] -\dfrac{\nu}{E} & \dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu}{E} \\[2ex] -\dfrac{\nu}{E} & -\dfrac{\nu}{E} & \dfrac{1}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

مثال: پس از محکم کردن مهرهٔ انتهایی قطر bolt به اندازهٔ 0.13µm کاهش می‌یابد و نیروی کششی ایجاد شده در bolt را محاسبه کنید.



$E = 200\,Gpa \;,\quad \nu = 0.29$

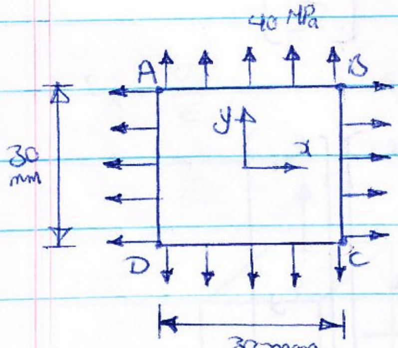
$$\varepsilon_y = \frac{-0.13\times10^{-3}}{60} = -2.167\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = -\nu\cdot\varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{216.7\times10^{-8}}{0.29} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{A\cdot E}$$

$$\Rightarrow P = 74.724\times10^{-8}\times200\times10^{9}\times2.826\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow P = 4.22\,KN$$

مثال: صفحهٔ مقابل تحت تنش دو محوره قرار دارد. مطلوبست تغییر در اندازهٔ ضلع AB ، BC و قطر AC.



$E = 200\,GPa$

$\nu = 0.3$

$$\delta_x = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} \qquad\qquad \delta_y = \varepsilon_y \cdot \overline{BC}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{200 \times 10^3}(80 - 0.3 \times 40) = 390 \times 10^{-6}$$

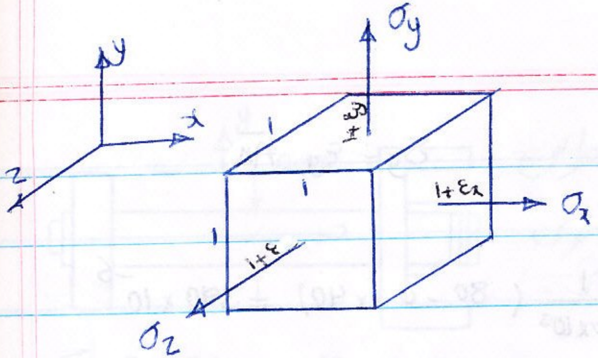
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{200 \times 10^3}(40 - 0.3 \times 80) = 80 \times 10^{-6}$$

$$\begin{cases} \delta_{AB} = \varepsilon_x \cdot \overline{AB} = 340 \times 10^{-6} \times 30 = +10.2\ \mu m \\ \delta_{BC} = \varepsilon_y \cdot \overline{BC} = 80 \times 10^{-6} \times 30 = 2.4\ \mu m \end{cases}$$

جدید $AC^2 = (\overline{AB} + \delta_{AB})^2 + (\overline{BC} + \delta_{BC})^2$

$$\Longrightarrow \delta_{AC} = 8.91\ \mu m$$

	σ_x	$\uparrow \sigma_z$	$\longrightarrow \sigma_y$
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$
ε_y	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$
ε_z	$-\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_y}{E}$



8 کرنش حجمی

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \xrightarrow{L=1} \varepsilon = \delta$$

$$V_0 = 1 \times 1 \times 1$$

$$V = (1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z) =$$

$$\Rightarrow V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$$

$$\Rightarrow V \cong 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$V_0 = abc \rightarrow \frac{V_0}{abc} = 1 \times 1 \times 1$$

$$V = (a+\delta_a)(b+\delta_b)(c+\delta_c) = abc(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c)$$

$$e = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c$$

کرنش حجمی $e = \dfrac{V - V_0}{V_0}$

کرنش حجمی در پروژه‌های حجیم بسیار مهم است.

یعنی $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

می‌توان کرنش حجمی را برحسب تنش نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

حالت خاص : هرگاه جسم تحت فشار هیدرو استاتیک (آب) قرار گیرد :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{-3(1-2\nu)P}{E}$$

ضریب P را با K نشان می دهند که به K مدول بالک گویند.

مدول بالک ضریبی است که در استحکام حجمی جسم در مقابل فشارهای هیدرواستاتیک مقدار زیادی قدرت می گیرد. این فرمول در علم مکانیک خاک مورد استفاده فراوان دارد.

$$e = \frac{-P}{K} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

با توجه به اینکه در اثر فشار کرنش حجمی کم شده و منفی است این کرنش باید منفی باشد داریم:

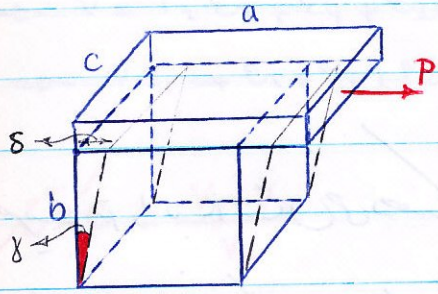
$$e<0 \longrightarrow K>0 \Rightarrow 1-2\nu>0$$

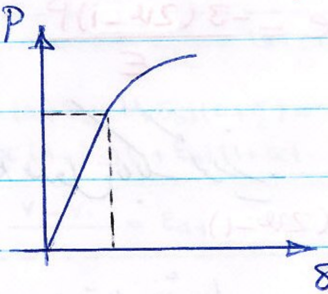
$$\Rightarrow 0<\nu<1/2 \longrightarrow \nu_{Max}=1/2$$

* ν طبق تعریف مثبت است.

$0<\nu<1/2$

کرنش برشی:





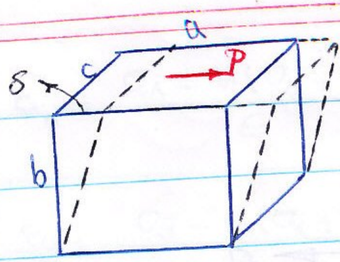
$$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{\delta}{b}\right)$$

چون δ بسیار کوچک است پس:

$$\gamma = \frac{\delta}{b}$$

γ را کرنش برشی گویند و واحد ندارد. تنها کرنشی است که از جنس زاویه است.

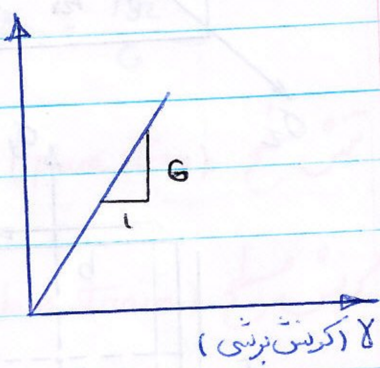
* $\tau = G\gamma$ را رابطه هوک برای تنش و کرنش برشی می‌نامند. ثابت G را مدول صلبیت یا مدول برشی ساده گویند. $\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E$



جسم برشی:

δ را تغییر شکل برشی یا جابجایی گویند.

تنش برشی $\tau = \frac{P}{a.c}$



G: مدول ارتجاعی برشی

$\tau = G\gamma$ ← رابطه بین تنش برشی و کرنش برشی

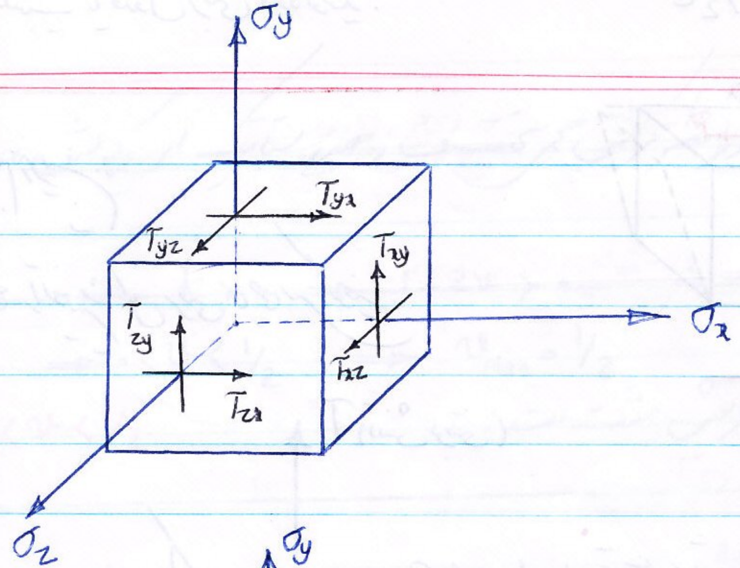
G: تنش برشی برای کرنش برشی واحد.
← مدول ارتجاعی در برشی یا مدول صلبیت

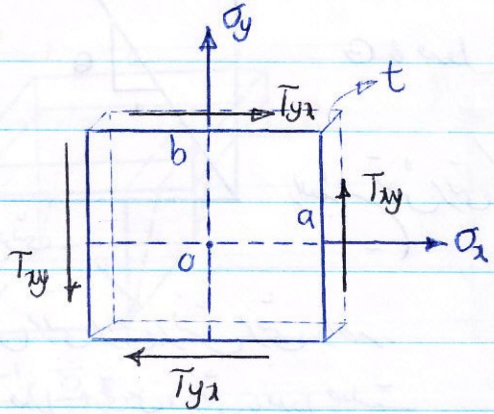
$G = \frac{\tau}{\gamma}$ $(\tau = G\gamma)$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

نکته: از نظر شماتیک منحنی $\tau - \gamma$ (1) هر یک از مصالح بسیار شبیه منحنی $\sigma - \varepsilon$ (2) است ولی مقادیر منحنی (1) از منحنی (2) کمتر است.

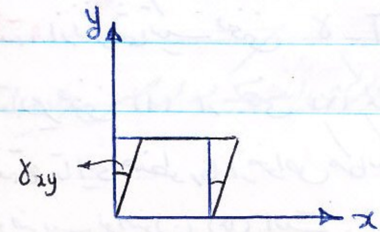
نکته: تا اینجا منظورها از خواص مکانیکی مصالح، مدول الاستیسیته (E)، مدول ارتجاعی (G) و ضریب پواسون (ν) است.

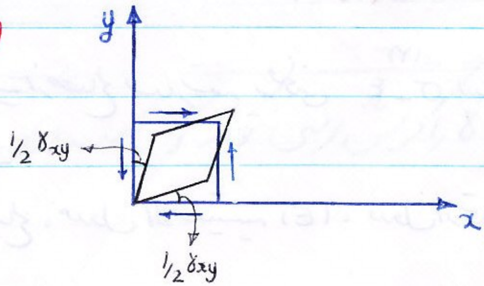




$$\Sigma M_O = 0 \Longrightarrow \tau_{yx}(b.t)\,a = \tau_{xy}(a.t)\,b$$

$$\Longrightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}$$





معادله‌های تعمیم قانون هوک :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\[2ex] \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\[2ex] \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned}$$

تنش مسطح : (plane stress)

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

کرنش مسطح : (plane strain)

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

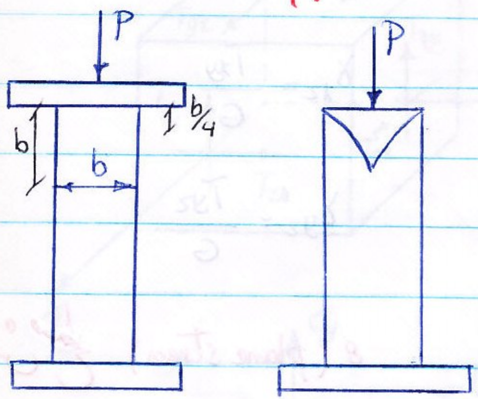
هر کرنش مسطح، تنش مسطح نیست و برعکس.

نکته : بررسی معادله‌های بالا ما را به این باور هدایت می‌کند که اگر بخواهیم تغییرات به وجود آمده توسط ترکیبی دلخواه از تنش‌ها را در یک مادهٔ معین پیش‌بینی کنیم، نخست باید سه ثابت متمایز E، ν و G را به طور تجربی با آزمایش تعیین کنیم. در عمل فقط تعیین دو تا از سه ثابت برای هر مادهٔ معین لازم است، زیرا :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

تمرکز تنش:

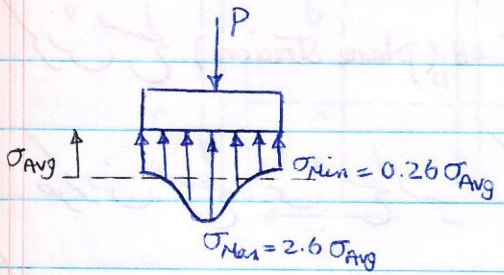
الف) اثر موضعی سنت ـ ونان در محل تماس بار با جسم:



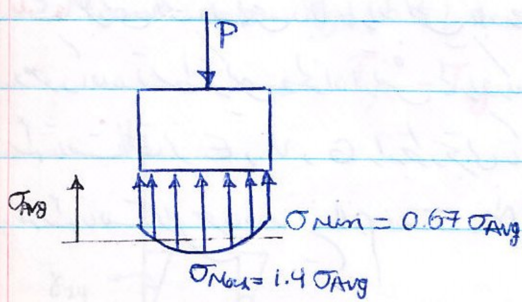
در b ، b/2 ، b/4 برش زده.

$$\sigma_{Avg} = \frac{P}{A}$$

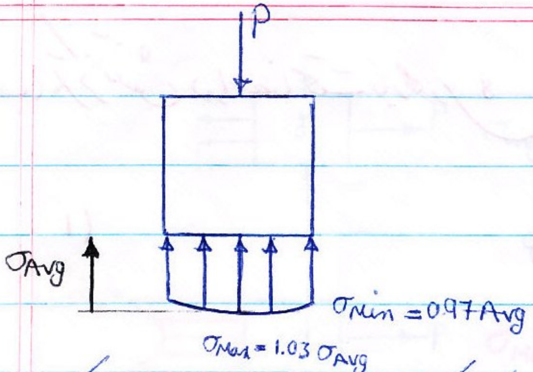
b/4 :



b/2 :



8 b



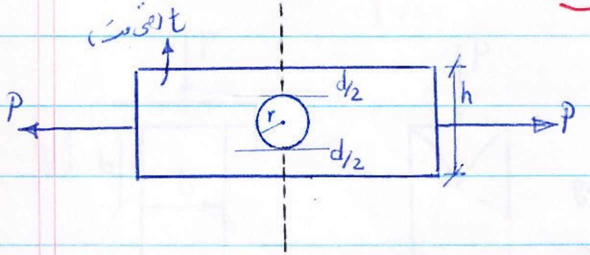
* بنابراین بهتر است از اعمال نیروی واحد متمرکز جلوگیری کنیم و در یک واسطه نیروی را اعمال کنیم. تا تنش Avg برای کل سطح ایجاد شود.

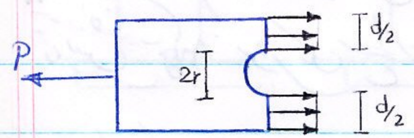
* در زندگی نکته بامزه ای است. اگر چیزهای متوسط را بپذیرید، اغلب اوقات بهترین ها نصیب شما می شود (سامرست موام)

این اصل (اصل سن ونان) می گوید که در توزیع موثر نیروی بر یک جسم در صورتیکه از نظر الاستیکی کاملاً یکسان باشد (یا اینکه در مجموعه نیرو یکسان باشد) در بخش هایی از جسم که به اندازه کافی از نقطه اثر نیروها دور هستند (تقریباً به اندازه عرض مقطع) دارای تاثیر یکسان هستند.

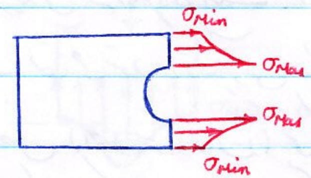
ب) تمرکز تنش در اعضای تحت بار محوری :

(1





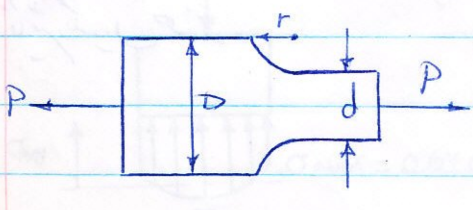
$$\sigma_{avg} = \frac{P}{dt}$$

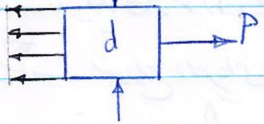


$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$

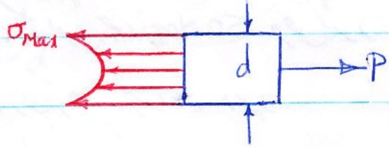
$K \rightarrow$ ضریب تمرکزهای تنش) ضریب تمرکز تنش

(2





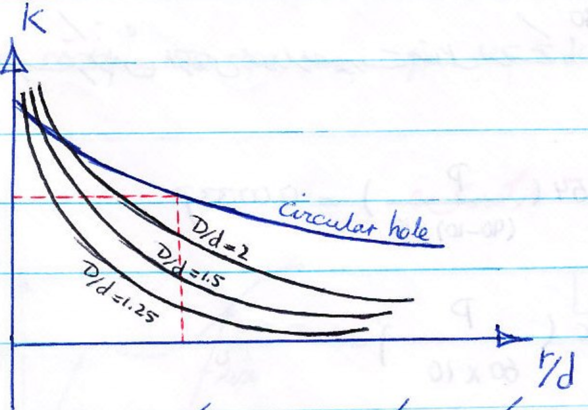
$$\sigma_{avg} = \frac{P}{dt}$$



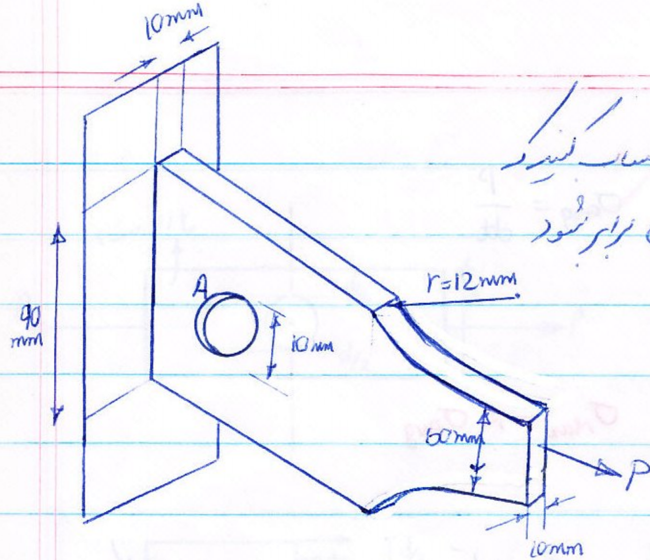
$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{Avg}$$

$$K = \frac{\sigma_{Max}}{\sigma_{Avg}}$$

* در طراحی $\sigma_{مجاز} = \sigma_{Max}$ قرار می‌دهیم.



* طراحان برای راحت‌تر بودن، سعی می‌کنند از تمرکز تنش اجتناب کنند و در صورت وجود آن نیز، می‌کوشند تدریجی اتفاق بیفتد.



الف) مشخصات قسمت ناحیه ای را طوری حساب کنید که
Max تنش در قسمت سوراخ دایره ای برابر شود
با تنش Max در قسمت fillet .
ب) اگر تنش مجاز 150 Mpa فرض شود
بار مجاز چقدر خواهد بود.

الف) $d = 90 - 10 = 80$ $\quad r = 5\,mm$ و قسمت سوراخ دایره ای A

$$\rightarrow \frac{r}{d} = \frac{5}{80} = 0.0625$$

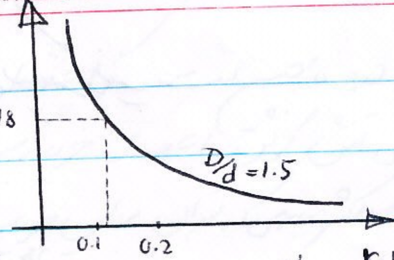
ضریب تمرکز تنش از روی نمودار بصورت مقابل بدست آمده است. $K = 2.64$

$$\sigma_{Max}^{hole} = K \cdot \sigma_{Avg} = 2.64\left(\frac{P}{(90-10)\times 10}\right) = 0.0033P$$

$$\sigma_{Max}^{fillet} = K \cdot \sigma_{Avg} = K\left(\frac{P}{60 \times 10}\right)$$

$$\sigma_{Max}^{f} = \sigma_{Max}^{h} \Rightarrow K\left(\frac{P}{600}\right) = 2.64\left(\frac{P}{800}\right) \Rightarrow K = 1.98$$

$$\frac{D}{d} = \frac{90}{60} = 1.5$$



$r/d = 0.12$ طبق جدول r/d بدست می آید:

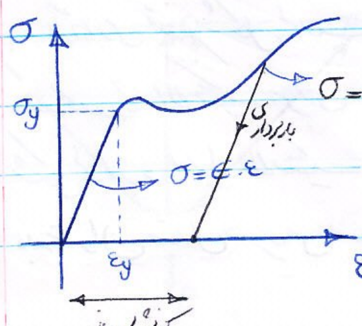
$$r/d = 0.12 \Rightarrow \frac{r}{60\,mm} = 0.12 \Rightarrow r = 7.2\ mm$$

ب)

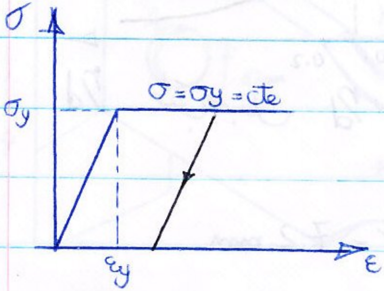
$$\sigma_{مجاز} = \sigma_{Max} = 150\ Mpa$$

$$\Rightarrow 0.0033P = 150\ Mpa \Rightarrow P = 45.5\ kN$$

تحلیل غیر ارتجاعی اعضا تحت بار محوری:



کرنش پسماند نوعی مدل تنشی است که تنش پسماند گویند.

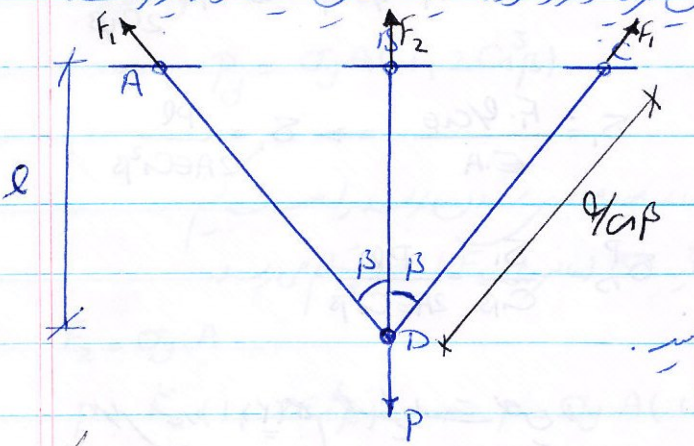


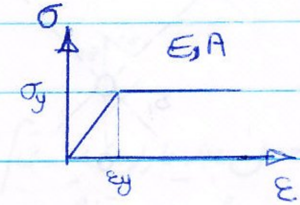
مدل مقابل اصلاح شده مدل فنی است. این مدل elastio perfectly plactic نام دارد.

نکته: کاربرد تحلیل غیرارتجاعی در سازه‌های معین الاستیکی بسیار ساده است، به این علت که در سازه‌های معین الاستیکی نیروهای داخلی معلوم هستند که به راحتی محاسبه می‌شوند. بنابراین با داشتن تنش‌ها می‌توان کنترل کرد که آیا وارد منطقه غیرارتجاعی شده‌ایم یا خیر. اما وقتی مسئله به صورت نامعین الاستیکی مطرح می‌شود، در این نوع سازه‌ها نیاز به نوشتن معادلات اضافی که معمولاً از روش نیرو، این معادلات اضافی همان روابط سازگاری تغییر شکل‌ها است داریم. در این حالت باید کنترل شود که کرنش‌ها و تنش‌ها در محدوده الاستیک برای هر مرحله باشند. در این صورت می‌توان به جای تغییر شکل‌ها از روابط الاستیک خطی نیروی متناظر را قرار داد و مسئله را حل نمود.

به عنوان مثال: خرپای سه میله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم. این خرپا از نظر استاتیکی

یک درجه نامعین است. اگر اعضای خرپا از یک جنس دارای E و A ثابت باشند و منحنی تنش کرنش اعضای خرپا به صورت Elasto plastic باشد، محاسبه کنید حداکثر باری که می‌توان به این خرپا وارد نمود تا کلیه اعضای آن گسیخته شوند چقدر است.





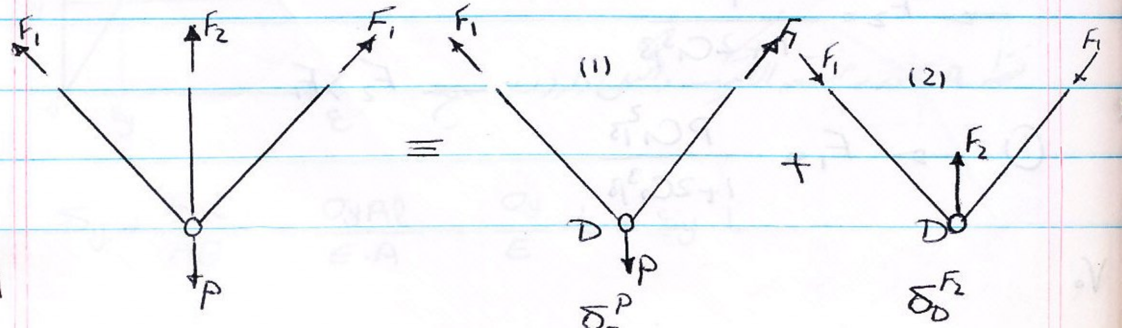
منحنی بار تغییر مکان را نیز رسم کنید.

گره D

$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow F_A = F_C = F_1$$

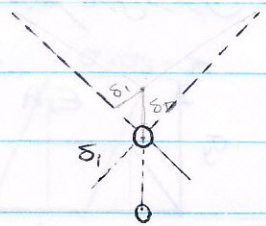
$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow 2F_1\cos\beta + F_2 = P \quad (1)$$

$F_2 = 2F_1\cos\beta$



$$\delta_D^{P} - \delta_D^{F_2} = \frac{F_2 \cdot l}{EA} \qquad \delta_D = \frac{\delta_1}{\cos\beta}$$

(1)



$$2F_1\cos\beta = P \Rightarrow F_1 = \frac{P}{2\cos\beta}$$

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot l/\cos\beta}{E \cdot A} \Rightarrow \delta_1 = \frac{Pl}{2AE\cos^2\beta}$$

$$\delta_D^{P} = \frac{\delta_1}{\cos\beta} = \frac{Pl}{2AE\cos^3\beta}$$

$$\delta_D^{F_2} = \frac{F_2 l}{2AE\cos^3\beta}$$

برای شماره (۲) هم همینطور است یعنی :

$$\Rightarrow \frac{P.L}{2AE\cos^3\beta} - \frac{F_2 \, l}{2AE\cos^3\beta} = \frac{F_2 \cdot l}{A \cdot E}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\beta}$$

$$\rightarrow F_2 > F_1$$

$$(1) \rightarrow F_1 = \frac{P\cos^2\beta}{1 + 2\cos^3\beta}$$

بنابراین اولین میله‌ای که به حد جاری شدن می‌رسد میله B است.

اولین جاری شدن :

$F_2 = \sigma_y A$

$\Longrightarrow P_y = \sigma_y A(1+2C_1^3\beta)$

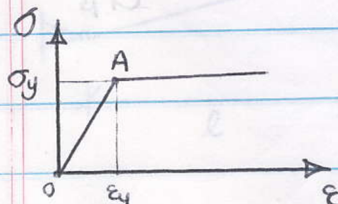
حال باید بار نهایی که به تمام اعضا به حد جاری شدن برسد را حساب کنیم.
با افزایش بار P تنش ایجاد در میله BD (با نیروی F_2) به حد تسلیم می‌رسد.

