Subject:
Year: Month: Day: ( )

«بسم الله الرحمن الرحیم»

«جزوه ی دینامیک سازه ها»

استاد: جناب آقای دکتر ذاتقی

عارف سلیمی

ترم ۱

مقطع: کارشناسی ارشد

دانشگاه: علوم و فنون بابل

«مهر ۱۳۹۳»

Subject: جزوه دینامیک سازه ها
Year: ... Month: ... Day: ... ( )
استاد: آقای واثقی

دانشجو: عارف سلیمی
ترم اول دانشگاه علوم و فنون

سرفصل های دروس:

- تفاوت تحلیل های استاتیکی و دینامیکی

انواع بارهای دینامیکی

درجه آزادی و نحوه ی مدل کردن سازه ها

معادلات حرکت در سیستم یکدرجه آزادی

ارتعاش آزاد سیستم یکدرجه آزادی

تحلیل دینامیکی سیستم های یکدرجه آزادی در برابر انواع بارها

انتگرال دیوهامل و تحلیل سیستم به روش فوق

رفتار غیرخطی سیستم یکدرجه آزادی

تعیین معادلات سیستم چند درجه آزادی

ارتعاش آزاد سیستم چند درجه آزادی

روش آنالیز مودال

Subject: .... Year: ...... Month: ...... Day: ...... ( )

روش انتگرال گیری مستقیم

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته ساده

منابع :

دینامیک سازه (کلاف) ترجمه ← سعادتپور / ترجمه ← گل افشانی

دینامیک سازه (تئوری و کاربردها) (چوپرا) ترجمه ملاحونی

Subject:
Year: Month: Day: ( )

بارگذاری:

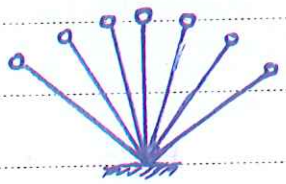
- بارهای مرده، بار برف، بار زنده } عموماً استاتیکی
- بار زلزله، بار باد } دینامیکی (مقدار و جهت تابع زمان می باشد)

پاسخ هم تابع زمان است.

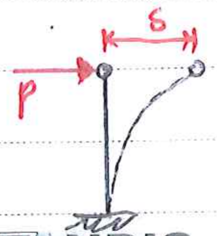
هر تابعی برحسب زمان باشد و مشتق اول آن برابر صفر نباشد یعنی سرعت دارد.

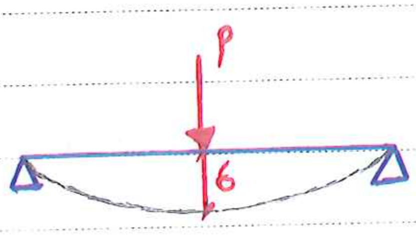
تغییر مکان سازه همان پاسخ سازه می باشد.

اگر پاسخ سازه ای تابع زمان باشد و مشتق آن برابر صفر نباشد سازه دارای سرعت است و اگر باز هم مشتق گرفته شود سازه شتاب دارد.



اگر به یک سازه بار دینامیکی وارد شود هم تغییر مکان دارد، هم سرعت و هم شتاب، و اگر به همان سازه بار استاتیکی وارد شود فقط تغییر مکان داریم.





در حالت استاتیکی اگر سازه‌ای سختی بیشتری داشته باشد تغییر مکان کمتری دارد.

$\frac{F\ (\text{نیرو})}{\delta\ (\text{تغییر مکان})} = K\ (\text{سختی}) \Rightarrow \frac{F}{k} = \delta$

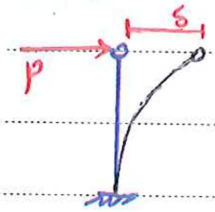
در بار استاتیکی ← نیروی مقاوم نیروی الاستیک

در بار دینامیکی:
- نیروی الاستیک ← متناسب با سختی
- نیروی اینرسی ← متناسب با شتاب
- نیروی میرایی ← متناسب با سرعت

بعد از بارگذاری، سازه را تحلیل می کنیم

به چهار نوع تحلیل می توان اشاره کرد:

۱. تحلیل استاتیکی: اگر بار استاتیکی باشد تحلیل استاتیکی است.



معادله تعادل $\Rightarrow K\delta = P \Rightarrow \delta = \frac{P}{k}$

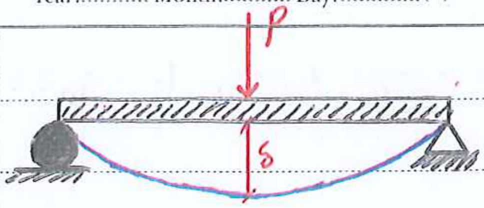
۲. تحلیل دینامیکی (تاریخچه زمانی پاسخ):

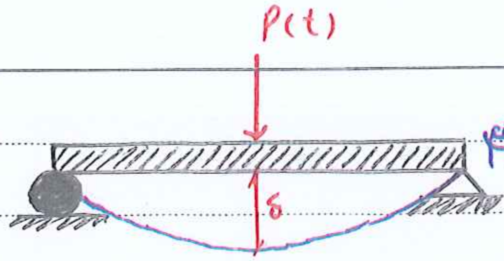
یعنی اثرات اینرسی و میرایی نیز باید لحاظ گردد.

در این حالت در هر لحظه از زمان به ما پاسخ می دهد (جابجایی - نیرو ...)

Subject:...

Year:.......... Month:.......... Day:............( )





سرعت و شتاب هم وجود دارد. $\ddot{u}(t)$ و $\dot{u}(t)$

$\delta = \dfrac{P}{k}$ ← سختی

$\delta = \dfrac{P(t)}{k, m, c}$

میرایی جرم سختی

به یک عضو دارای جرم باید نیرو وارد کرد، این نیرو هم صرف تغییر مکان می شود و هم سرعت و هم شتاب.

۳- تحلیل طیفی: این تحلیل پاسخ های حداکثر را به ما می دهد این هم یک نوع تحلیل دینامیکی است.

۴- ارتعاشات تصادفی

در پایان طراحی سازه در برابر بارهای موجود صورت می گیرد.

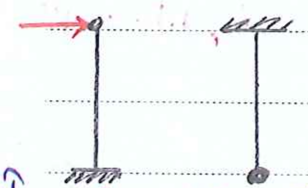
Subject: ....
Year: ...... Month: ...... Day: ......( )

تحلیل دینامیکی سازه یک درجه آزادی :

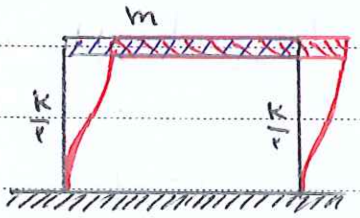
تحلیل دینامیکی یعنی حل معادله ی دینامیکی سیستم با احتساب میرایی و انرژی که به سه روش صورت می پذیرد.

۱- روش تعادل مستقیم (دالامبر)
۲- کار مجازی
۳- روش هامیلتون (انرژی)

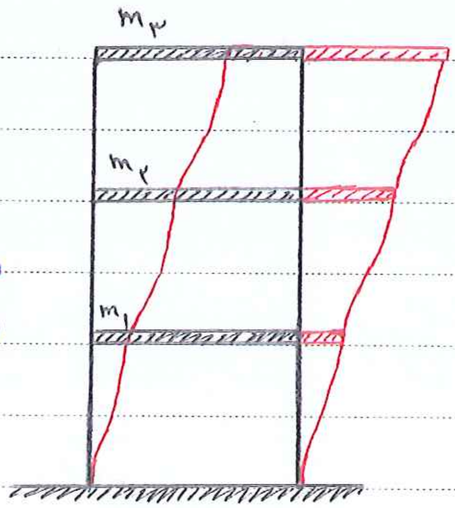
تعریف درجه آزادی : تعداد مؤلفه های مستقل برای بیان موقعیت یک جرم مرتعش



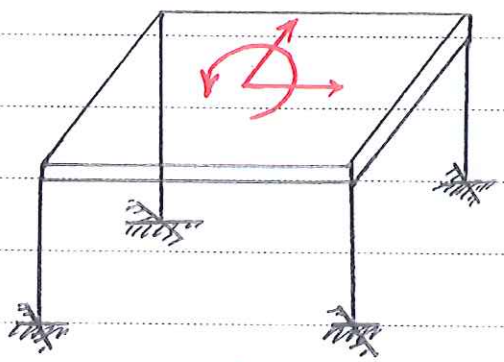
مدل یک درجه آزادی   مدل یک درجه آزادی



مدل یک درجه آزادی اگر از جرم ستون صرف نظر شود.



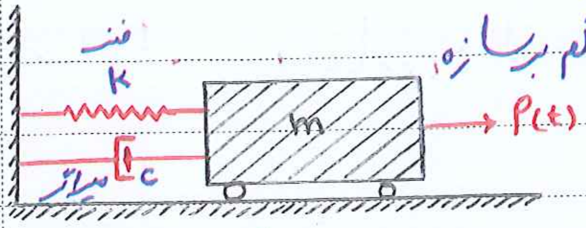
مدل سه درجه آزادی در فضای دو بعدی (۳ طبقه)



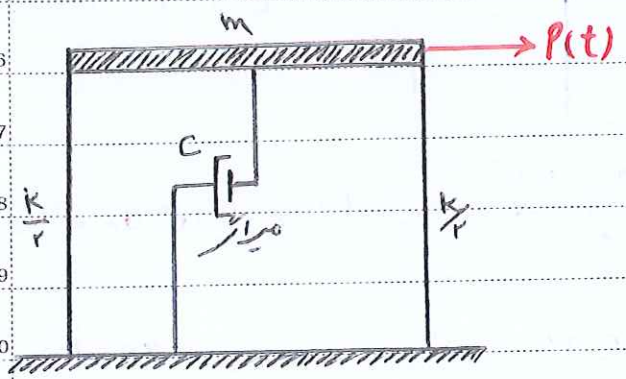
مدل سه درجه آزادی در فضای سه بعدی یک سازه ی ۱ طبقه

Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

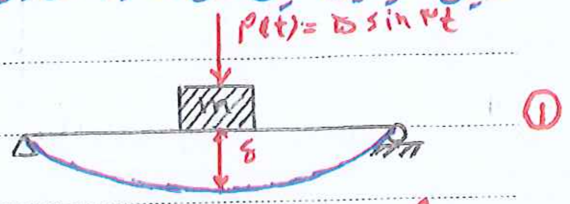
تحلیل دینامیکی یعنی حل معادله تعادل دینامیکی حاکم بر سازه

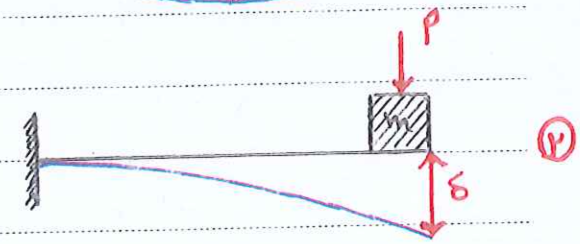


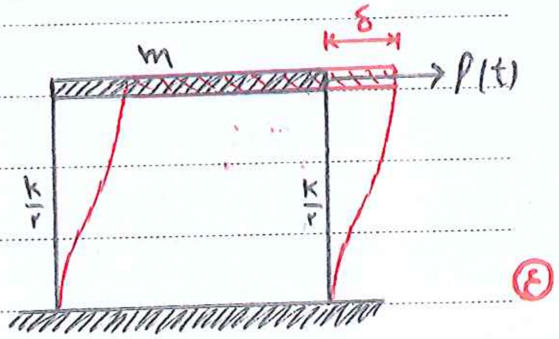
مدل سازه های یک درجه آزادی

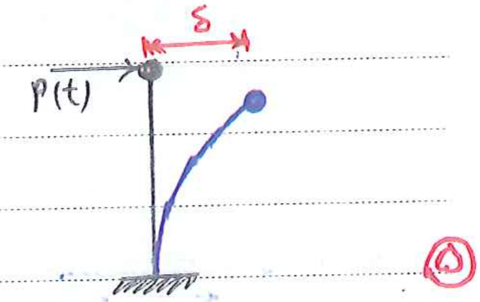


نمایش دیگر مدل سازه یک درجه آزادی



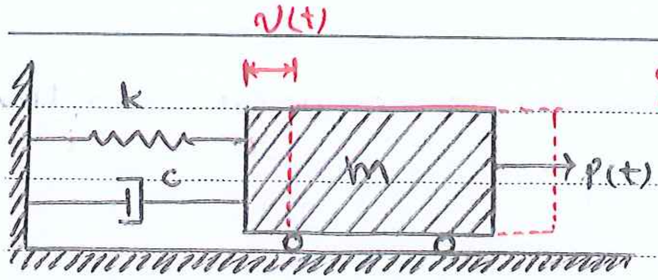






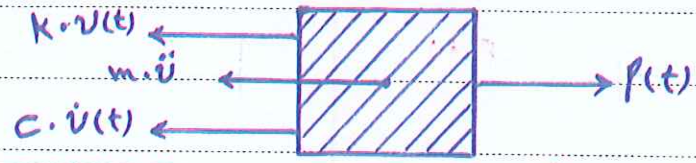
«انواع سازه های یک درجه آزادی»

معادله‌ی تعادل دینامیکی:



مدل سازه یک درجه آزادی

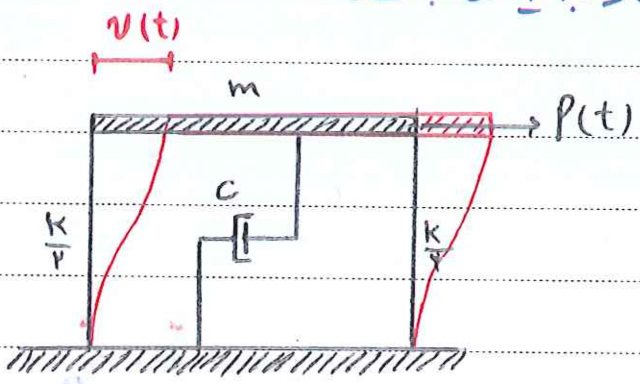
دیاگرام آزاد:



$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t)$$ → معادله تعادل دینامیکی سازه یک درجه آزادی

$m\ddot{v}$ ← نیروی اینرسی $c\dot{v}$ ← نیروی میرایی kv ← نیروی الاستیک

این معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ می‌باشد:



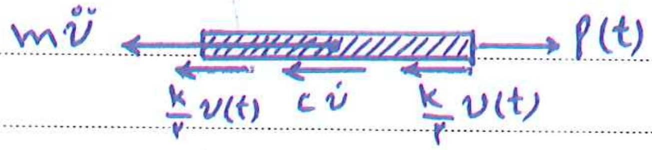
جرم = m

میرایی = c

سختی = k

فرقی نمی‌کند

دیاگرام آزاد:



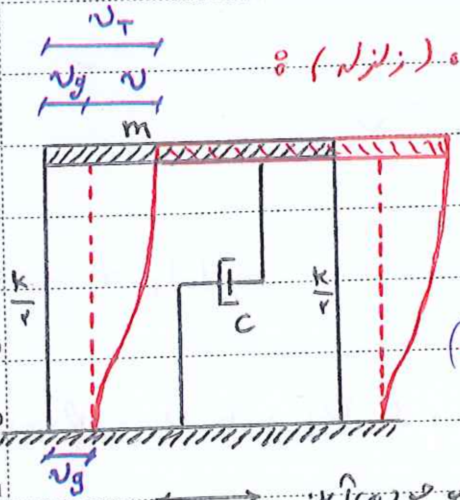
Subject:..................................

Year:.......... Month:.......... Day:............( )

تحلیل دینامیکی سازه یک درجه آزادی:

یعنی حل معادله‌ی مقابل $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t)$

تحلیل سازه یک درجه آزادی تحت تحریک تکیه‌گاه (زلزله):



v: تغییر مکان

$\dot{v}$: سرعت

$\ddot{v}$: شتاب

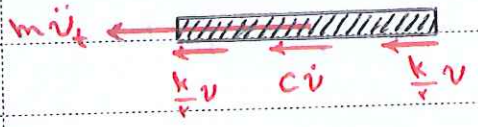
$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t)$$

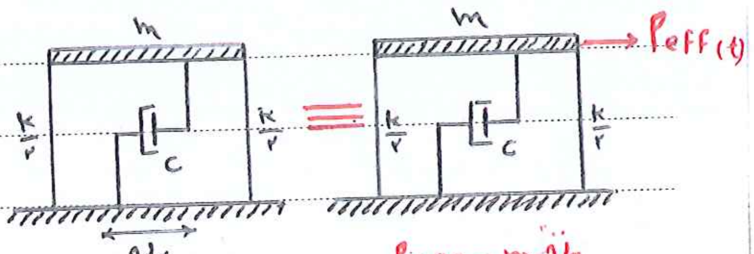
نیرو = تغییر مکان × سختی + (~~شتاب~~ سرعت × میرایی) + (جرم × شتاب)

نیروی به وجود آمده در ستون بر اثر جابجایی نسبی به وجود می‌آید

یعنی $\frac{k}{2}v$

جابجایی تکیه‌گاه $v_g(t)$





$P_{eff} = m\ddot{v}_g$

$$m\ddot{v}_t + c\dot{v} + kv = 0$$

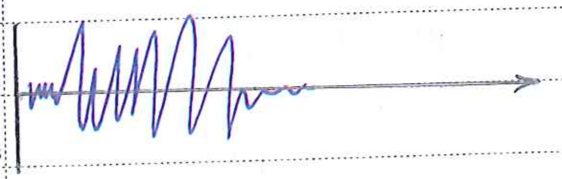
$$m\ddot{v} + m\ddot{v}_g + c\dot{v} + kv = 0$$

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = m\ddot{v}_g$$

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P_{eff}(t)$$

نیروی زلزله

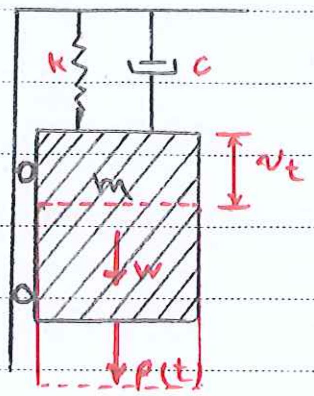
اگر شتاب را بدهند آن را در جرم سازه ضرب می‌کنیم و نیروی زلزله را محاسبه می‌کنیم.



$v_g(t) = 5\sin 3t$ $\quad \dot{v} = 15\cos 3t$ $\quad \ddot{v} = -45\sin 3t$

Subject: .... Year: ...... Month: ...... Day: ......

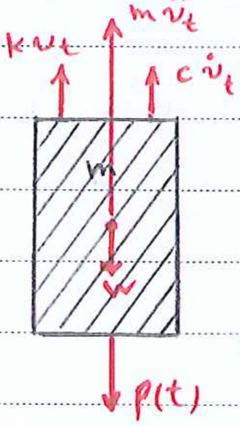
آیا ارتعاش در راستای وزن سازه در معادله تغییر ایجاد می‌کند؟



فقط یک عدد است.

جابجایی = تغییر مکان استاتیک + تغییر مکان ناشی از وزن

$$v_t = v + v_s$$



معادله تعادل:

$v_t = v_s + v$

فقط یک عدد است

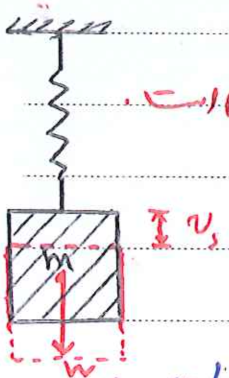
$\dot{v}_t = \cancel{\dot{v}_s} + \dot{v} = \dot{v}$

$\ddot{v}_t = \ddot{v}$

$$m\ddot{v}_t + c\dot{v}_t + kv_t = P(t) + w$$

(نیروی ناشی از وزن) (نیروی استاتیکی)

$$m\ddot{v}_t + c\dot{v}_t + (kv + kv_s) = P(t) + w$$



نکته: با توجه به شکل مقابل نیروی ایجاد شده در فنر برابر با وزن است.

نیروی فنر $F = k \times v_s$

نیروی وزن باعث ایجاد این نیرو در فنر شده پس این دو با هم برابر است.

$$w = F \Rightarrow w = k \cdot v_s$$

طبق اثبات بالا برابر می‌باشد.

$\Rightarrow \ddot{v}(t), \dot{v}(t)$ را در معادله قرار می‌دهیم $\Rightarrow m\ddot{v} + c\dot{v} + kv + \cancel{kv_s} = P(t) + \cancel{w}$

نتیجه: اگر ارتعاش در راستای وزن سازه هم باشد معادله تغییر نمی‌کند.

Subject:
Year: Month: Day:

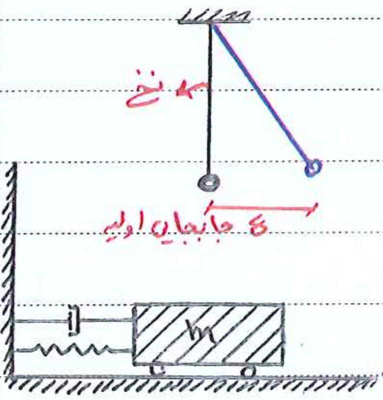
* نکته: در تحلیل دینامیکی اگر جرم، میرایی، سختی و بار را داشته باشیم می توانیم تغییر مکان را حساب کرد اما در تحلیل استاتیکی فقط با داشتن بار و سختی می توان تغییر مکان را بدست آورد.

بار خارجی وجود ندارد.

ارتعاش آزاد: یعنی بار خارجی صفر است. $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0$

در اثر یک جابجایی اولیه صورت می گیرد و یا حالت دیگر اعمال سرعت به شیء است.

هر دو نیز می توان همزمان اعمال شود.



در شکل مقابل به جسم تغییر مکان اولیه می دهیم، مثلاً با دست می کشیم و بعد رها می کنیم. نمونه دیگر آن زلزله است.

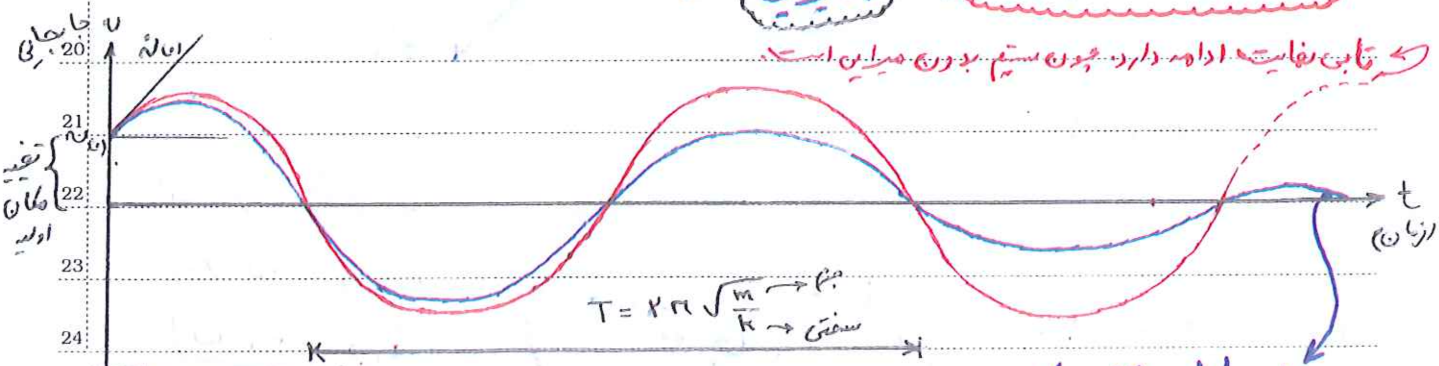
در تمام سازه هایی که وجود دارند میرایی نیز هست. فقط در صورت کم بودن مقدار آن می توان از میرایی صرف نظر کرد.

$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0$

بدون میرایی → $m\ddot{v} + kv = 0$

با میرایی → $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0$

تا بی نهایت ادامه دارد چون سیستم بدون میرایی است.



در پایان تغییر مکان به صفر می رسد چون سیستم میرایی دارد. و باعث استهلاک انرژی می شود.

Subject: ...... Year: ...... Month: ...... Day: ...... ( )

ارتعاش آزاد بدون بار و بدون میرایی: دارای جرم (m) و سفتی (k)

$$\boxed{m\ddot{v}_{(t)} + k v_{(t)} = 0} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } m} \ddot{v}_{(t)} + \frac{k}{m} v_{(t)} = 0$$

داریم $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $\qquad$ T = دامنه تناوب

امگا (فرکانس زاویه‌ای)

$$\Rightarrow \omega = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \quad (*)$$

جواب معادله $v = v_p + v_c$ = جواب خصوصی + جواب عمومی

جواب خصوصی صفر است، چون طرف دوم صفر است. یعنی جوابی که در معادله قرار دهیم تا دو طرف معادله با هم برابر شوند.

$$v = 0 + Ge^{st} \qquad \dot{v}_{(t)} = Gse^{st} \qquad \ddot{v}_{(t)} = Gs^2e^{st}$$

در معادله (*) قرار می‌دهیم $\Rightarrow Gs^2e^{st} + \omega^2 Ge^{st} = 0$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\Rightarrow Ge^{st}(s^2 + \omega^2) = 0$$

$Ge^{st} = 0 \Rightarrow G = 0$ غ ق ق چون دنبال جواب صفر نیستیم

$s^2 + \omega^2 = 0$

در ریاضی داریم $\sqrt{-1} = \pm i$

$$\Rightarrow s^2 = -\omega^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s^2} = \sqrt{-\omega^2}$$

$$\Rightarrow s = \omega\sqrt{-1}$$

$$s = \pm i\omega$$

جواب معادله دیفرانسیل

$$v = G_1 e^{-i\omega t} + G_2 e^{+i\omega t}$$

Subject: ....

Year:.......... Month:.......... Day:..........( )

$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm \sin \omega t$ ⟸ در ریاضی داریم

$v = G_1 \cos \omega t - \sin \omega t + G_2 \cos \omega t + \sin \omega t$

** $v(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ A و B با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آید.

شرایط اولیه
$$\begin{cases} v(0) \Rightarrow v(0) = A \cancel{\sin \omega(0)} + B \cos \omega(t) = B \Rightarrow \boxed{B = v(0)} \\ \dot{v}(0) \Rightarrow \dot{v}(0) = \omega A \underbrace{\cos \omega(0)}_{1} + \cancel{(-\omega B \sin \omega(0))} = \omega A \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{v}(0)}{\omega}} \end{cases}$$

جایگذاری در **

$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega t + v(0) \cos \omega t$ معادله‌ی هارمونیک 8

جابجایی حداکثر $v(t) = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\right)^2 + v(0)^2}}_{\rho} \cos(\omega t - \theta)$

ρ ⟵ دامنه حداکثر

$m\ddot{v} + kv = 0$ نتیجه کلی 8

تغییر مکان سازه در لحظه‌ی t $v(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$

$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\right)^2 + (\dot{v}(0))^2}$

یا باید بار به سازه وارد شود.

" " سرعت اولیه داشته باشد.

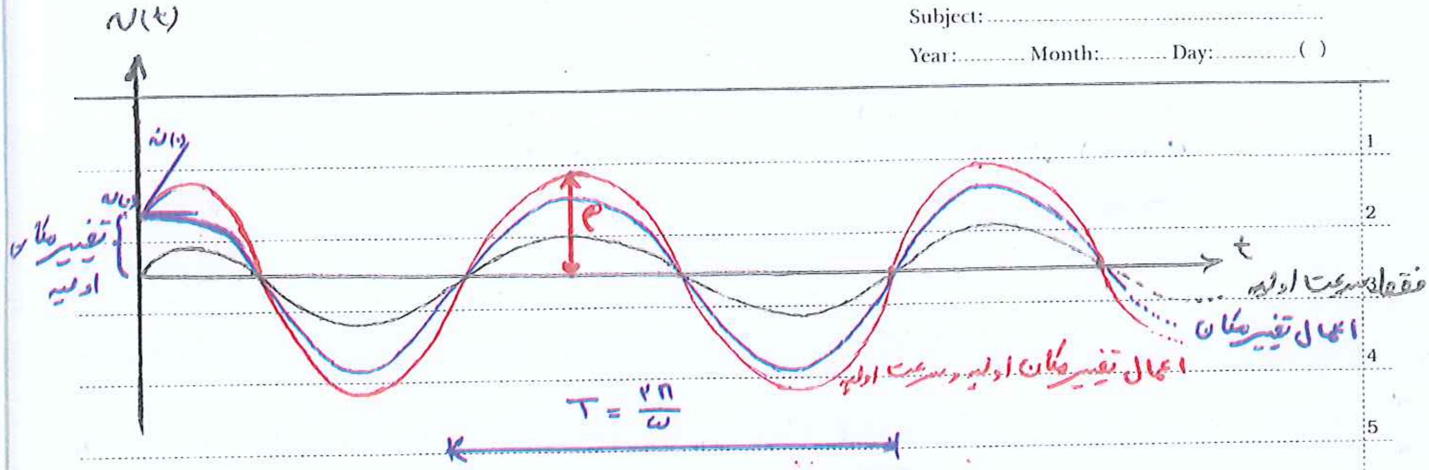
" " در لحظه‌ی اول تغییر مکان داشته باشد.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega v_0}\right)$ رفت و برگشت سازه به جرم و سختی آن بستگی دارد.

هر سازه چون جرم و سختی دارد پس یک فرکانس طبیعی دارد.

فرکانس ارتعاش آزاد بدون میرایی را فرکانس طبیعی می‌گویند و مقدار آن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است.

Subject: ...... Year: ...... Month: ...... Day: ...... ( )



اگر دامنه ثابت شد، فرکانس ارتعاش ثابت است.

ارتعاش آزاد با تغییر مکان اولیه و یا سرعت اولیه و یا هر دو همزمان با هم صورت می‌گیرد.

نمونه سوال: $m=5$ ، $k=5$ ، $v(0)=2\,cm$ ، $\dot v(0)=5\,\frac{cm}{s}$

در حالت ماکزیمم ← $\cos\theta=1$ $\qquad$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\dot v(0)}{\omega\, v(0)}\right)$

ارتعاش آزاد با میرایی:

$$\boxed{m\ddot v + c\dot v + kv = 0}$$

هر تفاوتی در پاسخ به خاطر میرایی است.

$v = v_p + v_c$ = جواب خصوصی + جواب عمومی

$v = 0 + Ge^{st} = Ge^{st}$ جواب خصوصی صفر است چون طرف دوم تساوی برابر صفر است.

$\dot v = Gse^{st}$ $\qquad$ $\ddot v = Gs^2e^{st}$ مقادیر v و $\dot v$ و $\ddot v$ را در معادله قرار می‌دهیم

داریم ⇐ $m(Gs^2e^{st}) + c(Gse^{st}) + k(Ge^{st}) = 0$

$$Ge^{st}\left[s^2m + sc + k\right] = 0$$

$$Ge^{st} = 0 \Rightarrow G = 0$$

$$\frac{s^2\cancel{m}}{\cancel{m}} + \frac{sc}{m} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + s\frac{c}{m} + \omega^2 = 0$$

Subject: ....
Year:.......... Month:.......... Day:.......... ( )

بسته به میرایی، جرم و سختی سه حالت امکان دارد. $\Rightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0$

$$s_1, s_2 = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

حالت اول: اگر زیر رادیکال برابر صفر شود: $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \omega^2$

$\Rightarrow \frac{c}{2m} = \omega \Rightarrow c_{cr} = 2m\omega$ میرایی بحرانی

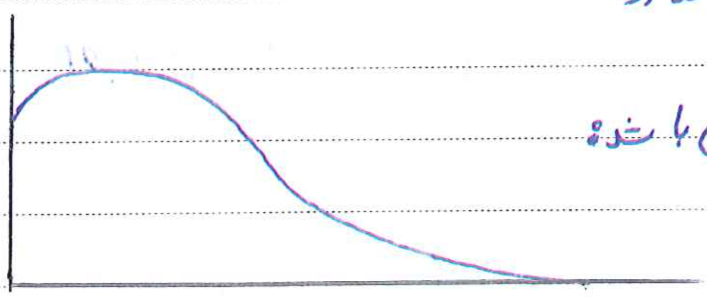
حالت دوم: اگر زیر رادیکال مثبت شود: $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2 > 0 \rightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \omega^2$

$\Rightarrow c > 2m\omega = c_{cr}$ میرایی فوق بحرانی

حالت سوم: اگر زیر رادیکال منفی شود: $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2 < 0 \rightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \omega^2$

$\Rightarrow c < 2m\omega = c_{cr}$ * میرایی تحت بحرانی

در طبیعت حالت اول و دوم وجود ندارد.



مفهوم تابع نمایی (اگر جواب حقیقی باشد):

میرایی آنقدر زیاد است که سازه با ارتعاش دوباره به حالت اولیه خود برمی‌گردد.

Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} \Rightarrow c = 2\xi m\omega \qquad \left(\frac{c}{2m} = \xi\omega\right.$$

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \Rightarrow s = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2}$$

$$s = -\xi\omega \pm \sqrt{-\omega^2 + \xi^2\omega^2} \qquad \sqrt{-1\omega^2(1-\xi^2)}$$

$$\Rightarrow s = -\xi\omega \pm i\,\omega\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow \omega_D$$

با تقریب ω_D را می‌توان همان ω لحاظ کرد.

اگر ξ را ۰/۰۵ قرار دهیم عبارت زیر رادیکال $\omega\sqrt{1-\xi^2}$ تقریباً نزدیک ۱ می‌شود

$$v = G_1 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t}$$

$$= e^{-\xi\omega t}\left[G_1 e^{-i\omega_D t} + G_2 e^{i\omega_D t}\right]$$

$$= e^{-\xi\omega t}\left[A \sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right]$$

مقادیر A و B با شرایط اولیه بدست می‌آید.

$$v(0) = B$$

$$\dot v(t) = -\xi\omega e^{-\xi\omega t}\left[A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right] + e^{-\xi\omega t}\left[A\omega_D\cos\omega_D t - B\omega_D\sin\omega_D t\right]$$

$$\Rightarrow \dot v(0) = -\xi\omega v(0) + A\omega_D$$

$$A = \frac{\dot v(0) + \xi\omega v(0)}{\omega_D}$$

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: .... ( )

در حالت کلی : $m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=0$

تغییر مکان سازه در هر لحظه

$$v(t)=e^{-\xi\omega t}\left[\frac{\dot{v}(0)+\xi\omega v(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t+v(0)\cos\omega_D t\right]$$

اگر در یک مسئله یک درجه آزادی با جرم مشخص ، میرایی مشخص ($\xi=\%5$ یا c)

و سختی معلوم و با تغییر مکان 5 cm ، بعد از ۲ ثانیه تغییر مکان چقدر است؟ (سرعت ندارد)

$$v(t)=\rho_D\cos(\omega_D t-\theta_D)$$

به جای میرایی اگر صفر قرار دهیم پاسخ سیستم ارتعاش آزاد بدون میرایی بدست می آید.

دامنه $\rho_D=e^{-\xi\omega t}\sqrt{\left(\frac{\dot{v}(0)+\xi\omega v(0)}{\omega_D}\right)^2+v^2(0)}$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\dot{v}(0)+\xi\omega v(0)}{\omega_D}}{v(0)}\right)$$

دامنه وابسته به زمان است. اما در ارتعاش آزاد بدون میرایی دامنه به زمان

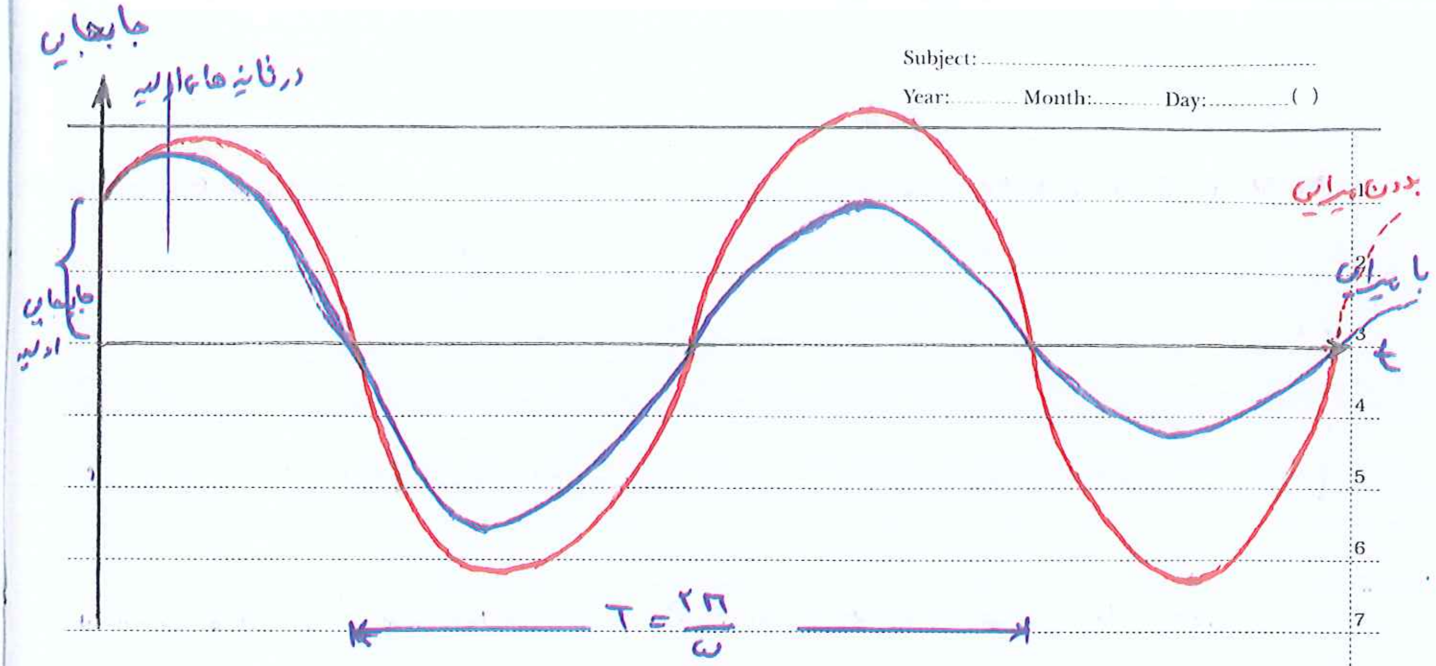
ربطی نداشت. اما در حالت با میرایی با افزایش t دامنه به صفر نزدیک می شود.

$$\rho_D=e^{-\xi\omega t}\sqrt{\left(\frac{\dot{v}(0)+\xi\omega v(0)}{\omega_D}\right)^2+v^2(0)}=e^{\frac{1}{\xi\omega t}}\sqrt{\quad}$$

در رابطه ی بالا اگر t به ∞ میل کند حاصل $e^{\frac{1}{\xi\omega t}}$ برابر با $e^{\frac{1}{\infty}}$

و حاصل صفر می شود یعنی دامنه با افزایش t کم و کمتر و در نهایت به صفر می رسد.

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: .... ( )



تفاوت فقط در میرایی است. همه‌ی عواملی که در حالت ارتعاش آزاد دامنه‌ی ارتعاش را به صفر تبدیل می‌کند را میرایی می‌گویند.

در لحظه‌ی اول میرایی کمتر اثرگذار است اما با زیاد شدن زمان، میرایی اثر بیشتری را می‌گذارد.

یکی از راههای اندازه‌گیری میرایی ارتعاش آزاد است.

یعنی جسم را به ارتعاش آزاد در می‌آوریم و در ۲ زمان مختلف مقدار میرایی را می‌توانیم با استفاده از فرمول محاسبه کرد.

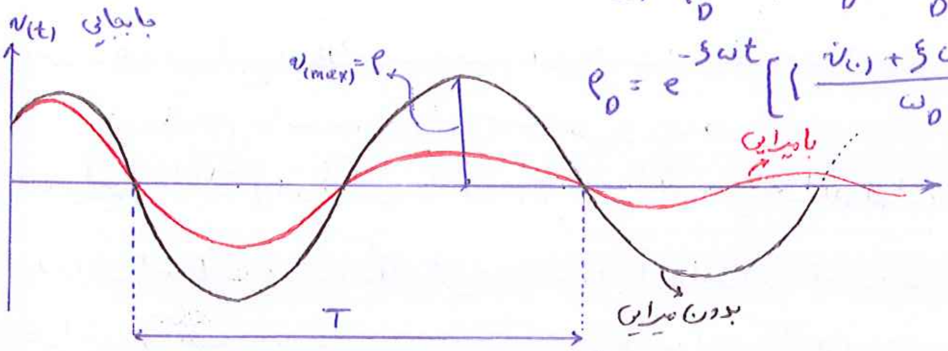
تحلیل دینامیکی سازه یک درجه آزادی

- ارتعاش آزاد $P(t)=0$

$c=0$ ← با یک فرکانس ثابت تا بینهایت به ارتعاش در می‌آید: $v_{(t)} = \rho \cos(\omega t - \theta)$

فرکانس ثابت = فرکانس طبیعی $= \sqrt{\frac{K}{m}}$ (K: سختی، m: جرم)

$c\neq 0$: $v(t) = \rho_D \cdot \cos(\omega_D t - \theta_D)$



$$\rho_D = e^{-\xi\omega t}\left[\left(\frac{\dot v_{(0)} + \xi\omega v_{(0)}}{\omega_D}\right)^2 + v_{(0)}^2\right]^{1/2}$$

نکته: اگر میرایی وجود نداشته باشد ($c=0$) دامنه هیچگاه برابر صفر نمی‌شود.
و اگر میرایی وجود داشته باشد ($c\neq 0$) دامنه کم کم برابر صفر خواهد شد.

در حالت با میرایی داریم:

$$v_{max})_n = e^{-\xi\omega t}\underbrace{\left[\left(\frac{\dot v_{(0)} + \xi\omega v_{(0)}}{\omega_D}\right)^2 + v_{(0)}^2\right]^{1/2}}_{\text{اگر A فرض کنیم}} \cdot \underbrace{\cos(\omega_D t - \theta_D)}_{\text{حداکثر مقدار آن 1 می‌باشد}}$$

$$\frac{v_{max})_n}{v_{max})_{n+1}} = \frac{e^{-\xi\omega t}\cdot \cancel{A}}{e^{-\xi\omega (t+T_D)}\cdot\cancel{A}} \qquad (T_D \text{: یک دور تناوب})$$

$$\Rightarrow \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{\cancel{e^{-\xi\omega t}}}{\cancel{e^{-\xi\omega t}} \times e^{-\xi\omega T_D}} = e^{\xi\omega T_D}$$

$$\Rightarrow e^{\xi\omega \times \frac{2\pi}{\omega_D}} \cong e^{\xi 2\pi} \qquad T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}, \quad \omega_D \cong \omega$$

با نوشتن بسط تیلور داریم:

$$e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + \underbrace{\frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \frac{(2\pi\xi)^3}{3!} + \frac{(2\pi\xi)^4}{4!} + \cdots}_{\text{قابل صرف نظر کردن در } \xi \text{ های کوچک}}$$

در نهایت برای ξ های کوچک ← $e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi$

(I) $\frac{v_n}{v_{n+1}} = e^{\xi 2\pi}$

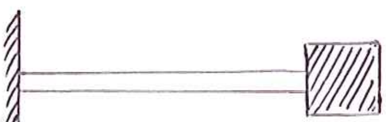
(II) $e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi$

$$\Rightarrow \frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + 2\pi\xi$$

نکته: هر چه ξ بزرگتر در نظر گرفته شود خطای اندازه گیری بیشتر است، اما در ξ های کوچکتر صورت کسر به توان می‌رسد و تقسیم بر ۲ و ۶ و ۲۴ و .... می‌شود.

نتیجه: با داشتن دامنه در مورد n و $n+1$ می‌توان میرایی را اندازه گرفت.

$$2\pi\xi = \frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{v_n - v_{n+1}}{2\pi \cdot v_{n+1}}}$$



به عنوان نمونه اگر سازه ی مقابل به ارتعاش درآید و با داشتن دامنه در دو سیکل n و $n+1$ یا در سیکل n و $n+m$ می‌توان میرایی را حساب کرد.

$$\boxed{\xi = \frac{v_n - v_{n+m}}{2\pi \cdot m \cdot v_{n+m}}}$$

منابع میرایی:

چه عواملی سبب میرایی می شوند؟

هرچه لزجت محیط بیشتر ← اصطکاک بیشتر، میرایی بزرگ

هرچه لزجت محیط کمتر ← اصطکاک کم، میرایی کوچک

۱) اصطکاک خارجی: اصطکاک بین جسم مرتعش و محیط اطرافش

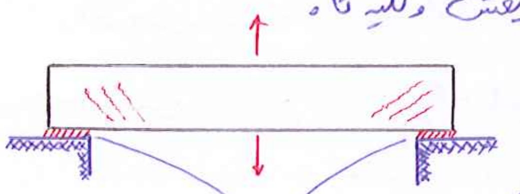
نکته: یکی از منابع اصطکاک بین جسم با هوا است. اما سهم میرایی در محیط هوا کم است.
در خلأ هم دامنه ی ارتعاش به صفر می رسد.