$F_2 = \sigma_y \cdot A$

$P = F_2(1+2C_1^3\beta) \Longrightarrow P = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$

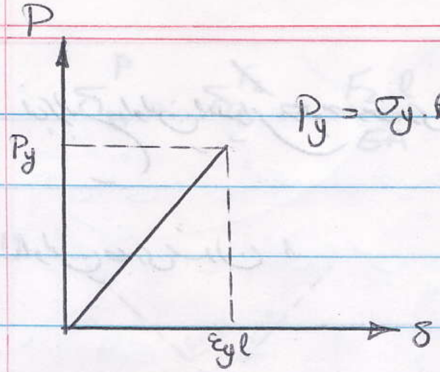
$\Longrightarrow P_y = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$

P_y معادل نیرویی است که به سازه وارد شود تا اولین جاری شدن در سازه به وجود آید.
تغییر طولی که به وجود می‌آید را δ_y می‌نامیم.



نقطه A هنوز در منطقه الاستیک واقع است بنابراین :

$$\delta_y = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{\sigma_y A l}{E \cdot A} = \frac{\sigma_y}{E} \cdot L = \varepsilon_y \cdot L$$



$$P_y = \sigma_y \cdot A(1+2C_1^3\beta)$$

حداکثر بار P هنگامی حاصل می‌شود که میله‌های AD و CD نیز جاری شوند. یعنی

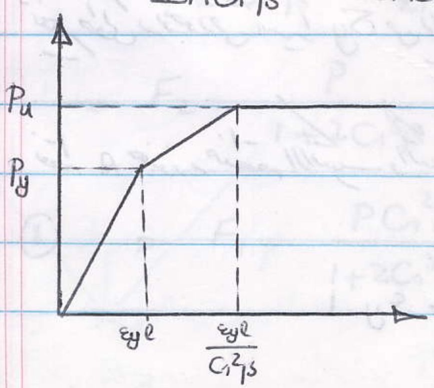
$$F_1 = F_2 = \sigma_y \cdot A$$

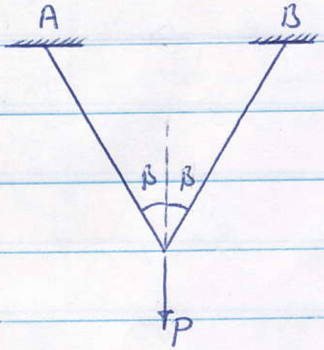
از رابطه ① داشتیم:

$$2F_1 C_1\beta + F_2 = P$$

$$\Rightarrow P_u = 2\sigma_y A C_1\beta + \sigma_y \cdot A = \sigma_y \cdot A(2C_1\beta + 1)$$

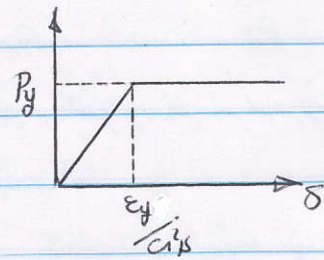
$$\delta_u = \frac{P_u \cdot l}{2EAC_1^3\beta} - \frac{\sigma_y A l}{2EAC_1^3\beta} = \frac{\sigma_y \cdot l}{2EC_1^3\beta}(1+2C_1\beta-1) = \frac{\varepsilon_y l}{C_1^2\beta}$$



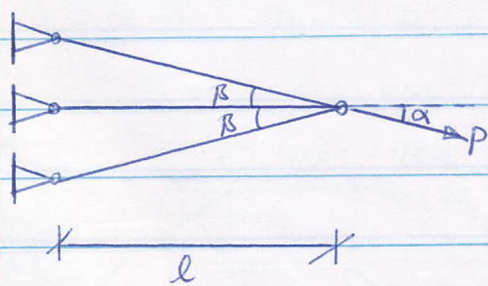


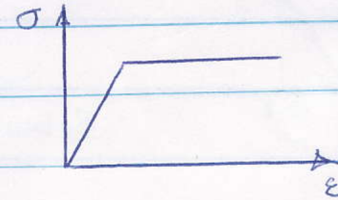
$$\sum F_y = 0$$

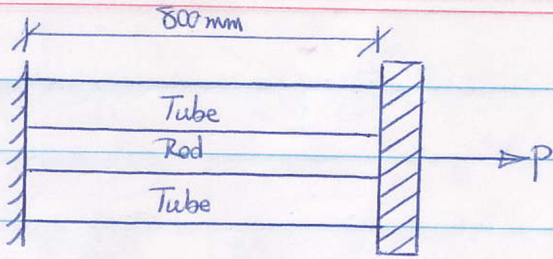
$$\Rightarrow 2F_1 \cos\beta = P \Rightarrow P_y = 2\sigma_y A \cos\beta$$



مثال ۵: با فرض اینکه منحنی تنش کرنش به صورت زیر باشد مطلوبست منحنی بار تغییر مکان، P_u , P_y.
(A, E هر سه میله)







مثال ۵ الف) مطلوبست رسم دیاگرام نیرو تغییر مکان و حداکثر باری که می توان به مجموعه اعمال کرد.

ب) اگر بار P تا 19.5 (KN) افزایش و سپس برداشته شود. مطلوبست حداکثر تغییر شکل مجموعه. تغییر شکل دائمی پس از باربرداری و تنش های باقیمانده.

$E_T = 100\,Gpa \qquad A_T = 60\,mm^2 \qquad (\sigma_T)_y = 250\,Mpa$

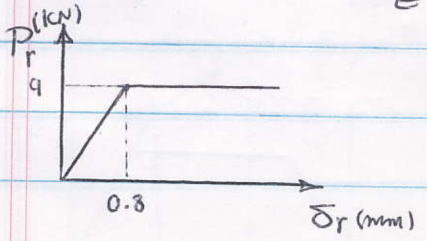
$E_R = 200\,Gpa \qquad A_R = 45\,mm^2 \qquad (\sigma_R)_y = 200\,Mpa$

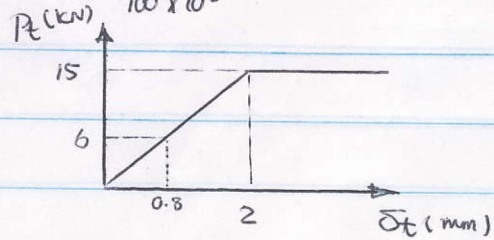
الف) روش اول

$$P = P_r + P_t$$

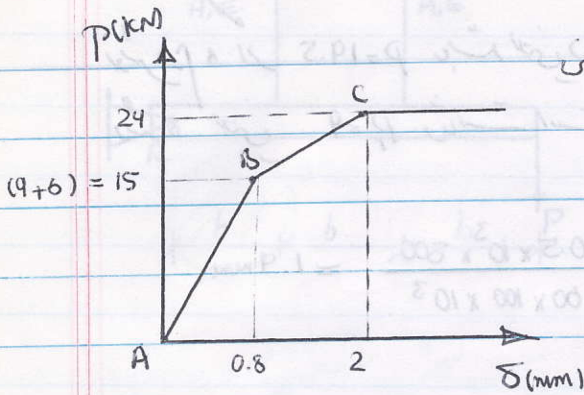
$$\begin{cases} (P_r)_y = (\sigma_r)_y \cdot A_r = 200 \times 45 = 9\,kN \\ (\delta_r)_y = \varepsilon_{r_y} \cdot L = \dfrac{(\sigma_r)_y}{E} \cdot L = \dfrac{200}{200 \times 10^3} \times 800 = 0.8\,mm \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_t)_y = (\sigma_t)_y \cdot A_t = 250 \times 60 = 15\,kN \\ (\delta_t)_y = (\varepsilon_t)_y \cdot l = \dfrac{(\sigma_t)_y}{E} \cdot L = \dfrac{250}{100 \times 10^3} \times 800 = 2\,mm \end{cases}$$





چون سختی در BC کم می‌شود بنابراین شیب منحنی کم است.



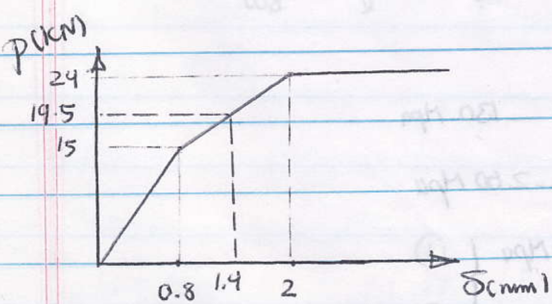
روش دوم:

$$\delta_r = \delta_t \quad , \quad P_r + P_t = P$$

$$\Longrightarrow \frac{P_r l}{A_r E_r} = \frac{P_t l}{A_t E_t} \Longrightarrow P_r = \frac{E_r \cdot A_r}{E_t \cdot A_t} P_t$$

$$P_t = \tfrac{2}{5} P \qquad P_r = \tfrac{3}{5} P$$

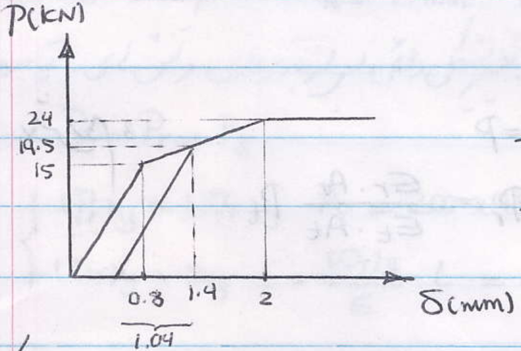
ب) روش اول:



روش دوم : اگر $P=19.5$ باشد یعنی در مرحله‌ای هستیم که میله چدنی جاری شدن رسیده. یعنی $P_r=9$ و ثابت است. بنابراین :

$P_t = 10.5$

$$\Longrightarrow \delta_t = \frac{P_t}{A}\cdot\frac{L}{E_t} = \frac{10.5\times10^3\times800}{60\times100\times10^3} = 1.4\,mm$$



$$\frac{15}{0.8} = 18.75$$

$$\frac{19.5}{18.75} = 1.04$$

$$\Longrightarrow 1.4 - 1.04 = 0.36 \quad \text{تغییر شکل دائمی}$$

کرنش برگشت $\varepsilon' = \frac{-1.04}{800} = -1.3\times10^{-3}$ $\qquad$ ε پسماند $= \frac{\delta}{\ell} = \frac{0.36}{800} = 0.45\times10^{-3}$

تنش برگشت تیوب $\sigma'_t = -1.3\times10^{-3}\times100\times10^3 = -130\,Mpa$

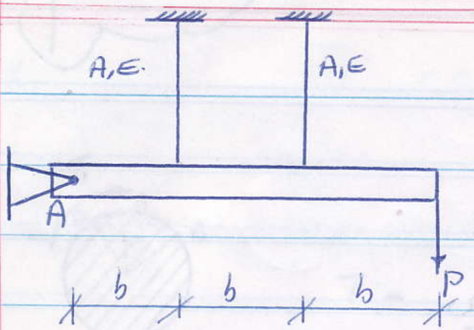
تنش برگشت میله $\sigma'_r = -1.3\times10^{-3}\times200\times10^3 = -260\,Mpa$

تنش باقی میله $\sigma_r^R = \frac{9\times10^3}{45} - 260 = -60\,Mpa$ ①

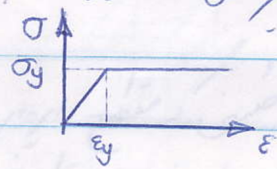
تنش باقی تیوب $\sigma_t^R = \frac{10.5\times10^3}{60} - 130 = 45\,Mpa$ ②

در شماره (2) σ_t^R را می‌توان از رابطه $\sigma = E\varepsilon$ پسماند حساب کرد چون تیوب هنوز جاری نشده

اما در شماره (1) چون میله جاری شده پس دیگر قانون هوک صادق نیست و باید از تنش برگشت استفاده نمود.



مثال: مطلوبست رسم منحنی $P-\delta$.
درصورتیکه بلافاصله پس از $P=P_u$
باربرداری شود تنش های پسماند در میله ها
و تغییرشکل ماندگار را بدست آورید.

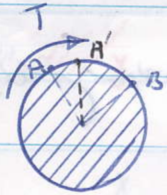


حمید کاظم

فصل سوم:

«پیچش»

مقاطع دوار:

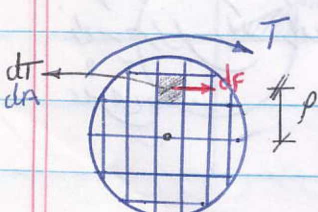


بردار پیچش بر سطحی که عمل می‌کند عمود است

$T =$ کوپل پیچشی $(N.mm)$

حسنی که در مقطع دایره‌ای دارد این است که تحت پیچش مقطعش همان دایره می‌ماند و فاصله نقطه تغییر یافته از محور تغییر نمی‌کند

اما مقطع مربعی (یا کلی) تحت پیچش مختلی تغییر شکل می‌دهد.



المان مقطع سهمی از T که dT می‌باشد را حمل کرد.

$$dT = \rho . dF$$

نیروهایی که در مقطع به وجود می‌آید مماس بر مقطع است.

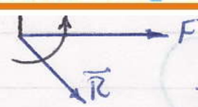
$$dF = \tau dA$$

* کوپل پیچشی تولید تنش برشی می‌کند.

تعادل مقطع: $T = \int dT = \int \rho . dF = \int \rho \tau dA$

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

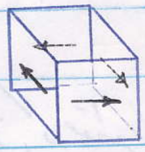
که انگشت شست جهت M را داده،



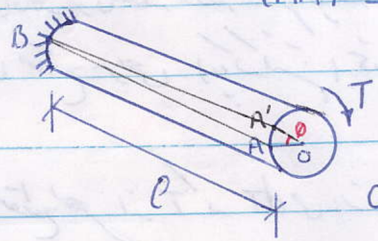
* از R به F حاصل ضرب را حساب می‌کنیم.

کوپل پیچشی $T = \int_A \rho \tau dA$

که اگر المان مستطیلی را رسم کنیم برش خواهیم داشت.

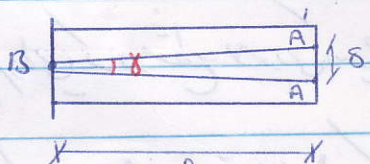


* بیشترین تغییر شکل در پیچش روی محیط دایره است ($\overset{\frown}{AA'}$)



زاویه مرکزی را که زاویه پیچش است با ϕ نمایش می‌دهند.

$OA = C$ شعاع



$$\delta / \ell = \frac{AA'}{\ell} \rightarrow \delta / \ell = \gamma$$

چون بیشترین تغییر شکل در محیط است بنابراین γ در این حالت γ_{Max} خواهد بود که همان کرنش برشی ماکزیمم می‌باشد.

$\tau \leftarrow$ تنش برشی

$\gamma_{Max} = \dfrac{\overline{AA'}}{L}$ $\quad \overline{AA'} = c\varphi \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\gamma_{Max} = \dfrac{c\varphi}{l}}$

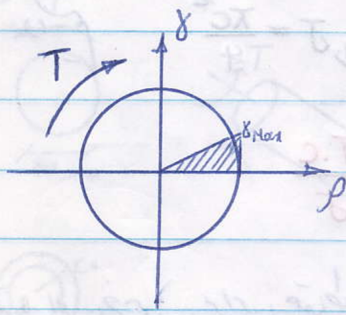
کرنش برشی (زاویه) $\longrightarrow$ $\gamma = \dfrac{\rho\varphi}{l}$ $\quad 0 \leqslant \rho \leqslant c$

زاویه پیچش

ρ : فاصله هر المان از مرکز

$\Longrightarrow \dfrac{\gamma}{\gamma_{Max}} = \dfrac{\rho}{c}$

* بنابراین می فهمیم توزیع کرنش در مقطع خطی است.

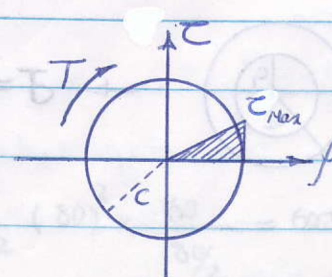


در کل ارتباطی داشتیم :

$\tau = G\gamma \longrightarrow \tau = G\,\dfrac{\rho\varphi}{l}$

$\Longrightarrow \tau = \dfrac{\rho}{c}\,\tau_{Max}$

$\dfrac{\tau_1}{\tau_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$



حال می‌خواهیم ببینیم چه ارتباطی بین τ و T در مقطع دایره‌ای وجود دارد.

$$T=\int_A \rho\tau\, dA \rightarrow T=\int_A \rho\cdot\frac{\rho}{c}\tau_{Max}\, dA$$

$$\Longrightarrow T=\frac{\tau_{Max}}{c}\int_A \rho^2 dA$$

دایره $I_x=I_y=\frac{\pi c^4}{4}$

$$J=\int_A \rho^2 dA \quad (J=I_x+I_y) \xrightarrow{\text{دایره}} J=\frac{\pi c^4}{2}$$

داشتیم

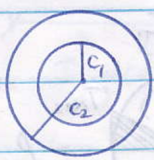
$$\Longrightarrow T=\frac{\tau_{Max}}{c}J \Longrightarrow \tau_{Max}=\frac{T.C}{J}$$

کوپل پیچشی

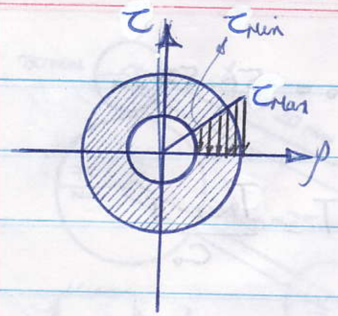
تنش برشی $\boxed{\tau=\frac{T.\rho}{J}}$

نکته: این فرمول برای مقاطع توپر است.

اگر مقطع توپر نباشد:

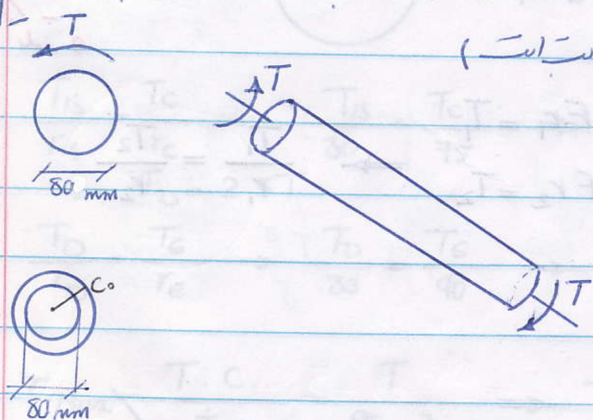


$$\rightarrow J=\frac{\pi}{2}(c_2^4-c_1^4)$$



$$\tau_{Min} = \frac{c_1}{c_2}\,\tau_{Max}$$

مثال ۸: حداکثر گشتاوری را که در دو حالت می‌توان وارد کرد به شرطی که تنش برشی ماکزیمم از 60 Mpa بیشتر نشود. (مصالح ثابت است)



1) $$J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{34} d^4 = \frac{\pi}{32}(80)^4$$

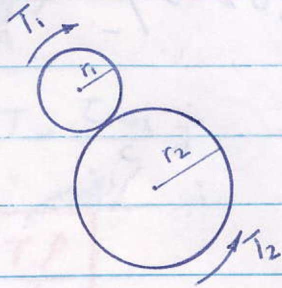
$$\tau_{Max} = \frac{T.c}{J} \Rightarrow T = J\,\frac{\tau_{Max}}{c} = \frac{\pi}{32}(80)^2 \times \frac{60}{80/2} = 6030\ N.m$$

$$2)\ \frac{\pi(80)^2}{4} = \frac{\pi}{4}(d_o^2 - 80^2) \Rightarrow C_o = 56.57\ \text{mm}$$

$$\rightarrow J = \frac{\pi}{2}\left[(56.57)^4 - (40)^4\right] \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} \cdot J}{C_o}$$

$$= \frac{60 \times 12.065 \times 10^6}{56.57} = 12800\ \text{kN.mm}$$

نمره ۵



$$\begin{cases} F r_1 = T_1 \\ F r_2 = T_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

۱۱ برای محاسبه عدد 50^4 در ماشین حساب ۵

$$50^4 = x$$

$$\rightarrow \ln 50^4 = \ln x \Rightarrow 4\ln 50 = \ln x \Rightarrow x = e^{4\ln 50}$$

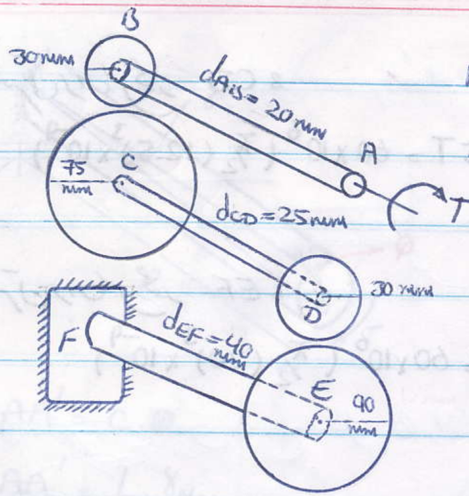
$$\rightarrow x = Exp(4 * Ln50)$$

۱۲

$$C^3 = x \Rightarrow 3\ln C = \ln x \rightarrow \ln C = \tfrac{1}{3}\ln x \rightarrow C = e^{\frac{1}{3}\ln x}$$

$$C = Exp(\tfrac{1}{3} * Ln x)$$

مثال: حداکثر ورودی T را بیابید تا تنش Max ایجاد شده در محورها از 60 Mpa بیشتر نشود.



$$T = T_{AB}$$

$$\begin{cases} T = T_{AB} = T_B \\ T_C = T_{CD} = T_D \\ T_E = T_{EF} \end{cases}$$

$$\frac{T_B}{r_B} = \frac{T_C}{r_C} \Rightarrow \frac{T_B}{30} = \frac{T_C}{75} \Rightarrow T_C = 2.5\,T_B = 2.5T$$

$$\Rightarrow T_D = 2.5T$$

$$\frac{T_D}{r_D} = \frac{T_E}{r_E} \Rightarrow \frac{T_D}{30} = \frac{T_E}{90} \Rightarrow T_E = 3T_D \Rightarrow T_E = 7.5T$$

$$\tau_{Max} = \frac{T.C}{J} = \frac{T}{\frac{\pi}{2}C^3} \Rightarrow T = \tau_{Max}\left(\frac{\pi}{2}C^3\right)$$

کنترل بر اساس محور AB:

$$T = 60\times10^6\left(\frac{\pi}{2}(10)^3\times10^{-9}\right) = 94.2\ \text{N.m}$$

کنترل راس محور CD:

$$T_{CD} = \tau_{Max} \left(\frac{\pi}{2} (c)^3 \right) \Rightarrow 2.5T = 60 \times 10^6 \left(\frac{\pi}{2} (12.5)^3 \times 10^{-9} \right)$$

$$\Rightarrow T = 73.593 \ N.m$$

کنترل راس محور EF:

$$T_{EF} = \tau_{Max} \left(\frac{\pi}{2} c^3 \right) \Rightarrow 7.5T = 60 \times 10^6 \left(\frac{\pi}{2} (20)^3 \times 10^{-9} \right)$$

$$\Rightarrow T = 100.48 \ N.m$$

$$\Rightarrow T_{Max} = Min(94.2, 73.593, 100.48) = 73.593 \ N.m$$

کرنش برشی (زاویه) زاویه پیچشی

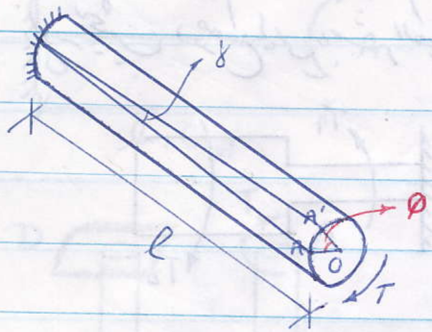
1) $\gamma = \frac{\rho \phi}{l}$

تنش برشی کوپل پیچشی

2) $\tau = \frac{T \rho}{J}$

زاویه پیچش:

اگر محوری به طول l با جنس مصالح ثابت با مدول ارتجاعی G و سطح مقطع ثابت با ممان اینرسی قطبی J تحت کوپل ثابت T قرار گیرد میزان چرخش دو انتهای نسبت به یکدیگر با ϕ نمایش داده می‌شود به صورت زیر است.



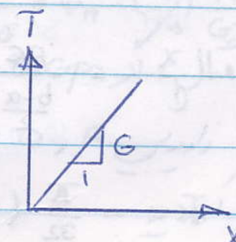
$$\begin{cases} AA' = C\cdot\phi \\ AA' = L\cdot\gamma_{Max} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{Max} = \frac{C\cdot\phi}{L}$$

$$\tau_{Max} = G\,\gamma_{Max}$$

$$\tau_{Max} = \frac{T\cdot C}{J}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tau_{Max} = \frac{T\cdot C}{J} \\ \gamma_{Max} = \frac{\tau_{Max}}{G} = \frac{T\cdot C}{G\cdot J} \\ \gamma_{Max} = \frac{C\cdot\phi}{L} \end{cases}$$



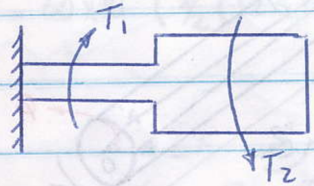
$$\phi = \frac{T\cdot L}{GJ}$$

در قسمت قبل داشتیم $\delta = \frac{PL}{EA}$.

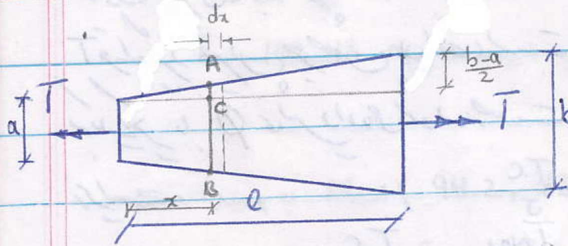
$\frac{GJ}{L}$ سختی پیچشی در طول است. $\frac{L}{GJ}$ نرمی پیچشی است.

زاویه پیچش در مقاطعی با شرایط متفاوت به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$



مثال: برای زاویه پیچش مقطع مقابل ϕ را بدست آورید.

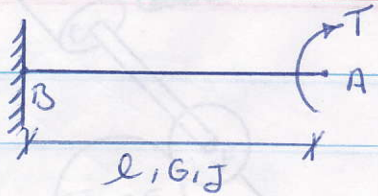


$$\phi = \int_0^{l} \frac{T\,dx}{G\,J(x)}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{AC}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow AC = \frac{x(b-a)}{2l} \Rightarrow AB = a + \frac{x(b-a)}{l}$$

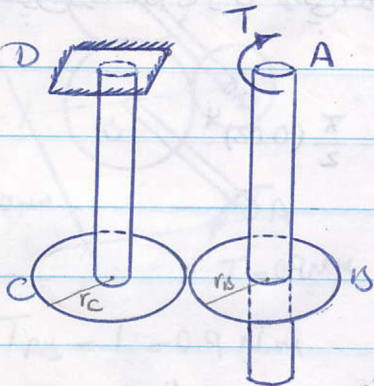
$$J(x) = \frac{\pi}{32}\left(AB^4 - a^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(\left(a + \frac{x}{l}(b-a)\right)^4 - a^4\right)$$

$$\Rightarrow \phi = \int_0^{l} \frac{T\,dx}{G} \times \frac{32}{\pi\left[\left(a + \frac{x}{l}(b-a)\right)^4 - a^4\right]}$$



$$\varphi = \varphi_{A/B} = \varphi_A - \cancel{\varphi_B}^{\,0}$$

مثال: با داشتن T ← $\varphi_A = ?$



$$\frac{T}{r_B} = \frac{T_C}{r_C}$$

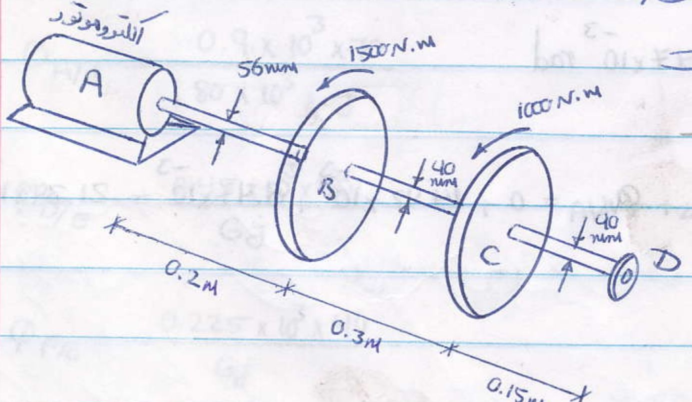
$$\varphi_C = \varphi_{C/D} + \cancel{\varphi_D}^{\,0} \quad \rightarrow T_C = \frac{r_C T}{r_B}$$

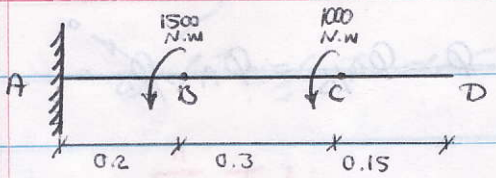
$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B \qquad \varphi_C = \frac{T_C l}{GJ}$$

$$\varphi_B r_B = \varphi_C r_C \qquad r_C \varphi_C = r_B \varphi_B$$

$$\rightarrow \varphi_B = \frac{r_C}{r_B} \frac{T_C l}{GJ} = \left(\frac{r_C}{r_B}\right)^2 \frac{Tl}{GJ} \qquad \varphi_{A/B} = \frac{Tl}{GJ} \rightarrow \frac{Tl}{GJ} = \varphi_A - \left(\frac{r_C}{r_B}\right)^2 \frac{Tl}{GJ}$$

مثال: اگر $G = 80\,Gpa$ باشد زاویه بین A, D را بدست آورید.





چون درفاصله C و D کوپلی نداریم $\varphi_{D/C} = 0$

$$\varphi_{C/B} = \frac{1000 \times 0.3}{80 \times 10^9 \times J} \qquad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.02)^4$$

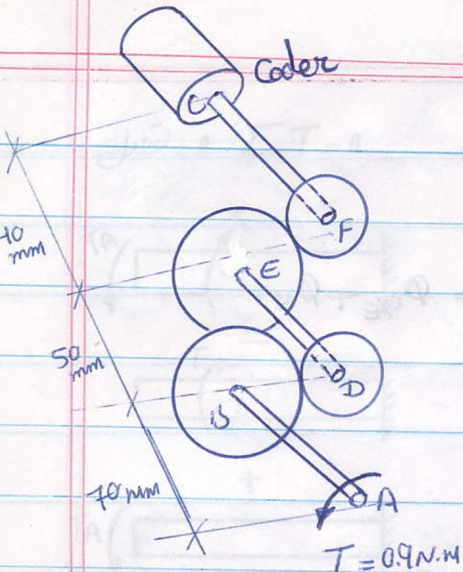
$$\Rightarrow \varphi_{C/B} = 14.92 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{B/A} = \frac{(1500 + 1000) \times 0.2}{80 \times 10^9 \times J} \qquad J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.028)^4$$

$$\Rightarrow \varphi_{B/A} = 6.47 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{D/A} = \varphi_{D/C} + \varphi_{C/B} + \varphi_{B/A} = 0 + 14.92 \times 10^{-3} + 6.47 \times 10^{-3} = 21.39 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{D/A} = 1.226^{0}$$



مثال: اگر از چرخش نقطه C جلوگیری شود میزان چرخش A را نسبت به C تحت گشتاور $T = 0.9\ N.m$ محاسبه کنید. (شعاع دنده‌های کوچک ۲ و دنده‌های بزرگ ۴ است) $G = 80\ Gpa$

قطر تمام محورها 14mm است.

$$J = \frac{\pi}{2}(2)^{2\times2} = 8\pi$$

$$T_{AB} = T = 0.9\ N.m \qquad T_{DE} = \tfrac{1}{2}T_{AB} = 0.45\ N.m$$

$$T_{FC} = \tfrac{1}{2}T_{DE} = \tfrac{1}{4}T = 0.225\ N.m$$

$$\varphi_{A/B} = \frac{0.9\times10^3\times70}{80\times10^3\times J}$$

$$\varphi_{D/E} = \frac{0.45\times10^3\times50}{GJ}$$

$$\varphi_{F/C} = \frac{0.225\times10^3\times40}{GJ}$$

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2$$

$$\varphi_F = \varphi_{F/C} + \cancel{\varphi_C}^{\,0} = \frac{0.9\ N.mm}{GJ} \times 10^4$$

$$\varphi_E = \tfrac{1}{2}\varphi_F = 0.45/_{GJ} \times 10^4 \longrightarrow \varphi_D = \varphi_{D/E} + \varphi_E$$

$$\varphi_D = \frac{(2.25 + 0.45) \times 10^4}{GJ}$$

$$\varphi_B = \frac{r_D}{r_B}\varphi_D = \frac{1}{2}\varphi_D = \frac{1.35 \times 10^4}{GJ}$$

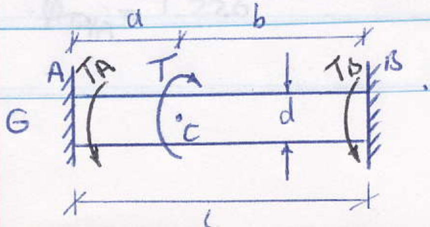
$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B = \frac{6.3 \times 10^4}{GJ} + \frac{1.35 \times 10^4}{GJ} = \frac{7.65 \times 10^4}{GJ} = 3805 \times 10^{-3}\ rad$$

$$= 2.18^\circ$$

پیچش در اعضای نامعین:

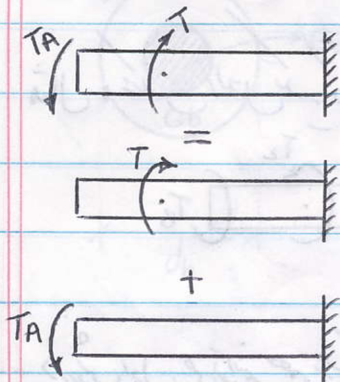
از روش سازگاری تغییر شکل که برای حل پیچش استفاده می‌شود. روش دیگر یا روش جمع آثار قوا است.

مثال: عکس العمل تکیه‌گاهی T_A ، T_B مجهول است.



تعادل: $\sum T = 0 \longrightarrow T_A + T_B = T$

روش اول: (جمع آثار قوا)



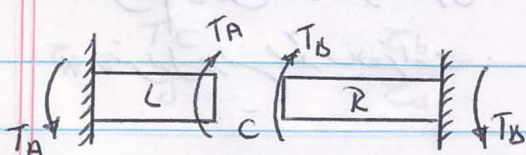
$$\varphi_A^{T} = \frac{Tb}{GJ}$$

$$\varphi_A^{T_A} = \frac{T_A \cdot L}{GJ}$$

چون نقطه A حرکت چرخشی ندارد داریم:

$$\varphi_A^{T} = \varphi_A^{T_A} \Longrightarrow \frac{Tb}{GJ} = \frac{T_A L}{GJ} \Longrightarrow T_A = \frac{b}{L}T \qquad T_B = \frac{a}{L}T$$

روش دوم: (سازگاری تغییر شکل)



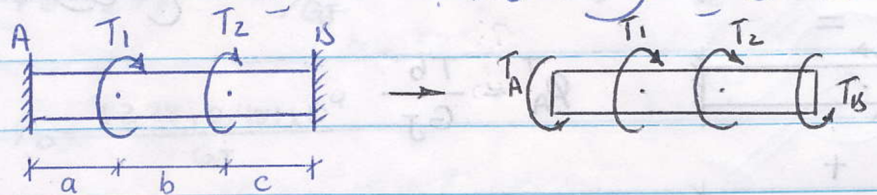
$$\varphi_C^{L} = \frac{T_A \cdot a}{GJ} \qquad \varphi_C^{R} = \frac{T_B \cdot b}{GJ}$$

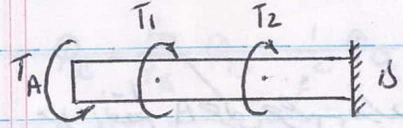
چون چرخش در دو طرف برابر است:

$$\varphi_C^{L} = \varphi_C^{R} \Longrightarrow T_A \cdot a = T_B \cdot b \longrightarrow T_A = \frac{b}{a} T_B$$

$$T_A + T_B = T \Rightarrow \left(\frac{b}{a}+1\right)T_B = T \Rightarrow T_B = \frac{a}{L}T \,,\; T_A = \frac{b}{L}T$$

مثال ؛ عکس العمل تکیه گاهی T_A و T_B را بدست آورید.





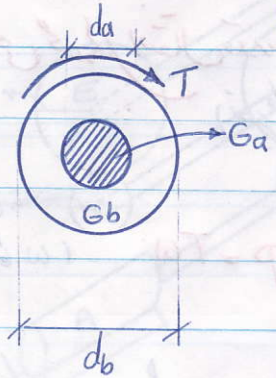
در روش اول می توانیم هم به ۳ شکل تبدیل کنیم و جدا حساب کنیم. یا می توانیم بر روی همین شکل از طریق اینکه جمع φ_i ها را برابر صفر بگذاریم.

از روش دوم می توان استفاده کرد به شرطی که یک نقطه را انتخاب کرده φ ها را مساوی می گذاریم.

* روش اول در این مسئله ساده تر است.

* بسیار مهم است که بدانیم در این شکل زاویه پیچش ها باهم برابرند.

مثال: تنش های برشی max را در پوسته و هسته بیابید.
هسته فولاد و پوسته مس است.



$$T = T_a + T_b \qquad \varphi_a = \varphi_b$$

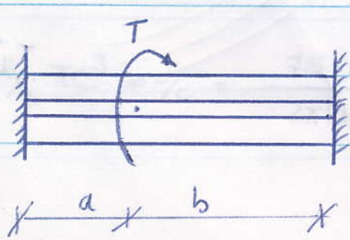
$$\longrightarrow \frac{T_a \cdot L}{G_a \cdot J_a} = \frac{T_b \cdot L}{G_b \cdot J_b}$$

$$\Longrightarrow T_a = \frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} T_b$$

$$T = \left(\frac{G_a \cdot J_a}{G_b \cdot J_b} + 1 \right) T_b \Longrightarrow \begin{cases} T_b = \dfrac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \\ T_a = \dfrac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{T \cdot c}{J} \qquad \frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{\dfrac{T_b \cdot d_b/2}{J_b}}{\dfrac{T_a \cdot d_a/2}{J_a}} = \frac{T_b}{T_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a}$$

$$\frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{G_b \cdot J_b}{G_a \cdot J_a} \cdot \frac{J_a \cdot d_b}{J_b \cdot d_a} = \frac{G_b \cdot d_b}{G_a \cdot d_a}$$



مثال: اگر τ_b معلوم باشد τ_a را بدست آورید. این مسئله ترکیب دو مثال قبل است.

طراحی محورهای انتقال قدرت :

$W = T \cdot \varphi$ (تغییرشکل φ ، کوپل T ، کار W)

$P = \dfrac{dW}{dt} \Rightarrow P = T\dfrac{d\varphi}{dt} \rightarrow P = T\omega$ (ω آنگاه)

$\omega = 2\pi f \rightarrow P = 2\pi f T$ f ← فرکانس ($1/s$) ← تعداد دورها در ثانیه

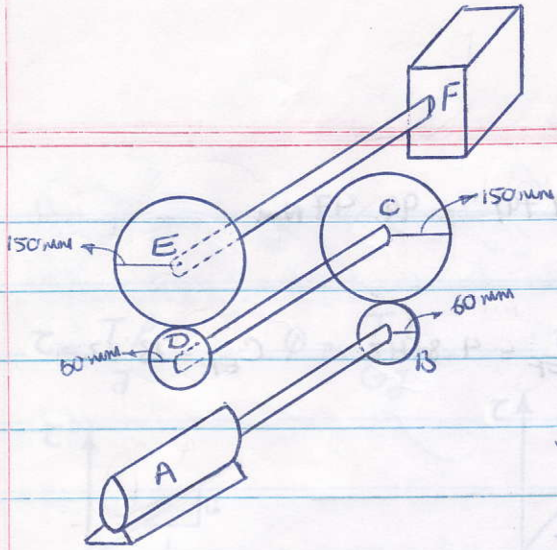
$\Rightarrow T = \dfrac{P}{2\pi f}$ کوپل پیچشی

* در مسائل توان را ثابت فرض می‌کنیم.

$\tau = \dfrac{T \cdot c}{J} \Rightarrow T = \dfrac{\tau \cdot J}{c} \Rightarrow \dfrac{J}{c}\,\tau = \dfrac{P}{2\pi f}$

$\Rightarrow \tau_{\text{مجاز}} = \dfrac{Pc}{2\pi f J}$ تنش برشی

نکته / $P = 2\pi f T \rightarrow$ وات $(W) = \dfrac{N \cdot m}{s}$



مثال: سه محور چهار چرخ دنده به منظور
انتقال توانی معادل P=7.5kW
از موتور A تا ماشین ابزاری در نقطه F
مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر بسامد کاری
موتور 30 Hz باشد و تنش مجاز 60 Mpa
باشد، قطر محور را تعیین کنید.

$$T_{AB} = \frac{P}{2\pi f} = \frac{7.5\times10^3}{2\pi\times30} = 39.79\ \text{N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{1}{2}\pi c^3 = \frac{T}{\tau} = \frac{39.79\times10^3}{60} \longrightarrow c = 7.5\,\text{mm}$$

$$\Longrightarrow d_{AB} = 15\ \text{mm}$$

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2 \Longrightarrow r_1\frac{d\varphi_1}{dt} = r_2\frac{d\varphi_2}{dt} \Longrightarrow r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

$$\Longrightarrow r_1 f_1 = r_2 f_2$$

$$f_{CD} = \frac{30\times60}{150} = 12\ \text{Hz}$$

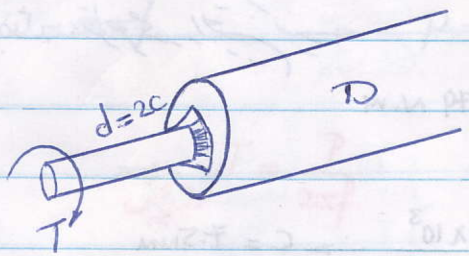
$$\frac{1}{2}\pi c^3 = J/c = \frac{7.5\times10^3\times10^3}{2\pi(12)\times60} \Longrightarrow c = 20.4\ \text{mm}$$

$$\Longrightarrow d_{CD} = 40.8\ \text{mm}$$

$$T_{CD} = \frac{r_C}{r_B} T_B = \frac{150}{60} (39.79) = 99.47 \text{ N.m}$$

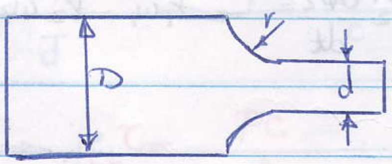
$T_{EF} = 248.7$ N.m $\quad f_{EF} = 4.8$ Hz $\quad C_{EF} = 13.82$

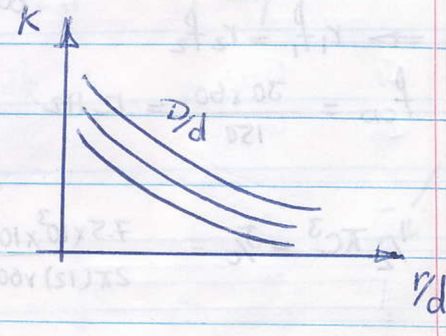
$d_{EF} = 27.64$ mm



$$\tau_{Max} = K \frac{T.C}{J}$$

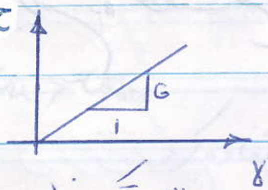
$$\tau_{avg} = \frac{T.C}{J}$$



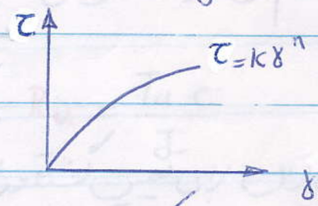


تغییر شکل غیرارتجاعی در پیچش:

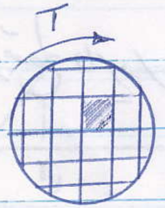
$$\tau = \frac{T.\rho}{J} \quad , \quad \varphi = \frac{T.L}{GJ} \quad , \quad \tau_{Max} = \frac{T.C}{J}$$



الاستیک خطی



الاستیک غیرخطی



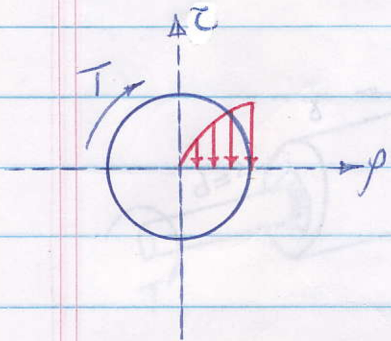
$$T = \int_A \rho . \tau dA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{\rho}{L} \varphi \\ \\ \gamma_{Max} = \frac{C}{L} \varphi \end{array} \right. \longrightarrow \gamma = \frac{\rho}{C} \gamma_{Max}$$

وقتی صحبت از غیر ارتجاعی بودن تغییر شکل می کنیم یعنی $\tau = f(\gamma)$

از طرفی $\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{Max}$ که c ، γ_{Max} ثابت هستند بنابراین $\gamma = g(\rho)$

بنابراین τ حالت غیر ارتجاعی ⟵ $\tau = h(\rho)$



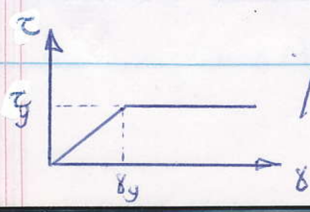
در مقطع دایره ای داریم:

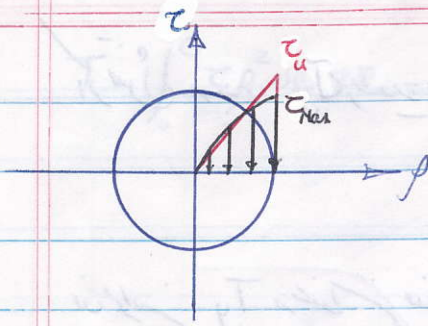
$0 \leq \rho \leq c \qquad dA = 2\pi\rho\, d\rho$

$$T = \int_0^c \rho \cdot \tau\, 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi\int_0^c \tau\rho^2\, d\rho$$

τ برحسب ρ می باشد پس باید تابع τ برحسب ρ را پیدا کرد.

در اینجا مدل Elasto plastic را بررسی می کنیم





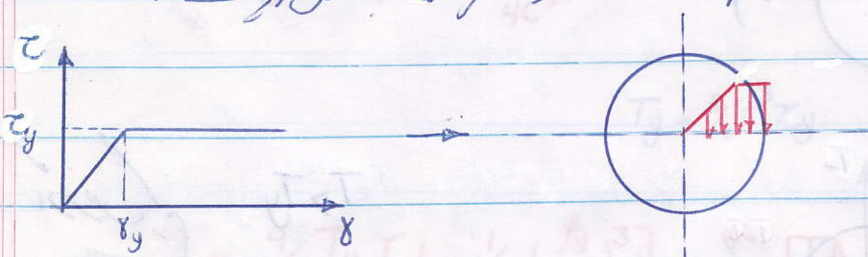
مدول گسیختگی در پیچش :

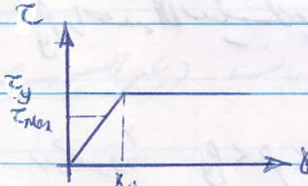
τ_u آن را به نحوی رسم می کنیم سطح زیر نمودارش با سطح زیر نمودار τ_{Max} آن برابر باشد.

$$\tau_u > \tau_{Max} \longrightarrow \tau_u = R_u = \frac{T_u \cdot c}{J}$$

از R_u یا R_T می توان برای تعیین گشتاور پیچشی T_u استفاده کرد.

برای مدل Elastoplastic نمودار $\tau - \rho$ به شکل زیر است.

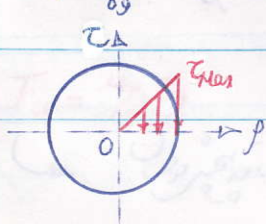




فرض می کنیم $\tau_{Max} < \tau_y$:

در این حالت توزیع تنش خطی است

پس رابطه $\tau_{Max} = \frac{T.c}{J}$



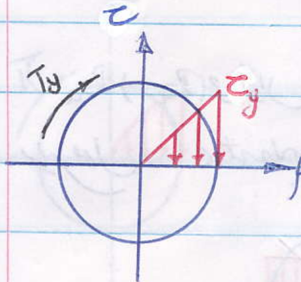
اگر تنش به حد τ_y برسد داریم:

$$T_y = \frac{J}{c}\tau_y \qquad J = \frac{\pi}{2}c^4$$

$$\Longrightarrow T_y = \frac{\pi}{2}c^3\tau_y$$

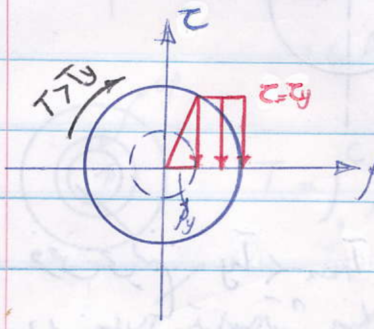
بنابراین T_y به عنوان [illegible] می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $T = T_y$:



اگر فرض کنیم $T > T_y$

ρ_y را هسته الاستیک گویند.



در محدوده $0 < \rho < \rho_y$ داریم:

$$\frac{\tau}{\tau_y} = \frac{\rho}{\rho_y}$$

$$
\begin{cases}
T < T_y \longrightarrow T = \frac{\pi}{2} c^3 \tau \\
T = T_y \longrightarrow T = T_y = \frac{\pi}{2} c^3 \tau_y \\
T > T_y \longrightarrow T = \frac{4}{3} T_y \left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right)
\end{cases}
$$

$$
T = \left(\int_0^c \tau \rho^2 d\rho\right) 2\pi = 2\pi\left(\int_0^{\rho_y} \rho^2 \left(\frac{\rho}{\rho_y}\tau_y\right) d\rho + \int_{\rho_y}^{c} \rho^2 \tau_y \, d\rho\right)
$$

ρ_y شعاع حد الاستیک است که تا الاستیک می‌باشد.

$$
\Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \rho_y^3 \tau_y + \frac{2}{3}\pi c^3 \tau_y - \frac{2}{3}\pi \rho_y^3 \tau_y
$$

$$
\Rightarrow T = \frac{2}{3}\pi c^3 \tau_y \left(1 - \frac{\rho_y^3}{4c^3}\right)
$$

داریم: $T_y = \frac{\pi}{2} c^3 \tau_y$

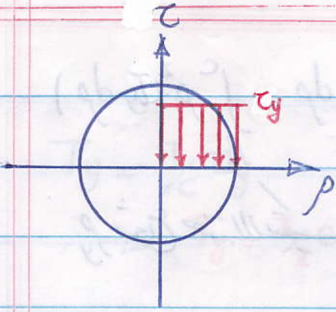
$$
\Rightarrow T = \frac{4}{3} T_y \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right]
$$

این فرمول تنها وقتی قابل استفاده است که $T > T_y$ باشد. در غیر اینصورت به تناقض می‌رسیم.

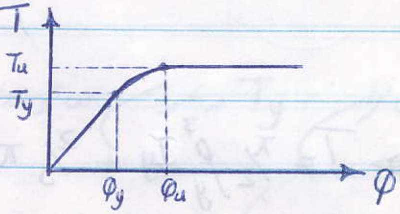
اگر $\rho_y \to 0$ میل کند، $T = T_u$ می‌شود: $T_u = \frac{4}{3} T_y$

← گشتاور نهایی پلاستیک

$$T=\begin{cases}\frac{GJ}{\ell}\varphi & \varphi\leq\varphi_y\\ \frac{4}{3}T_y\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right) & \varphi\geq\varphi_y\end{cases}$$



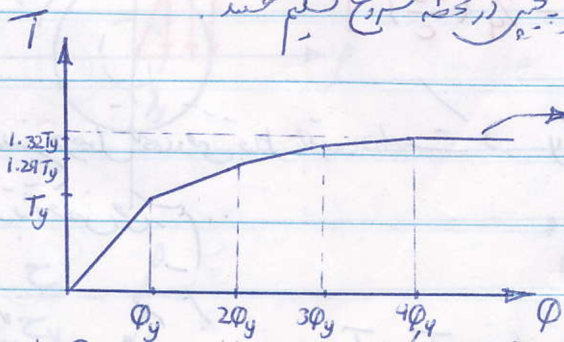
* هنگامی که $\rho_y=c$ باشد $\varphi=\varphi_y$ می باشد



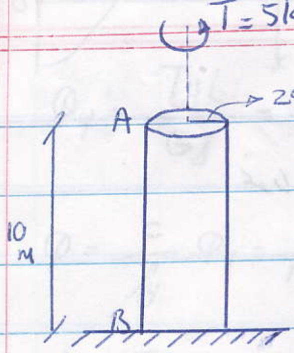
$$\begin{cases}\gamma=\frac{\rho}{L}\varphi \longrightarrow \gamma_y=\frac{\rho_y}{L}\varphi\\ \rho_y=c \xrightarrow{T=T_y} \gamma_y=\frac{c}{L}\varphi_y\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\frac{\rho_y}{c}=\frac{\varphi_y}{\varphi}}$$

$$\Longrightarrow T=\frac{4}{3}T_y\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right] \quad , \quad \varphi_y<\varphi$$

* T_y و φ_y به ترتیب گشتاور و زاویه پیچش در لحظه شروع تسلیم هستند.



نکته: توجه شود رابطه بالا تنها برای $\varphi>\varphi_y$ به کار می رود. برای $\varphi<\varphi_y$ رابطه بین T و φ خطی و بصورت $\varphi=\frac{TL}{GJ}$ می باشد



مثال: کوپلی به اندازه 5 KN.m در نقطه A وارد می‌شود و سپس برداشته می‌شود. مطلوب است حداکثر میزان تنش باقی مانده در مقطع و مقدار تغییر شکل ماندگار چقدر (مصالح از جنس Elasto plastic کامل است).

$\tau_y = 160$ Mpa

$G = 75$ Gpa

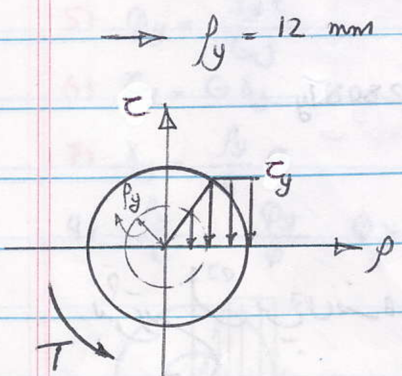
$$T_y = \frac{\pi}{2} c^3 \tau_y = \frac{\pi}{2} (25)^3 \times 160 \times 10^{-6} = 3.297 \text{ kN.m}$$

$T_y < T \Rightarrow$ مقطع وارد پلاستیک شده است.

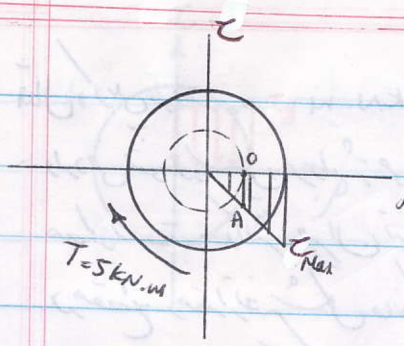
تعیین شعاع هسته الاستیک

$$5 = \frac{4}{3} (3.207) \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_y}{25}\right)^3\right)$$

$\rightarrow \rho_y = 12$ mm



→ نمودار توزیع تنش در بارگذاری

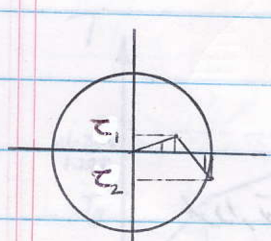


نمودار توزیع تنش در باربرداری

$$\tau_{Max} = \frac{T}{T_y}\tau_y = \frac{5}{3.297}(\tau_y) = 1.2732\tau_y$$

حال باید دو نمودار را جمع کرد تا تنش پس‌ماند بدست آید.