۲) میرایی داخلی (اصطکاک داخلی): اصطکاک بین مولکولهای تشکیل دهنده جسم مرتعش

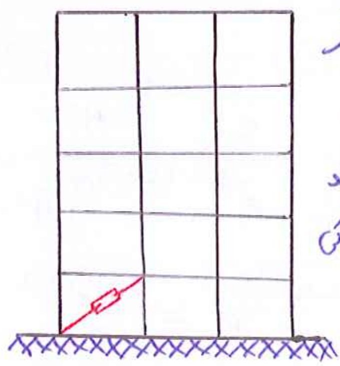
در اثر اصطکاک درونی شکل گرفته ناشی از ارتعاش که باعث میرایی می شود، اگر محیط اطراف جسم هوا باشد سهم این میرایی (داخلی) از سهم میرایی خارجی بیشتر است.

۳) میرایی کلمب: اصطکاک بین سطوح ترک یا جسم مرتعش و تکیه گاه

در هنگام ارتعاش عضو ترک بخورد.



این شکل بیانگر یک نوع میرایی طبیعی است.



این شکل بیانگر یک نوع میراگر مصنوعی می باشد که از نوع اصطکاکی است.

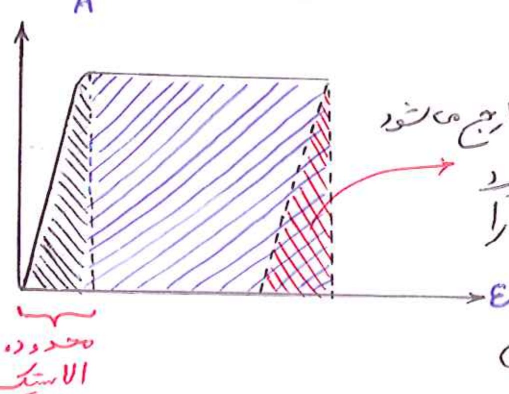
نکته: ضریب اصطکاک هرچه بیشتر باشد میرایی نیز بیشتر است. در این نوع میراگرها، مصالح (مصنوعی) دارای ضریب اصطکاک بالا می باشند و جذب انرژی (استهلاکی) بیشتری دارند.

نکته: یک نوع دیگر میراگرها، میراگر تسلیمی می باشد که همانند لوله های آکاردئون جمع می شوند.

۴) میراگر هیسترزیس:

سطح زیر منحنی تنش-کرنش، انرژی جذب شده توسط جسم را نشان می دهد.

$\sigma = \frac{P}{A}$

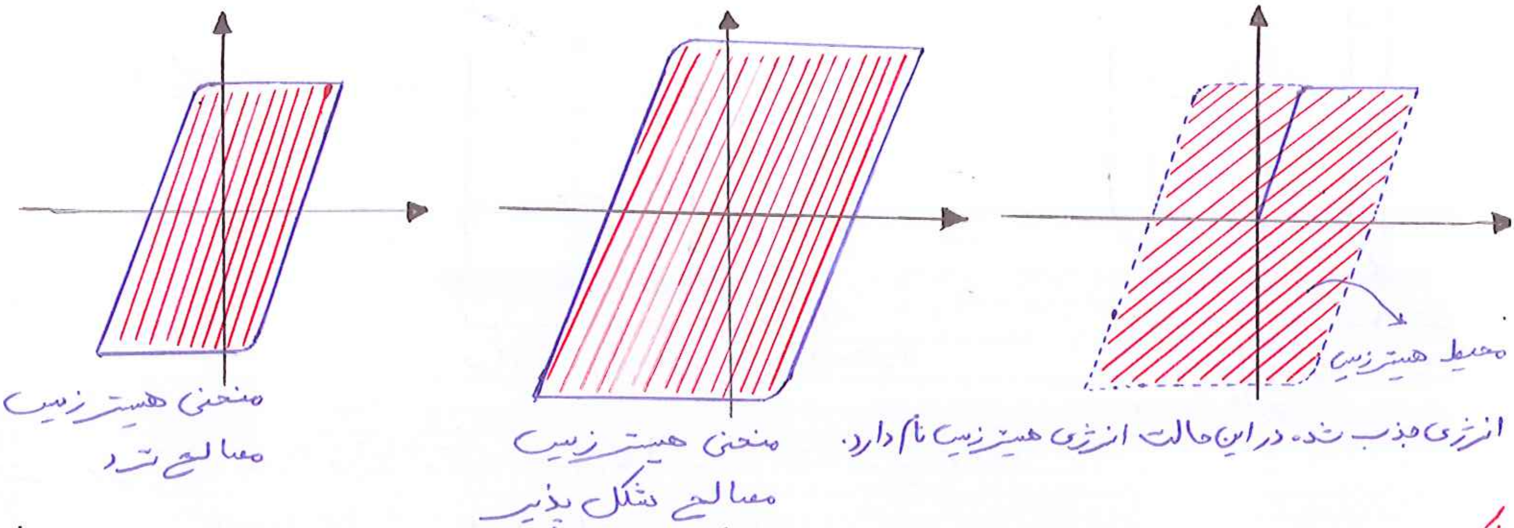


جسم وقتی از حالت الاستیک خارج می شود و در حالت پلاستیک قرار گیرد می تواند مقداری از انرژی را دمپ کند که این عمل با ایجاد یک تغییر شکل دائمی صورت می گیرد.

اگر به یک جسم نیرو وارد شود تغییر شکل ایجاد می شود و بر اثر این نیرو که تنش را به دنبال دارد، این تنش باعث کرنش هم می شود.

اگر به یک سازه باری بیشتر از بار الاستیک وارد شود، مصالح سازه وارد محدوده ی پلاستیک می شوند.

رفتار هیسترزیس : سازه از حالت الاستیک خارج می شود و در هر سیکل انرژی را استهلاک می کند

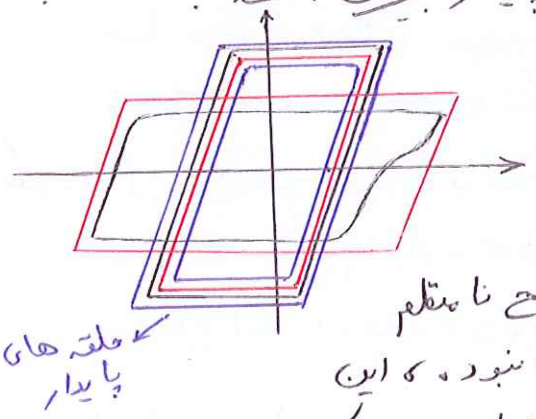


نکته : منحنی هیسترزیس پهن تر بهتر است. مصالحی که حلقه های پایدار بیشتری داشته باشند مناسب است

برای بارگذاری زلزله سازه باید شکل پذیر باشد.

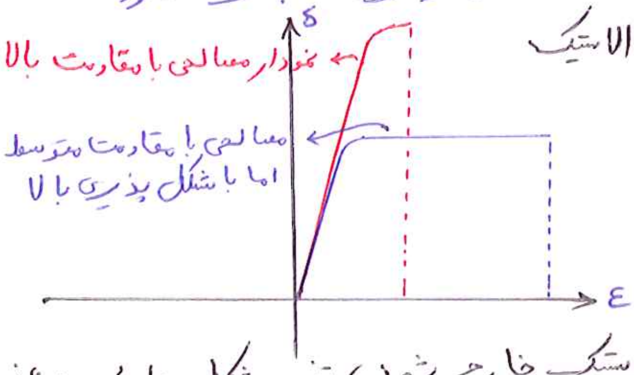
سازه ی مقاوم سازه ای است که خسارت ببیند اما فرو نریزد.

سازه ی مقاوم سازه ای نیست که خسارت نبیند.



نکته : اگر در سیکل های مختلف بارگذاری، رفتار هیسترزیک مصالح نامنظم باشد، و مقدار مقاومت کاهش پیدا کند مصالح مرغوب نبوده، و این در مصالح مرغوب متفاوت است و مصالح مرغوب دارای رفتار هیسترزیک پایدار می باشند و سختی و مقاومت آنها تحت سیکلهای مختلف بارگذاری کاهش پیدا نمی کند، در نتیجه سطح زیر منحنی تنش - کرنش برای مصالح مرغوب، ثابت است و تغییر نمی کند.

اگر سطح زیر منحنی بیشتر باشد ← انرژی جذب شده بیشتر ← رفتار هیسترزیک بهتری دارد.



نکته : در میرایی هیسترزیس تا زمانی که سازه از حالت الاستیک خارج نشود این منبع انرژی وجود ندارد.

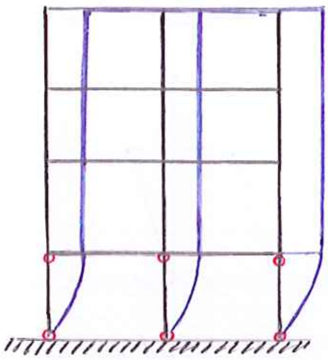
نکته : در طراحی های لرزه ای این منبع وجود دارد چون جسم از حالت الاستیک خارج می شود

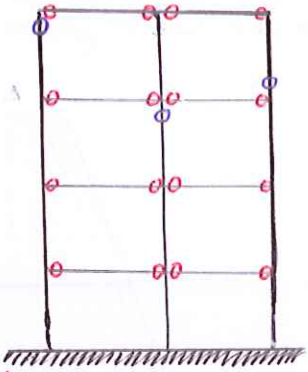
نکته : سازه اجازه دارد تحت زلزله ی طرح از محدوده ی الاستیک خارج شود، تغییر شکل دائمی در عضو باقی بماند (سازه کج شود) خسارت ببیند اما سازه فرو نریزد.

سوال : در سازه از چه عناصری انتظار شکل پذیری داریم؟ آیا همه باید شکل پذیر باشند؟

پاسخ : از تیرها و مهاربندها انتظار شکل پذیری داریم. از اتصالات این انتظار را نداریم.

ستون ها بعد از مفصل شدن تیرها باید مثل یک سرباز، در انتها و در آخرین مرحله تسلیم شوند. اگر ستون قبل از مفصل شدن تیر، مفصل شود سازه تخریب می شود.





فلسفه ی تئوری ستون قوی و تیر ضعیف در اینجا شکل گرفته است.

نکته: در شکل پذیری ویژه اولین مفصل ها در ستون ها رخ نمی دهد.

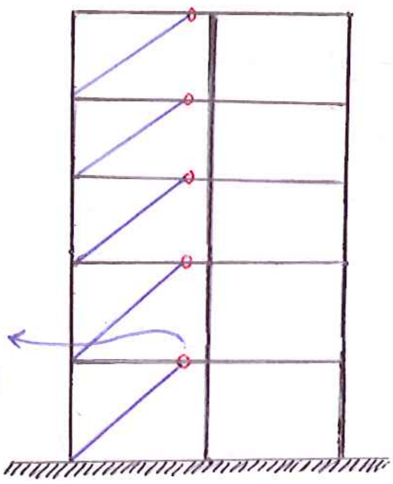
چشمه ی اتصال باید شرایطی داشته باشد.

خسارت را عمداً در بعضی جا ها ایجاد می کنیم.

مفصل ها در جا هایی تشکیل شوند که سازه را تخریب نکند.

نکته: اگر بخواهیم سقفی را به سازه ی موجود اضافه کنیم و برای این منظور قصد تقویت تیرها را داشته باشیم، اینگونه عمل کردن اشتباه است. چون تیر به قدری قوی شده که مفصل ابتدا در ستون شکل می گیرد.

از باد بند خارج از محور، برای اینکه به صورت عمدی مفصل را در قسمتی از تیر ایجاد کنیم استفاده می شود.



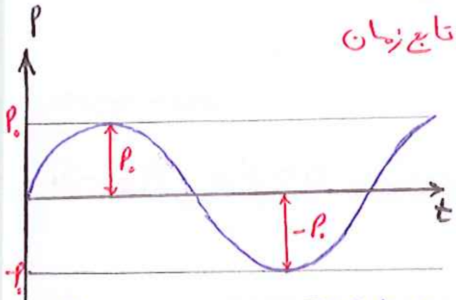
عملکرد فیوز در ساختمان: اگر برق ورودی بیشتر باشد فیوز خراب می شود و برق وارد ساختمان نمی شود و فقط فیوز را عوض می کنیم.

نکته: هرچه سرعت بیشتر باشد میرایی نیز بیشتر می باشد، چون ما میرایی را از نوع میرایی ویسکوز در نظر می گیریم.

تحلیل دینامیکی سازه یکدرجه آزادی :

$v_{(t)} = \overset{\text{ثابت}}{\rho} \cos(\omega t - \theta)$

$v_{(t)} = \rho_0 \cos(\omega_D t + \theta_D)$ ← تابع زمان



* ارتعاش آزاد : ۱) بدون میرایی $(C=0)$
۲) با میرایی $(C\neq 0)$
$P(t)=0$

فرکانس ارتعاش آزاد (ω) (فرکانس طبیعی)
عوامل میرا کننده ارتعاش در حالت ارتعاش آزاد ← میرایی

نکته : منحنی تغییرات بار نسبت به زمان ثابت است (سینوسی یا کسینوسی)

* ارتعاش اجباری : بار هارمونیک $P(t)=P_0\sin\bar\omega t$ ، $P(t)=P_0\cos\bar\omega t$
$P(t)\neq 0$

۱) بدون میرایی $c=0$: $m\ddot v + kv = P_0\sin\bar\omega t$
۲) با میرایی $c\neq 0$: $m\ddot v + c\dot v + kv = P_0\sin\bar\omega t$

نمونه‌ای از بار هارمونیک : یک هواساز ـ کولر آبی و ... با یک سرعت زاویه‌ای یا فرکانس بار موتور می‌چرخد.
$\bar\omega$ = فرکانس بار

۱) تحلیل سازه با ارتعاش اجباری بدون میرایی :

* $m\ddot v + kv = P_0\sin\bar\omega t$

$v = v_c + v_p$ = جواب عمومی + جواب خصوصی

$v_c = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

$v_p = G\sin\bar\omega t$ ، $\ddot v_p = -G\bar\omega^2\sin\bar\omega t$

جایگذاری مقادیر v_p و $\ddot v_p$ در رابطه * داریم $\Rightarrow -Gm\bar\omega^2\cancel{\sin\bar\omega t} + GK\cancel{\sin\bar\omega t} = P_0\cancel{\sin\bar\omega t}$

$-Gm\bar\omega^2 + GK = P_0$

$G(K-\bar\omega^2 m) = P_0 \Rightarrow G = \frac{P_0}{K-\bar\omega^2 m}$

$\beta = \frac{\text{فرکانس بار}}{\text{فرکانس طبیعی}} = \frac{\bar\omega}{\omega}$ ، $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega^2 \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega^2}$

$\Rightarrow G = \frac{P_0}{K}\times\frac{1}{1-\bar\omega^2 \frac{m}{K}}$ → $1/\omega^2$

$\Rightarrow G = \frac{P_0}{K}\times\frac{1}{1-\left(\frac{\bar\omega}{\omega}\right)^2}$ → β

$$v_{(t)} = \underbrace{A\sin\omega t + B\cos\omega t}_{} + \underbrace{\frac{P_0}{K}\times\frac{1}{1-\beta^2}\sin\bar\omega t}_{}$$

جواب عمومی ، پاسخ حالت ارتعاش آزاد طرف دوم معادله صفر باشد
(جواب حالت گذرا)

جواب خصوصی در اثر داشتن طرف دوم معادله بدست P که معنی بار خارجی داریم.
(جواب حالت پایدار یا دائم)

A و B از شرایط اولیه بدست می‌آید

$v_{(0)} = \dot v_{(0)} = 0 \Rightarrow v_{(0)} = 0 + B \Rightarrow B=0$

$\dot v_{(0)} = 0 \Rightarrow \omega A + \frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\bar\omega = 0 \Rightarrow A = -\frac{P_0}{k}\times\frac{\beta}{1-\beta^2}$

نتیجه کلی: در حالت ارتعاش اجباری $P_t \neq 0$ و بدون میرایی $c=0$

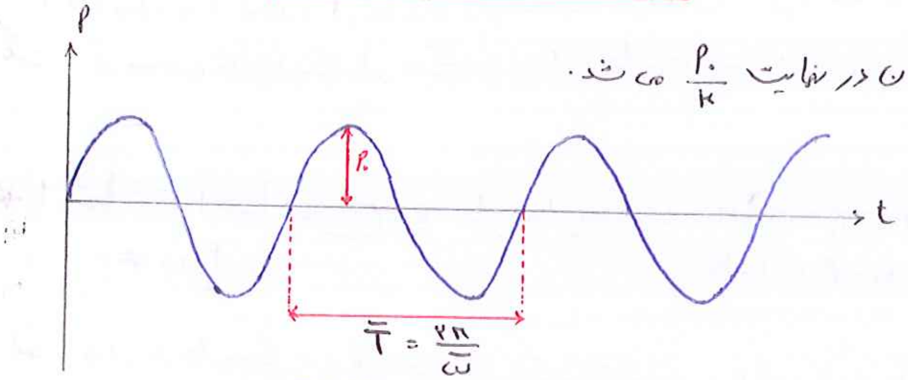
$$m\ddot{v}+kv=P_0\sin\bar{\omega}t$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left(\underbrace{\sin\bar{\omega}t}_{\text{حالت دائم}}-\underbrace{\beta\sin\omega t}_{\text{حالت گذرا}}\right)}$$

برای سازه‌ی یک درجه آزادی، یک تیر یک ساختمان یک طبقه، که در همه میرایی صفر باشد و بار دینامیکی داشته باشد و $\bar{\omega}$ (فرکانس بار) نیز موجود باشد.

جواب حالت پایدار $\Leftarrow$ $\boxed{v(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\sin\bar{\omega}t}$

نکته: اگر P_0 را آرام وارد می‌کردیم تغییر مکان در نهایت $\frac{P_0}{k}$ می‌شد.



تغییر مکان در حالت دینامیکی و بار هارمونیک

$$v(t)=\underbrace{\frac{P_0}{k}}_{\text{پاسخ استاتیکی}}\times\underbrace{\frac{1}{1-\beta^2}}_{\text{ضریب تقویت دینامیکی}}\left(\sin\bar{\omega}t-\beta\sin\omega t\right)$$

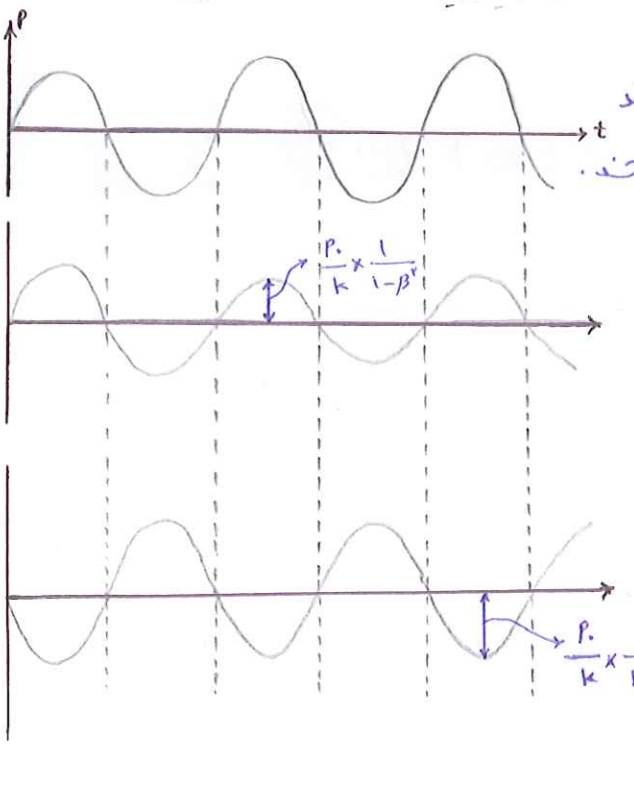
v_{max}

شکل ارتعاش sin است.

v_{max} = حداکثر دامنه‌ی جابجایی است.

نکته: ضریب تقویت دینامیکی به نسبت $\frac{\bar{\omega}}{\omega}$ بستگی دارد. بدترین حالت یا بحرانی‌ترین حالت $\beta=1$، یعنی دامنه‌ی ارتعاش بینهایت است.

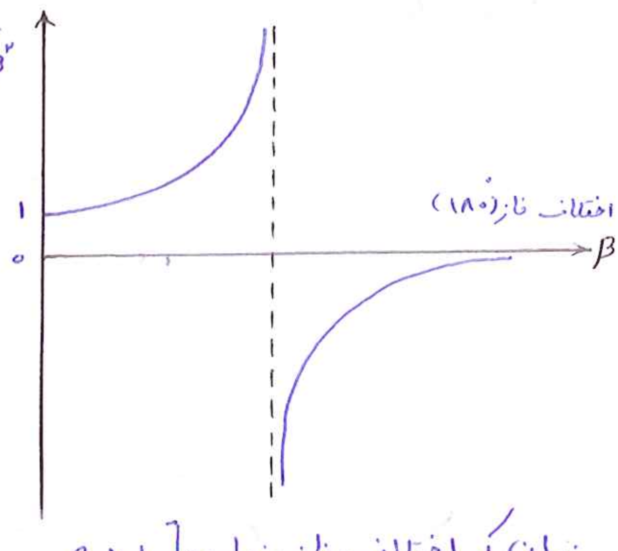
در شکل زیر اگر $\beta<1$ باشد پاسخ و بار هم فاز هستند و اگر $\beta>1$ باشد پاسخ و بار غیر هم فاز هستند.