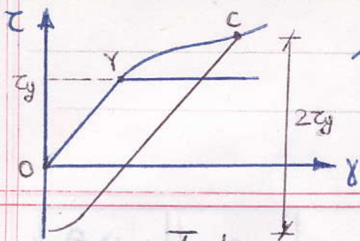
$$OA = \frac{\rho_y}{c}\tau = \frac{14.12}{25} \times 1.2732\tau_y = 0.7192\tau_y$$



$$\tau_1 = (1 - 0.7192\tau_y) = 0.2808\tau_y$$

$$\tau_2 = 0.2732\tau_y$$

بیشترین تنش پس‌ماند $0.2808\tau_y$



نکته مهم ۵: می توان تحقیق کرد که حتی اگر تنش های معکوس از استحکام تسلیم τ_y تجاوز کنند، فرض توزیع خطی این تنش ها درست است، زیرا آن ها از $2\tau_y$ تجاوز نمی کنند.

$$\varphi_y = \frac{T_y L}{GJ} = 0.85 \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{c}{\rho_y}\varphi_y = \frac{25}{14.12}(0.85) = 1.5 \text{ rad}$$

$$\varphi' = \frac{T.L}{GJ} = \frac{5\times10^6 \times 10\times10^3}{GJ} = 1.086 \text{ rad}$$

پسماند $\varphi^R = \varphi - \varphi' = 1.5 - 1.086 = 0.41 \text{ rad}$

---

1) $T_y = \frac{1}{2}\pi c^3 \tau_y$

2) $T = \frac{4}{3} T_y \left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right) \quad T > T_y$

3) $T_u = \frac{4}{3} T_y$

4) $T = \begin{cases} \frac{GJ}{l}\varphi & \varphi \leq \varphi_y \\ \frac{4}{3} T_y \left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi}\right)^3\right) & \varphi \geq \varphi_y \end{cases}$

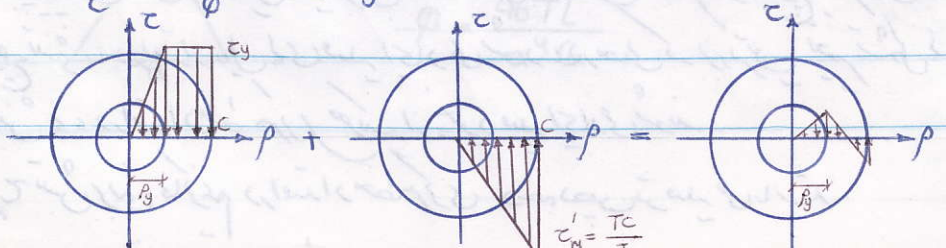
5) $\varphi_y = \frac{T_y l}{GJ}$

6) $\tau_y = G\gamma_y$

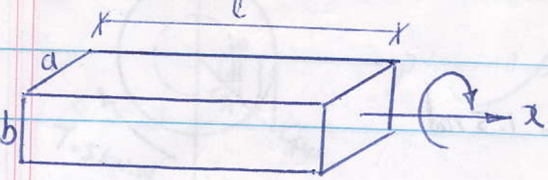
7) $\gamma_y = \frac{\rho_y}{l}\varphi$

8) $\gamma_y = \frac{c}{l}\varphi_y$

9) $\frac{\rho_y}{c} = \frac{\varphi_y}{\varphi} \quad \varphi > \varphi_y$

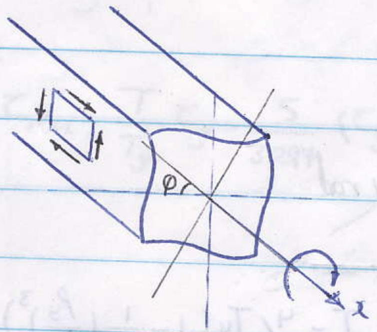


پیچش مقاطع غیر دوار



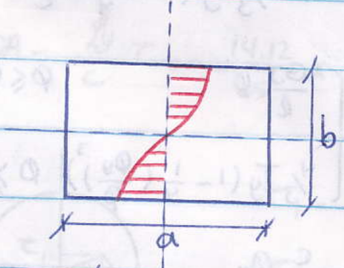
Twist + Warping

تابیدگی + چرخش



کرنش در کنج ها Max است.

امتداد تنش های برشی در گوشه های مقطع صفر است.



$$\tau_{Max} = \frac{T}{C_1 a b^2} \qquad \left(\tau = \frac{T\rho}{J}\right)$$

$$\varphi = \frac{T.L}{C_2 a b^3 G} \qquad \left(\varphi = \frac{TL}{GJ}\right)$$

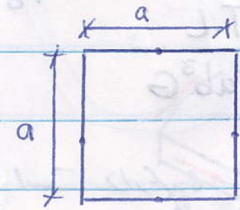
* با پیچاندن مدل لاستیکی میله ی ربعی، در اینجا می‌توان ثابت کرد که هیچ تغییر شکلی، و بنابراین هیچ تنشی، در امتداد یال های میله ایجاد نمی‌شود، در حالی که بزرگترین تغییر شکل ها و بزرگترین تنش ها، در امتداد خط مرکزی هر یک از وجوه میله ایجاد می‌شوند.

τ_{Max} تنش برشی ماکزیمم در امتداد خط مرکزی وجه پهن‌تر میله می‌باشد.

a/b	c_1	c_2
1	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3	0.267	0.263
4	0.282	0.281
5	0.291	0.291
10	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

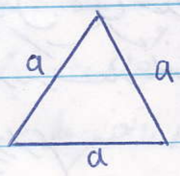
* C_1 و C_2 به نسبت a/b بستگی دارند.

$$\frac{a}{b} \geq 5 \rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{3}\left(1 - 0.63\frac{b}{a}\right)$$



$$\begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{4.81T}{a^3} \\[2ex] \varphi = \dfrac{7.1\, T.L}{Ga^4} \end{cases}$$

* دو فرمول τ_{Max} و φ تنها در محدوده کشسان معتبرند و فقط مخصوص میله‌های راست با سطح مقطع مستطیلی یکنواخت می‌باشند.



$$\tau_{Max} = \frac{20T}{a^3}$$

$$\varphi = \frac{46TL}{a^4 G}$$

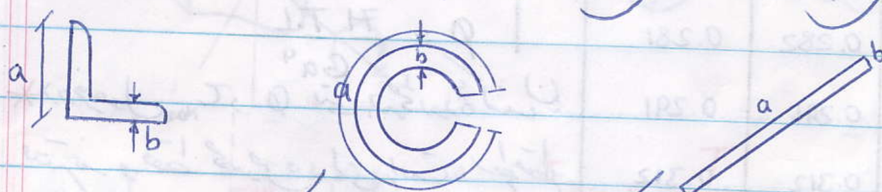
* روابط مقاطع جدار نازک باز و مستطیلی:

$$\begin{cases} \tau_{Max} = \dfrac{T}{\frac{1}{3} a b^2} \\[2ex] \phi = \dfrac{T.L}{\frac{1}{3} a b^3 G} \end{cases} \qquad a/b > 10$$

در پروفیل که چون نسبت a/b بزرگتر از 10 است داریم:

$C_1 = C_2 \simeq 1/3$

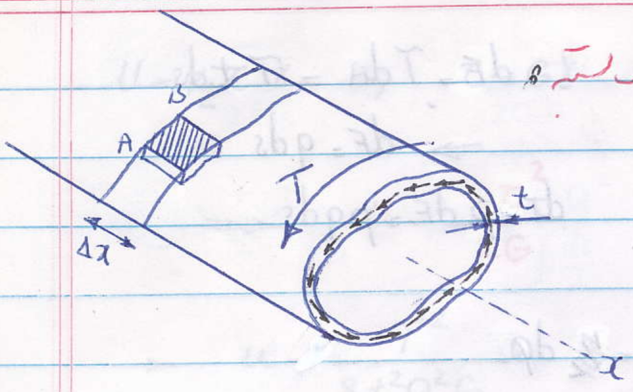
پروفیل های جدار نازک دارای نسبت a/b بزرگتر از 10 است.

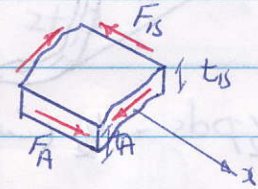


بنابراین برای پروفیل های جدار نازک $C_1 = C_2 = 1/3$ می‌نامیم.

پروفیل های جدار نازک به دو دسته باز و بسته تقسیم می‌شوند. روابط پروفیل جدار نازک باز گفته شد. حال به بیان روابط موجود در پروفیل های بسته می‌پردازیم.

پیچش در محورهای توخالی جدار نازک بسته :





t متغیر است .

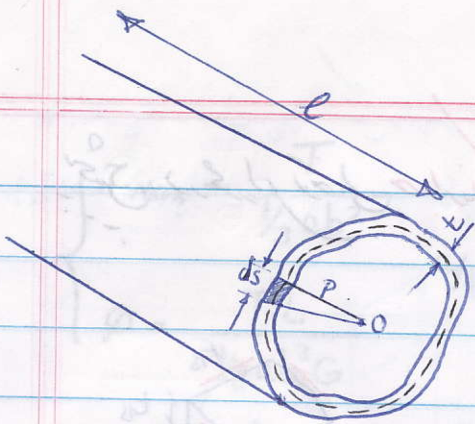
$$\begin{cases} F_{A_x} = \tau_A \, t_A \, \Delta x \\ F_{B_x} = \tau_B \, t_B \, \Delta x \end{cases}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_A - F_B = 0 \Rightarrow \tau_A \cdot t_A = \tau_B \cdot t_B$$

$$\tau \cdot t = q = cte$$

q را جریان برشی نامند (shear flow)

این q در مکانیک سیالات نیز وجود دارد که نشان دهنده دبی آب می‌باشد $q = vb$ (v سرعت و b عرض) . اگر q ثابت باشد با تغییر b سرعت تغییر می‌کند .



$$dF = \tau\, dA = \tau\, t\, ds$$

$$\Rightarrow dF = q\, ds$$

$$dT = \rho . dF = \rho q\, ds$$

$\frac{1}{2}\rho ds =$ (مساحت مثلث) $= dQ$

$$\Rightarrow dT = 2q . dQ \Rightarrow \oint dT = 2\oint q . dQ$$

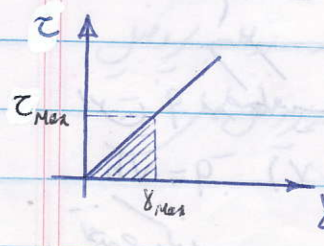
$$\Rightarrow T = 2q \oint dQ$$

$$\Rightarrow T = 2qQ \qquad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$$T = 2qQ \rightarrow T = \tau t (2Q)$$

Q مساحت شکل خط چین است . τ مقدار میانگین تنش برشی در کل جدار است.

محاسبه زاویه پیچش :



U انرژی برشی $= \frac{1}{2}\tau . \gamma$

$$U = \int \tau\, d\gamma$$

$$U = \tfrac{1}{2}\tau . \gamma \quad , \quad \tau = G\gamma$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{\tau^2}{2G} \quad , \quad \tau = \frac{T}{2tQ}$$

$$\longrightarrow \quad u = \frac{T^2}{8t^2Q^2G}$$

$$\longrightarrow \quad U = \int_V u . dv \qquad dv = t . l . ds$$

$$\Longrightarrow \quad U = \oint_s \frac{T^2}{8t^2Q^2G} t . l ds = \frac{T^2 l}{8Q^2G} \oint_s \frac{ds}{t}$$

کار نیروی خارجی $W = \tfrac{1}{2} T\varphi$

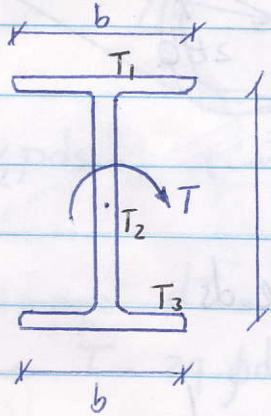
برای سیستم پایستار (Conservative) :

$$W = U \quad \longrightarrow \quad \tfrac{1}{2} T . \varphi = \frac{T^2 L}{8GQ^2} \oint \frac{ds}{t}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{T . L}{G \dfrac{4Q^2}{\oint ds/t}}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \qquad J = \frac{4a^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

بحث درمورد مقطع I شکل:



$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\Rightarrow T = 2T_1 + T_2$$

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\frac{T_1 L}{GJ_1} = \frac{T_2 L}{GJ_2} \qquad J_i = \frac{1}{3} b_i t_i^3$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2}$$

مقاطع بسته :

1) $\tau = \frac{T}{2tQ}$ 2) $q = \frac{T}{2Q}$ 3) $q = \tau t$

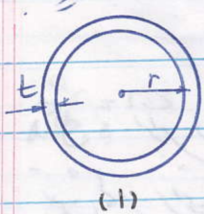
4) $\varphi = \frac{TL}{GJ}$ 5) $J = \frac{4Q^2}{\oint \frac{ds}{t}}$

مقاطع باز :

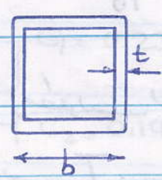
1) $\tau = \frac{T}{c_1 a b^2}$

2) $\varphi = \frac{T.L}{c_2 a b^3 G}$

مثال : دو مقطع جدار نازک شبه مربع و دایره را که تحت پیچش با ضخامت ثابت t مقایسه کنید. درصورتیکه طول دو عضو یکسان باشد نسبت تنش برشی دایره به مربع چقدر است. زاویه پیچش در دایره و مربع چیست؟
(سطح مقطع (حجم مصالح) مربع و دایره را یکسان فرض کنید ($A_1 = A_2$



(1)



(2)

$Q_1 = \pi r^2$ $Q_2 = b^2$ $T_1 = T_2 = T$

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{T}{2tQ} = \dfrac{T}{2t\,\pi r^2} \\[2ex] \tau_2 = \dfrac{T}{2tQ_2} = \dfrac{T}{2tb^2} \end{cases}$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow 2\pi r t = 4bt$$

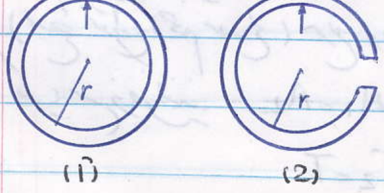
$$\Rightarrow r = \frac{2b}{\pi} \quad \text{یا} \quad b = \frac{\pi r}{2}$$

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{4Q_1^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4\pi^2 r^4}{\frac{2\pi r}{t}} = 2\pi r^3 t \\[2ex] J_2 = \dfrac{4Q_2^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \dfrac{4b^4}{4b/t} = b^3 t = \dfrac{\pi^3 r^3}{8} t \end{cases}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{b^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\frac{\pi^3 r^3 t}{8}}{2\pi r^3 t} = \frac{\pi^2}{16} = 0.617$$

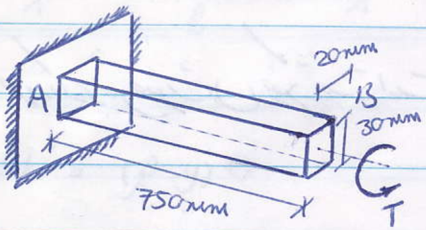
مثال ۴: برای دو مقطع مقابل مطلوبست نسبت تنش‌های برشی برای کوپل ثابت T.



(1) (2)

$$\tau_1 = \frac{T}{2tQ} = \frac{T}{2t\pi r^2} \qquad \tau_2 = \frac{T}{c_1 a b^2} = \frac{T}{\frac{1}{3} 2\pi r t^2}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{T}{2\pi t r^2}}{\frac{3T}{2\pi r t^2}} = \frac{t}{3r}$$



مثال: کوپل T باعث چرخش $\varphi_B = 2^\circ$ در AB می‌شود. اگر $G = 80Gpa$ فرض شود حداکثر تنش برشی در میله را حساب کنید.

$$\tau = \frac{T}{c_1 a b^2} \qquad \varphi = \frac{T.L}{c_2 a b^3 G}$$

$a = 30\,mm \qquad b = 20\,mm \qquad \varphi_B = 2^\circ = 2 \times \frac{\pi}{180} = 34.9 \times 10^{-3}\,rad$

$$a/b = 1.5 \xrightarrow{\text{از جدول}} \begin{cases} c_1 = 0.231 \\ c_2 = 0.1958 \end{cases}$$

$$\frac{\tau}{\phi} = \frac{\frac{T}{c_1 a b^2}}{\frac{T.L}{c_2 a b^3 G}} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{Gb}{L} = \frac{0.1958}{0.231} \times \frac{80 \times 10^3 \times 20}{750}$$

$\Rightarrow \tau_{Max} = 63.1\,Mpa$

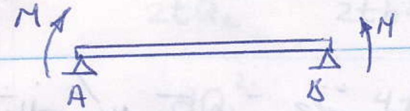
حمید کاظم

فصل چهارم:

«خمش»

خمش خالص: در طول عضو مقدار لنگر ثابت می شود.

در خمش خالص برش صفر است.



هرجا برش صفر شد لنگر ثابت است.

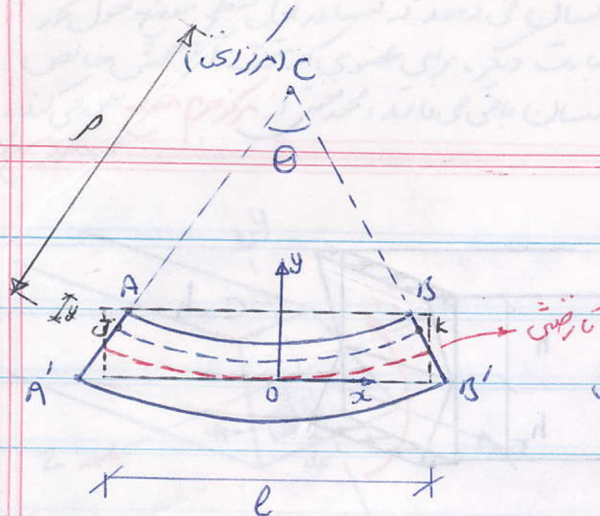
$$A_y = B_y = 0$$

$$M = \int V\,dx = 0 + C = C$$

خمش انحنا تولید می کند.

انحنای مثبت: تارهای فوقانی فشرده شده و تارهای تحتانی کشیده می شود ← خمش مثبت

انحنای منفی: تارهای فوقانی کشیده شده و تارهای تحتانی فشرده می شود ← خمش منفی



تار خنثی تاری که طولش در اثر خمش ثابت می‌ماند.

فاصله تار JK را از تار خنثی y فرض می‌کنیم.

y : فاصله از تار خنثی

ρ : شعاع انحنای تار خنثی

$L' = (\rho - y)\theta$ طول تار JK

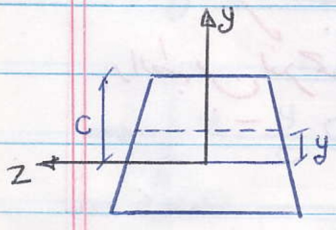
$$\delta = L - L' = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

برای y های مثبت (بالای تار خنثی) δ و ε فشاری است.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} = \frac{-y}{\rho} = \frac{-1}{\rho}y$$

ε_x (توزیع کرنش در مقطع)

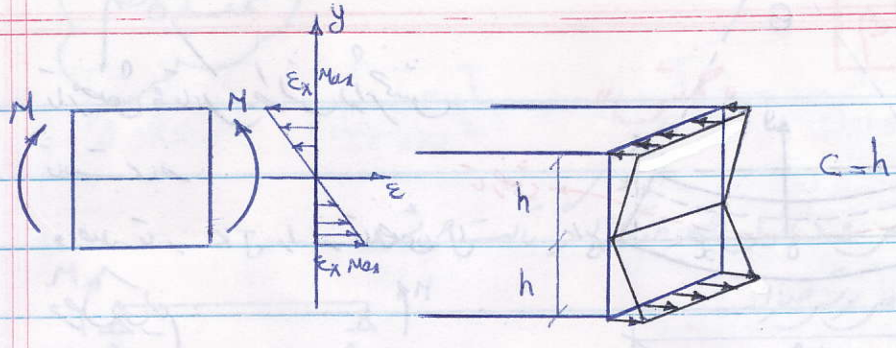
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$



مقطع عرضی

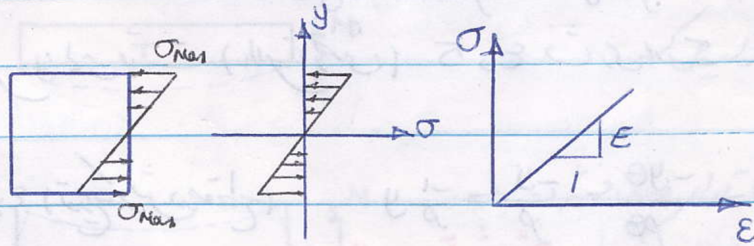
$$\varepsilon_x^{Max} = \frac{-c}{\rho}$$

بنابراین توزیع کرنش در مقطع خطی است.



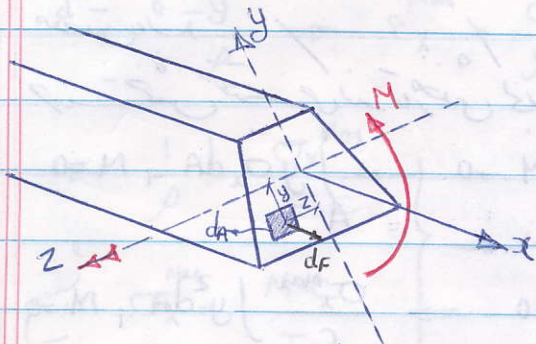
$\sigma_x = E . \varepsilon_x \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \Longrightarrow \sigma_x = \frac{-y}{\rho} E$

$\varepsilon_x = \frac{y}{c} \varepsilon_x^{Max} \longrightarrow \sigma_x = \frac{y}{c} \sigma_x^{Max}$



رابطه بین لنگر خمشی در تنش نرمال، محل تار خنثی ه

۱) $S_z = \int y \, dA = 0$. این معادله نشان می دهد که گشتاور اول سطح مقطع حول محور خنثی آن باید برابر با صفر باشد. به عبارت دیگر، برای عضوی که تحت اثر خمش خالص قرار دارد و مادامی که تنش ها در ناحیه کشسان باقی می مانند، محور خنثی از مرکز جرم مقطع عبور می کند
به مرکز سطح مقطع



$$dF = \sigma_x \, dA$$ (کششی)

چون زیر تار خنثی است.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A dF = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x \, dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{y}{c} \sigma_x^{Max} \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A y \, dA = 0 \Rightarrow \int_A y \, dA = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{\int dA} \qquad S_x = \sum y_i A_i = \int y \, dA = 0$$

برای یافتن تار خنثی

*محل تار خنثی از مرکز سطح عبور می کند.

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \int_A dM_y = 0 \Rightarrow \int_A z \, dF = 0 \Rightarrow \int_A z \cdot \sigma_x \cdot dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A z \cdot \frac{y}{c} \sigma_x^{Max} \, dA = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A z \cdot y \, dA = 0 \Rightarrow I_{zy} = 0$$

 *بنابراین z و y محورهای اصلی می باشند. بنابراین تار خنثی باید یکی از محورهای اصلی

منطبق باشد.

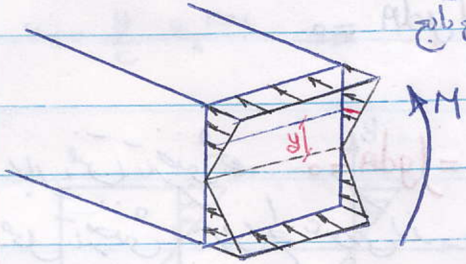
جهت خمش تغییر می‌کند تا رخمش کند.

$$\Sigma M_z = 0 \rightarrow \int_A y\, dF + M = 0 \rightarrow \int_A \bar{y}\, \sigma_x\, dA + M = 0$$

$$\rightarrow \int_A y \frac{y}{c} \sigma_x^{Max}\, dA + M = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int y^2 dA + M = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} I_z + M = 0 \Rightarrow \sigma_x^{Max} = \frac{-M.c}{I_z}$$

* این رابطه فقط در حالتی صادق است که مصالح تابع قانون هوک باشد. در غیر اینصورت باید از رابطه بالا به نحو دیگری استفاده نمود.



$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z}$$

مدول مقطع $S = \frac{I}{c} \Rightarrow \sigma^{Max} = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{Max}}{\sigma_{مجاز}}$

← رابطه طراحی تیر تحت خمش

$$\sigma_x = \frac{-M.y}{I_z} \qquad \varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \longrightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x$$

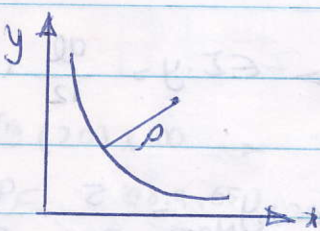
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_x^{Max} = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_x^{Max}}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x^{Max}}{E.c}$$

(از تنش) $$\sigma_x^{Max} = \frac{M.c}{I}$$

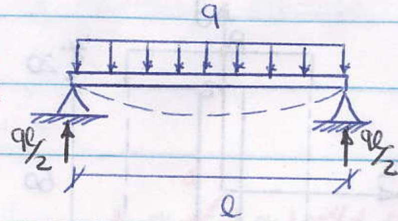
اذن $$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (k = 1/\rho)$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \sim \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2y}{dx^2}$$



$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow EI\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI.y = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + C_1 x + C_2$$

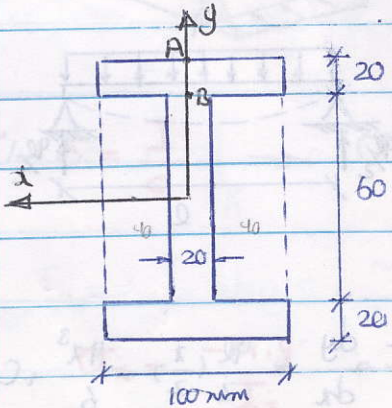
$$x=0 \rightarrow y=0 \longrightarrow C_2=0$$

$$x=l \rightarrow y=0 \longrightarrow 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{-ql^3}{24}$$

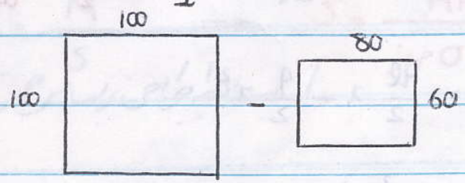
$$\Rightarrow EI.y = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{24}x$$

$$\Rightarrow y_{Max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \quad at \quad x = l/2$$

مثال ۸: مقطع تیر I شکل مطابق زیر تحت لنگر خمشی 15 kN.m + قرار می‌گیرد محاسبه کنید جمع نیرویی که به بال فوقانی تیر وارد می‌شود چقدر است.