$\beta<1$

$\beta>1$

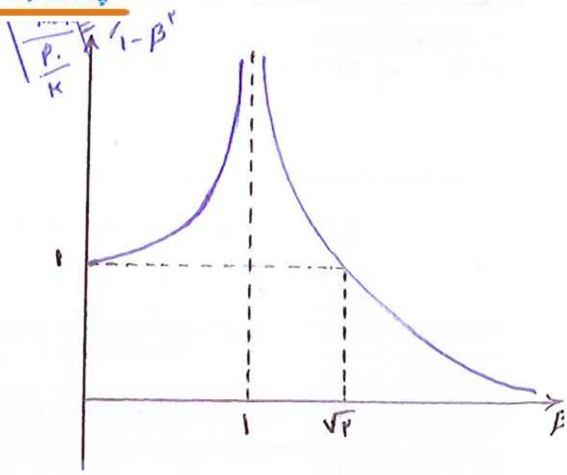
$$\frac{v_{max}}{\frac{P_0}{k}}=\frac{1}{1-\beta^2}$$



زمانی که اختلاف فاز داریم: $\beta>1$ ، $\bar{\omega}>\omega$ ، $\bar{T}<T$ — بار خیلی سریع، سازه خیلی نرم

زمانی که اختلاف فاز نداریم: $\beta<1$ ، $\bar{\omega}<\omega$ ، $\bar{T}>T$ — سازه سفت، بار با سرعت کم وارد می‌شود

$$v_{max} = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \left|\frac{v_{max}}{\frac{P_0}{k}}\right| = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

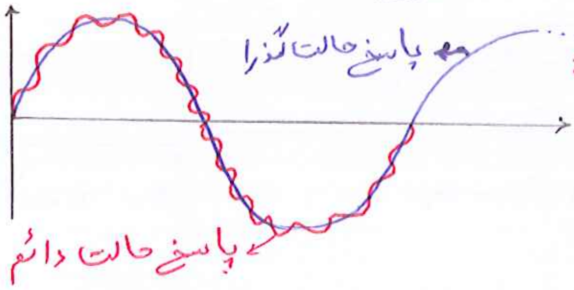


$\beta = \frac{\bar\omega}{\omega} = \sqrt{2}$

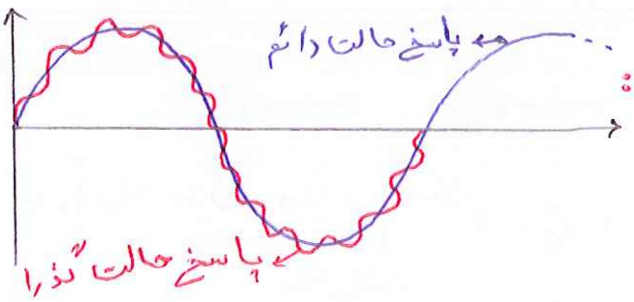
$\beta = 1$

$\beta > \sqrt{2}$

نکته: اگر $\beta > \sqrt{2}$ باشد تغییر مکان دینامیکی کمتر از تغییر مکان استاتیکی است.



در حالت $\beta < 1$, $\bar T > T$ داریم:



در حالت $\beta > 1$ و $\bar T < T$ داریم:

② تحلیل سازه با ارتعاش اجباری با میرایی ($c \neq 0$):

$$m\ddot v + c\dot v + kv = P_0 \sin\bar\omega t$$

جواب عمومی یعنی طرف دوم معادله برابر صفر باشد.

$v = v_c + v_p$ = جواب خصوصی + جواب عمومی

$v_c = e^{-\xi\omega t}\left[A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right]$ با افزایش زمان صفر می‌شود ← جواب گذرا

$$\begin{cases} v_p = G_1 \sin\bar\omega t + G_2\cos\bar\omega t \\ \dot v_p = G_1\bar\omega\cos\bar\omega t - G_2\bar\omega\sin\bar\omega t \\ \ddot v_p = -G_1\bar\omega^2\sin\bar\omega t - G_2\bar\omega\cos\bar\omega t \end{cases}$$

جواب ماندگار ← این جواب را در معادله قرار می‌دهیم و G_1 و G_2 را بدست می‌آوریم.

$$\Rightarrow -G_1 m\bar\omega^2\sin\bar\omega t - G_2 m\bar\omega t + G_1 c\bar\omega\cos\bar\omega t - G_2 c\bar\omega\sin\bar\omega t + G_1 k\sin\bar\omega t + G_2 k\cos\bar\omega t = P_0\sin\bar\omega t$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[-G_1 m\bar\omega^2 - G_2 c\bar\omega + G_1 k\right]}_{\text{باید برابر } P_0 \text{ شود تا دو طرف تساوی با هم برابر شود.}}\sin\bar\omega t + \underbrace{\left[-G_2 m\bar\omega^2 + G_1 c\bar\omega + G_2 k\right]}_{\text{باید برابر صفر شود}}\cos\bar\omega t = P_0\sin\bar\omega t$$

$$\begin{cases} G_1 = \frac{P_0}{k} \times \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2) + (2\xi\beta)^2} \\ G_2 = \frac{P_0}{k} \times \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{cases} \Rightarrow v_p = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar\omega t - 2\xi\beta\cos\bar\omega t\right]$$

پاسخ کل :

$$\boxed{v_{(t)} = \underbrace{e^{-\xi\omega t}\left[A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right]}_{\text{پاسخ حالت گذرا}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t\right]}_{\text{پاسخ حالت دائم}}}$$

* در بارگذاری سازه همیشه حالت گذرا بعد از زمانی از بین می رود و پاسخ حالت دائم اهمیت دارد.

$$v_{(t)} = \frac{P_0}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t\right]$$

ضریب تقویت دینامیکی

یا

$$\Rightarrow \boxed{v_{(t)} = \frac{P_0}{k}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}_{D}\sin(\bar{\omega}t-\theta)}$$

پاسخ حالت دائم (سازه با بارهارمونیک و دارای میرایی)

$$v_{(t)} = \frac{P_0}{k}\cdot D\cdot\sin(\bar{\omega}t-\theta) \qquad \boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}}$$

خلاصه ی تحلیل دینامیکی سازه یک درجه آزادی

* ارتعاش آزاد $P_{(t)}=0$

$C=0$:

$$v_{(t)} = \rho\cos(\omega t-\theta) \quad , \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega v_0}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2+(v_0)^2}$$

$C\neq 0$:

$$v_{(t)} = \rho_D\cos(\omega_D t-\theta_D) \quad , \quad \rho_D = e^{-\xi\omega t}\left[\left(\frac{\dot{v}_{(0)}+\xi\omega v_{(0)}}{\omega_D}\right)^2+v_{(0)}^2\right]^{1/2}$$

« در حالت بدون میرایی »

« در حالت با میرایی »

$$v_{(t)} = \frac{P_0}{k}D\sin\bar{\omega}t$$ جواب ماندگار

* ارتعاش اجباری $P_{(t)}\neq 0$

$P_{(t)} = P_0\sin\bar{\omega}t \quad , \quad C=0$

$P_{(t)} = P_0\sin\bar{\omega}t \quad , \quad C\neq 0$

$$v_{(t)} = \frac{P_0}{k}D\sin(\bar{\omega}t-\theta)$$ جواب ماندگار

$\frac{P_0}{k}$: تغییر مکان استاتیکی

D : ضریب تقویت دینامیکی

$$D = \text{در حالت بدون میرایی} = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad D = \text{در حالت با میرایی} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$v_{(t)} = e^{-\xi\omega t}\left[A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right] + \frac{P_0}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t\right]$$

اگر میرایی باشد اختلاف فاز به مقدار میرایی بستگی دارد.

حداکثر تغییر مکان در اثر بارهارمونیک

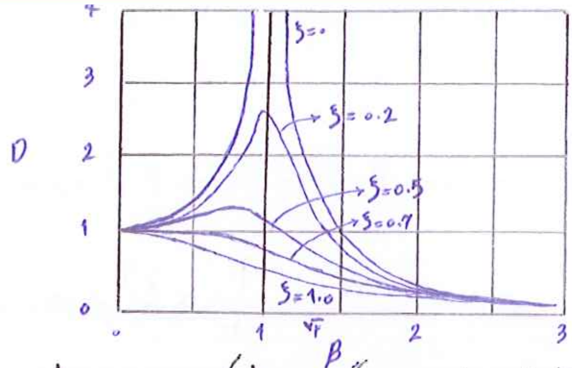
$$v_{max} = \underbrace{\frac{P_0}{k}}_{\text{تغییر مکان استاتیکی}}\ \underbrace{D}_{\text{ضریب تقویت دینامیکی}}\ \underbrace{\cancel{\sin(\bar{\omega}t-\theta)}}_{1}$$

نکته : اگر $\sin(\bar{\omega}t-\theta)=1$ باشد تغییر مکان بیشترین مقدار خود را دارد.

$$D = \frac{v_{max}}{P_0}$$

توجه شود که هرچه ξ بیشتر شود قله کمتر می‌شود

نکته: اگر β خیلی زیاد شود
تغییر مکان استاتیکی > تغییر مکان دینامیکی



تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی برحسب بسامد و میرایی.

بحرانی ترین حالت β=1 است، در نزدیکی فرکانس طبیعی به فرکانس بارگذاری باشد، بیشترین افزایش دامنه را داریم. در این بیشترین پاسخ (تغییر مکان) را نتیجه می‌دهد.

سؤال: چرا بعضی از ساختمان ها خسارت بیشتری می‌بینند و بعضی از ساختمان ها خسارت کمتر؟

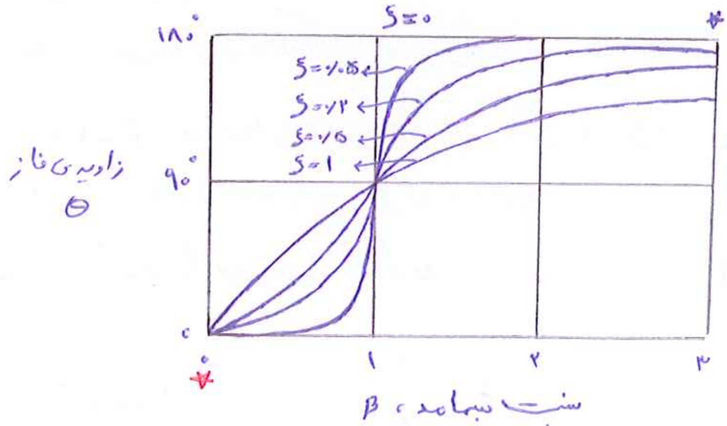
جواب: زلزله حاوی بینهایت فرکانس است. آن فرکانس هایی از زلزله که به فرکانس سازه نزدیک باشد به سازه خسارت می‌زند. یعنی اگر فرکانس حاکم زلزله نزدیک به فرکانس طبیعی سازه باشد، نیروی بیشتری به سازه وارد می‌شود.

نکته: سازه هایی که فرکانس طبیعی آنها در بازه‌ی $\sqrt{2}$ تا ۱ باشد، تغییر مکان بیشتری دارد.

نکته: میرایی در محدوده‌ی β=1 نقش تعیین کننده‌تری ایفا می‌کند. چون دامنه به مقدار زیادی افت می‌کند.

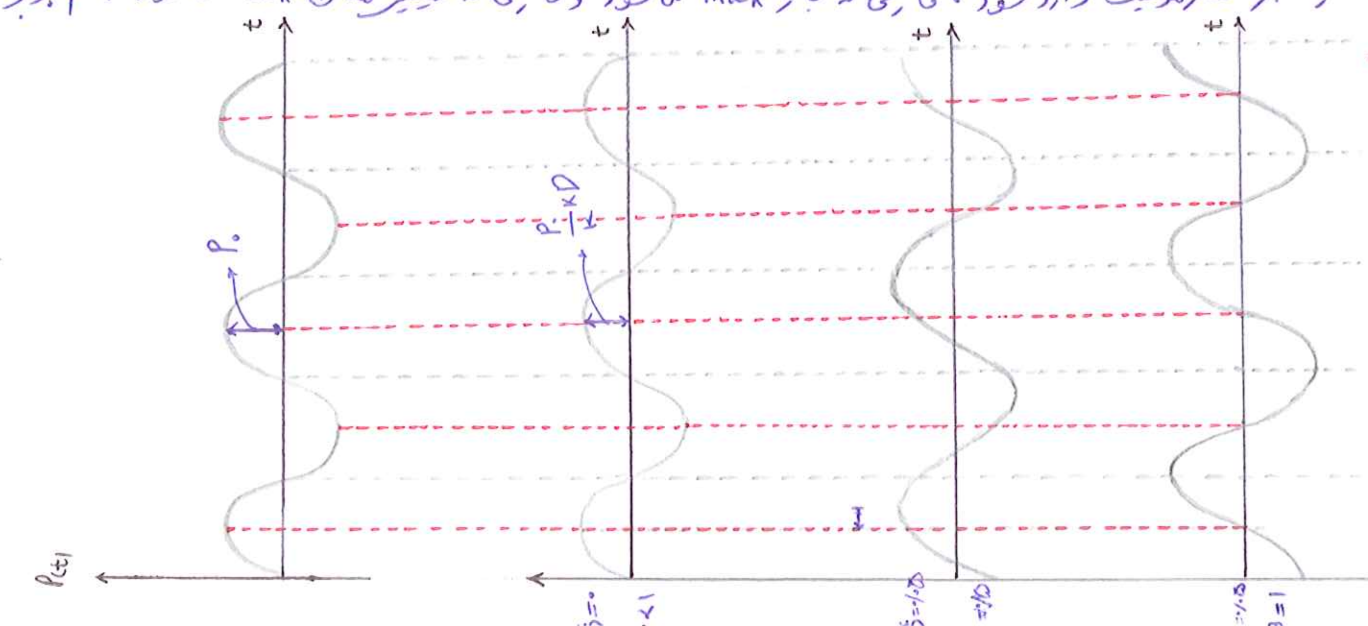
اختلاف فازها:

* β>1 باشد و میرایی صفر باشد
* β<1 باشد اختلاف فاز نداریم



تغییرات زاویه‌ی فاز برحسب بسامد و میرایی

نکته: اگر به سازه بار هارمونیک وارد شود، فازی که بار max می‌شود و فازی که تغییر مکان max می‌شود باهم برابر نیست.



نکته: ξ هرچه باشد در β=1 اختلاف فاز ۹۰ درجه است. یعنی فازی که بار max است تغییر مکان صفر است.

بررسی دقیق تر وضعیت تشدید :

درحالت بدون میرایی ، فرکانس بارگذاری با فرکانس طبیعی یکسان یا نزدیک باشد . یعنی $\beta=1$ باشد.

سؤال : آیا درحالت بامیرایی ، تشدید همان $\beta=1$ است یا خیر؟ ← جواب : بله ، تشدید همان $\beta=1$ است. یعنی زمانی که فرکانس بارگذاری و فرکانس طبیعی باهم برابر باشد.

$$v(t)=\frac{P_0}{k}\times D\sin(\bar{\omega}t-\theta) \rightarrow v_{max}=\frac{P_0}{k}\times D$$

باهم رابطه‌ی مستقیم دارند.

$$D=\frac{1}{\sqrt{[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2]}}$$

$$\Rightarrow D=\frac{1}{[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)]^{1/2}}$$

نکته : بدترین زمانی که $D \rightarrow D_{max}$ می‌شود باید از D نسبت به β مشتق گرفت و برابر صفر قرار داد تا βای را بدست آوریم که عامل به وجود آوردن D_{max} است.

$$\frac{dD}{d\beta}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}[2\times -2\beta(1-\beta^2)+2\times 2\xi\times 2\xi\beta]\times[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)]^{-1/2}=0$$

$$\Rightarrow \beta=\sqrt{1-2\xi^2} \quad \Rightarrow \quad D_{max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

در یک β ای کوچکتر از $\beta=1$ قله به سمت چپ تشکیل می‌شود.

چون میرایی کوچک است ← $\beta\cong 1$ می‌توان فرض کرد. اگر با میرایی ۱۰٪ هم امتحان کنیم $\beta\cong 1$ می‌شود. اگر میرایی صفر باشد $\beta=1$ است و D_{max} خواهیم داشت.

$$\beta=\sqrt{1-2\xi^2}\cong 1$$

در حالت میرایی هم $\beta=1$ وضعیت تشدید را بوجود می‌آورد.

$$D_{max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\cong\frac{1}{2\xi} \Rightarrow D_{max}\cong\frac{1}{2\xi}$$

نکته : در محدوده‌ی تشدید ۱٪ = ξ ← اثرگذار است. یعنی نقش بیشتری دارد.

$$D=\frac{1}{2\xi}=\frac{1}{2\times\frac{1}{100}}=50$$

ماکزیمم تغییرمکان دینامیکی ۵۰ برابر تغییرمکان استاتیکی است.

اگر میرایی ۵٪ = ξ شود ماکزیمم تغییرمکان دینامیکی ۱۰ برابر تغییرمکان استاتیکی است.

$$D=\frac{1}{2\xi}=\frac{1}{2\times\frac{5}{100}}=10$$

تاریخچه زمانی پاسخ در وضعیت تشدید:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t}\left[A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right] + \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega} t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega} t\right]$$

اگر در رابطه ی فوق مقادیر $\beta=1$ و $v(0)=\dot{v}(0)=0$ را قرار دهیم و با ساده سازی به رابطه ی زیر می رسیم

مقدار ناچیز

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2\xi}\,\frac{P_0}{k}\left[e^{-\xi\omega t}\left(\cancel{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\sin\omega_D t + \cos\omega_D t\right) - \cos\bar{\omega} t\right]$$

تقریباً برابر ۱

اگر صرف نظر کنیم

چون $\beta=1$ می باشد پس $\omega=\bar{\omega}$ است. از طرفی به جهت سادگی و نزدیک بودن ω به ω_D این دو را باهم برابر ($\omega_D=\omega$) فرض می کنیم. در معادله ی بالا به جای $\bar{\omega}$ و ω_D، ω قرار می دهیم.

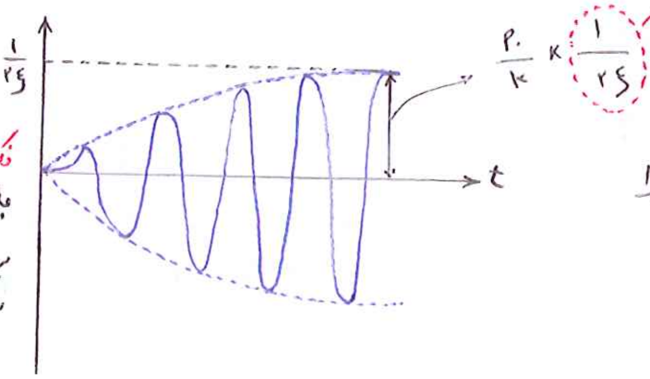
$$\omega_D=\omega\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_D\simeq\omega \qquad \Rightarrow \omega_D=\omega=\bar{\omega}$$

نتیجه: معادله ی تاریخچه زمانی پاسخ در حالت تشدید زمانی که میرایی مخالف صفر باشد ($\xi\neq 0$):

$$\boxed{v(t)=\frac{1}{2\xi}\,\frac{P_0}{k}\left[e^{-\xi\omega t}-1\right]\cos\omega t}$$

نکته: اگر $t\to\infty$ میل کند جمله ی اول برابر صفر خواهد شد.

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{1}{2\xi}\,\frac{P_0}{k}\cos\omega t$$



در سیستم میرا

نکته: بار یک مدتی را می خواهد تا دامنه را به حداکثر تغییر مکان برساند، با وارد کردن بار بلافاصله دامنه ی حداکثر شکل نمی گیرد.

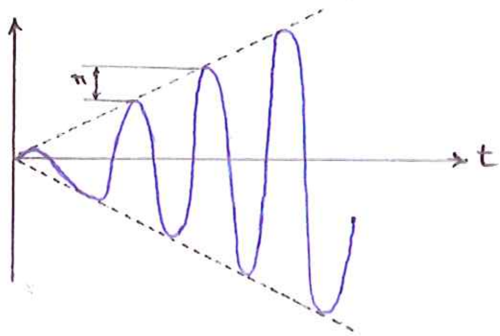
اگر مقدار میرایی صفر باشد ($\xi=0$) معادله بدلیل برابر شدن جواب عمومی و خصوصی مبهم می شود.

پس از رفع ابهام از قانون هوپیتال، خواهیم داشت:

$$v(t)=\frac{P_0}{2k}\left(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right)$$

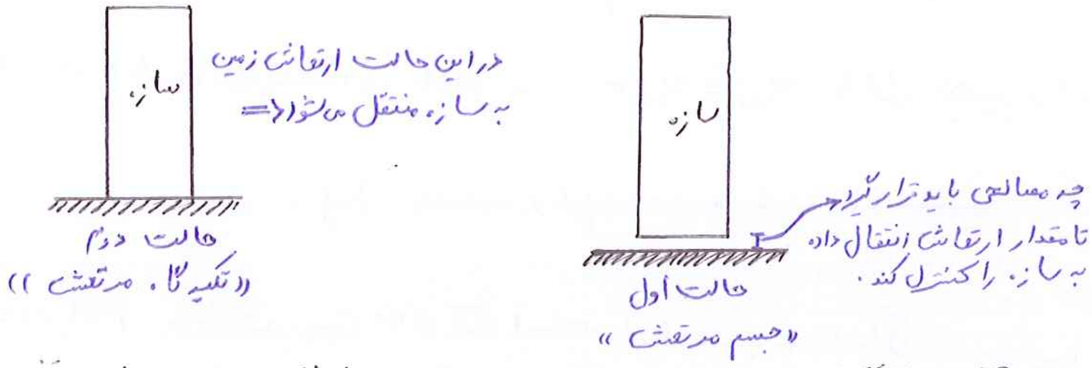
نتیجه: تاریخچه زمانی پاسخ در حالت $\xi=0$

در این حالت ($\xi=0$) هرچه زمان می گذرد دامنه ی ارتعاش نیز افزایش پیدا می کند و در زمان بینهایت به مقدار دامنه بینهایت می رسد.



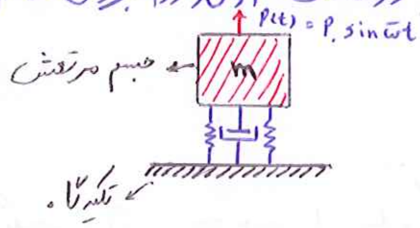
در سیستم نامیرا

جداسازی ارتعاش: ارتعاش دو موضوع نسبت به هم یا دو محیط از هم



جداسازی ارتعاش: دستگاهی که روی سقف قرار گیرند، دامنه‌ی ارتعاش را به سقف انتقال می‌دهد، ما در سقف لرزه‌گیر (ایزولاتور) قرار می‌دهیم تا از لغزش همیشگی سقف جلوگیری شود. این مختص سازه یک درجه آزادی نیست همچنین فقط برای بار هارمونیک نیز نیست. هر گونه ارتعاش را می‌توان کنترل کرد.

در اینجا ما با فرض اینکه فقط بار هارمونیک داریم جداسازی ارتعاش را در دو حالت اول و دوم بررسی می‌کنیم.



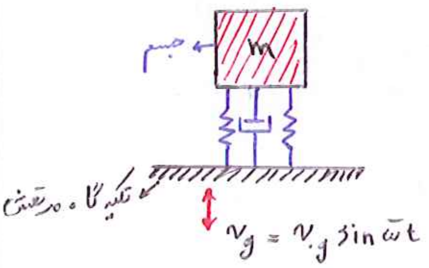
جداسازی ارتعاش

① جسم مرتعش نسبت به تکیه‌گاه

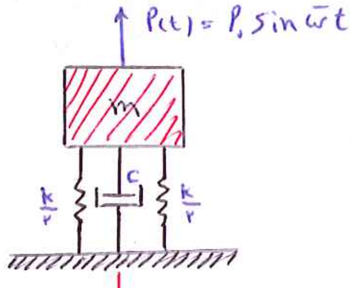
در این حالت نیروی انتقال یافته را بررسی می‌کنیم.

② تکیه‌گاه، مرتعش و جسم روی آن

در این حالت تغییر مکان انتقال یافته را بررسی می‌کنیم.



بررسی حالت ① جسم مرتعش نسبت به تکیه‌گاه



معادله $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P_0 \sin\bar\omega t$

$$v(t) = \underbrace{\frac{P_0}{k}}_{\text{تغییر مکان استاتیکی}} \cdot \underbrace{D}_{\text{ضریب تقویت دینامیکی}} \cdot \underbrace{\sin(\bar\omega t - \theta)}_{\text{شکل ارتعاش}}$$

$F = \underbrace{F_s}_{\text{نیروی فنر}} + \underbrace{F_D}_{\text{نیروی میراگر}}$ نیروی انتقال یافته به تکیه‌گاه

$$\begin{cases} F_s = kv \\ F_D = c\dot{v} \end{cases} \Longrightarrow F = k\,v(t) + c\,\dot{v}(t)$$

رابطه‌ی (I)

$$\begin{cases} v(t) = \frac{P_0}{k} D \sin(\bar\omega t - \theta) \\ \dot{v}(t) = \frac{P_0}{k} D \bar\omega \cos(\bar\omega t - \theta) \end{cases} \Longrightarrow$$

مقادیر $\dot{v}(t)$ و $v(t)$ را در رابطه‌ی (I) قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow F = \frac{P_0}{\cancel{k}} D \sin(\bar{\omega} t - \theta) \times \cancel{k} + \left(c \times \frac{P_0}{k}\right) D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \theta) \qquad , \quad c = 2\xi m \omega$$

$$\frac{2\xi m \omega P_0}{k} = \frac{2\xi \omega P_0}{\underbrace{\frac{k}{m}}_{\to \omega^2}} = \frac{2\xi \cancel{\omega} P_0}{\omega^2} = \frac{2\xi P_0}{\omega}$$

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega} = \beta$$

$$= P_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta) + \frac{2\xi}{\omega} P_0 D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \theta)$$

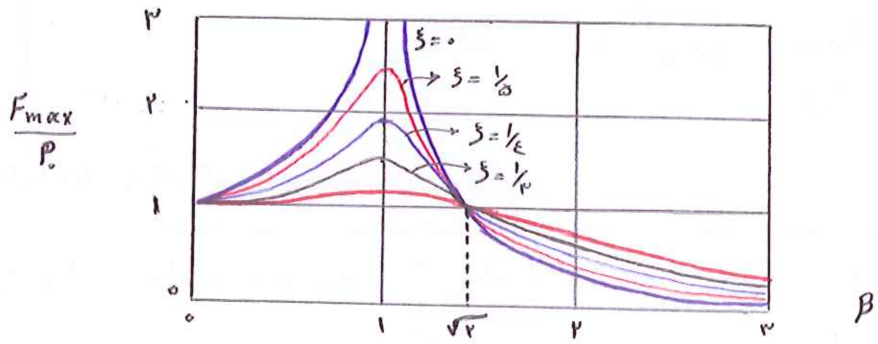
$$= P_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta) + 2\xi P_0 D \beta \cos(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$F_{(t)} = \sqrt{(P_0 D)^2 + (2\xi \beta P_0 D)^2} \times \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$F_{(t)} = P_0 D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \times \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$\boxed{F_{max} = P_0 D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{max}}{P_0} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$



نکته: مقدار نیروی انتقال به ξ و β وابسته است.

نکته: اگر سختی جداگر و میرایی آن در محدوده‌ی $\beta = 1$ قرار بگیرد، بیشترین نیرو انتقال می‌یابد.

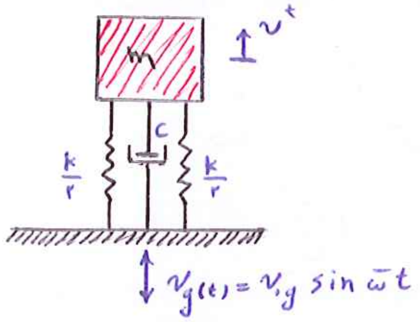
نکات برداشت شده از نمودار:

۱) در $\beta = \sqrt{2}$ میرایی نقشی ندارد. یعنی اگر $\beta = \sqrt{2}$ باشد تمام میرایی‌ها یک پاسخ را دارند یعنی ۱=پاسخ

۲) اگر $\beta > \sqrt{2}$ باشد میرایی اثر معکوس دارد.

۳) در $\beta = 1$ حداکثر پاسخ را داریم.

۲) جداسازی تکیه‌گاه مرتعش و جسم روی آن



به دنبال تغییر مکان جسم هستیم.

$$m\ddot{v}^t + c(\dot{v}^t - \dot{v}_g) + k(v^t - v_g) = 0$$

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v}^t + kv^t = c\dot{v}_g + kv_g$$

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v}^t + kv^t = c\dot{v}_g + kv_g = \underbrace{c\bar{\omega}v_g}_{\text{مثل } P_0}\ \underbrace{\cos\bar{\omega}t}_{\text{شکل ارتعاش}} + \underbrace{k v_g}_{\text{مثل } P_0}\ \underbrace{\sin\bar{\omega}t}_{\text{شکل ارتعاش}}$$

$$v^t_{(t)} = \frac{c\bar{\omega}v_g}{k} D\cos(\bar{\omega}t - \theta) + \frac{\cancel{k} v_g}{\cancel{k}} D\sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

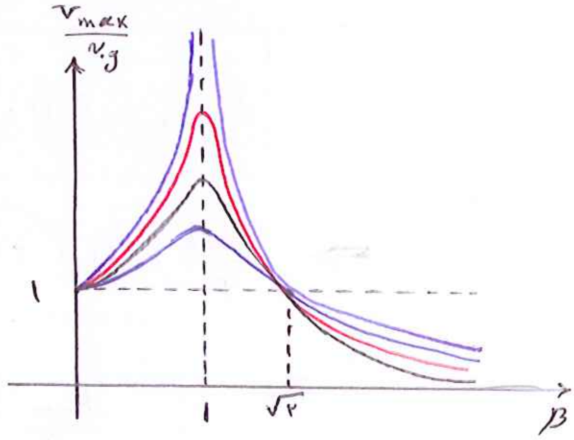
$2\xi m\omega$

$2\xi\beta$

$$v^t_{(t)} = v_g D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}\ \cos(\bar{\omega}t - \theta)$$

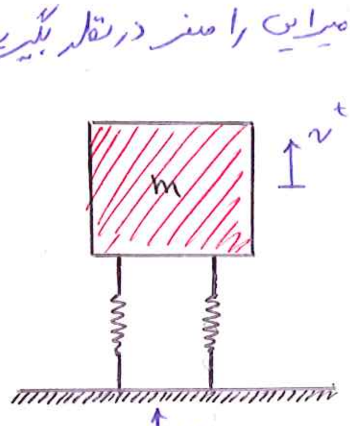
$$\boxed{v^t_{max} = v_g D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{v_{max}}{v_g} = D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$



در $\beta = 1$ بیشترین جابجایی ناشی از ارتعاش تکیه‌گاه، به جسم صورت می‌گیرد.

مثال: یک جعبه حاوی ابزارهای حساس باید در کف آزمایشگاهی نصب شود. این آزمایشگاه دارای ارتعاش قائم با دامنه‌ی 0.03 inch و فرکانس 20 Hz (هرتز) می‌باشد. اگر وزن جعبه 800 پوند باشد تعیین کنید سختی فنر عایق‌بندی جعبه چقدر باشد تا دامنه‌ی حرکت قائم جعبه به 0.005 inch کاهش یابد. میرایی را صفر در نظر بگیرید.



$v_g = 0.03\ in$ ← ارتعاش قائم کف آشپزخانه با دامنه‌ی

$v_{max} = v^t = 0.005\ in$ ← دامنه‌ی حرکت قائم جعبه

$W = 800\ Lb$ ← وزن جعبه

$\bar{\omega} = 20\ Hz$ فرکانس ارتعاش $\begin{cases} 1\ Hz = 2\pi\ \frac{rad}{s} \\ 20\ Hz = 40\pi\ \frac{rad}{s} \end{cases}$

$g = 386\ \frac{inch}{sec}$

$k = ?$

حل مثال :

$$v^{t}_{max} = v_{og} D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

$$\frac{v_{max}}{v_{og}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \times \sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

$$W = 800 \Rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{800}{386}$$

صورت سوال گفته که $\xi = 0$ می باشد. پس از فرمول فوق نتیجه می شود:

$$\frac{v_{max}}{v_{og}} = \frac{1}{|1-\beta^2|} \Rightarrow \frac{0/005}{0/02} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

$$\Rightarrow |1-\beta^2| = 6 \Rightarrow -1+\beta^2 = 6$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 7$$

$$\beta = \sqrt{7}$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \sqrt{7} \Rightarrow \frac{40\pi}{\omega} = \sqrt{7} \Rightarrow \omega = \frac{40\pi}{\sqrt{7}}$$

وزن) $W = mg \Rightarrow m = \frac{W}{g}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{40\pi}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g}}} = \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

$$\Rightarrow \frac{40\pi}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{k\cdot g}{W}}$$

$$\Rightarrow \frac{40\pi}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{k\cdot 386}{800}} \Rightarrow k = \frac{(40\pi)^2 \times 800}{7\times 386} = 47/8\ \frac{Lb}{in}$$

سختی فنر اگر $47/8\ \frac{Lb}{in}$ باشد حداکثر تغییر مکان انتقالی به جعبه $0/005$ اینچ خواهد بود.

سوال : اگر به یک وسیله ای نیرو وارد شود، سختی و میرایی داشته باشیم، چقدر جابجا می شود؟

$v(t) = \frac{P_0}{k} D \sin(\bar{\omega} t - \theta)$ جواب ارتعاش هارمونیک $\qquad C = 2\xi m\omega$

اندازه گیری میرایی : میرایی جزئی از خصوصیات سازه ای است مانند وزن و سختی و می توان آن را اندازه گیری کرد.

۱) روش کاهش دامنه (ارتعاش آزاد و داشتن دامنه در دو سیکل متوالی یا غیر متوالی) $\quad \xi = \frac{v_n - v_{n+1}}{2\pi \cdot v_{n+1}}$ یا $\xi = \frac{v_n - v_{n+m}}{2\pi \cdot m \cdot v_{n+m}}$

۲) روش تقویت تشدید $\quad \xi = \frac{1}{2}\frac{v_{st}}{v_{max}}$

۳) روش نیم توان $\quad \xi = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)$ یا $\xi = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)$

۴) روش اتلاف انرژی در وضعیت تشدید $\quad \xi = \frac{W_D}{4\pi W_S}$

② روش تقویت تشدید :

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Rightarrow \text{اگر } \beta = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2\xi}$$

تغییر مکان ماکزیمم

$$v_{max} = D \cdot \frac{P_0}{k} \Rightarrow D = \frac{v_{max}}{\frac{P_0}{k}}$$

تغییر مکان استاتیکی

$$\Rightarrow \frac{v_{max}}{\frac{P_0}{k}} = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2}\frac{v_{st}}{v_{max}}}$$

$v_{st} = \frac{P_0}{k}$

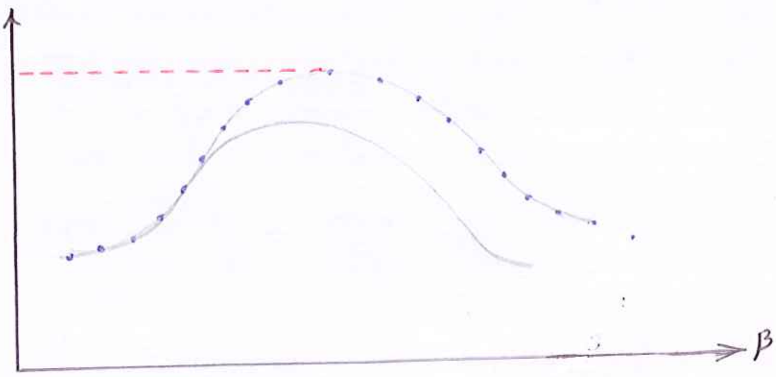
تغییر مکان استاتیکی را از بارگذاری بدست می‌آوریم.

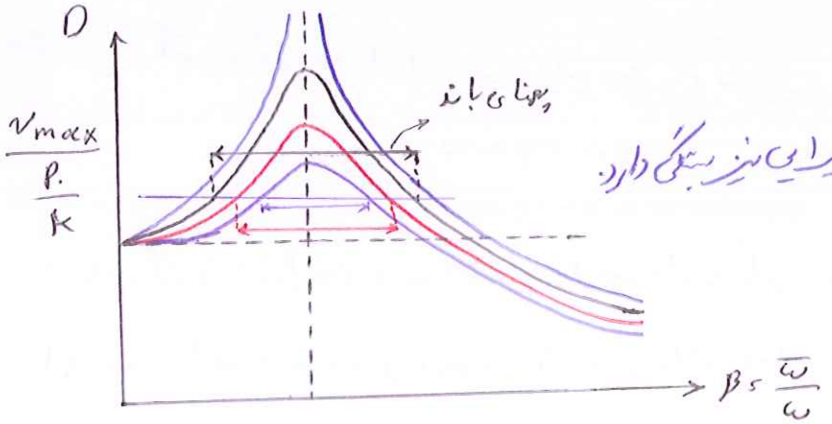
اگر یک سازه با فرکانس مشخص، بار هارمونیک وارد شود، حداکثر نقطه را اندازه می‌گیریم
با هر بار عوض کردن فرکانس، یک نقطه بدست می‌آید با وصل کردن نقاط به هم نمودار ترسیم می‌شود
و از این طریق حداکثر نقطه روی نمودار بیانگر حداکثر تغییر مکان می‌باشد.

v_{max} (تغییر مکان حداکثر) در وضعیت تشدید

$\theta = \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \rightarrow \beta = 1$

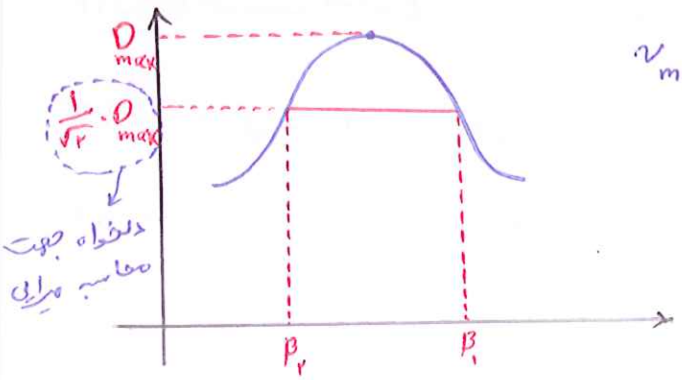
$\theta = 90^\circ \rightarrow$ در وضعیت تشدید v_{max} بدست می‌آید





پهنای خطی که نقاط را به هم وصل می‌کند به میرایی نیز بستگی دارد.

③ روش نیم توان :



$$v_{max} = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \rightarrow D$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt2} D_{max} \qquad D_{max} \rightarrow \frac{1}{2\xi}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt2} \times \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \boxed{\xi \simeq \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}$$

این نمودار از آزمایشگاه بدست می‌آید

$\beta_2 - \beta_1 = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \doteq 2\xi$, $\beta_2 + \beta_1 = 2(1-\xi^2) \doteq 2 \Rightarrow \xi = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} = \frac{\bar\omega_2 - \bar\omega_1}{\ldots}$ یا $\xi = \frac{1}{2}(\bar\omega_1 - \bar\omega_2)$

در این روش دیگر به تغییر مکان استاتیکی نیاز نیست. ($v_{st} = \frac{P_0}{k}$).

نکته: در $\beta = 1$ نیروی اینرسی و نیروی استاتیک با هم برابر خواهد شد. نیروی میرایی نیز با نیروی خارجی برابر است.

(۴) روش اتلاف انرژی در وضعیت تشدید:

$\beta = 1$

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P_0 \sin \bar{\omega} t$$

با هم برابر هستند.   با هم برابرند.

$$v = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta) \qquad \rho = \frac{P_0}{k} D$$

نیروی اینرسی $F_I = m\ddot{v}$

$$\Rightarrow \ddot{v} = -\frac{P_0}{k} D \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$F_I = m\ddot{v} = -m \times \frac{P_0}{k} D \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

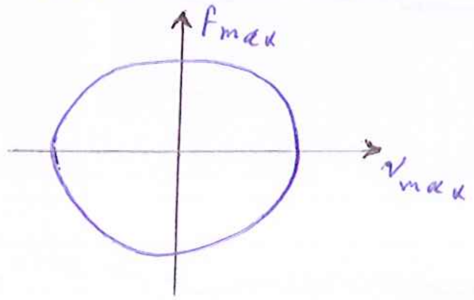
$$= -P_0 D \beta^2 \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

$$\Rightarrow \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_I = -P_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta)}$$ نیروی اینرسی

نیروی الاستیک $F_e = kv = k \frac{P_0}{k} D \sin(\bar{\omega} t - \theta) = P_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta)$

$$\Rightarrow \boxed{F_e = P_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta)}$$ نیروی الاستیک

نکته: همانطور که مشخص شد نیروی اینرسی و الاستیک کاملاً مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.



(نیروی میرایی و تغییر مکان = بار خارجی و تغییر مکان)

$$v_t = \frac{P_0}{k} D \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad , \quad \frac{P_0}{k} D = v_0$$

$$\Rightarrow v_{(t)} = v_0 \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

میرایی ویسکوز $f_D = c\dot{v}_{(t)} = c v_0 \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \theta)$

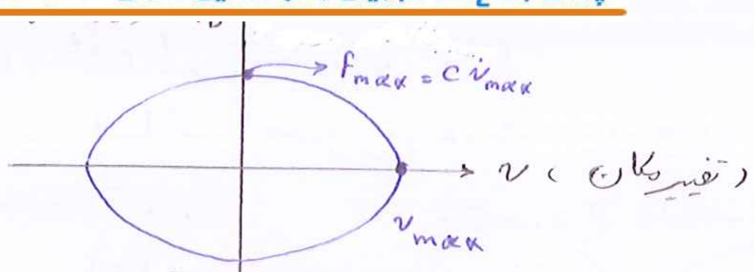
$$= c v_0 \bar{\omega} \left[1 - \sin^2(\bar{\omega} t - \theta)\right]^{1/2}$$

$$= c\bar{\omega} \left[v_0^2 - v_0^2 \sin^2(\bar{\omega} t - \theta)\right]^{1/2}$$

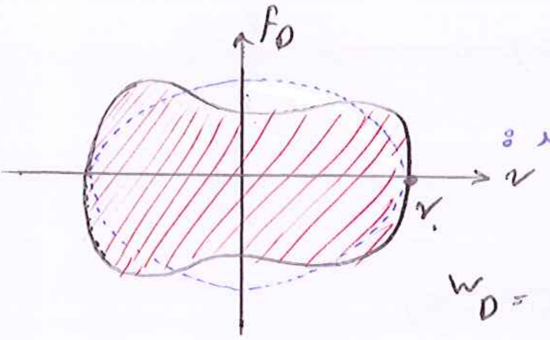
نیروی استهلاک ← $f_D^2 = c^2 \bar{\omega}^2 \left[v_0^2 - \underbrace{v_0^2 \sin^2(\bar{\omega} t - \theta)}_{v_{(t)}^2}\right]$

$$\Rightarrow f_D^2 = c^2 \bar{\omega}^2 \left[v_0^2 - v_{(t)}^2\right]$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{f_D}{c\bar{\omega} v_0}\right)^2 + \left(\frac{v_{(t)}}{v_0}\right)^2 = 1\right] \rightarrow$$ معادله بیضی



$$c\dot{v}_{max} = c v \bar{\omega} = f_{max} \Rightarrow \boxed{c = \frac{f_{max}}{v\bar{\omega}}}$$



در شرایط آزمایشگاهی منحنی به صورت شکل روبرو درخواهد آمد:
مساحت منحنی جدید با منحنی قبل برابر است.
مساحت زیر منحنی بدست آمده از آزمایش $W_D = \pi v_0 f_{max}$

$$\Rightarrow f_{max} = \frac{W_D}{\pi v_0} \qquad c = \frac{f_{max}}{v_0\bar{\omega}} = \frac{W_D}{\pi v_0^2 \bar{\omega}}$$

$$\Rightarrow c = \frac{W_D}{\pi v_0^2 \bar{\omega}}$$ میرایی معادل با میرایی ویسکوز

مخرج را در $\frac{k}{k}$ ضرب می‌کنیم $\Rightarrow c = \dfrac{W_D}{\pi v_0^2 \bar{\omega} \times \frac{k}{k}}$

$k v_0^2 = \frac{1}{2} W_s$

$\Rightarrow W_s = \frac{1}{2} k v_0^2$

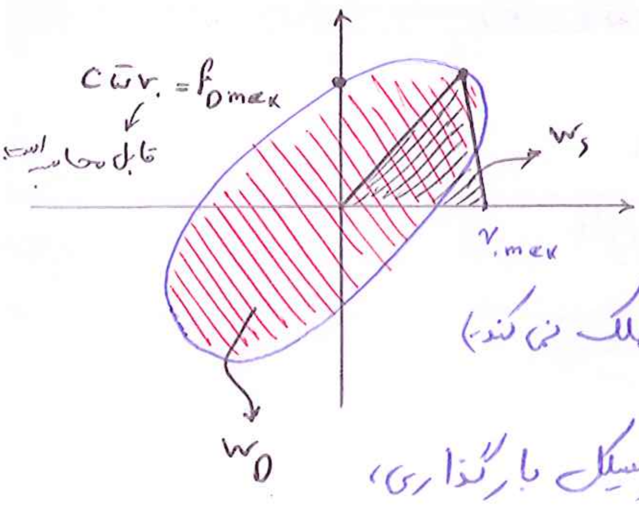
$$\Rightarrow c = \frac{W_D}{2\pi W_s \frac{\bar{\omega}}{k}}$$

W_s = انرژی کرنشی الاستیک در تغییر مکان v_0

$$\Rightarrow \xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{\frac{W_D \cdot k}{2\pi W_s \bar{\omega}}}{2m\omega}$$

وضعیت تشدید $\beta = 1 \rightarrow \bar{\omega} = \omega$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{W_D}{4\pi W_s}}$$



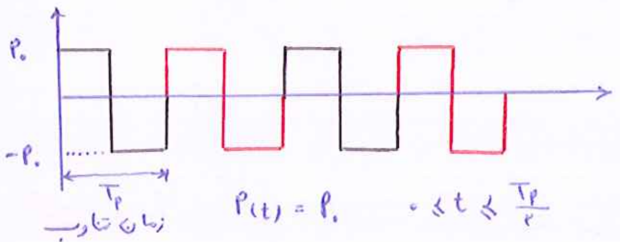
- در حالتیکه هم نیروی میرایی و هم نیروی الاستیک مؤثر باشد فقط جهت بیضی تغییر می‌کند و سطح زیر منحنی ثابت و برابر مساحت قبل است.
در حالت قبل فقط نیروی میرایی مؤثر بود.