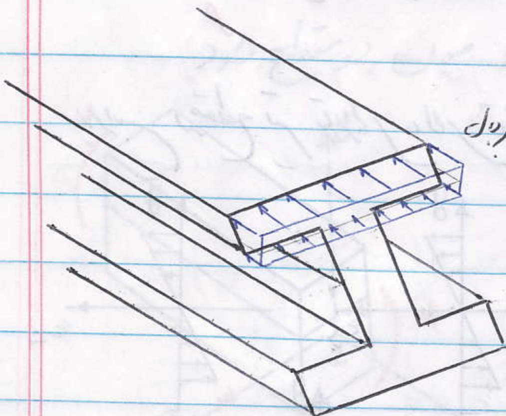
$$\sigma = -\frac{M.y}{I}$$



$$I = \frac{100^4}{12} - \frac{80 \times 60^3}{12} = 6.89 \times 10^6 \ mm^4$$

$$\sigma_A = \frac{-M y_A}{I} = -\frac{15 \times 10^6 \times 50}{6.89 \times 10^6} = -108.9 \ Mpa$$

$$\sigma_B = \frac{3}{5} \sigma_A = -65.3 \ Mpa$$

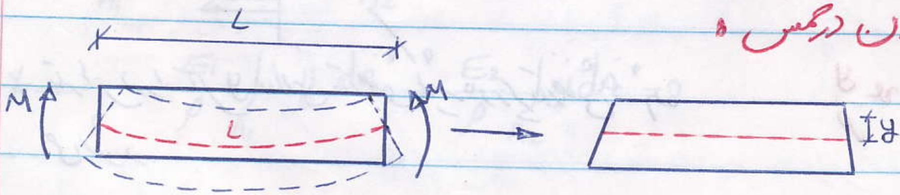


$$\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} (20) \times 100 \longrightarrow$$

نیروی فشاری وارد بر بال $F = -\frac{108.9 + 65.3}{2} (20)(100)$

$$= -174.2 \ kN$$

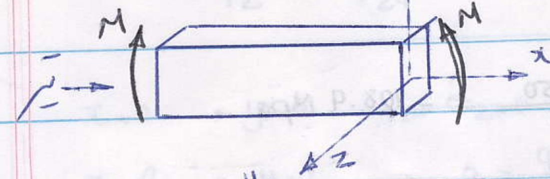
۵۰. اثر پواسون در خمش



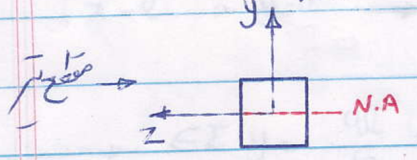
$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

نکته 8 روابط ... سطح خنثی
(y>0) در هر دو جهت y و z انبساط پیدا می کند. (کششی). درحالیکه اجزای زیر تار خنثی
(y<0) منقبض می گردند.

مقطع تیر به صورت مقابل است.



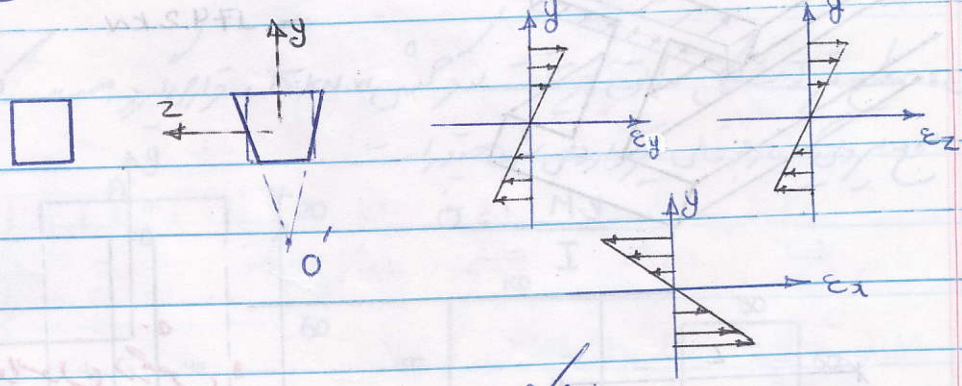
$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| \longrightarrow \varepsilon_y = -\nu . \varepsilon_x$$



$$\varepsilon_z = -\nu . \varepsilon_x$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_z = \nu \frac{y}{\rho}$$

بنابراین در مقطع تیر تارهای بالای تار خنثی کششی و زیر تار خنثی فشاری است.

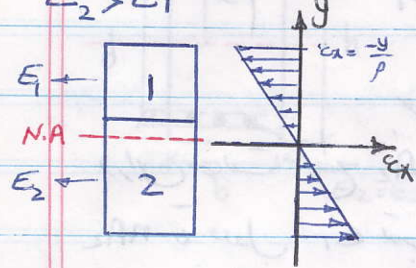


* تارهای در راستای y بالای تار خنثی کشیده و زیر تار خنثی فشرده می شود.

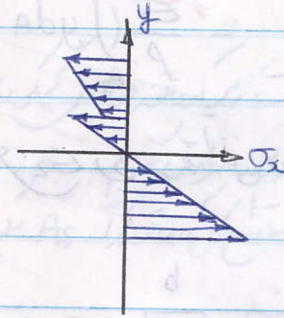
$$\varepsilon_y = \nu \frac{y}{\rho}$$

خمش مقاطع مرکب:

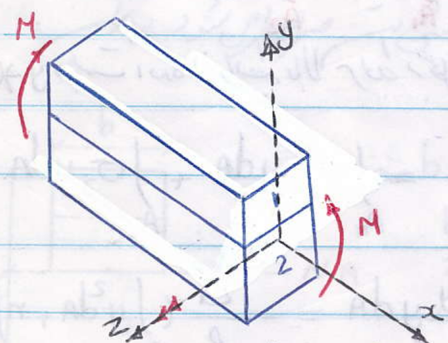
$E_2 > E_1$



$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$



در اینجا . $\sigma_x = \frac{y}{c}\sigma_{Max}$ صادق نیست. چون دو مقطع دارد



$$\sum F_x = 0$$

$$\longrightarrow \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\longrightarrow \int_{A_1} \sigma_x \, dA + \int_{A_2} \sigma_x \, dA = 0$$

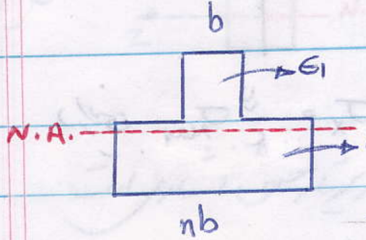
$$\longrightarrow \int_{A_1} -E_1 \frac{y}{\rho} dA + \int_{A_2} -E_2 \frac{y}{\rho} dA = 0$$

$$\Longrightarrow -\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y \, dA - \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y \, dA = 0$$

فرض می‌کنیم $\frac{E_2}{E_1} = n$

$$\Longrightarrow -\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} n y\,dA\right) = 0$$

در این حالت مقطع A_2 را که دارای مدول ارتجاعی E_2 بود به مقطعی معادل nA_2 با مدول E_1 تبدیل کردیم.



$$-\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} y\,d(nA_1)\right) = 0$$

* y بدست آمده از رابطه بالا مربوط به محل تار خنثی است.

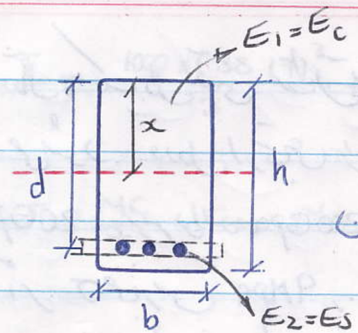
$$\sum M_z = 0 \longrightarrow M = \int \sigma_x y\,dA = \int_{A_1} \sigma_x y\,dA + \int_{A_2} \sigma_x y\,dA$$

$$\longrightarrow M = \int_{A_1} -\frac{E_1 y}{\rho} y\,dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y}{\rho} y\,dA = -\frac{E_1}{\rho}\left(\int_{A_1} y^2 dA + n\int_{A_2} y^2 dA\right)$$

$$= -\frac{E_1}{\rho}\left(I_1 + nI_2\right) \qquad M = -\frac{E_1}{\rho}\underbrace{\left(I_1 + nI_2\right)}_{I\ \text{کل}}$$

بنابراین می‌توان فهمید که y مانند n برابر نشود و b مانند n برابر شود.

تیر بتن مسلح:

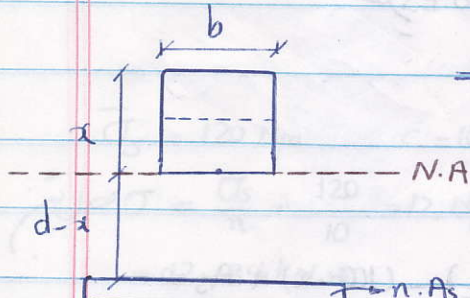


قسمت زیر ارماتور فولادی کمکی از لحاظ زوال ندارد. بنابراین آن را در نظر نمی گیرم.

اگر سطح مقطع کل ارماتورها را A_s بگیریم مقطع معادل $n.A_s$ می باشد.

$$\frac{E_s}{E_c}=10=n$$

در حالت بار خمشی مقطع بتن مسلح از قسمت کششی بتن صرف نظر می شود. بنابراین:



$$S_x=\sum y_i A_i=0$$

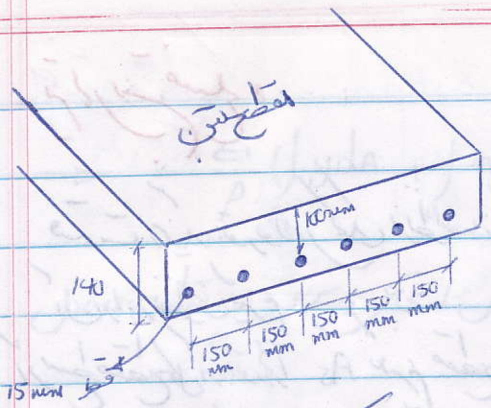
$$\Longrightarrow b.x.\frac{x}{2}-n.A_s(d-x)=0$$

$$\frac{b}{2}x^2+nA_s x-nA_s d=0$$

* چون بتن کشش را تحمل نمی کند، در قسمت کششی ارماتور فولادی قرار می دهند.

** نکته: اگر مقطع مرکب از دو مقطع $\underline{1}$ و $\underline{2}$ تشکیل شده باشد که $\frac{E_2}{E_1}$ برابر n شود، مقطع $\underline{2}$ را در جهت عمود بر محور yها n برابر می کنیم تا سطح $\underline{2}$، n برابر شود. حال فرض می کنیم کل مقطع دارای مدول ارتجاعی E_1 است. در این حالت برای مقطع جدید σ_1 را بدست می آوریم. چون طبق رابطه $\sigma=E\varepsilon$ پس:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{E_2}{E_1}=n$$



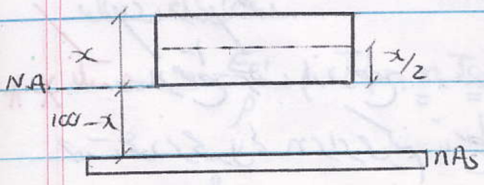
مثال ۶: یک دال بتنی مطابق شکل مسلح می‌شود. مدول ارتجاعی برای بتن 20GPa و برای فولاد 200GPa می‌باشد. اگر σ مجاز بتن 9MPa و σ مجاز فولاد 120MPa فرض شود، مطلوبست حداکثر گشتاور مثبتی که می‌توان به 1m عرض این دال اعمال کرد.

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{20} = 10$$

تعداد میلگردها در دال عرض 1m = $\frac{1}{0.15} = 6.667$ میلگرد

$$A_s = 6.667 \times \pi \times \frac{15^2}{4} = 1.178 \times 10^3 \ mm^2$$

$$nA_s = 10\,(1.178 \times 10^3) = 1.178 \times 10^4 \ mm^2$$



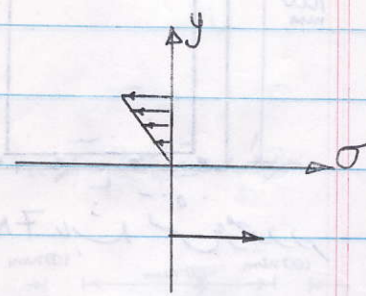
$$1000\,x\,(x/2) - (100 - x)\,n.A_s = 0$$

$$\rightarrow x = 38.17\,mm$$

$$\rightarrow 100 - x = 61.83\,mm$$

$$I = \frac{1000 \times (38.17)^3}{3} + 1.178 \times 10^4 \times (61.83)^2 + I_{\text{فولاد}} = 63.57 \times 10^6 \ mm^4$$

$$\sigma = \frac{MC}{I} \longrightarrow M = \sigma . \frac{I}{C}$$



۱) کنترل مقطع براساس تنش فشاری مجاز بتن

$$M_{Max} = \bar{\sigma}_c . I/c = 9 \times \frac{63.57 \times 10^6}{38.17} \times 10^{-6} = 14.99 \ kN.m$$

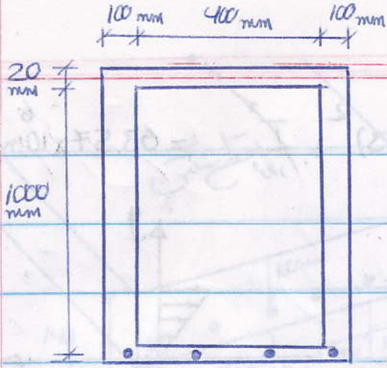
۲) کنترل مقطع براساس تنش مجاز فولاد

$$\bar{\sigma}_s = 120 \ Mpa \qquad C = 100 - x = 61.83 \ mm$$

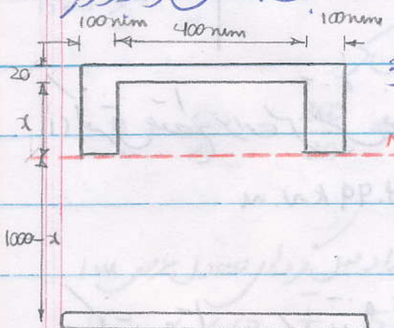
معادل بتن $\sigma = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{120}{10} = 12 \ Mpa \longrightarrow M_{Max} = \bar{\sigma} . \frac{I}{C} = 12 \times \frac{63.57 \times 10^6}{61.83} \times 10^{-6} =$

$= 12.34 \ kN.m$

$$M_{Max} = \text{Min}\,(14.99 , 12.34) = 12.34$$



مثال : مقطع یک تیر بتن مسلح همانند شکل بصورت جعبه ای می باشد. سطح مقطع مجموع میل گردهای کششی برابر $3600\,mm^2$ و $n=10$ فرض می گردد. هرگاه حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی $7\,N/mm^2$ باشد تنش موجود در میل گردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع را محاسبه کنید



$A_s = 3600\,mm^2 \rightarrow nA_s = 36000\,mm^2$

$S_x = 0 \rightarrow \sum y_i A_i = 0$

$(x+10)(20\times600) + \frac{x}{2}(100x)\times2 -$

$(1000-x)(36000) = 0 \rightarrow x = 405.29\,m$

$$\rightarrow I = \frac{600(20)^3}{12} + (415.29)^2(20\times600) + 2\left(\frac{100(405.29)^3}{3}\right) + (594.71)^2(36000)$$

$$\rightarrow I = 4\times10^5 + 20695.89\times10^5 + 44381.95\times10^5 + 127324.79\times10^5$$

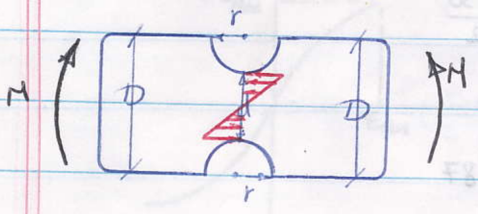
$$\rightarrow I = 192406.63\times10^5\,mm^4$$

$(\sigma_{all})_c = 7\,N/mm^2 \rightarrow \sigma_s = 70\,N/mm^2$

بتن $\quad 7\,\frac{N}{mm^2} = \frac{M(425.29)mm}{192406.63\times10^5\,mm^4} \Rightarrow M = 316.69\,kN.m$

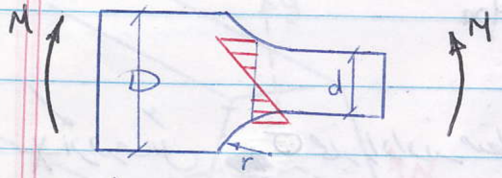
فولاد $\quad 70\,\frac{N}{mm^2} = \frac{M(594.71)mm}{192406.63\times10^5\,mm^4} \Rightarrow M = 2264.7\,kN.m$

تمرکز تنش در خمش:

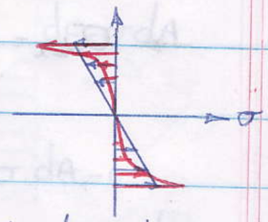


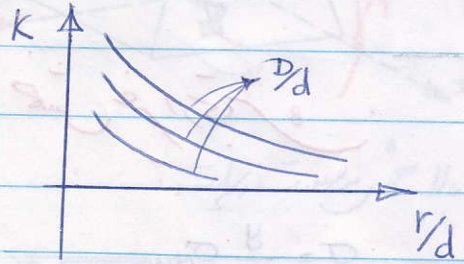
$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$

$\sigma_{avg} = M\dfrac{c}{I}$ ← مربوط به مقطع ضعیف‌تر

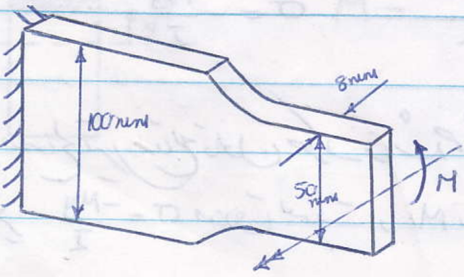


$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$

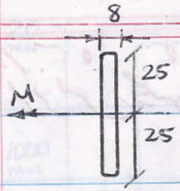




سطح دو نمودار باید برابر باشد
که شکستگی فقط توزیع تنش را جمع می‌کند.



مثال ۶: اگر $M = 350\,N.m$ باشد
مطلوبست حداکثر تنش وارد شده
روی ورق اگر $r = 5\,mm$ باشد.



$$\sigma_{avg} = \frac{Mc}{I} = \frac{350\times10^3 \times 25}{\frac{8\times50^3}{12}} = 105\ Mpa$$

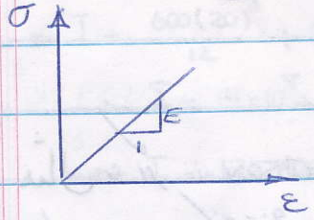
$$\sigma_{Max} = K\,\sigma_{avg}$$

$$D/d = 2 \quad r/d = 0.1 \longrightarrow K = 1.87$$

$$\longrightarrow \sigma_{Max} = 1.87 \times 105 = 196\ Mpa$$

* اگر در مسئله تنش مجاز را دادند منظور σ_{Max} است.

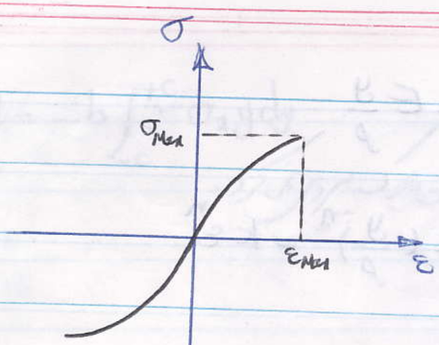
خمش غیر ارتجاعی

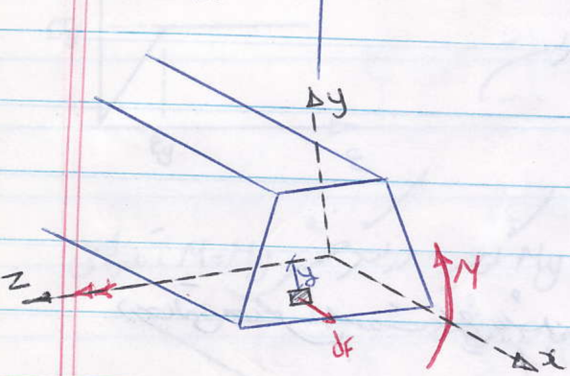


$$\sigma = E.\varepsilon \qquad \sigma = \frac{y}{c}\sigma_{Max}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

اگر در مقطع تیری تابع قانون هوک نباشد خمش ایجاد شده غیر ارتجاعی است.
و دیگر $\sigma = \frac{-My}{I}$ صادق نیست، و M به صورت زیر بدست می آید.





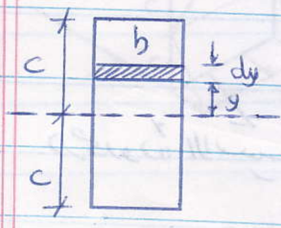
$$\Sigma M_z = 0 \qquad dF = \sigma dA$$

$$M + \int y\, dF = 0$$

$$\Rightarrow M + \int y \sigma . dA = 0$$

$$\rightarrow M = -\int y \sigma . dA$$

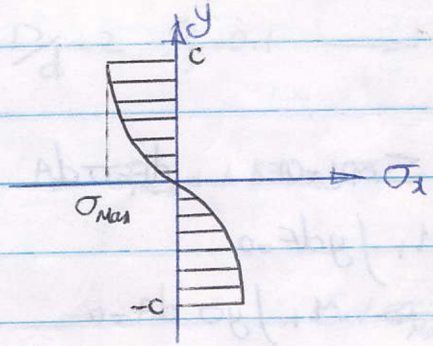
برای مستطیل زیر با توجه به نمودار $\sigma - \varepsilon$ بالا خمش به صورت زیر است.



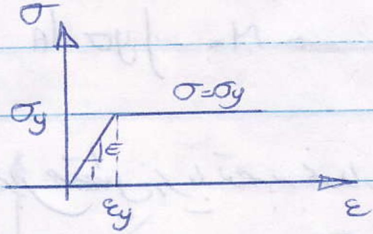
$$M = -\int y \sigma dA = -b \int_{-c}^{+c} \sigma . y . dy$$

برای الاستیک خطی $\rightarrow \sigma_x = -E\frac{y}{\rho}$

در حالت کلی $\rightarrow \sigma_x = k\left(\frac{y}{\rho}\right)^n = k\varepsilon^n$



در حالتی خاص به صورت زیر می‌باشد.



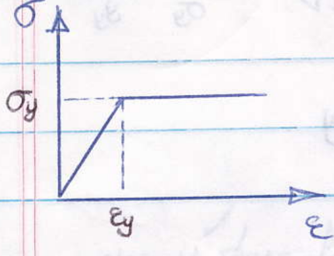
در محدوده‌ی الاستیک خطی

$$\sigma_{Max} = \frac{-Mc}{I}$$

$$\sigma = \frac{-My}{I}$$

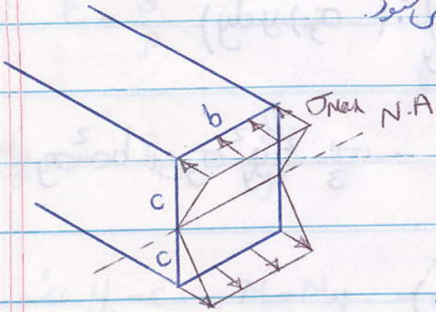
در جلسه قبل برای مستطیل گفتیم: $M = -b\int_{-c}^{+c} \sigma_x y\, dy$
که در از قانون هوک پیروی می‌کرد.

رفتار الاستو - پلاستیک در خمش:



چون تنش در دورترین تارها بیشتر است بنابراین این تارها زودتر جاری می‌شوند.

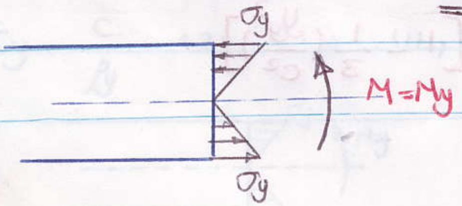
لنگری که اولین جاری شدن را دارد M_y گویند. در لنگر خمشی $M=M_y$، تارهای فوقانی (دورترین تار نسبت به تار خنثی) جاری می‌شود.



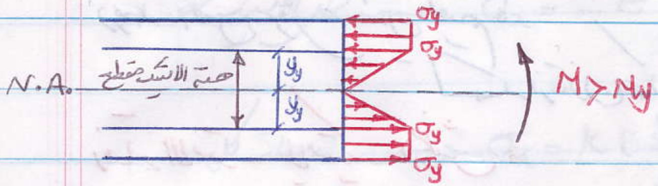
1) $M=M_y$ ؛ $\sigma_{Max} = \sigma_y = \dfrac{M_y \cdot c}{I}$

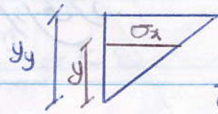
شکل $I = \dfrac{b(2c)^3}{12} = \dfrac{2}{3} bc^3$

$\xRightarrow{\text{مستطیل}} M_y = \dfrac{2}{3} bc^2 \sigma_y$



$M > M_y$ (2





$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{y}{y_y}$$

$$M = -b\int_{-c}^{c} \sigma_x y\,dy = -2b\int_{0}^{c} \sigma_x y\,dy$$

$$= -2b\left(\int_{0}^{y_y} \sigma_x y\,dy + \int_{y_y}^{c} \sigma_x \cdot y\,dy\right)$$

$$= -2b\left(\int_{0}^{y_y} \left(\frac{-y}{y_y}\sigma_y\right) y\,dy + \int_{y_y}^{c} (-\sigma_y)\, y\,dy\right)$$

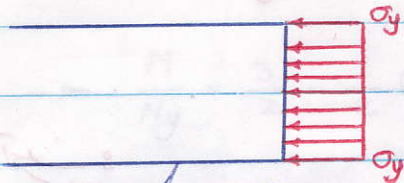
$$= \frac{2}{3} b y_y^2 \sigma_y + bc^2\sigma_y - b y_y^2 \sigma_y = \frac{-1}{3} b y_y^2 \sigma_y + bc^2 \sigma_y$$

$$\Longrightarrow M = bc^2 \sigma_y\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{y_y^2}{c^2}\right)$$

$$\Longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y^2}{c^2}\right)\right]$$

$M = M_p$ (3

M_p حداکثر لنگری که بتوان به مقطع وارد کرد و در این صورت مقطع دچار گسیختگی می‌گردد.



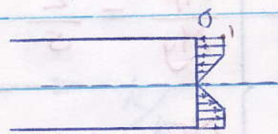
$y_y = 0$

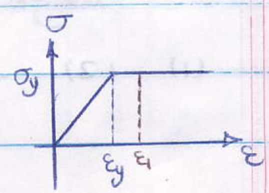
$M_p = \frac{3}{2} M_y$

* در حالت کلی $M_p = k M_y$ است که k را shape factor گویند و برای مستطیل $3/2$ است.

$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ → (منفی را بدانیم مهم نیست)

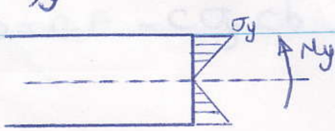
$M > M_y$ → $\varepsilon_y = \frac{y_y}{\rho}$ (1)





ρ_y شعاع انحنای معادل مقطع مجازی شده وقتی که $M = M_y$, $y_y = c$ باشد.