- نیروی الاستیک هیچ انرژی را جذب نمی‌کند (مستهلک نمی‌کند)

- با محاسبه مقدار انرژی مستهلک شده در هر سیکل بارگذاری، می‌توان مقدار میرایی را محاسبه کرد.

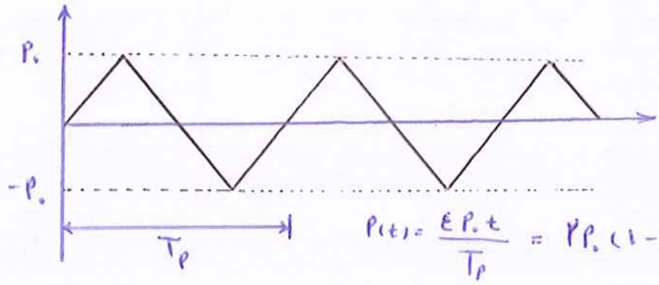
تحلیل دینامیکی سازه یک درجه آزادی:

- ارتعاش آزاد ← $P(t)=0$
- ارتعاش اجباری ← $P(t)\neq 0$
  - بار هارمونیک ($P(t)=P_0 \sin\bar{\omega}t$) ← $v(t)=\frac{P_0}{k} D\sin(\bar{\omega}t-\theta)$
  - بار متناوب (الزاماً هارمونیک نیست - یعنی در یک زمان مشخص تکرار میشود)



$P(t)=P_0 \qquad 0\le t\le \frac{T_p}{2}$

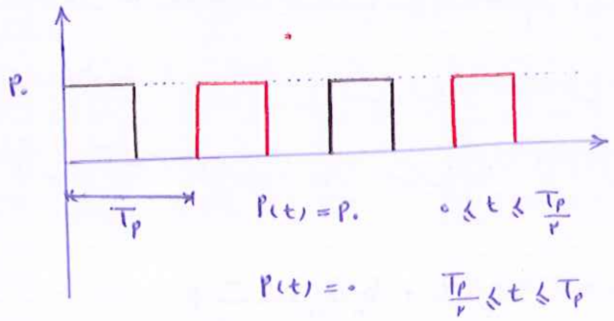
$P(t)=-P_0 \qquad \frac{T_p}{2}\le t\le T_p$



$P(t)=\frac{4P_0 t}{T_p}$

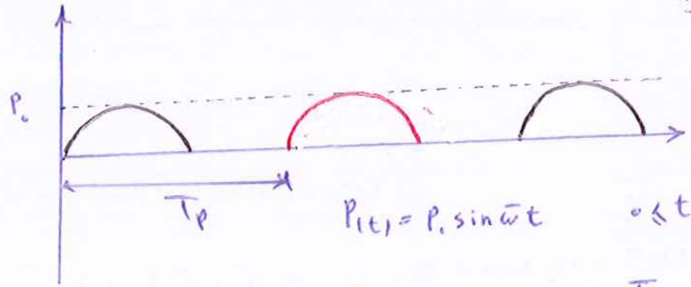
$P(t)=2P_0\left(1-\frac{2t}{T_p}\right) \qquad \frac{T_p}{4}\le t\le \frac{3T_p}{4}$

$P(t)= \qquad \frac{3T_p}{4}\le t\le T$



$P(t)=P_0 \qquad 0\le t\le \frac{T_p}{2}$

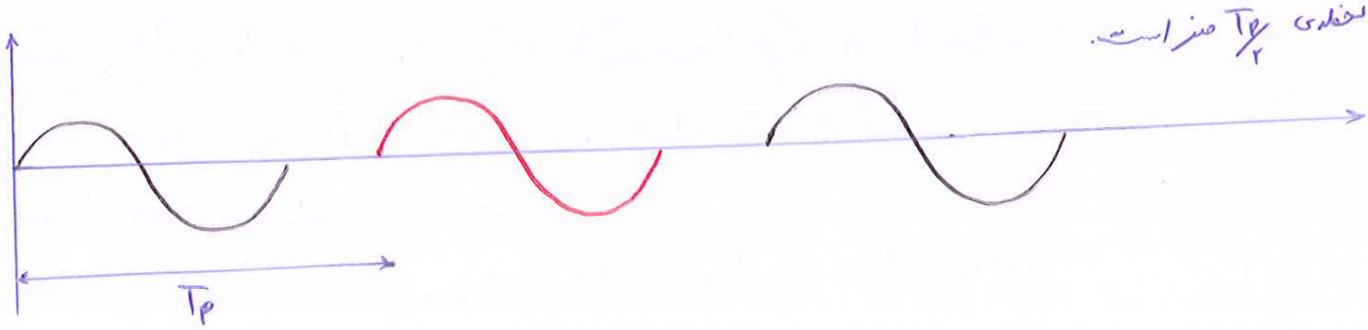
$P(t)=0 \qquad \frac{T_p}{2}\le t\le T_p$



$P(t)=P_0\sin\bar{\omega}t \qquad 0\le t< \frac{T_p}{2}$

$P(t)=0 \qquad \frac{T_p}{2}\le t\le T_p$

در لحظه‌ی $T_p/2$ صفر است.



معادله‌ی تعادل

$$m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=P(t)$$

از نوع بار متناوب

نکته: هر بار متناوب را می‌توان برحسب توابع هارمونیک بسط داد (با استفاده از سری فوریه)

$$\boxed{P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\bar{\omega}_n t+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\bar{\omega}_n t}$$

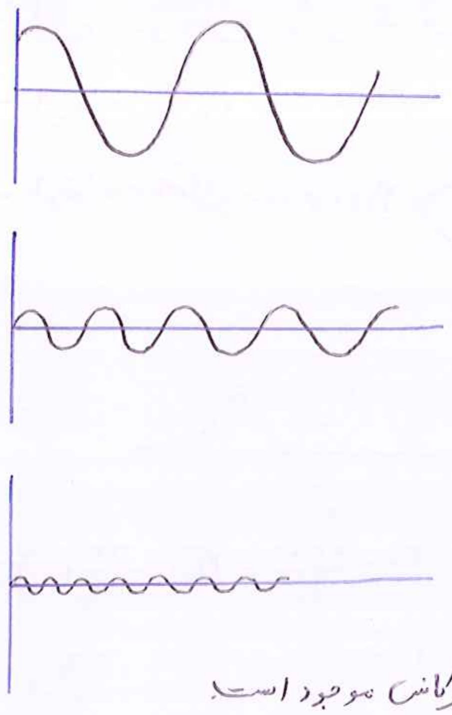
$$a_0=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\,dt$$

زمان تناوب

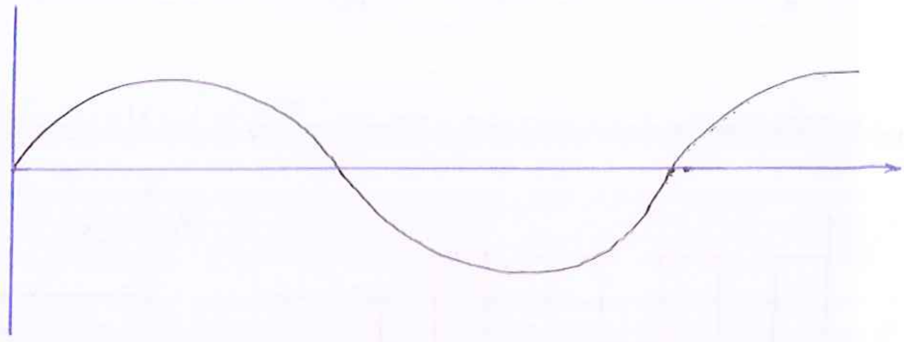
$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos\bar{\omega}_n t\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin\bar{\omega}_n t\,dt$$

$$\bar{\omega}_n=n\bar{\omega}_1=n\frac{2\pi}{T_p}$$



نکته: بینهایت تابع هارمونیک با فرکانس های مختلف،
می توان یک تابع متناوب بسازیم.



نکته: یک تابع متناوب بینهایت فرکانس دارد.

در بار هارمونیک یک فرکانس داشتیم، اما در بار متناوب بینهایت فرکانس موجود است.

در حالت بار متناوب، فرکانس ها منفصل هستند و پیوسته نیستند.

اگر فرکانس طبیعی با ω_2 برابر باشد، دامنه ی همان فرکانس را حداکثر می کند.

$$a_0 + a_1\cos\bar{\omega}_1 t + a_2\cos\bar{\omega}_2 t + \dots a_n\cos\bar{\omega}_n t + b_1\sin\bar{\omega}_1 t + b_2\sin\bar{\omega}_2 t + \dots b_n\sin\bar{\omega}_n t$$

اگر بارگذاری متناوب باشد بینهایت فرکانس بارگذاری داریم که n تا بینهایت می رود.

همه ی جملات جمع شوند $P(t)$ را بوجود می آورد. اما ضریب a_2 کمتر از a_1 است.

سهم مود های بالاتر در شکل تابع کمتر است.

اگر چند جمله ی اول را حساب کنیم و از مابقی جمله صرف نظر کنیم اتفاقی نمی افتد.

نکته: سهم فرکانس های بالاتر در پاسخ کمتر است، یا دامنه ی فرکانس بالاتر، کوچکتر است.

با مقادیر $P(t)$ ضرایب بدست می آید.

نکته:

اگر $P(t)$ فرد باشد: $P(t) = -P(t) \Rightarrow a_0 = a_n = 0$

اگر $P(t)$ زوج باشد: $P(t) = P(t) \Rightarrow b_n = 0$

اگر نه زوج باشد و نه فرد، باید همه ی ضرایب را حساب کرد.

بار متناوب

$$m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=p(t)$$

$$\downarrow$$

تغییر مکان

$$a_0+a_1\cos\bar{\omega}_1 t+a_2\cos\bar{\omega}_2 t+\dots+a_n\cos\bar{\omega}_n t+b_1\sin\bar{\omega}_1 t+b_2\sin\bar{\omega}_2 t+\dots+b_n\sin\bar{\omega}_n t$$

$$v(t)=\frac{a_0}{k}+\frac{a_1}{k}D_1\cos(\bar{\omega}_1 t+\theta_1)+\frac{a_2}{k}D_2\cos(\bar{\omega}_2 t-\theta_2)+\dots+\frac{a_n}{k}D_n\cos(\bar{\omega}_n t-\theta_n)$$

$$+\frac{b_1}{k}D_1\sin(\bar{\omega}_1 t-\theta_1)+\frac{b_2}{k}D_2\sin(\bar{\omega}_2 t-\theta_2)+\dots+\frac{b_n}{k}D_n\sin(\bar{\omega}_n t-\theta_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{k}D_n\cos(\bar{\omega}_n t-\theta_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{k}D_n\sin(\bar{\omega}_n t-\theta_n)}$$

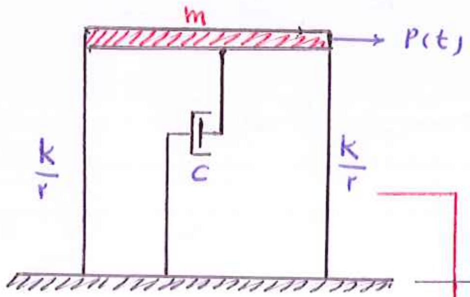
$$v(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{k}\times\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi_n\beta_n)^2}\cdot\left[(1-\beta_n^2)\cos\bar{\omega}_n t-2\xi_n\beta_n\sin\bar{\omega}_n t\right]$$

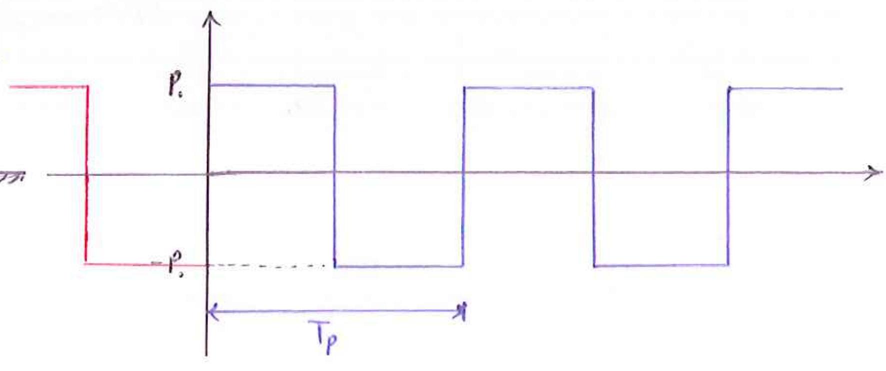
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{k}\times\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi_n\beta_n)^2}\cdot\left[(1-\beta_n)^2\sin\bar{\omega}_n t-2\xi_n\beta_n\cos\bar{\omega}_n t\right]$$

$$\beta_n=n\beta_1=n\frac{\bar{\omega}_1}{\omega}=\frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}=\frac{\bar{\omega}_n}{\omega}\quad,\quad \bar{\omega}_n=\frac{2\pi n}{T_p}$$

$T_p \longrightarrow$ زمان تناوب بار

مثال: سازه یکدرجه آزادی تحت بار متناوب مطابق شکل زیر قرار گرفته است.
تاریخچه زمانی پاسخ را برای این سازه، محاسبه کنید.





$$p(t)=P_0\qquad 0\leq t\leq\frac{T_p}{2}$$

$$m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=p(t)$$

$$p(t)=-P_0\qquad \frac{T_p}{2}\leq t\leq T_p$$

$$\boxed{p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\bar{\omega}_n t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\bar{\omega}_n t}$$

فرد $\rightarrow p(-t)=-p(t)\longrightarrow$ در تابع فرد $\longrightarrow a_0=a_n=0 \Rightarrow \boxed{p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\bar{\omega}_n t}$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)\sin\frac{2\pi n}{T_p}t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\sin\bar{\omega}_n t\,dt = \frac{2}{T_p}\left[\int_0^{T_p/2} p_0 \sin\bar{\omega}_n t\,dt - \int_{T_p/2}^{T_p} p_0 \sin\bar{\omega}_n t\,dt\right]$$

$$\bar{\omega}_n = \frac{2\pi n}{T_p}$$

$$= \frac{4}{T_p}\int_0^{T_p/2} \sin\bar{\omega}_n t\,dt = \frac{4}{T_p}\int_0^{T_p/2} \sin\frac{2\pi n}{T_p} t\,dt$$

$$\boxed{b_n = \frac{4}{T_p}\int_0^{T_p/2} \sin\frac{2\pi n}{T_p} t\,dt}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{b_n = 0 \rightarrow n = \text{زوج}}$ و $\boxed{b_n = \frac{2p_0}{n\pi} \rightarrow n = \text{فرد}}$

$$p(t) = \frac{2p_0}{\pi}\sin\bar{\omega}_1 t + \frac{2p_0}{3\pi}\sin\bar{\omega}_3 t + \frac{2p_0}{5\pi}\sin\bar{\omega}_5 t + \frac{2p_0}{7\pi}\sin\bar{\omega}_7 t + \dots$$

نکته: سهم دامنه ی فرکانس های بالاتر کمتر است.

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = \frac{2p_0}{\pi}\sin\bar{\omega}_1 t + \frac{2p_0}{3\pi}\sin\bar{\omega}_3 t + \frac{2p_0}{5\pi}\sin\bar{\omega}_5 t + \frac{2p_0}{7\pi}\sin\bar{\omega}_7 t + \dots$$

نتیجه: تاریخچه زمانی پاسخ در برابر بار متناوب.

$$\boxed{v(t) = \frac{2p_0}{k\pi}D_1\sin(\bar{\omega}_1 t - \theta_1) + \frac{2p_0}{3k\pi}D_3\sin(\bar{\omega}_3 t - \theta_3) + \frac{2p_0}{5k\pi}D_5\sin(\bar{\omega}_5 t - \theta_5) + \dots}$$

اگر k ، m و ξ معلوم باشد درنتیجه همه معلوم است. این سوال پارامتری است.

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}}$$

$$\beta_n = n\beta_1 = n\frac{\bar{\omega}_1}{\omega} = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega} = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega}$$

$$\bar{\omega}_n = \frac{2\pi n}{T_p}$$

$T_p \rightarrow$ زمان تناوب بار

تحلیل دینامیکی سازه با یک درجه آزادی

۱) ارتعاش آزاد $P(t)=0$

۲) ارتعاش اجباری $P(t)\neq 0$

- بار هارمونیک: $P(t)=P_0\cos\bar{\omega}_n t$ یا $P(t)=P_0\sin\bar{\omega}_n t$
- بار متناوب (بار در یک زمان تکرار شود) (سری فوریه ← تبدیل به توابع هارمونیک)
- توابع نمایی

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\bar{\omega}_n t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\bar{\omega}_n t$$

بار متناوب را می‌توان برحسب توابع نمایی نیز نوشت.

$$\begin{cases}\sin\omega t=\dfrac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\\[2mm] \cos\omega t=\dfrac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\end{cases}$$

بار متناوب برحسب توابع نمایی

$$\begin{cases}P(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{in\bar{\omega}t}\\[2mm] C_n=\dfrac{1}{T_p}\displaystyle\int^{T_p}P(t)\cdot e^{-in\bar{\omega}t}\,dt\end{cases}$$

یا $P(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\cdot e^{\frac{2\pi n i}{T_p}t}$

$$m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=\underbrace{P(t)}_{\text{بار متناوب}}=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n\cdot e^{in\bar{\omega}t}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ (طرف دوم تابع نمایی است)

$$\boxed{m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=e^{i\bar{\omega}t}}$$

پاسخ بار نمایی را حساب نکرده‌ایم. اگر این پاسخ را حساب کنیم، پاسخ در حوزه‌ی فرکانس بدست آورده‌ایم.

$$\begin{cases}v(t)=H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}\\ \dot{v}(t)=i\bar{\omega}H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}\\ \ddot{v}(t)=-\bar{\omega}^2H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}\end{cases}$$

جایگذاری در معادله

$$\Rightarrow m\left(-\bar{\omega}^2 H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}\right)+c\left(i\bar{\omega}\cdot H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}\right)+k\left(H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}\right)=e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow\left[-\bar{\omega}^2\cdot m+i\bar{\omega}\cdot c+k\right]H(\bar{\omega})\cancel{e^{i\bar{\omega}t}}=\cancel{e^{i\bar{\omega}t}}$$

$$\Rightarrow H(\bar{\omega})=\frac{1}{k-\bar{\omega}^2m+i\bar{\omega}\underbrace{c}_{2\xi m\omega}}$$

تابع فرکانس مختلط:

اگر به جای c مقدار $2\xi m\omega$ و همچنین از $1/k$ فاکتور بگیریم داریم:

$$\boxed{H(\bar{\omega})=\frac{1}{k}\,\frac{1}{(1-\beta^2)+2\xi\beta i}}$$

تابع فرکانس مختلط

اگر بار یک بار نمایی باشد پاسخ برابر با $\boxed{v_{(t)} = H(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t}}$ خواهد بود که تابع زمانی مختلط برابر است با $\boxed{H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k}\,\frac{1}{(1-\beta^2)+2\xi\beta i}}$

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = C_n e^{in\bar{\omega} t} \longrightarrow \text{تابع}$$

$$v(t) = C_n H(n\bar{\omega}) e^{in\bar{\omega} t} \longleftarrow \text{پاسخ}$$

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\bar{\omega} t}$$

اگر تابع $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\bar{\omega} t}}$ باشد

پاسخ برابر با $\boxed{v_{(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H(n\bar{\omega}) e^{in\bar{\omega} t}}$

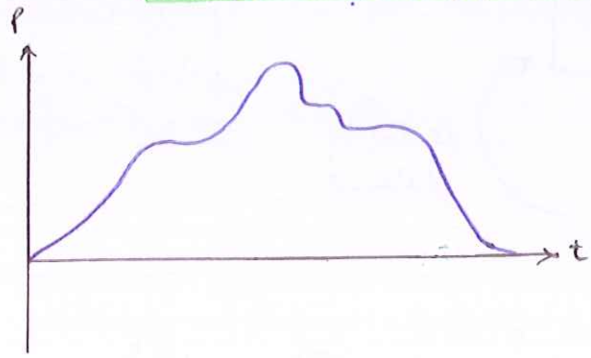
تحلیل دینامیکی سازه یکدرجه آزادی:

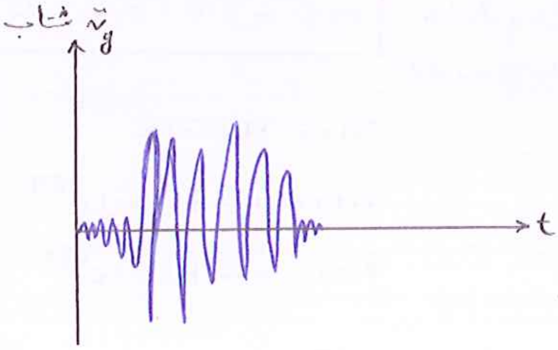
ارتعاش آزاد $P(t) = 0$

ارتعاش اجباری $P(t) \neq 0$

- بار هارمونیک: $P(t) = P_0 \cos\bar{\omega} t$ یا $P(t) = P_0 \sin\bar{\omega} t$
- بار متناوب: $P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\bar{\omega} t$

  $P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\bar{\omega}_n t}$
- بارگذاری کلی (مانند زلزله - ضربه - انفجار و ...)

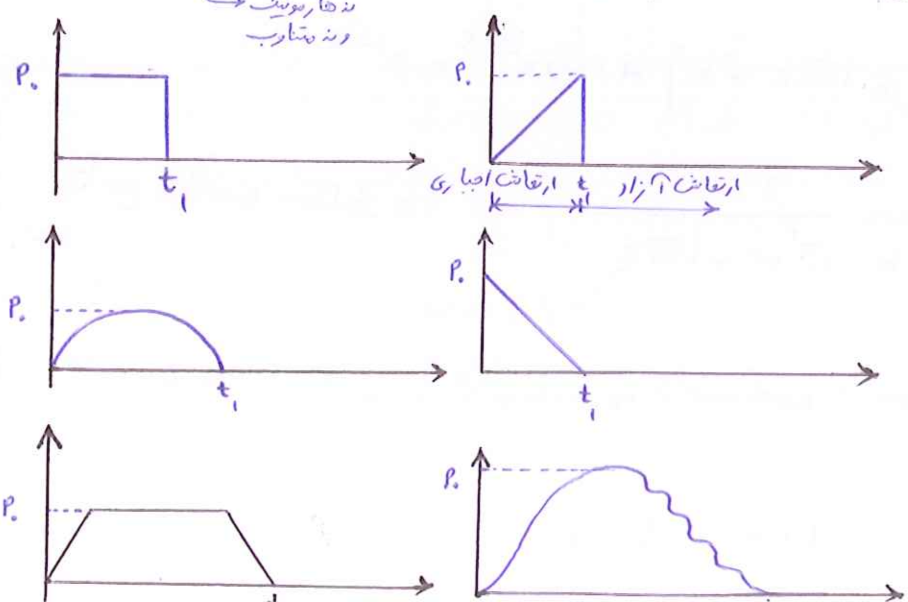




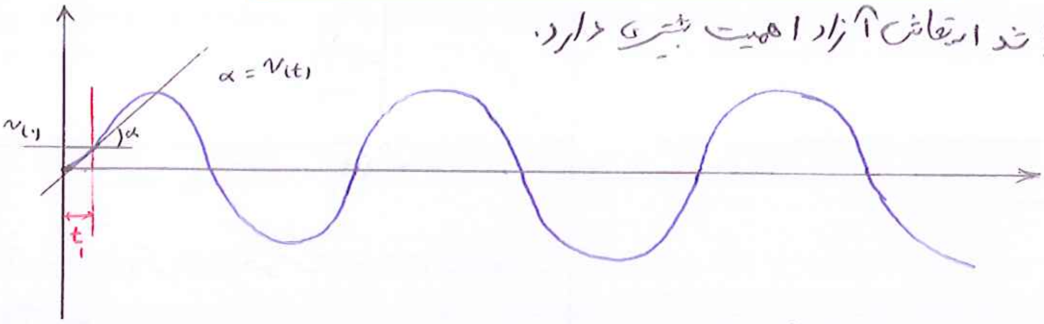
نیروی زلزله یا نیروی خارجی چنین تابعی است که نه هارمونیک و نه متناوب است. $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P(t)$ نه هارمونیک و نه متناوب

در چنین شرایطی پاسخ چه می باشد؟

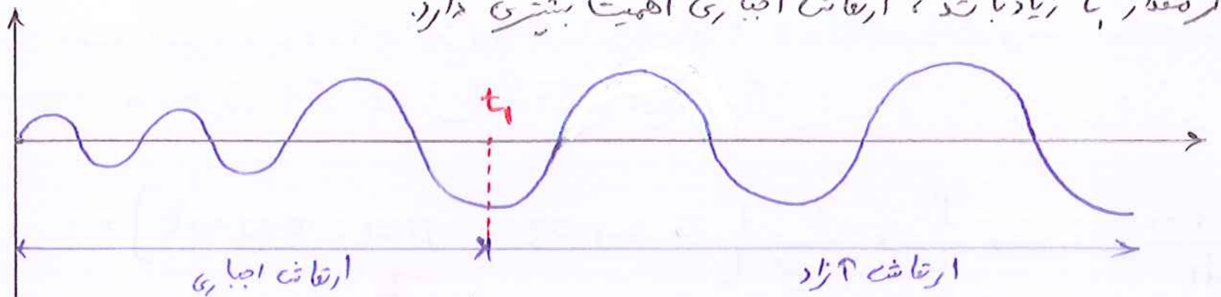
تحلیل سازه در برابر بار ضربه:



نکته: اگر مقدار t_1 کم باشد ارتعاش آزاد اهمیت بیشتری دارد.

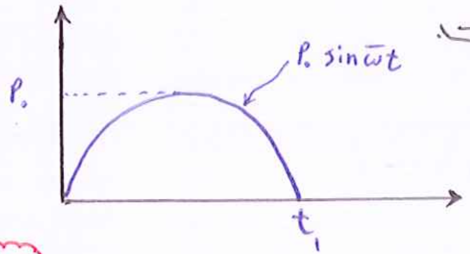


نکته: اگر مقدار t_1 زیاد باشد، ارتعاش اجباری اهمیت بیشتری دارد.



نتیجه: برای پیدا کردن جواب، باید هر دو جواب را پیدا کنیم. اگر در ارتعاش اجباری $t_1 < t$ باشد پس جواب max در ارتعاش آزاد است.

اگر $t < t_1$ شد، جواب max در ارتعاش اجباری است.



* بررسی چند نمونه از بارها:

فاز ارتعاش اجباری $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P_0 \sin\bar{\omega} t$

هرچه t_1 کمتر باشد، میرایی تأثیر کمتری دارد:

$t \le t_1 \rightarrow m\ddot{v} + kv = P_0 \sin\bar{\omega} t$

$v(t) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} (\sin\bar{\omega} t - \beta \sin\omega t)$ پاسخ ارتعاش اجباری بدون میرایی

جواب پایدار — جواب گذرا

$t \ge t_1 \rightarrow v(t) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} \sin\omega(t-t_1) + v(t_1) \cos(t-t_1)$ پاسخ سمت ارتعاش آزاد بدون میرایی

v_0 در ارتعاش آزاد در زمان t_1 شروع می‌شود.

پاسخ سمت ارتعاش آزاد با میرایی

$$v(\bar{t}) = e^{-\xi\omega(t-t_1)} \left[\frac{\dot{v}(t_1) + \xi\omega v(t_1)}{\omega_D} \cdot \sin\omega(t-t_1) + v(t_1) \cos\omega(t-t_1) \right]$$

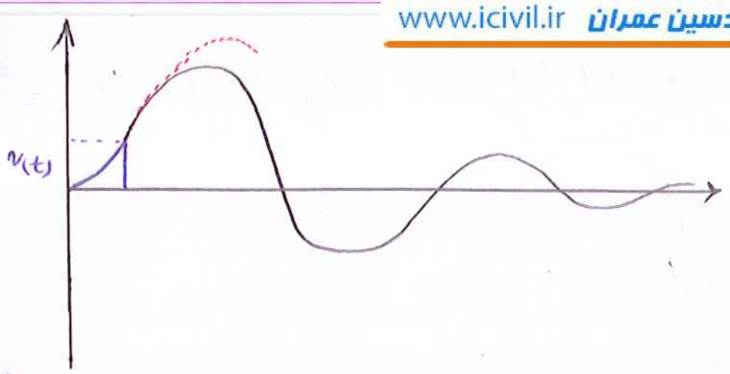
$\rightarrow t_1 < t \rightarrow \bar{t} = t - t_1 \geq 0$

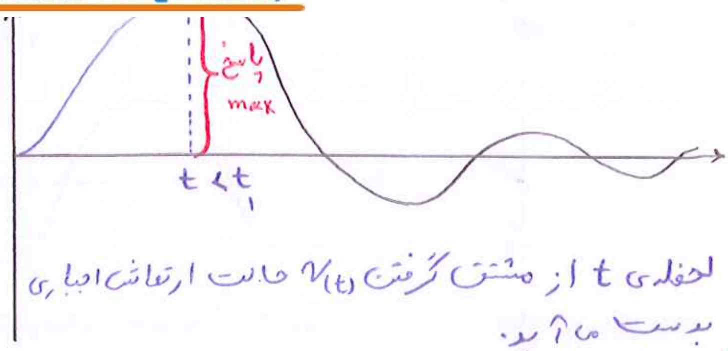
(با میرایی) $v(\bar{t}) \simeq v(t)$ (بدون میرایی)

پاسخ حداکثر سازه تحت بارگذاری:

برای مشخص شدن v_{max} ابتدا باید از معادله‌ی اول (ارتعاش اجباری) مشتق گرفت. این مشتق از خود تابع است ($P(t) = \sin\omega t$)، پس به t وابسته نیست و مقدار max را در هر قسمت از دامنه که باشد نشان می‌دهد. چه قبل از t_1 باشد و چه بعد از t_1. اگر قبل از t_1 باشد یعنی در ارتعاش اجباری به max رسیده و اگر بیشتر از t_1 باشد که اصلاً با شرط تناقض دارد.

اگر یک زلزله ای به مدت ۴۰ ثانیه به سازه وارد شود، هر اتفاقی در همین ۴۰ ثانیه رخ می‌دهد





لحظه‌ی t از مشتق گرفتن $v(t)$ حالت ارتعاش اجباری بدست می‌آید.

نکته: برای اینکه max پاسخ در ارتعاش آزاد رخ دهد، زمان اعمال بار باید کوچک باشد و نتیجه اینکه پاسخ ارتعاش آزاد ملاک است. یعنی هر چه t_1 کوچک‌تر باشد امکان ایجاد حداکثر پاسخ در فاز دوم می‌باشد.

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2}\left[\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t - \underbrace{\beta\omega}_{\bar{\omega}} \cdot \cos\omega t\right] = 0$$

$$\bar{\omega}t = 2\pi n \pm \omega t \qquad n = 1, 2, 3, \dots \qquad t_1 = \frac{T_P}{2}$$

$$T_1 = \frac{T_P}{2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\bar{\omega}} = \frac{\pi}{\bar{\omega}} \longrightarrow \bar{\omega} = \frac{\pi}{t_1}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi}{t_1}t = 2\pi n \cancel{\pm} \omega t$$

(−) قابل قبول نیست

$$\longrightarrow \left(\frac{\pi}{t_1} + \omega\right)t = 2\pi n \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\pi}{t_1} + \frac{2\pi}{T}\right)t = 2\pi n \Longrightarrow t = \frac{2\pi n}{\left(\frac{\pi}{t_1} + \frac{2\pi}{t_1}\right)} = \frac{2n}{1 + \frac{2t_1}{T}}\, t_1$$

$$n = 1 \Rightarrow t = \frac{2}{1 + \frac{2t_1}{T}} \cdot t_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t_1}{T} > \dfrac{1}{2} & \text{پاسخ max در فاز ① است.} \quad \text{یا } t_1 \geq \frac{T}{2} \\[2ex] \dfrac{t_1}{T} < \dfrac{1}{2} & \text{پاسخ max در فاز ② است.} \quad \text{یا } t_1 < \frac{T}{2} \end{cases}$$

T = زمان تناوب طبیعی سازه.

$$v(t) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\frac{\pi}{t_1}t_0 - \beta\sin\frac{2\pi}{T}\cdot t_0\right]$$

$$\Longrightarrow v(t) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\frac{\pi}{t_1}\left(\frac{2n}{1+\frac{2t_1}{T}}\cdot t_1\right) - \beta\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2n}{1+\frac{2t_1}{T}}\cdot t_1\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{v(t) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{1+\frac{2t_1}{T}}\right) - \beta\cdot\sin\left(\frac{2\pi n}{\frac{T}{2t_1}+1}\right)\right]}$$

پاسخ ارتعاش اجباری برحسب $\frac{t_1}{T}$ در فاز ①

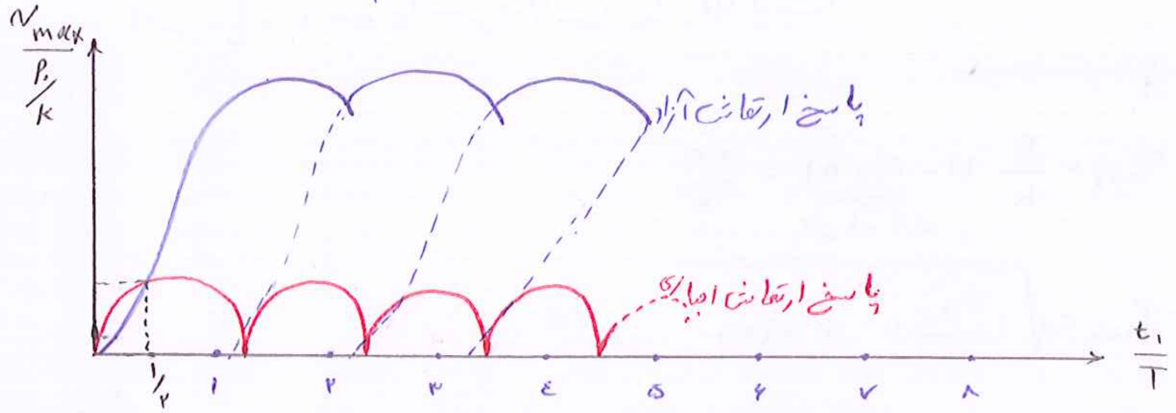
پاسخ ارتعاش آزاد : اگر $t_1 < T/2$ باشد

با جایگذاری $\dot{v}(t_1)$ و $v(t_1)$ در $v_{max} = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}(t_1)}{\omega}\right)^2 + v(t_1)^2}$ داریم :

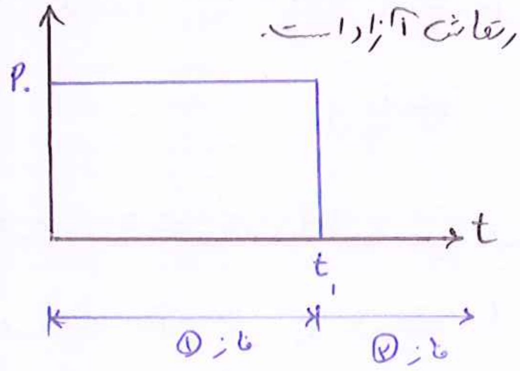
$$\boxed{v_{max} = \frac{P_0}{k} \times \frac{\frac{T}{t_1}\cos\frac{\pi T}{t_1}}{\left(\frac{T}{2t_1}\right)^2 - 1}}$$

حداکثر پاسخ در فاز ②

$$v(t_1) = \frac{P_0}{k} \times \frac{T/t_1 \times \cos\left(\pi T/t_1\right)}{\left(T/2t_1\right)^2 - 1} \times \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{T}\right)\right)\right]$$



در $t < \frac{t_1}{2}$ پاسخ ارتعاش اجباری بیشتر از ارتعاش آزاد است.



بار ضربه‌ای مستطیلی :

$$m\ddot{v} + \cancel{c\dot{v}} + kv = P_0$$

ارتعاش اجباری $t < t_1 \rightarrow m\ddot{v} + kv = P_0$

ارتعاش آزاد $t \geq t_1 \rightarrow m\ddot{v} + kv = 0$

با حل معادله‌ی ارتعاش اجباری داریم :

$$v(t) = \underbrace{A\sin\omega t + B\cos\omega t}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}}_{\text{جواب خصوصی}}$$

جواب خصوصی ← جوابی که دو طرف با هم برابر شوند.

A و B با شرایط مرزی محاسبه می‌شود.

$$v(0) = \dot{v}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \rightarrow B = -\frac{P_0}{k} \\ \dot{v}(0) = 0 \rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{P_0}{k}(1 - \cos\omega t)}$$

پاسخ در فاز ①

برای $t < t_1$ صادق است.

با حل معادله ارتعاش آزاد داریم:

$$\boxed{v(t) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega}\sin\omega(t - t_1) + v(t_1)\cos\omega(t - t_1)}$$

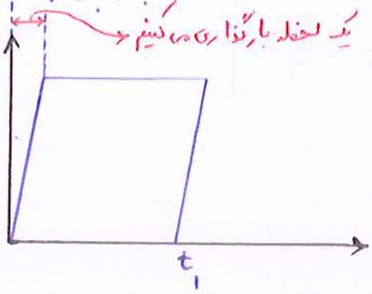
پاسخ در فاز ②

برای $t > t_1$ بدست می‌آید.

$$\frac{dv_{(t)}}{dt}=0 \rightarrow \frac{P_0}{k}\,\omega \sin\omega t=0 \Rightarrow \omega t=\pi \Rightarrow t_{max}=\frac{\pi}{\omega}$$ زمانی که حداکثر پاسخ رخ می دهد

$$\Rightarrow t=\frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}}=\frac{T}{2}$$

نتیجه: اگر t_1 بزرگتر از $\frac{T}{2}$ باشد حداکثر پاسخ رخ می دهد و مقدار آن برابر با $\frac{2P_0}{k}$ خواهد بود.



اگر $t_1<\frac{T}{2}$ ← پاسخ حداکثر در فاز ① است.

اگر $t_1>\frac{T}{2}$ ← پاسخ حداکثر در فاز ② است.

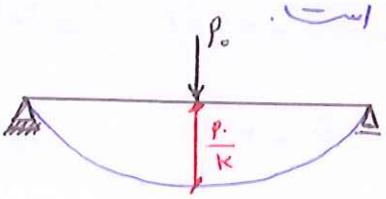
$$\text{اگر}\quad t_1\geq \frac{T}{2} \Rightarrow v_{max}=\frac{P_0}{k}(1-\underbrace{\cos \overset{\omega t}{\pi}}_{\text{اگر }-1\text{ باشد}})=\frac{2P_0}{k}$$

$$\text{اگر}\quad t_1\leq \frac{T}{2} \Rightarrow v_{max}=\sqrt{\left(\frac{\dot v_{(t_1)}}{\omega}\right)^2+v_{(t_1)}^2} \quad *$$

با جایگذاری $\dot v_{(t_1)}=\frac{P_0}{k}\,\omega \sin\omega t_1$ (سرعت) و $v_{(t_1)}=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega t_1)$ (پاسخ) در *:

$$\Rightarrow v_{max}=\frac{P_0}{k}\sqrt{2(1-\cos\omega t_1)}=\frac{P_0}{k}\sqrt{2\left(1-\cos 2\pi\frac{t_1}{T}\right)}$$

هر چقدر t_1 بیشتر باشد امکان رخ دادن پاسخ حداکثر در ارتعاش اجباری است.

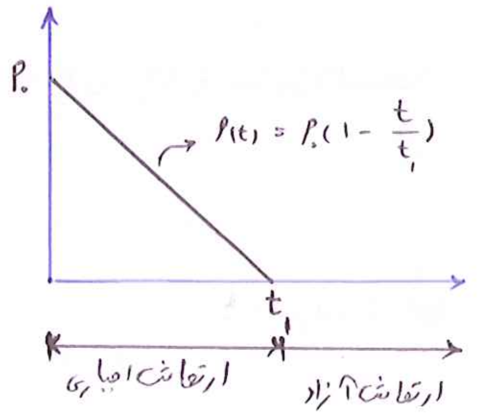


در این شکل بار P_0 در چند ثانیه اعمال شد تا بیشینه تغییر مکان حداکثر $v_{max}=\frac{P_0}{k}$ برسد.

حال اگر بار P_0 را داشته باشیم ولی این بار در صفر ثانیه به سازه وارد شود در این صورت حداکثر دامنه آن ۲ برابر حالت قبل است یعنی $v_{max}=\frac{2P_0}{k}$. چون به یکباره، بار به سازه وارد می شود. اگر با میرایی حل کنیم دقیقاً بعد از چند ثانیه به تغییر مکان $\frac{P_0}{k}$ می رسیم.