$M = M_y$ ؛ $\varepsilon_y = \frac{c}{\rho_y}$ (2)   (1) , (2) → $\frac{y_y}{\rho} = \frac{c}{\rho_y}$ → $\frac{y_y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y}$



$\rho > \rho_y$ می‌باشد.

$$\frac{y_y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y} \longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_y}\right)^2\right]$$

تعریف:

(1) $\frac{M_p}{\sigma_y} = Z$ مدول پلاستیک مقطع

$\frac{M}{\sigma} = S$ مدول الاستیک مقطع $\longrightarrow \frac{M_y}{\sigma_y} = S$ (2) $\left(\frac{I}{c} = \frac{M}{\sigma} = S\right)$

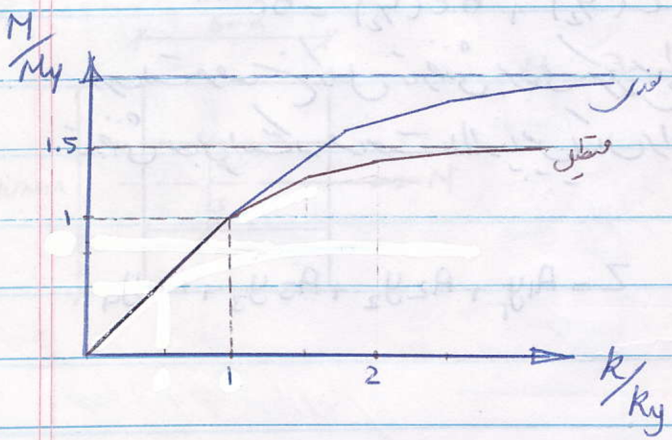
$$(1), (2) \longrightarrow \begin{cases} \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{S} \\ \frac{M_p}{M_y} = k \end{cases} \longrightarrow \frac{Z}{S} = k \longrightarrow \text{ضریب شکل سطح مقطع}$$

k برای مقطع I شکل 1.15 و برای دایره 1.7 می‌باشد.

$$\frac{1}{\rho} = k \quad \text{اگر} \quad \frac{1}{\rho_y} = k_y$$

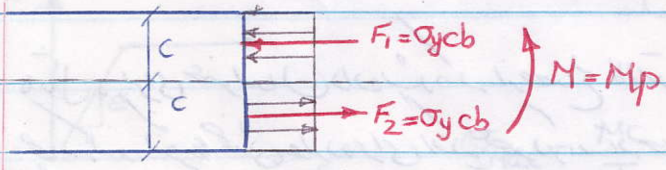
$$\longrightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \right]$$

$$\longrightarrow \frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2$$



مقطع مستطیل:

در حالت پلاستیک کامل:



$$F_1 = F_2 = F$$

$$M_p = c.F = c\sigma_y cb = bc^2\sigma_y$$

حالت کلی: $F_1 = b_1 \ldots$

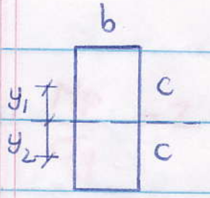
$$\rightarrow M_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = b_1 c_1 y_1 \sigma_y + b_2 c_2 y_2 \sigma_y = A_1 y_1 \sigma_y + A_2 y_2 \sigma_y$$

$$\rightarrow M_p = \sigma_y (A_1 y_1 + A_2 y_2) \rightarrow Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$M_p = Z \sigma_y \Rightarrow Z = bc^2$$

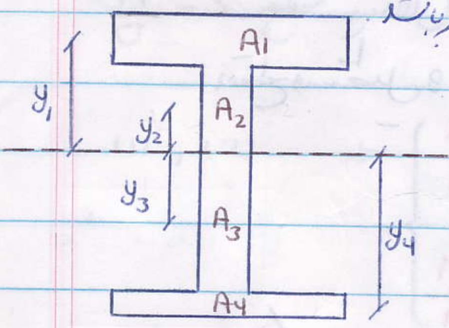
در حالت کلی: $Z = A_1 y_1 + A_2 y_2$

$$\rightarrow M_p = (A_1 y_1 + A_2 y_2)\sigma_y$$



$$Z = b.c\left(\frac{c}{2}\right) + b.c\left(\frac{c}{2}\right) = bc^2$$

در حالت موضعی کامل تارخنثی بر روی مرکز سطح نیست بلکه تارخنثی جایی است که مساحت بالا و پایین آن برابر باشد.



$$Z = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4$$

مثال: برای عضو نشان داده شده که از مصالح الاستو-پلاستیک تشکیل شده است محاسبه کنید لنگر خمشی وارده برای اینکه عضو در آستانه جاری شدن قرار گیرد. مطلوب است لنگری که هسته الاستیکی برابر 6mm در مقطع این عضو به وجود آید؟

$\sigma_y = 300\,Mpa \quad E = 200\,Gpa$

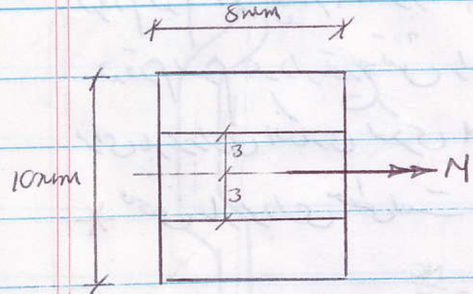
$$\sigma_y = 300\ \text{Mpa} \qquad E = 200\ \text{Gpa}$$

$$M \geq M_y \rightarrow M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$$

$$b = 8\ \text{mm} \qquad c = 5\ \text{mm}$$

$$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y = \frac{2}{3}\, 8\, (5)^2 \times 300 = 40\ \text{N.m}$$

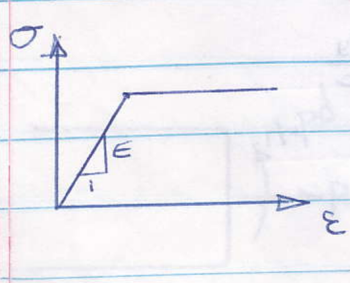
$$2y_y = 6\ \text{mm} \rightarrow y_y = 3\ \text{mm}$$



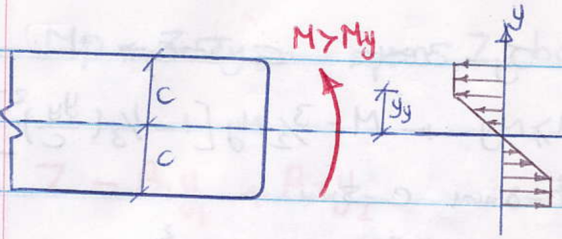
$$M = \frac{3}{2} \times 40 \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^2\right] = 52.8\ \text{N.m}$$

تنش های باقیمانده در خمش

مدل ما به صورت زیر می باشد.



$$\sigma_{Max} = \frac{Mc}{I} \qquad \sigma_y = \frac{M_y c}{I}$$



نمودار توزیع تنش در بارگذاری:

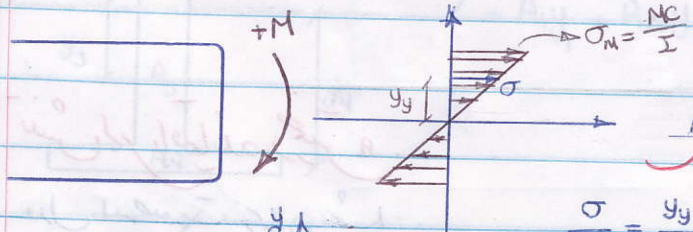
$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y$ در قدم اول M_y را حساب می‌کنیم.

$M = \frac{3}{2} M_y \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right]$ در قدم دوم اگر $M > M_y$ بود هسته الاستیک را رسم می‌کنیم.

در قدم سوم نمودار توزیع تنش را رسم می‌کنیم.

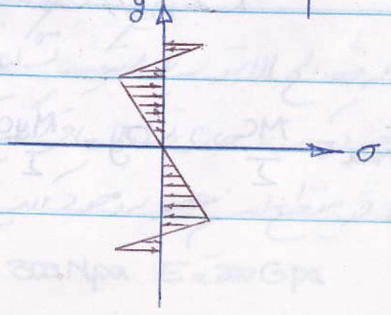
برای باربرداری انگاری لنگری $M-$ به مقطع وارد می‌کنیم.

* منحنی باربرداری خطی است. پس توزیع تنش در باربرداری خطی است.



نمودار توزیع تنش در باربرداری:

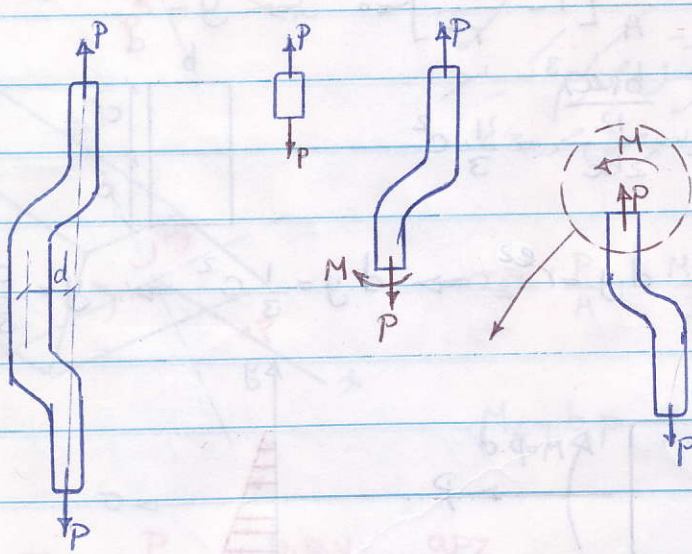
$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{y_y}{c}$$

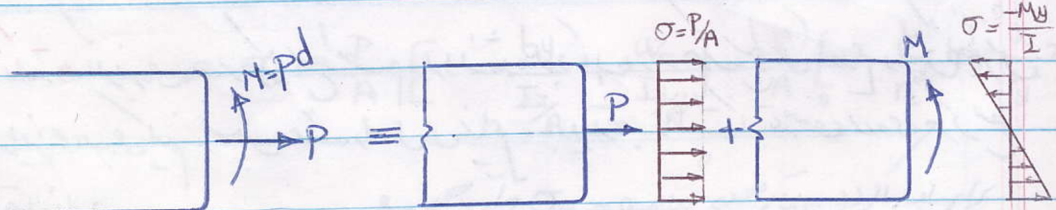


بارگذاری خارج از محور

در عمل بار هیچگاه به مرکز مقطع وارد نمی شود.

دو نوع خروج از مرکزیت داریم. ۱) خروج از مرکزیت بار ۲) خروج از مرکزیت هندسی.



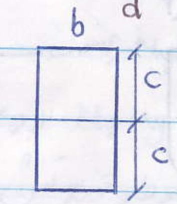


$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{I/A}\right] \qquad I/A = r^2$$

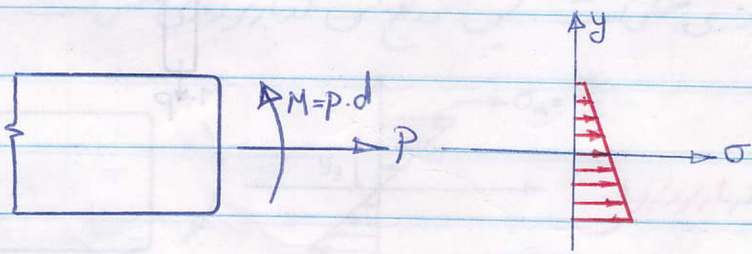
برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma=0$ باشد.

$$\sigma = 0 \rightarrow \frac{P}{A}\left[1 - \frac{d.y}{r^2}\right] = 0 \Rightarrow y = \frac{r^2}{d}$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{b(2c)^3}{12}}{2bc} = \frac{1}{3}c^2$$

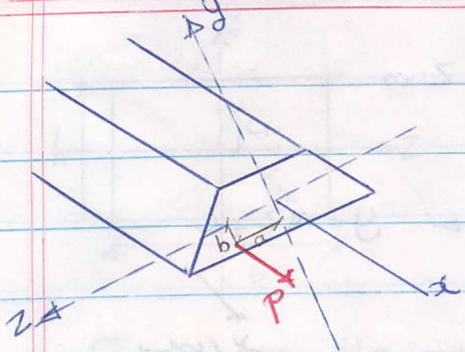


$$\sigma = 0 \Rightarrow d.y = r^2 \Rightarrow d.y = \frac{1}{3}c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{3d}$$

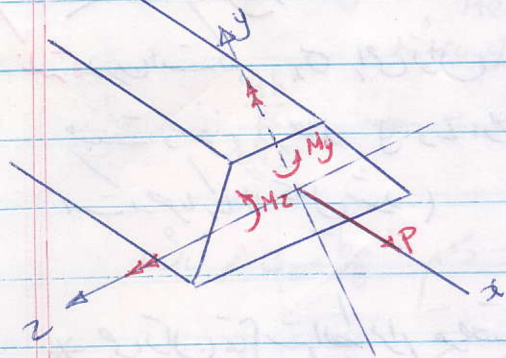


نکته 8 اگر نیروی P بر مرکز سطح جسم وارد نشده بود آن را به مرکز سطح می آوریم و لنگر نظیر آن را نیز محاسبه می کنیم. سپس مسئله را حل می نماییم. باید توجه داشت که تار خنثی بر روی مرکز سطح قرار ندارد.

بارگذاری خارج از محور :



می‌خواهیم معادله تنش را برای مقطع مقابل بنویسیم.



بار را به مرکز ثقل منتقل می‌کنیم. یک لنگر حول محور y و یک لنگر حول محور z بوجود می‌آید.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

$$M_z = b.p \qquad M_y = a.p$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{b.p.y}{I_z} + \frac{apz}{I_y}$$

$$\rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{by}{I_z/A} + \frac{az}{I_y/A}\right] = \frac{P}{A}\left[1 - \frac{b}{r_z^2}y + \frac{a}{r_y^2}z\right]$$

برای پیدا کردن تار خنثی باید $\sigma_x = 0$ قرار دهیم :

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow 1 - \frac{b}{r_z^2} y + \frac{a}{r_y^2} z = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{b}\frac{I_z}{I_y} z + \frac{r_z^2}{b} \rightarrow y = mz + c$$

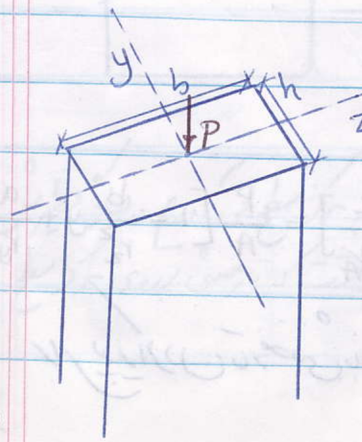
معادله خط

نکته: در حالت کلی σ_x را می‌توان به صورت زیر نوشت. در این حالت علامت‌های مثبت و منفی در خود y و z وجود دارد و باید لحاظ شود (اما بهترین راه این است که هر بار کاملاً تحلیل شود.)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

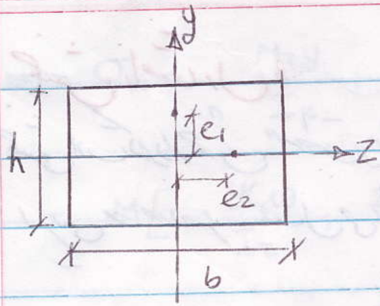
* می‌توان تمام شرایط برای موقعیت نیروی P را بررسی نمود.

مثال: میزان خروج از مرکزیت P چقدر باشد تا ستون به کشش نیفتد؟



در این حالت تار خنثی در بی‌نهایت قرار دارد چون صفحه تنش با صفحه مقطع ستون در بی‌نهایت همدیگر را قطع می‌کند. محل P را به جایی می‌بریم تا لبه تار برسد

هرگز کشش نیفتد.



$$I=\frac{bh^3}{12}\ ,\ A=bh$$

$$\sigma_x=\frac{-P}{A}-\frac{P.e_1 y}{I}$$

$$\sigma_x=0 \Rightarrow y=-\frac{I}{Ae_1}$$

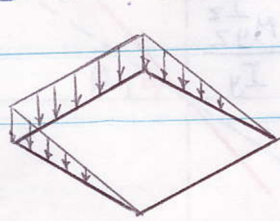
برای اینکه تار پایینی در مرز کشش باشد $y=-h/2$ باشد.

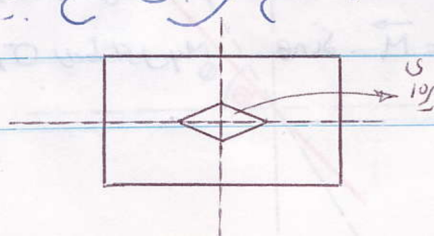
$$-h/2=-\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh\,e_1} \Rightarrow e_1=h/6$$

به همین ترتیب اگر P را روی محور z حرکت دهیم $e_2=b/6$ می باشد.

بنابراین مکان هندسی نقاطی که بار محوری فشاری در آن نقاط قرار می گیرند تا مقطع در کشش نیفتد لوزی با اقطار $b/3$ و $h/3$ است.

* این هسته در ستون های بتن مسلح بسیار مهم است که ستون به کشش نیفتد.

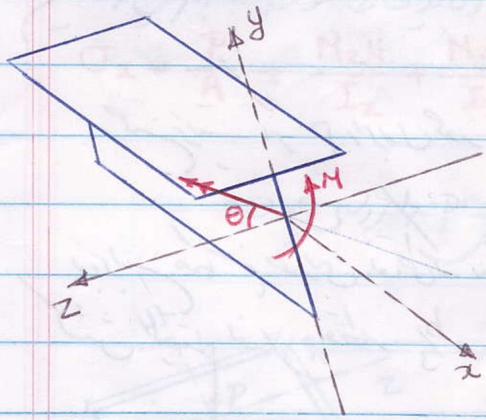


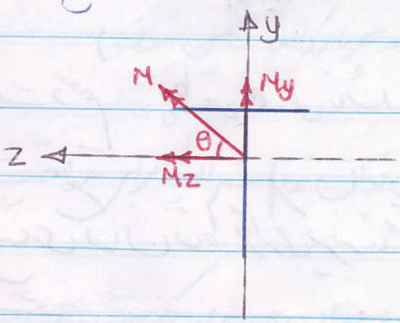


خمش نامتقارن:

خمشی است که بردار خمش منطبق بر محورهای اصلی مقطع نباشد. در این حالت تنش ها از برهم نهی حاصلضرب معادل می شود.

۱) محورهای اصلی مقطع را مشخص می کنیم. ۲) بردار خمش را در راستای این ها تجزیه می کنیم.
۳) از فرمول $\sigma = \frac{My}{I}$ برای هر مولفه خمش تنش را محاسبه می کنیم. ۴) با استفاده از روش جمع آثار قوا تنش را بدست می آوریم.





$$\begin{cases} \vec{M}_z = \vec{M} \cdot \cos\theta \\ \vec{M}_y = \vec{M} \cdot \sin\theta \end{cases}$$

به واسطه اعمال M_z: $\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$

به واسطه اعمال M_y: $\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y}$

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = -\frac{M\cos\theta\, y}{I_z} + \frac{M\sin\theta\, z}{I_y}$$

$$= M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] \qquad \sigma_x = M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right]$$

معادله تار خنثی مقطع با قرار دادن $\sigma_x = 0$ بدست می آید.

$\sigma_x = 0$

$$\Rightarrow M\left[-\frac{y\cos\theta}{I_z} + \frac{z\sin\theta}{I_y}\right] = 0 \Rightarrow y = \frac{I_z}{I_y} tg\theta . z$$

معادله تار خنثی

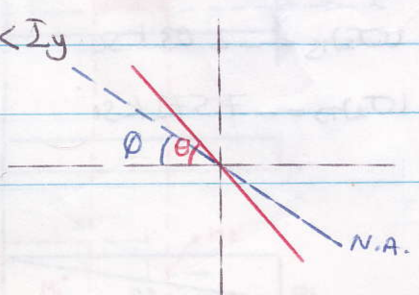
$y = mz \quad \Leftarrow \quad \frac{I_z}{I_y} tg\theta = m$ اگر

در اینصورت $m = tg\varphi$ قرار داده است. (φ زاویه بین محور خنثی و محور Z می باشد)

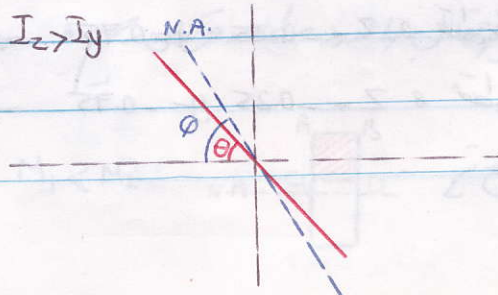
$$\rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y} tg\theta\right) \qquad \varphi = tg^{-1}\left(\frac{I_z}{I_y} tg\theta\right)$$

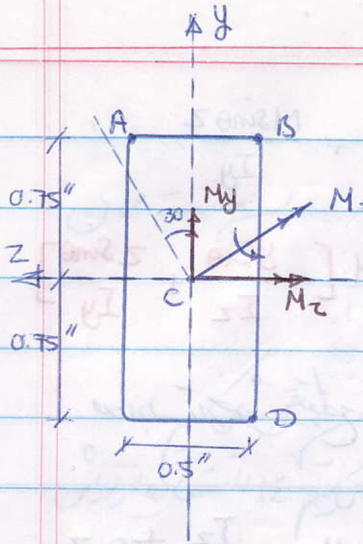
اگر $I_z = I_y$ باشد، امتداد محور خنثی در امتداد بردار لنگر است.

$I_z < I_y$



$I_z > I_y$





مثال : مطلوبست مقدار تنش در نقاط A ، B و D که گشتاور وارده مطابق شکل.

$$M_z = M\cos 30 = 600 \times \cos 30 = 520 \ lb.in$$

$$M_y = M\sin 30 = 600 \times \sin 30 = 300 \ lb.in$$

$$I_z = \frac{0.5 \times 1.5^3}{12} = 0.1406 \ in^4$$

$$I_y = \frac{1.5 \times 0.5^3}{12} = 0.01563 \ in^4$$

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{520 y}{0.1406} + \frac{300 z}{0.01563}$$

A نقطه : $Z = 0.25 \quad y = 0.75 \quad \Rightarrow (\sigma_x)_A = 7573 psi = 7.573 ks$

$psi = lb/in^2$

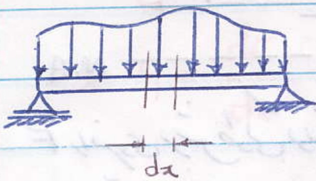
B نقطه : $Z = -0.25 \quad y = 0.75 \quad \Rightarrow (\sigma_x)_B = -2.03 \ ksi$

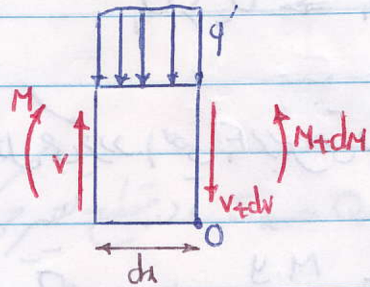
D نقطه : $Z = -0.25 \quad y = -0.75 \quad \Rightarrow (\sigma_x)_D = -7.573 \ ksi$

حمید کاظم

فصل پنجم

بارگذاری جانبی (برش)





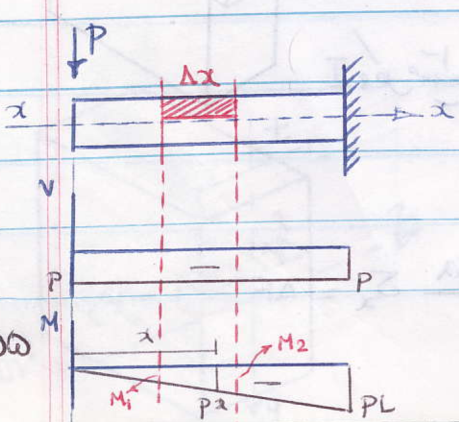
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -M - V\,dx + q'dx\left(\frac{dx}{2}\right) + (M+dM) = 0$$

$$\Rightarrow -V\,dx + \frac{q'}{2}dx^2 + dM = 0$$

$$\Rightarrow -V\,dx = dM \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

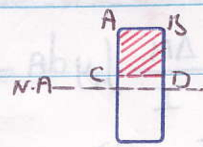
$$M = \int V\,dx \longrightarrow M_2 - M_1 = \int_{(1)}^{(2)} V\,dx$$

برش وقتی وجود دارد که ممان خمشی متغیر باشد.



تیر مقابل را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

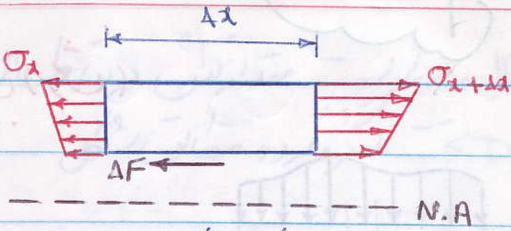
$M_1 < M_2$



مقطع تیر

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

$$M_2 > M_1 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$$

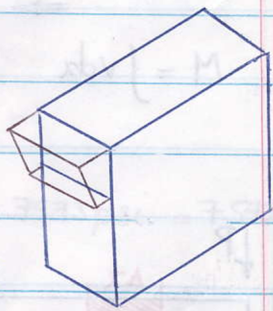


F را نیروی برش طولی گویند که باعث تعادل می گردد. (یعنی q برش افقی در واحد طول است)

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} \qquad \sigma_{x+\Delta x} = \frac{(M+\Delta M)\cdot y}{I}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_{ABCD} \sigma_x \, dA + \Delta F - \int_{ABCD} \sigma_{x+\Delta x} \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{ABCD} (\sigma_x - \sigma_{x+\Delta x}) \, dA + \Delta F = 0$$



$$\Rightarrow \int_{ABCD} \frac{(M-M-\Delta M)y}{I} \, dA = -\Delta F$$

I ؛ کل مقطع

$$\Rightarrow \frac{-\Delta M}{I} \int y \, dA = -\Delta F$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{I} \int y \, dA = \Delta F \Rightarrow \frac{V \Delta x}{I} S_x = \Delta F$$

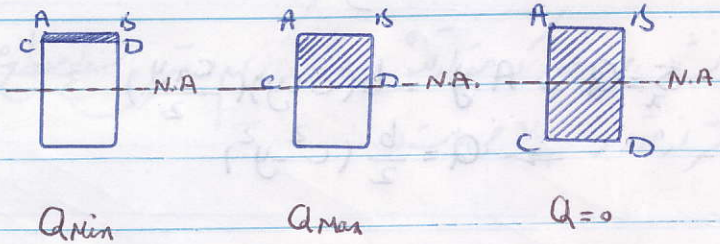
$$(S_x = Q)$$

* Q لنگر استاتیک سطح واقع در بالا یا پایین تراز مورد نظر برای محاسبه Q است که در حول محور خنثای کل مقطع حساب می‌شود.

$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{V S_x}{I} \Rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{V S_x}{I}$$

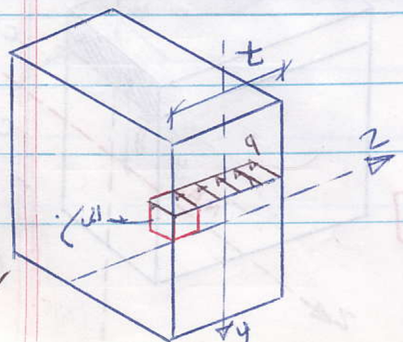
$$\rightarrow q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$$

$S_x = Q = \int y\,dA$ ، در مقطع تغییر می‌کند.

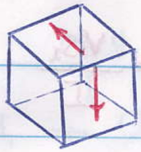


در فرمول $\frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$ ، V نیروی برشی مقطع ثابت است و I نیز ثابت می‌باشد.

F و q نیز نیروی برشی در طول می‌باشد.



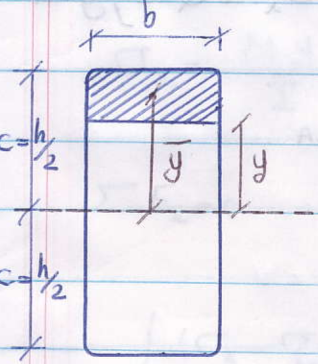
$$\tau = \frac{dF}{dx \cdot t} \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$



بنابراین تنش برشی مقطع با تنش برشی طول برابر است.

$$\tau_{\text{تنش برشی مقطع}} = \tau_{\text{تنش برشی طول}} = \frac{VQ}{It}$$

مقطع مستطیلی زیر را در نظر می‌گیریم :



$$S_x = Q = A.\bar{y} = b(c-y)\left(\frac{c+y}{2}\right)$$

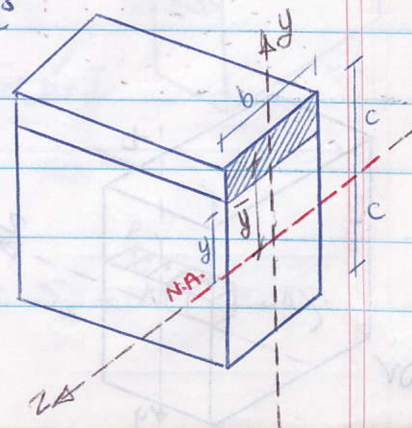
$$\Rightarrow Q = \frac{b}{2}(c^2-y^2)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{bc^2}{2}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3}bc^3$$

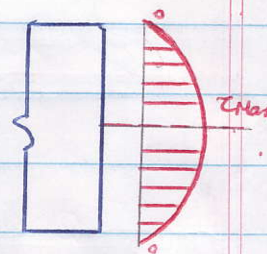
$$\Rightarrow \tau = \frac{V\,\frac{bc^2}{2}}{\frac{2}{3}bc^3\,b}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3V}{4cb}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$



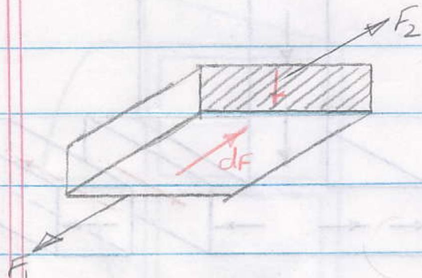
$0 \leqslant y \leqslant c$

$y = 0 \longrightarrow \tau_{Max} = \dfrac{3V}{4bc} = \dfrac{3V}{2A}$

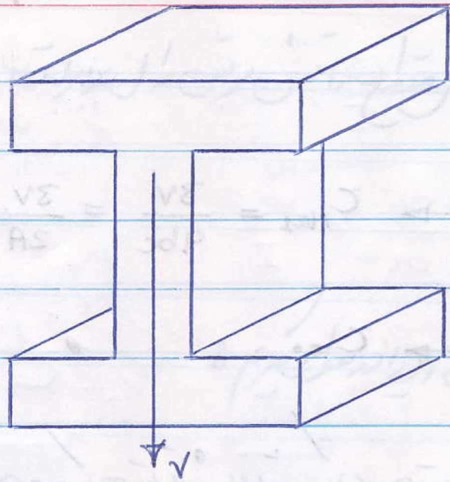


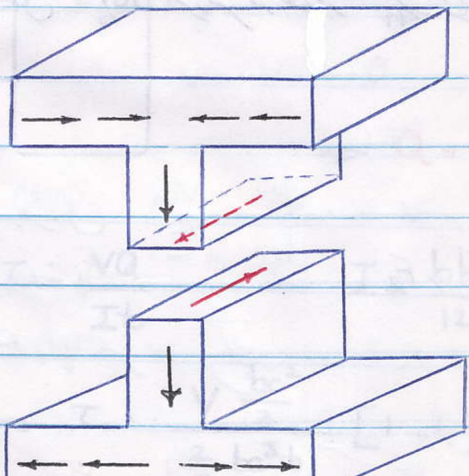
$y = c \longrightarrow \tau = 0$

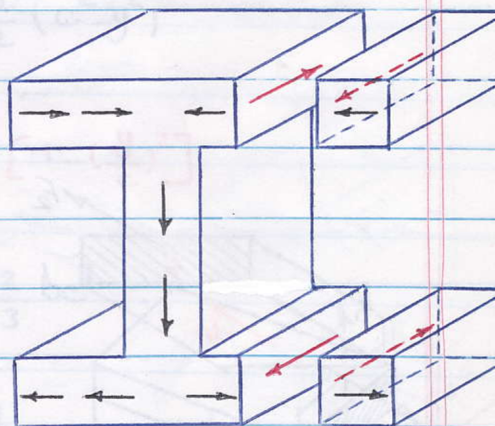
رابطه بدست آمده نشان می دهد که مقدار تنش برشی ماکزیمم در تیر با سطح مقطع مستطیل شکل 50% بزرگتر از مقدار V/A می باشد.



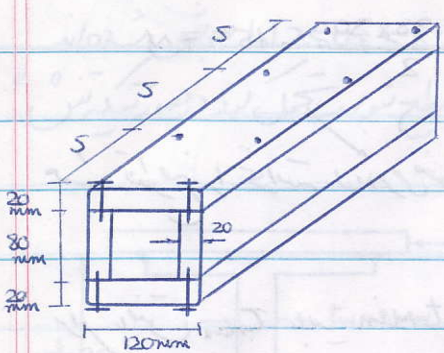
$F_1 > F_2$


V



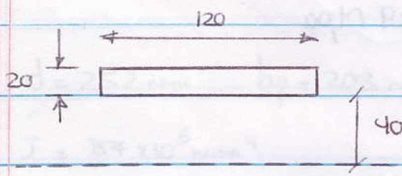


مثال: مقطع تیری مطابق شکل بصورت قوطی مربعی از دو قطعه چوب به ابعاد $20 \times 80\ mm^2$ بصورت قائم و دو قطعه دیگر به ابعاد $20 \times 120\ mm^2$ بصورت افقی به یکدیگر میخ شده‌اند تشکیل شده است



اگر بدانیم که فاصله میخ‌ها از همدیگر $s = 30\ mm$ باشد و نیروی برش مقطع بصورت قائم و برابر $1200\ N$ درنظر گرفته شود، محاسبه کنید نیروی برشی ایجاد شده در هر میخ و حداکثر تنش برشی در تیر مورد نظر.

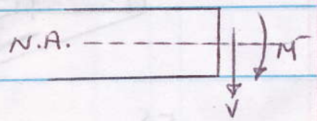
$S = 30\ mm \qquad V = 1200\ N$

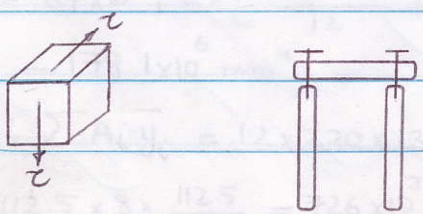


$$Q = A \cdot \bar{y} = 20 \times 120 \times 50 = 120000\ mm^3$$

$$I = \frac{120^4 - 80^4}{12} = 13.87 \times 10^6\ mm^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{1200 \times 120000}{13.87 \times 10^6} = 10.38\ N/mm$$

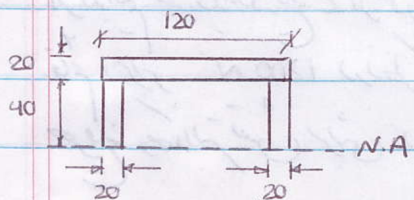




نیروی برشی وارد بر هر میخ $= \dfrac{q.s}{2} = \dfrac{10.38 \times 30}{2} = 155.7N$

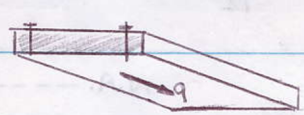
مسئله قطر میخ را نخواسته اما اگر می‌خواست باید τ_{all} را می‌داد.

برای یافتن τ_{Max} باید t_{Min} و Q_{Max} را پیدا کنیم. این دو مقدار در محل تار خنثی تأمین می‌شوند.

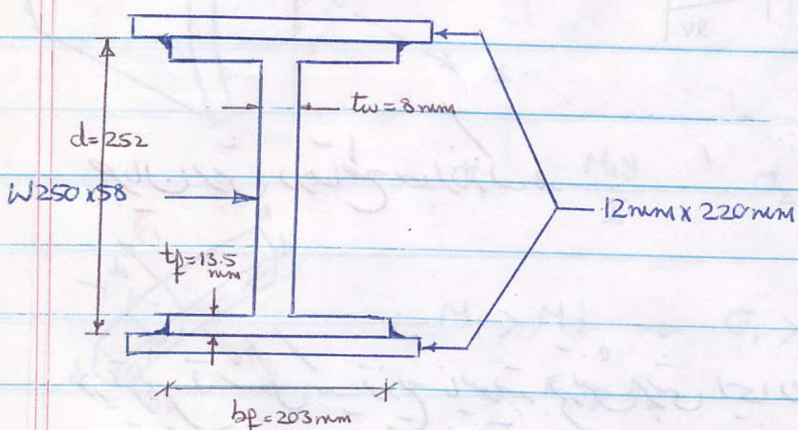


$$Q_{Max} = 120000 + 2 \times 40 \times 20 \times 20 = 152000 \ mm^3$$

$$\Rightarrow \tau_{Max} = \frac{1200 \times 152000}{13.87 \times 10^6 \times 40} = 0.329 \ Mpa$$



مثال ۶: دو صفحه مستطیلی به دو بال تیر بال پهن W250x58 جوش شده‌اند
مطلوبست حداکثر نیروی برشی که این مقطع بتواند تحمل کند در صورتیکه تنش
برشی Max تیر از مقدار 90 Mpa فراتر نرود.



$d = 252\,mm \quad b_f = 203\,mm \quad t_f = 13.5\,mm \quad t_w = 8\,mm$

$I = 87\times10^{6}\,mm^{4}$

$$\tau_{Max} = \frac{V_{Max}\,Q_{Max}}{I.t}$$

$$I_{مقطع} = 87\times10^{6} + 2\times\left[\frac{220\times12^{3}}{12} + 12\times220\times\left(\frac{252}{2}+6\right)^{2}\right]$$
$$= 179.1\times10^{6}\,mm^{4}$$

$$Q_{Max} = \sum A_i\bar{y}_i = 12\times220\times132 + 203\times13.5\times\left(126-\frac{13.5}{2}\right)$$
$$+\,112.5\times8\times\frac{112.5}{2} = 726\times10^{3}\,mm^{3}$$

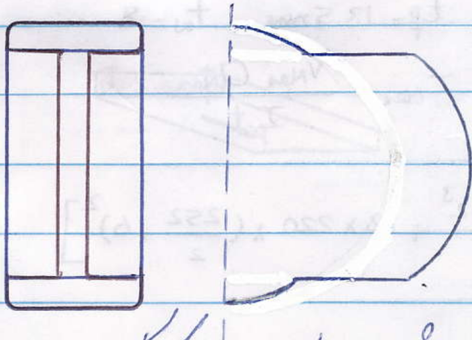
$$\tau_{Max} = \frac{V_{Max}\, Q_{Max}}{I \cdot t} \Rightarrow 90 = \frac{V \cdot (726 \times 10^{3})}{179.1 \times 10^{6} \times 8}$$

$$\Rightarrow V_{Max} = 177.6 \times 10^{3}\ N$$

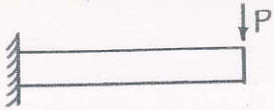
جریان برش در مقاطع جدار نازک :

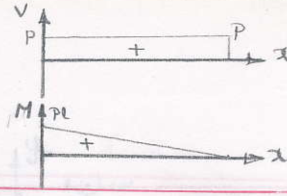
$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I t}$$

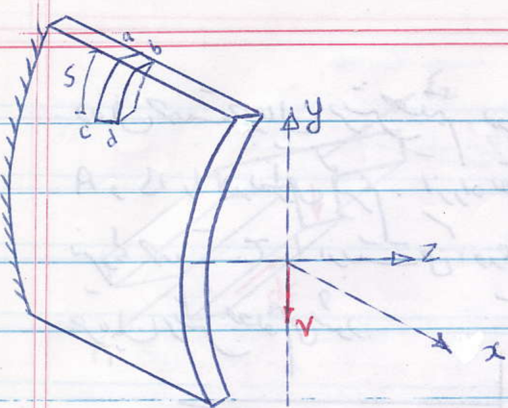
در تیرهای I شکل یک توزیع ناپیوسته در تنش برشی ایجاد می‌شود. این دستگاه را برای تنش برشی بر اساس سطح مقطع تیر گویند.

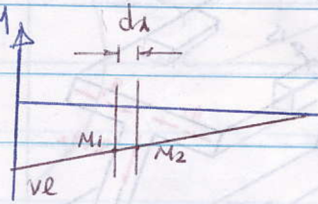


دستگاه دیگری نیز وجود دارد که جریان برش در مقطع جدار نازک گویند.

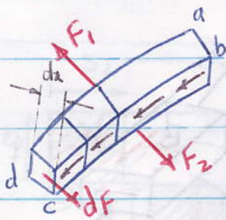








$$\sigma_1 = +\frac{M_1 y}{I} \qquad \sigma_2 = +\frac{M_2 y}{I}$$

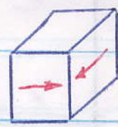


$$M_1 > M_2 \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$$

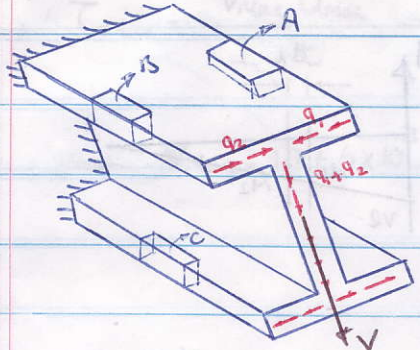
$$\Rightarrow F_1 > F_2$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 + dF = F_1$$

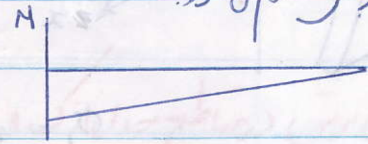
از طرفی $dF = t.dx.\tau = q\,dx$

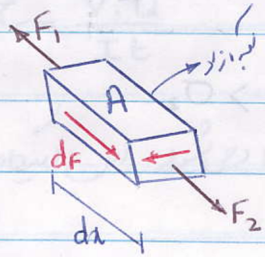


حال این بحث را برای مقطع I شکل ادامه می‌دهیم.



دنبال جهت جریان برش هستیم. دو مقطع A و B را در نظر می‌گیریم. از راه تعادل نیروها جهت τ را بدست می‌آوریم و جریان برش معلوم می‌شود.

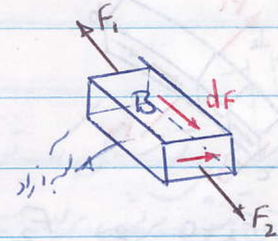


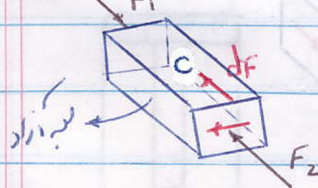


$$dF + F_2 = F_1$$

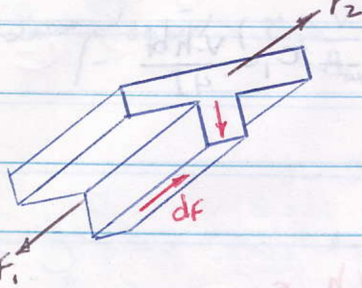
$$F_1 > F_2$$

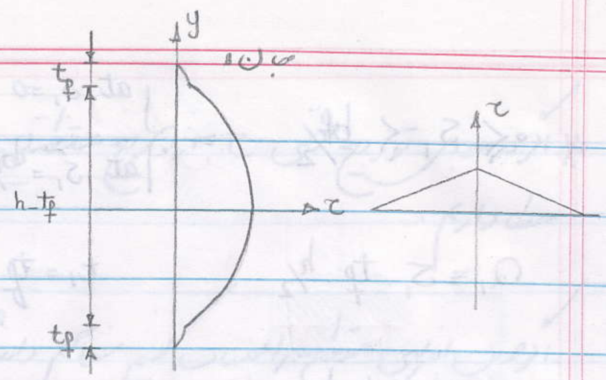
$$dF = q \cdot dx$$



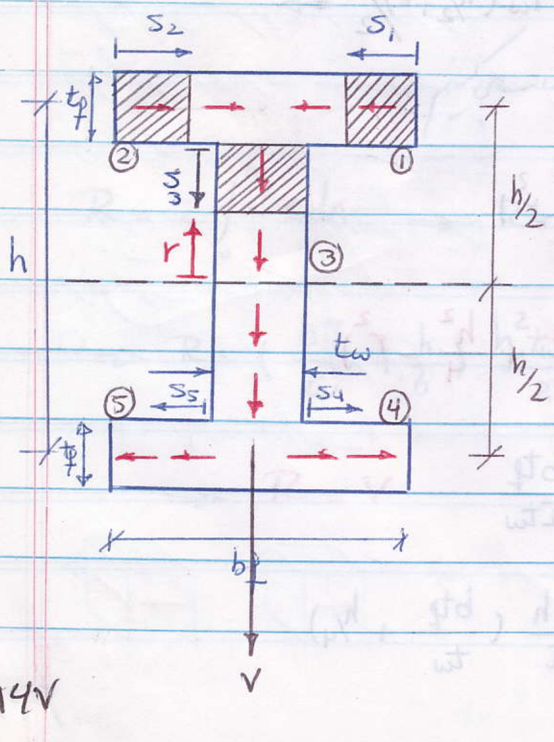


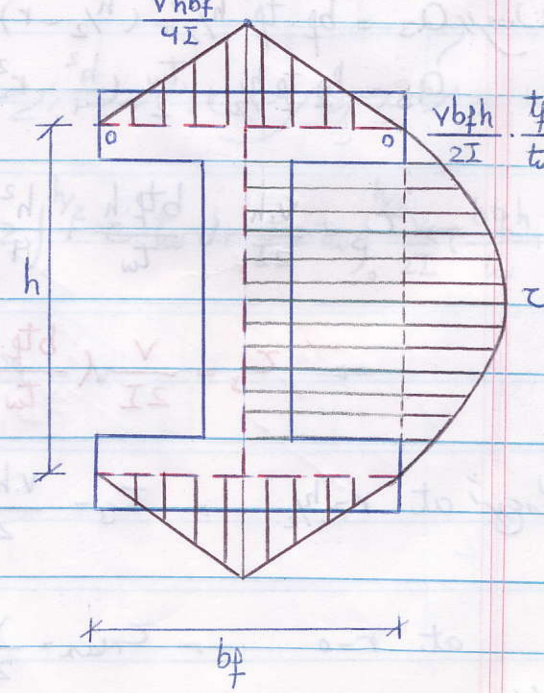
$$F_1 > F_2$$





توزیع تنش برشی در تیرهای مقطع باز I شکل





$$0 \leq S_1 \leq bf/2 \longrightarrow \begin{cases} at\ S_1 = 0 \longrightarrow \tau_1 = 0 \\ at\ S_1 = bf/2 \longrightarrow \tau_1 = \dfrac{V \cdot h\, bf}{4I} \end{cases}$$

$$Q_1 = S_1 \cdot t_f \cdot h/2 \qquad t_1 = t_f$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{V \cdot t_f \cdot h/2}{I\, t_f} \cdot S_1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{V \cdot h}{2I} S_1$$

در جان $Q_3 = b_f \cdot t_f \cdot h/2 + (h/2 - r) \cdot t_w (h/2 + r)/2 \Rightarrow$

$$Q_3 = b_f\, t_f\, h/2 + \frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f \cdot h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau_3 = \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f \cdot h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

شروع جان at $r = h/2 \longrightarrow \tau_3 = \dfrac{V \cdot h\, b t_f}{2 I t_w}$

at $r = 0 \longrightarrow \tau_{Max} = \dfrac{V \cdot h}{2I}\left(\dfrac{b t_f}{t_w} + h/4\right)$

* اگر به جای توزیع منحنی τ از توزیع مستطیلی ($\tau = \frac{V}{A_{web}}$) استفاده کنیم حدود 12% خطا داریم.

از همان انرژی مقطع را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$I = \frac{t_w h^3}{12} + 2 b t_f \frac{h^2}{4} = \frac{t_w h^3}{12} + b t_f \frac{h^2}{2}$$

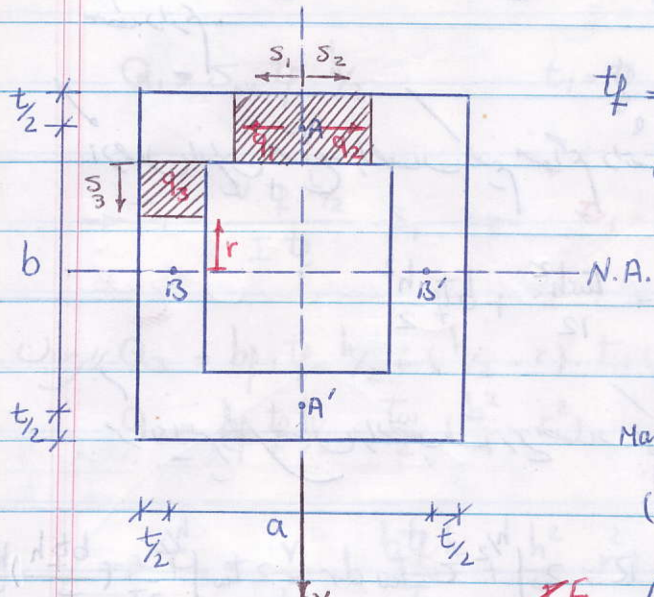
برآیند نیروهای برشی را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$R = 2\int_0^{h/2} \tau \, dA \Rightarrow R = 2\int_0^{h/2} \tau \, t_w \, dr = 2 t_w \int_0^{h/2} \frac{V}{2I}\left(\frac{b t_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{b t_f}{t_w} + \frac{h}{6}\right) \frac{h^2 t_w \cdot V}{2I} = V$$

$$\Rightarrow R = V$$

توزیع تنش برشی در پروفیل بسته قوطی شکل :

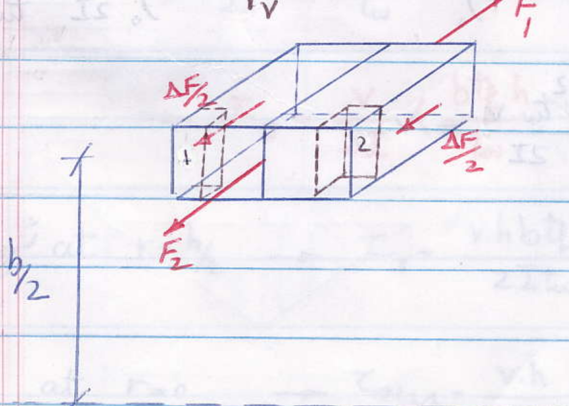


$$t_f = t_w = t$$

* در مقاطع بسته محور اصلی عمود بر محور خنثی مقدار تنش برشی صفر است. مثلاً در مقطع نقاط A و A' دارای تنش برشی صفر و B و B' دارای تنش برشی ماکزیمم است. (علت Max بودن τ، Max بودن Q است.)

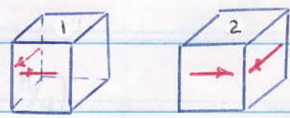
المانی بصورت بالا در نظر می‌گیریم

برای قسمت افقی داریم :



$$F_1 > F_2$$

$$\rightarrow F_2 + \Delta F = F_1$$



$$q = \frac{VQ}{I} \longrightarrow \begin{cases} Q_1 = S_1 t \, b/2 \\ Q_2 = S_2 t \, b/2 \end{cases}$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t} = \frac{V(S_1 t b)}{I\,2t} \Longrightarrow \tau_1 = \frac{Vb}{2I} S_1$$

$$\tau_2 = \frac{q_2}{t} = \frac{V(S_2 t b)}{I\,2t} \qquad \tau_2 = \frac{Vb}{2I} S_2$$

$$\begin{cases} S_1 = 0 \longrightarrow \tau_1 = 0 \\ S_1 = a/2 \longrightarrow \tau_1 = \dfrac{Vab}{4I} \end{cases}$$

برای قسمت قائم داریم:

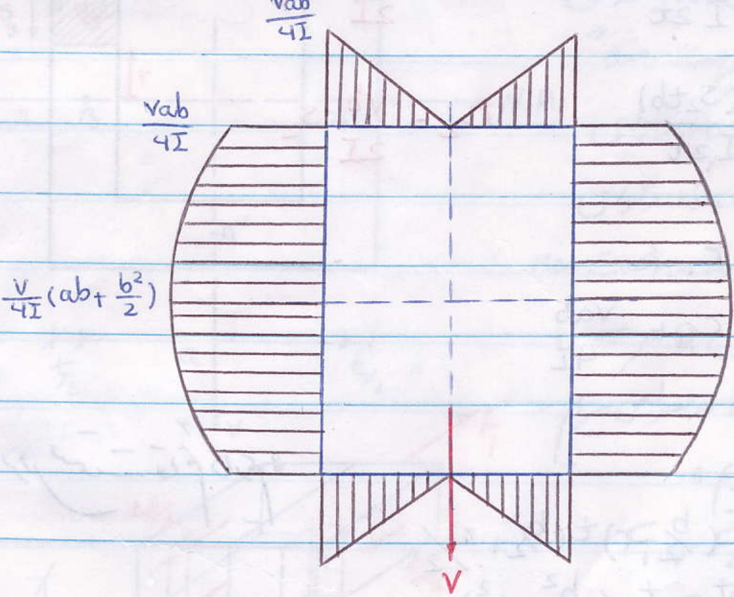
$$Q_3 = t \, \tfrac{a}{2} \, \tfrac{b}{2} + \left(\tfrac{b}{2} - r\right) t \left(\tfrac{b}{2} + r\right)/2$$

$$\longrightarrow Q_3 = \frac{abt}{4} + \frac{t}{2}\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)$$

$$\tau_3 = \frac{V}{It}\left[\left(\frac{abt}{4} + \frac{t}{2}\left(\frac{b^2}{4} - r^2\right)\right)\right]$$

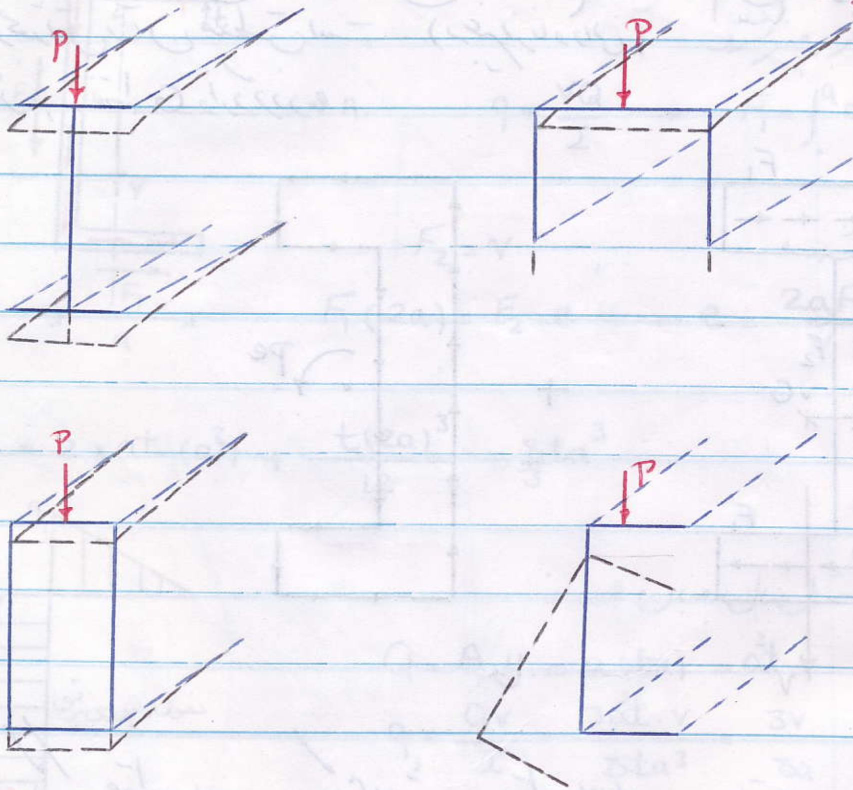
$r = 0 \qquad \tau_{max} = \frac{V}{4I}\left(ab + \frac{b^2}{2}\right)$

$r = b/2 \qquad \tau_{min} = \frac{Vab}{4I}$



معمولاً سطوحی که موازی راستای برش مقطع هستند منحنی تنش برشی شان درجه ۲ و سطوح عمود بر نیروی برشی مقطع درجه ۱ هستند.

مرکز برش

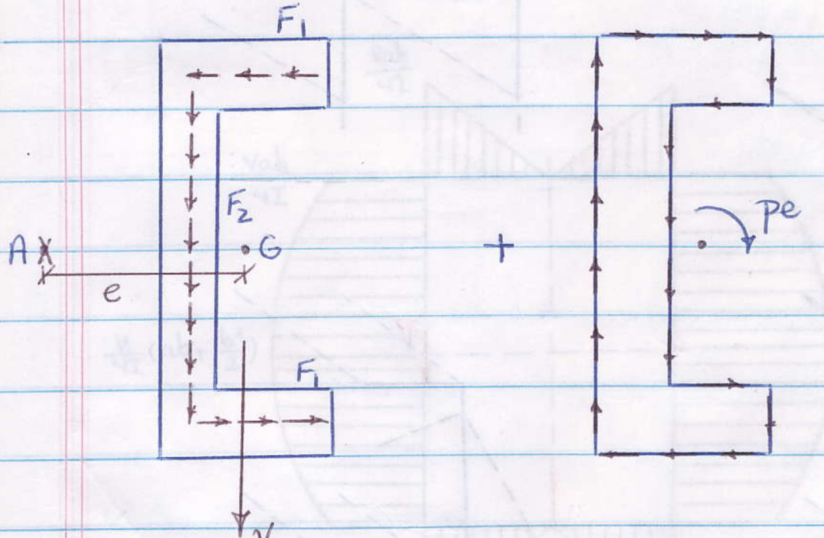


پروفیل های شکل (1) ، (2) ، (3) وقتی بار در راستای محور تقارن اعمال
شود نمی چرخند و تغییر در راستای قائم می دهند.

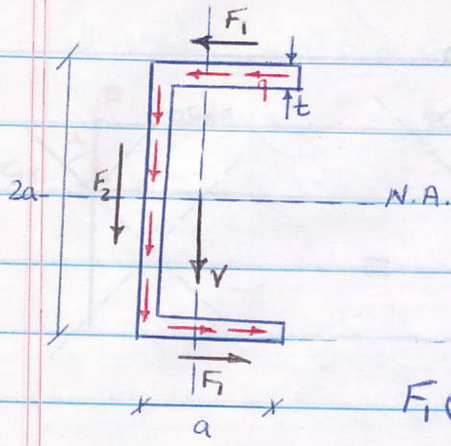
ولی در پروفیل ناودونی (۴) که بار در امتداد محور تقارن وارد نشده می چرخد

اگر در مقطعی یک سطح مقطعی دارای دو محور تقارن باشند بنابراین محور چرخش آن‌ها بر محور تقارن شان منطبق است. (در غیر از ناودانی)

اگر P در نقطه G وارد گردد:



نکته: اگر یک مقطع داده شده و دیاگرام برش آن مقطع را خواستند، در ابتدا جریان برش را تعیین می‌کنیم و سپس به کمک فرض‌های کلی به دنبال محاسبه کردن Q و τ می‌رویم.



* دنبال نقطه ای هستیم که کوپل های F_1 و F_2 برابر صفر شود.

$$q = \frac{VQ}{I} \rightarrow F_1 = \int_0^a q\,ds$$

ثابت شده :

$$F_2 = V$$

$$F_1(2a) = F_2 \cdot e \rightarrow e = \frac{2aF_1}{V} \quad (1)$$

$$I = 2 \times at\,(a^2) + \frac{t(2a)^3}{12} = \frac{8}{3}ta^3$$

در محل اتصال بال به جان :

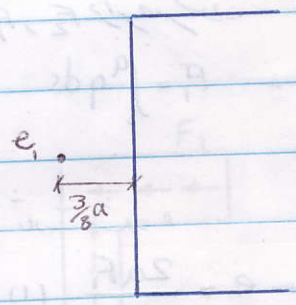
$$Q = A.y = a(ta) = a^2t$$

$$q_1 = \frac{QV}{I} = \frac{3a^2t \cdot V}{8ta^3} = \frac{3V}{8a}$$

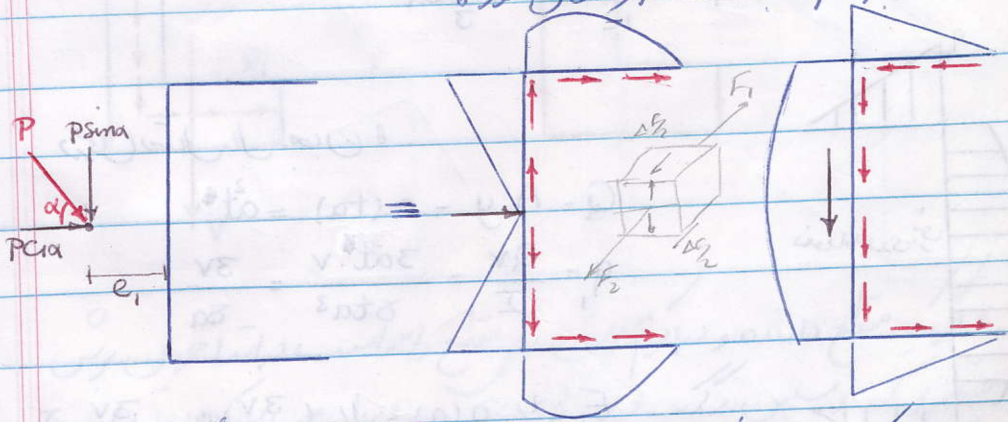
$$F_1 = \frac{1}{2} q(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{3V}{8a}\right)a = \frac{3V}{16}$$

حال از فرمول (1) داریم :

$$e = \frac{2aF_1}{V} = \frac{2a\left(\frac{3}{16}\right)V}{V} = \frac{3}{8}a$$

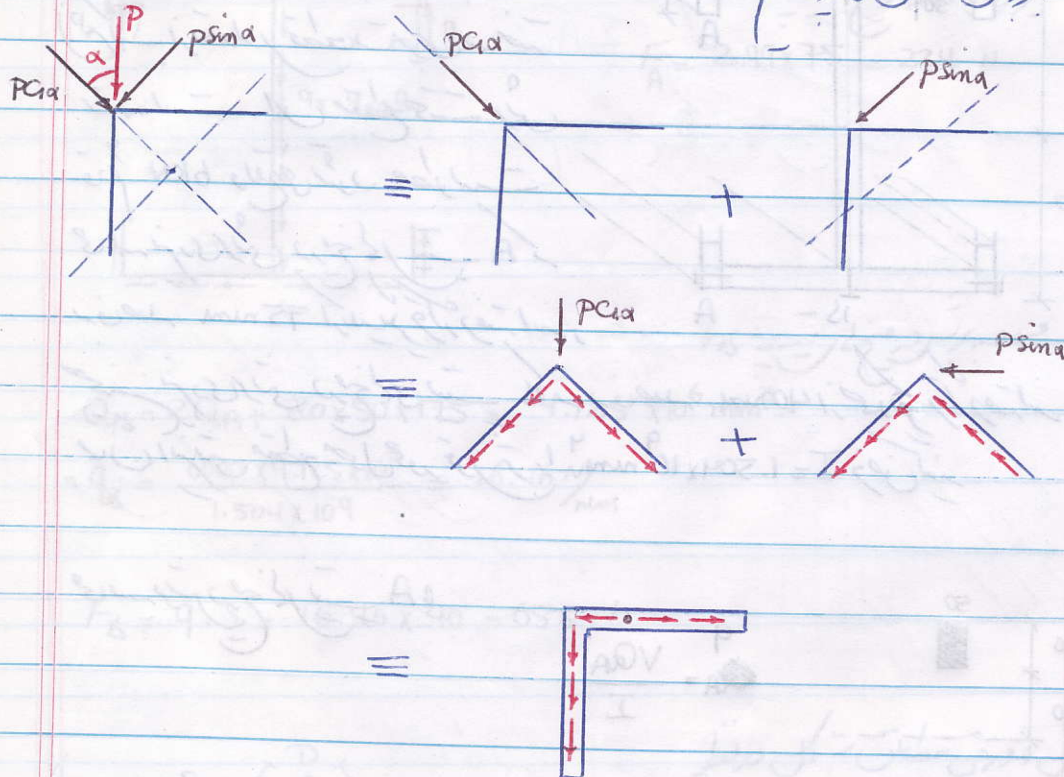


مثال اگر بار P به صورت زیر اعمال شود

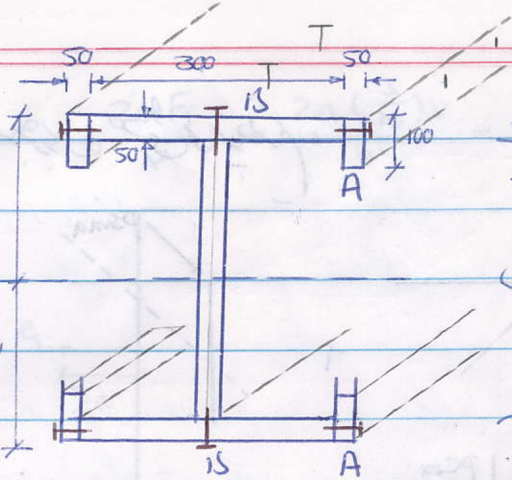


باید برای ترکیب دو شکل با توجه به جریان برش نمودارها را جمع جبری کنیم.

به بررسی نبشی می پردازیم.

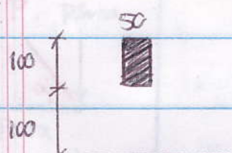


نکته: اگر بار برش با امتدادها مورب شده باشد بار را به امتدادها تجزیه می کنیم و برای هر شکل توزیع تنش برشی را اعمال می کنیم و شکل ها را با هم جمع جبری می کنیم



مثال ۸) مقطعی مطابق شکل به صورت مرکب از تعدادی قطعات چوبی میخ شده است. این مقطع تحت برش قائم 6kN واقع می‌شود. مطلوبست محاسبه نیروی برشی در میخ های بیت A که به فاصله 75 mm از یکدیگر قرار گرفته اند و همچنین نیروی برشی در میخ های بیت که در فاصله 140mm از همدیگر قرار گرفته اند. ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی را $I = 1.504\times10^9\ mm^4$ فرض کنید.

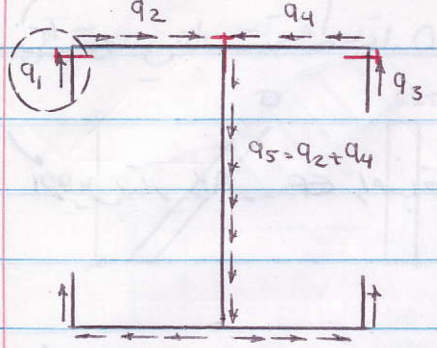
محاسبه برش در میخ های بیت A



$$q_A = \frac{VQ_A}{I}$$

$$Q_A = A\bar{y} = 50\times100\times150 = 750000\ mm^3$$

$$\to q_A = \frac{6\times10^3\times750000}{1.504\times10^9} = 2.99\ kN/m = 2.99\ N/mm$$



نیروی وارد بر هر پیچ تیپ A

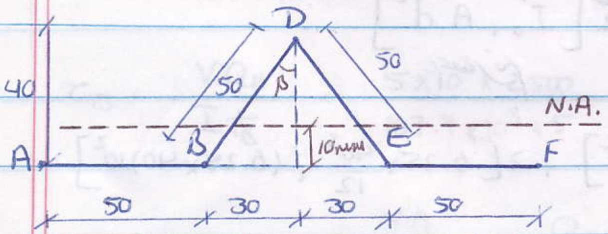
$$F_A = 2.99 \times 75 = 224\ N$$

نیروی برشی در پیچ های تیپ B

$$Q_B = 2Q_A + 300 \times 50 \times 175 = 4.125 \times 10^6\ mm^3$$

$$q_B = \frac{6000 \times 4.125 \times 10^6}{1.504 \times 10^9} = 16.46\ N/mm$$

$$F_B = q \cdot S = 16.46 \times 40 = 658\ N$$



مثال ٥) ورقی مطابق شکل در نظر گرفته می شود. ضخامت ورق مقدار ثابت 5mm است. در صورتیکه برش وارد در مقطع برابر $V = 5kN$ باشد مطلوبست الف) حداکثر تنش برشی در مقطع ب) تنش برشی در

مسئله 15-1 .

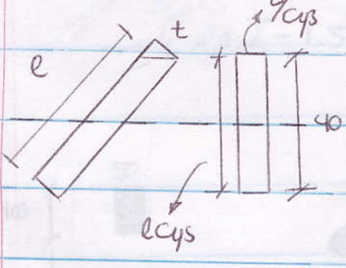
$$S_x = \sum A_i y_i \qquad \bar{y} = \frac{S_x}{\sum A_i}$$

اگر میان تار AB و EF را مبنا قرار دهیم می توان اشکال نوک تیز را صفر شود

فاصله مرکز ثقل از مبنا

$$S_x = (50 \times t \times 20)\,2$$

$$\longrightarrow \bar{y} = \frac{50 \times t \times 20 \times 2}{4 \times 50\, t} = 10 \text{ mm}$$ فاصله مرکز سطح تا میان تار مبنا



برای محاسبه کردن ممان اینرسی :

$$\cos\beta = 4/5$$

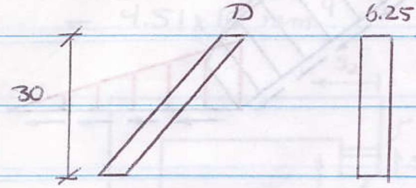
$$t' = \frac{t}{\cos\beta} = \frac{5}{4/5} = \frac{25}{4} = 6.25 \text{ mm}$$

$$I = 2\underbrace{\left[I_o + A.d^2\right]}_{\text{اعضای افقی}} + 2\underbrace{\left[I'_o + A'.d^2\right]}_{\text{اعضای مایل}}$$

$$= 2\left[50 \times \frac{5^3}{12} + 50 \times 5 \times 10^2\right] + 2\left[6.25 \times \frac{40^3}{12} + (6.25 \times 40)10^2\right]$$

$$= 167.7 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

بیشترین تنش برشی در محل تار خنثی است. Q را توسط قسمت بالایی بدست می آوریم.



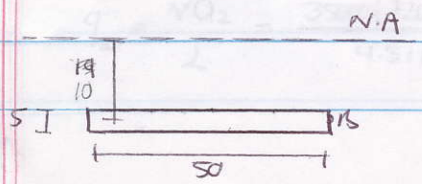
$$Q = A\bar{y} = 30 \times 6.25 \times 15$$
$$= 5625$$

از قسمت پایینی هم می توان استفاده کرد.

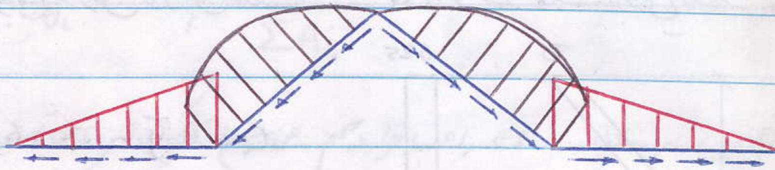
$$Q = 50 \times 5 \times 10 + 10 \times 6.25 \times 5 = 5625$$

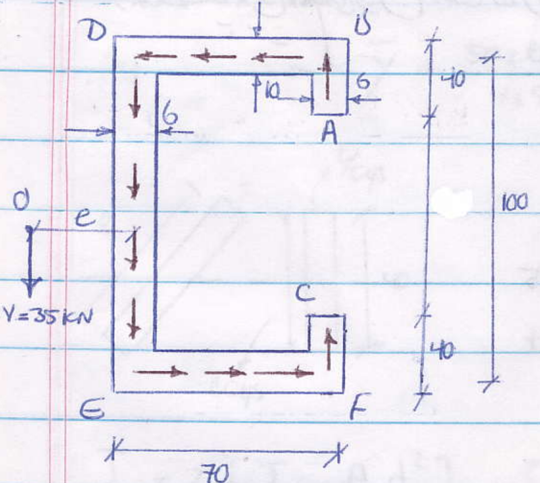
$$\tau_{Max} = \frac{5000 \times 5625}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 16.77\ Mpa$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{I t_B} = \frac{5 \times 10^3 \times 2500}{167.7 \times 10^3 \times 5} = 14.91\ Mpa$$



$$Q_B = 50 \times 5 \times 10 = 2500$$

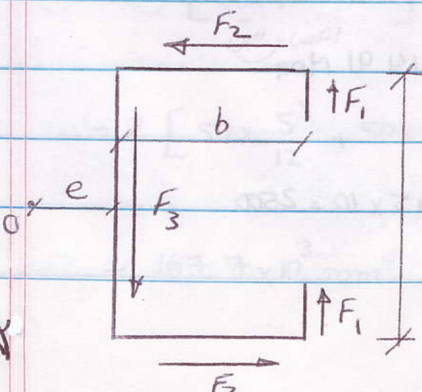




ل O مرکز برش را تعیین کنید. توزیع تنش های
ایجاد شده (برشی) توسط نیروی قائم برشی
35KN که در مرکز برش O مطابق شکل
وارد می شود.

$$F_2 \cdot h + 2F_1(b+e) - F_3 e = 0$$

$$e = \frac{F_2 \cdot h + 2F_1 b}{F_3 - 2F_1} \qquad F_3 - 2F_1 = V$$

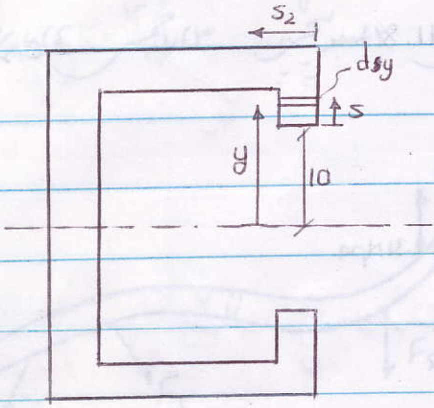


$$\Rightarrow e = \frac{F_2 h + 2F_1 b}{V}$$

$$I = 2\left[\frac{6(100)^3}{12}\right] - \left(\tfrac{1}{12}\, 6\times(20)^3\right) + 2\left[\tfrac{1}{12}\, 70(10)^3 + (70\times 10)\, 50^2\right]$$

$$= 4.51\times 10^6 \ mm^4$$

محاسبه τ_1 , F_1 :



$$Q_1 = (y-10)\times 6\times \tfrac{1}{2}(y+10)$$

$$= 3(y^2-100) \qquad 10 < y < 50$$

$$F_1 = \int_{10}^{5} q\, ds$$

$$F_1 = \frac{35000}{4.51\times 10^6}\int_{10}^{50} 3(y^2-100)\, d\overset{y}{\cancel{s}} = 869\ N$$

$$\tau_1 = \frac{q_1}{t_1} = \frac{VQ_1}{It_1} = \frac{35000\times 3(y^2-100)}{6\times 4.51\times 10^6}$$

$\left\{\begin{array}{l} \text{at } y = 50mm \rightarrow \tau_1 = 9.31\ Mpa \\ \text{at } y = 10mm \rightarrow \tau_1 = 0\ Mpa \end{array}\right.$

محاسبه F_2 , τ_2 : در شکل اتصال نیاز به بال فوقانی ← $Q_{1Max} = 7200$

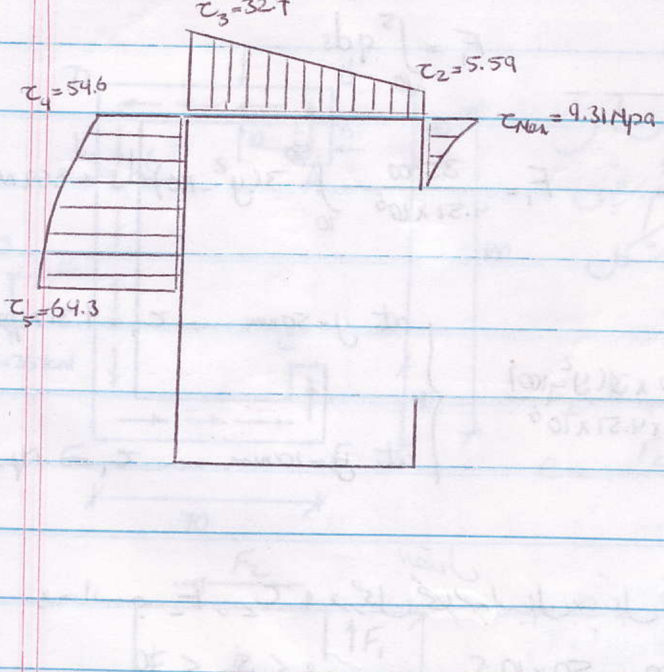
$$Q_2 = Q_{1Max} + A\bar{y} = 7200 + 50\times 10\, S_2 \qquad 0 < S_2 < 70$$

$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{35000(7200+500\, S_2)}{4.51\times 10^6}$$

$$F_2 = \int_0^{70} q_2 \, ds_2 = 13.4 \text{ kN}$$

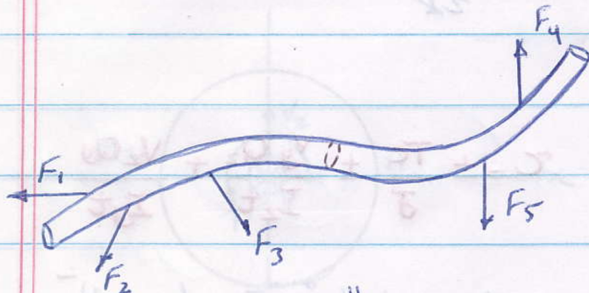
$$e = \frac{13400\,(100) + 2\,(869)\,70}{35000} = 41.8 \text{ mm}$$

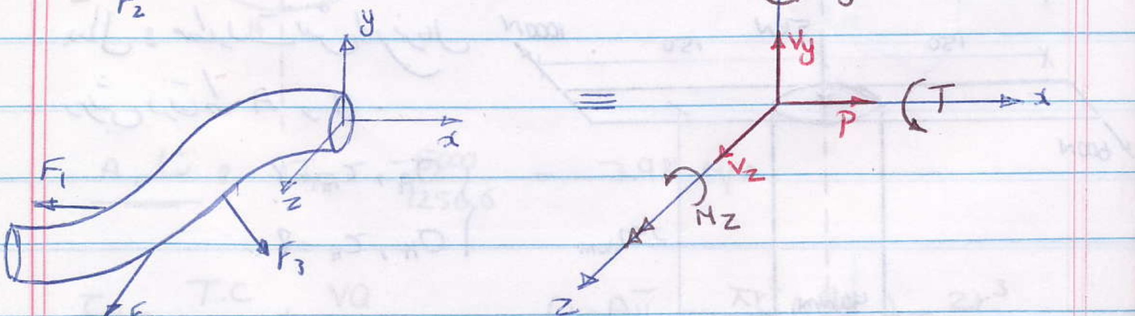
می‌باشد e



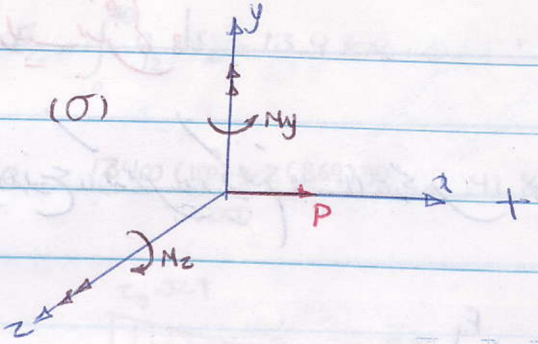
ترکیب تنش‌ها:

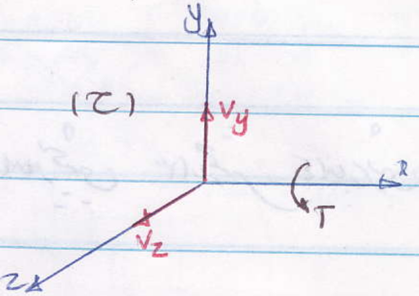
چهار نوع بارگذاری یاد گرفتیم: ۱) بار محوری ۲) بار پیچشی ۳) بار خمشی ۴) بار برشی



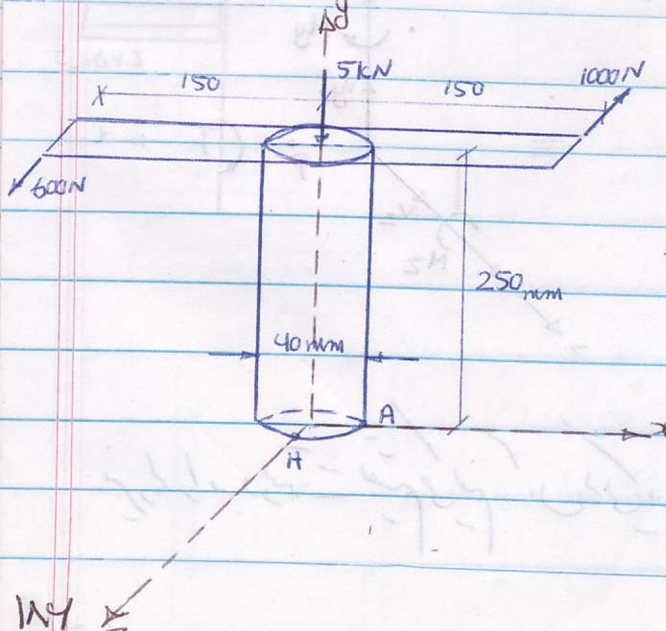


نیروها را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. آنهایی که σ می‌سازند و آنهایی که τ می‌سازد.





$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_y . z}{I_y} \pm \frac{M_z . y}{I_z} \qquad \tau = \pm \frac{Tc}{J} \pm \frac{V_y Q_z}{I_z t} \pm \frac{V_z Q_y}{I_y t}$$

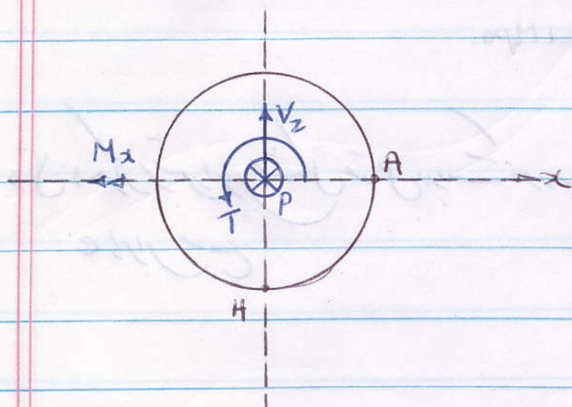


مثال : مطلوبست تنش های نرمال و برشی در نقاط A و H .

$$\begin{cases} \sigma_A , \tau_A = ? \\ \sigma_H , \tau_H = ? \end{cases}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(40)^2 = 1256.6\ mm^2$$

$$I = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{4}(\pi \times 20^4) = 125663.7\ mm^4$$



$P = -5000N$

$V_z = -1000 + 600 = -400$

$T = 150 \times (1000 + 600) = 2.4 \times 10^5\ N.mm$

$M_x = -400 \times 250 = -10^5\ N.mm$

<u>A نقطة</u> : $\sigma_A = \dfrac{-5000}{1256.6} = -3.98\ Mpa$

$$\tau_A = \frac{T.C}{J} + \frac{VQ}{It} \qquad Q = A\bar{y} = \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3}$$

$$\rightarrow \tau_A = \frac{2.4 \times 10^5 \times 20}{2 \times 125663.7} + \frac{400\left(\frac{2 \times 20^3}{3}\right)}{125663.7 \times 40} = 19.51\ Mpa$$

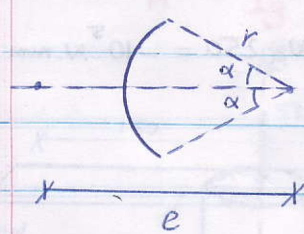
نقطه H : $\sigma_H = -3.98 + \dfrac{1\times10^5\times20}{125663.7} = +11.93\ Mpa$

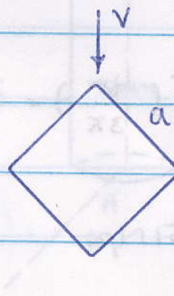
$$\tau_H = \frac{TC}{J} + \frac{VQ_H}{It} \longrightarrow Q_H = 0 \longrightarrow \tau_H = \frac{TC}{J}$$

$$\Rightarrow \tau_H = \frac{2.4\times10^5\times20}{2\times125663.7} = 19.1\ Mpa$$

مثال: مرکز برش را برای شکل مقابل بدست آورید.

e را برای مقطع





تمارین:
5, 12, 16, 23, 36, 49, 62, 72, 87, 79, 94, 109
114, 120, 127, 138

تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای نوید ذوالقدری (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف) و آقای مسعود قهرمان نژاد (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی تبریز- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیر کبیر) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .

در صورت لزوم می توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر انتقادات و پیشنهادات خود را ارائه فرمائید .

hamid_kazem041@yahoo.com