---

* **اگر بارگذاری به شکل مقابل باشد:**



$$t\leq t_1 \Rightarrow m\ddot v+kv=P_0\left(1-\frac{t}{t_1}\right)$$ ارتعاش اجباری

$$t\geq t_1 \Rightarrow m\ddot v+kv=0$$ ارتعاش آزاد

معادله‌ی حالت ارتعاش اجباری $\Rightarrow m\ddot{v} + kv = P_0(1-\frac{t}{t_1})$ $\qquad v = v_c + v_p$

$$\Rightarrow v_{(t)} = \underbrace{A\sin\omega t + B\cos\omega t}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}(1-\frac{t}{t_1})}_{\text{جواب خصوصی}}$$

A و B با شرایط مرزی بدست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} v_{(0)} = 0 \longrightarrow B = -\frac{P_0}{k} \\ \dot{v}_{(0)} = 0 \longrightarrow A\omega = \frac{P_0}{k\omega}.t_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v_{(t)} = \frac{P_0}{k}\left[\frac{1}{\omega t_1}\sin\omega t - \cos\omega t + 1 - \frac{t}{t_1}\right]}$$

پاسخ ارتعاش اجباری

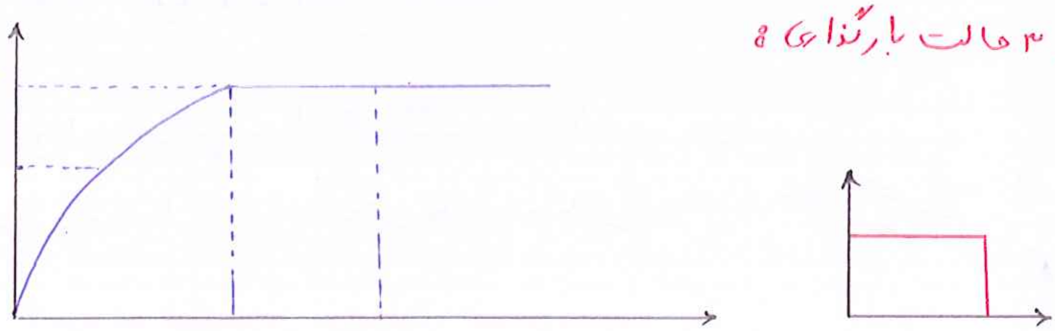
$$\boxed{v(t) = \frac{\dot{v}_{(t_1)}}{\omega}\sin\omega(t-t_1) + v(t_1)\cos\omega(t-t_1)}$$

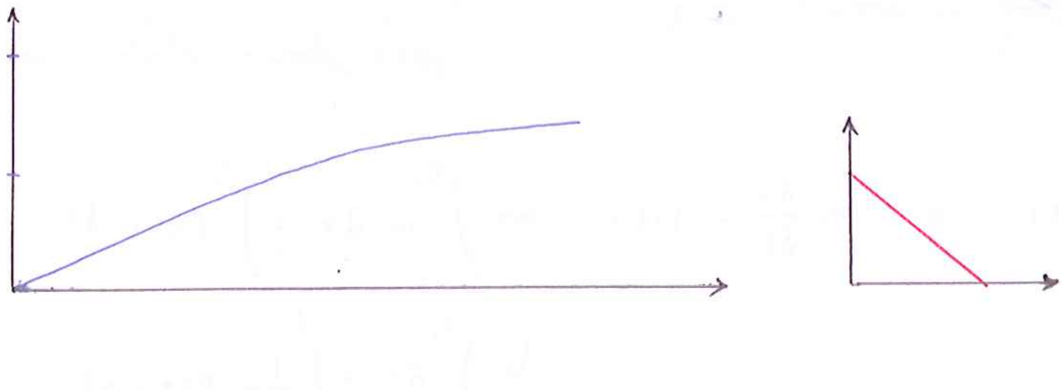
پاسخ ارتعاش آزاد:

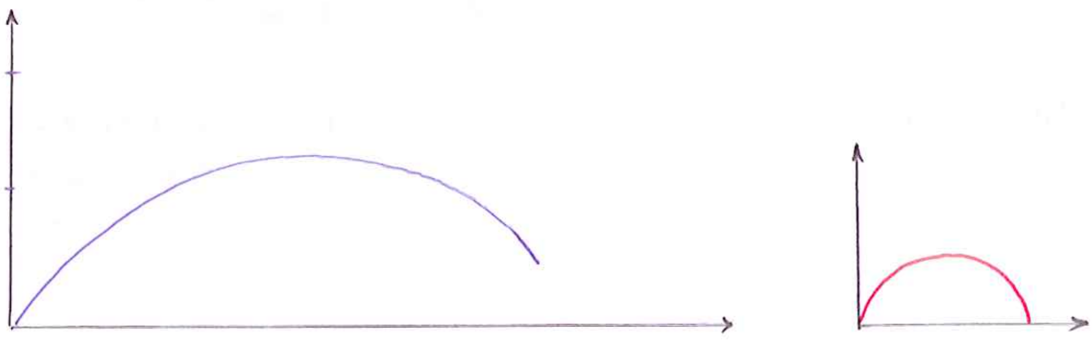
برای حساب کردن پاسخ حداکثر، از $v(t)$ ارتعاش اجباری مشتق گرفته و t را بدست آورده و نسبت $\frac{t_1}{T}$ را بررسی می‌کنیم.

$\frac{t_1}{T}$	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۷۵	۱	۱٫۵	۲
$\frac{v_{max}}{\frac{P_0}{k}}$	۰٫۶	۱٫۰۵	۱٫۱۶	۱٫۳۸	۱٫۵۲	۱٫۶۸	۱٫۷۶

رسم نمودار ۳ حالت بارگذاری:







تحلیل دینامیکی تحت بار ضربه:

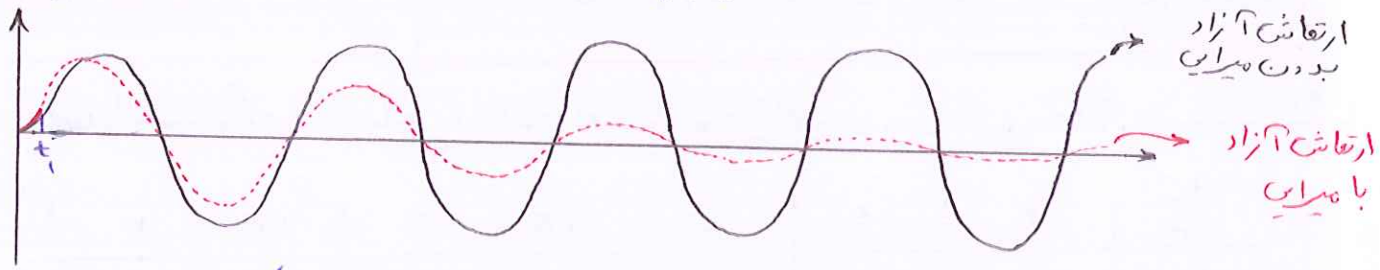
→ روش دقیق { - ارتعاش آزاد (شرایط اولیه ارتعاش آزاد از شرایط انتهایی ارتعاش اجباری مشخص می‌شوند)

→ روش تقریبی (ارتعاش اجباری)

روش تقریبی (ارتعاش اجباری): ① از میرایی در ارتعاش اجباری صرف نظر می‌کنیم:

$$t < t_1 \rightarrow m\ddot{v} + \cancel{c\dot{v}} + kv = \underbrace{P(t)}_{\text{بار ضربه}}$$

معادله‌ی حاکم $\Rightarrow m\ddot{v} + kv = P(t)$

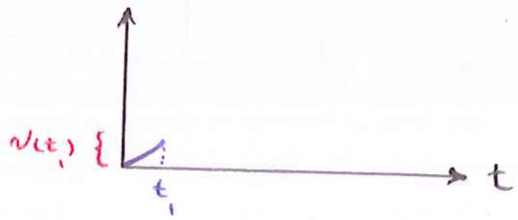


② از تغییر مکان در برابر شتاب در فاز ارتعاش اجباری صرف نظر می‌کنیم. یعنی معادله‌ی حاکم $m\ddot{v} = P(t) \Rightarrow m\frac{d\dot{v}}{dt} = P(t)$ می‌باشد.

بار ضربه‌ها

تغییر مکان در انتهای فاز اجباری بسیار کوچک است.

هرچه t_1 کوچک‌تر باشد خطا کمتر است و هرچه t_1 بزرگ‌تر باشد خطا بیشتر است.



$v(t_1) \simeq 0$

از تغییر مکان در مقایسه با شتاب صرف‌نظر می‌کنیم.

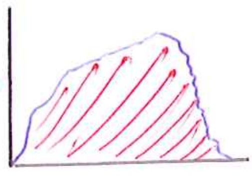
چون زمان کوچک است، پس مشتقات تغییر مکان بیشتر از خود تغییر مکان است.

$$m\ddot{v} = P(t) \Rightarrow m\frac{d\dot{v}}{dt} = P(t) \Rightarrow \int_0^{t_1} m\, d\dot{v} = \int_0^{t_1} P(t)\, dt$$

$$\text{یا} \quad \int_0^{t_1} d\dot{v} = \int_0^{t_1} \frac{1}{m} P(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t_1) - \cancel{\dot{v}(0)} = \frac{1}{m}\int P(t)\, dt \quad \Rightarrow \boxed{\dot{v}(t_1) = \frac{1}{m}\int P(t)\, dt}$$

$\underbrace{\int P(t)\,dt}_{\text{«مساحت زیر نمودار بار»}}$



پاسخ ضربه در حالت بدون میرایی :

$$v(t) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega}\sin\omega(t-t_1) + v(t_1)\cos\omega(t-t_1)$$

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{m\omega}\underbrace{\int_0^{t_1} p(t)\,dt}_{\text{مساحت زیر نمودار بار}}\ \sin\omega(t-t_1)}$$

پاسخ ضربه در حالت با میرایی :

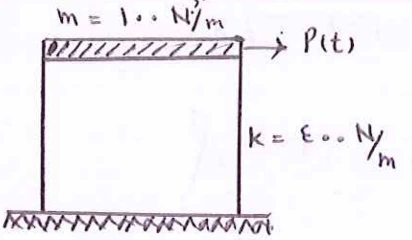
$$v(t) = e^{-\xi\omega(t-t_1)}\left[\frac{\dot{v}(t_1) + \xi\omega\cancel{v(t_1)}}{\omega_D}\sin\omega_D(t-t_1) + \underbrace{\cancel{v(t_1)}}_{0}\cos\omega_D(t-t_1)\right]$$

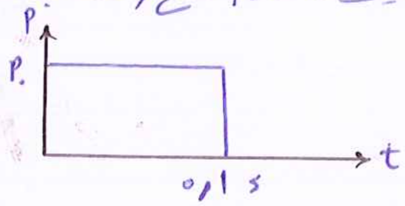
$$\Rightarrow \boxed{v(t) = e^{-\xi\omega(t-t_1)} \times \frac{1}{m\omega_D}\int p(t)\,dt \cdot \sin\omega_D(t-t_1)}$$

اگر t_1 به سمت صفر میل کند این روش بدون خطا می باشد.

در روش تقریبی مساحت مهم است و نه فرم ضربه.

مثال : برای بارگذاری زیر حداکثر پاسخ را حساب کنید.





$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\ \frac{rad}{s}$$

$t_1 < \frac{T}{2}$ ماکزیمم پاسخ در فاز (۱) ارتعاش

$$\omega = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$t_1 > \frac{T}{2}$ ماکزیمم پاسخ در فاز

$$t_1 = 0.1\ s \longrightarrow \frac{t_1}{T} = \frac{0.1}{\pi} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\text{دقیق})\ v_{max} = \frac{P_0}{k}\times\left[2(1-\cos\omega t_1)\right]^{1/2} = \frac{P_0}{400}\times\left[2(1-\cos(2\times 0.1))\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow v_{max} = 4.99\times 10^{-4}\ P_0$$

$$(\text{تقریبی})\ v_{max} = \frac{1}{m\omega}\int p(t)\,dt = \frac{1}{100\times 2}\times P_0\times 0.1 = 5\times 10^{-4}\ P_0$$

چون مقدار t_1 کوچک است، max پاسخ در حالت دقیق و تقریبی، تقریباً یکسان می باشند.

* بارگذاری کلی (بار ضربه‌ای): $P(t) \neq 0$

① هر بارگذاری دلخواه از بینهایت بار ضربه‌ای تشکیل شده است.

② پاسخ هر بار ضربه‌ای در زمان $t > \tau$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

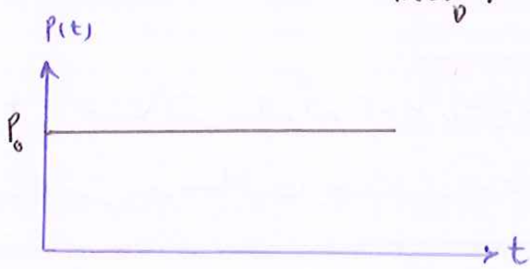
انتگرال دیوهامل:

بدون میرایی $v(t) = \frac{1}{m\omega} \int P(\tau) \sin \omega (t-\tau)\, d\tau$

تابع بارگذاری می‌تواند هر تابعی باشد

با میرایی $v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot P(\tau) \sin \omega_D (t-\tau)\, d\tau$

تابع بارگذاری می‌تواند هر تابعی باشد.



اگر بار به مدت طولانی وارد شود و با فرض نداشتن میرایی

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P_0 \sin \omega (t-\tau)\, d\tau$$

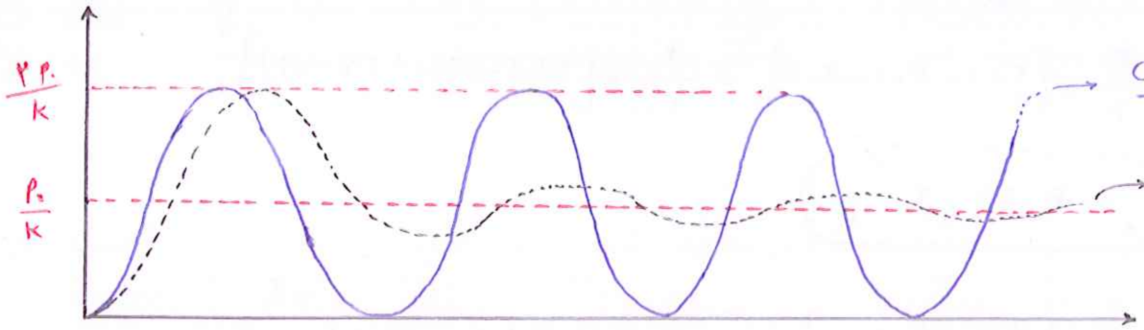
$$= \frac{P_0}{m\omega} \times \frac{1}{\omega} \cos \omega (t-\tau) \Big|_0^t$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m\omega^2 = k$

$$= \frac{P_0}{m\omega^2} \left[1 - \cos \omega t \right]$$

$m\omega^2 \rightarrow k$

پاسخ $v(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t)$



در حالت بدون میرایی تا زمانی که P_0 باشد به ارتعاش خود ادامه می‌دهد.

با فرض داشتن میرایی:

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int e^{-\xi\omega(t-\tau)} P_0 \sin \omega_D (t-\tau)\, d\tau$$

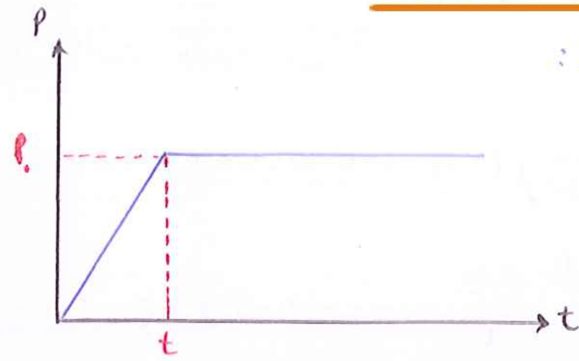
پاسخ با حساب کردن انتگرال با روش جزء به جزء بدست می‌آید:

$$v(t) = \frac{P_0}{k} \left[1 - e^{-\xi\omega t} \left[\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t \right] \right]$$

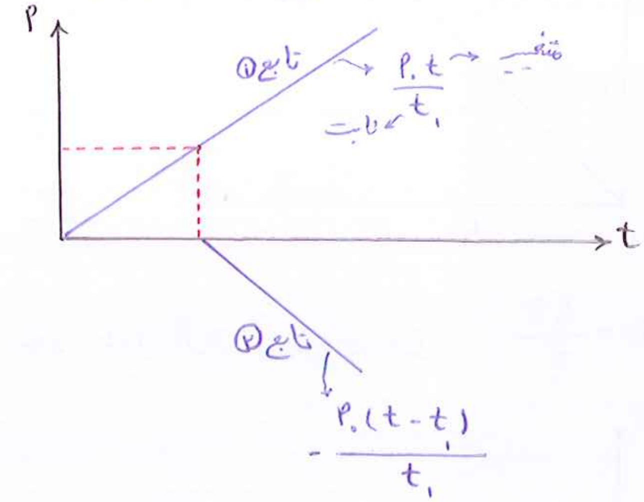
با وجود میرایی اگر t به بینهایت میل کند دامنه به P_0/k می‌رسد.

اگر بار به یکباره از ۰ به P_0 برسد دامنه نیز دوبرابر خواهد شد و به $2P_0/k$ خواهد رسید.

مثال: با فرض اینکه تابع بارگذاری به صورت مقابل باشد:



$\equiv$



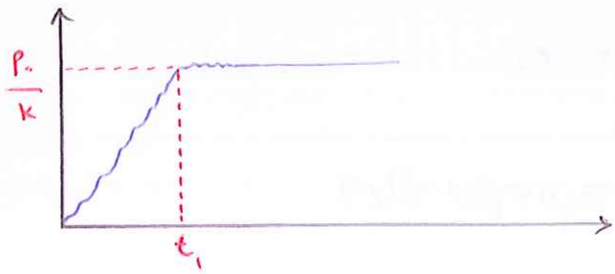
بار P_0 را می‌خواهیم به سازه وارد کنیم، به اندازه‌ی t_1 زمان می‌برد تا کل بار P_0 را به سازه وارد کنیم. یعنی آرام آرام به سازه وارد می‌کنیم.

پاسخ در حالت بدون میرایی $\quad v(t) = \underbrace{\frac{P_0}{k}\left[\frac{t}{t_1} - \frac{\sin\omega t}{\omega t_1}\right]}_{\text{پاسخ تابع ①}} - \underbrace{\frac{P_0}{k}\left[\frac{t-t_1}{t_1} - \frac{\sin\omega(t-t_1)}{\omega t_1}\right]}_{\text{پاسخ تابع ②}}$

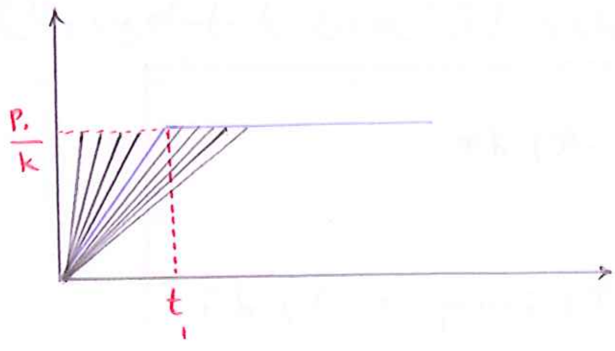
$$\Rightarrow v(t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - \frac{\sin\omega t}{\omega t_1} + \frac{\sin\omega(t-t_1)}{\omega t_1}\right]$$

نکته: اگر t_1 بزرگ شود، مخرج بزرگ می‌شود و می‌توان از عبارت داخل کروشه صرف‌نظر کرد.

نکته: اگر باری را آرام آرام وارد کنیم حداکثر تغییر مکان همان تغییر مکان استاتیکی ($\frac{P_0}{k}$) است.

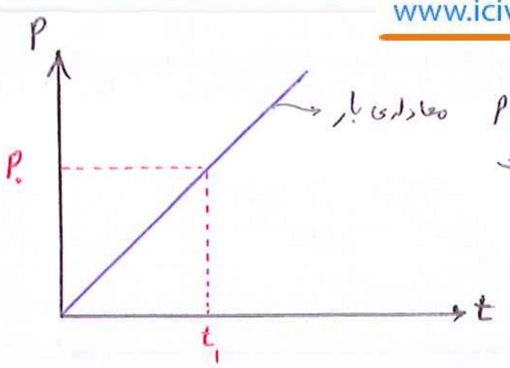


اگر $v_{max} = \frac{P_0}{k}$ باشد $t_1 > 3T$ است.



هرچه t_1 کوچکتر باشد بحرانی‌تر است.

تحلیل دینامیکی ← یعنی انتگرال دیوهامل نوشته شود و پاسخ را بدست آورد.



$$p(t) = \frac{P_0 \, t}{t_1}$$

متغیر (t) — ثابت (t_1)

در حالت بدون میرایی:

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \int p(\tau) \sin \omega(t-\tau) \, d\tau$$

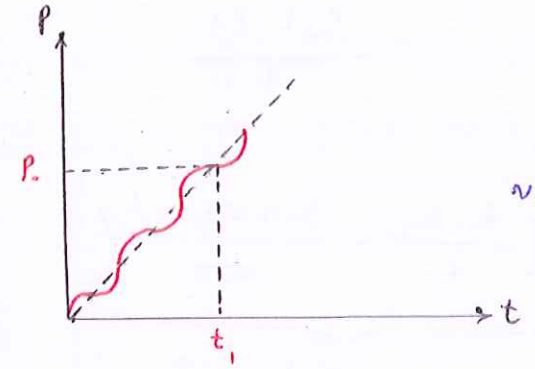
$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^{t_1} \frac{P_0 \, t}{t_1} \sin \omega(t-\tau) \, d\tau$$

$$p(\tau) = \frac{P_0 \tau}{t_1}$$

با حل انتگرال از روش جزء به جزء $\Rightarrow$

$$\boxed{v(t) = \frac{P_0}{k}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega t}{\omega t_1}\right)}$$

بار اضافه شود
یا بجای نیز اضافه شود



در حالت با میرایی:

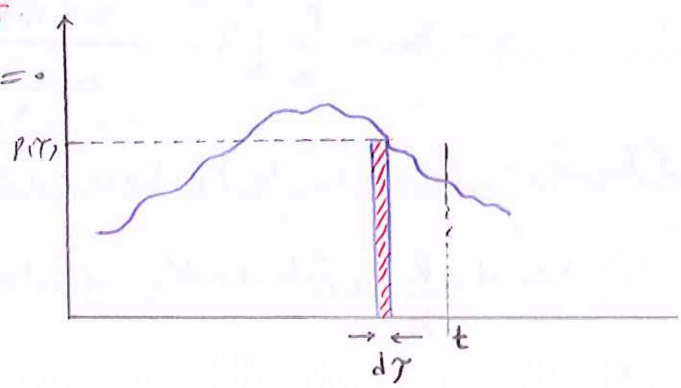
$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int \underbrace{e^{-\xi\omega(t-\tau)}}_{\text{تابع نمایی}} \underbrace{\frac{P\tau}{t}}_{\text{تابع خطی}} \underbrace{\sin \omega_D (t-\tau)}_{\text{تابع هارمونیک}} \, d\tau$$

$$\text{if}: \frac{t_1}{T} = \text{عدد صحیح} \rightarrow v(t) = 0$$

$$\Rightarrow v(t_1) = \frac{P_0}{k}\left[\frac{1}{t_1} - \frac{\cancel{\omega} \cos \omega t}{\cancel{\omega} t_1}\right] = 0$$

($\omega t \rightarrow \frac{2\pi}{T}$)

$$v(t_1) = \frac{P_0}{k}$$



$$\text{بدون میرایی} \int dv(t) = \int \frac{1}{m\omega} p(\tau) \, d\tau \cdot \sin \omega(t-\tau)$$

$$\text{با میرایی} \int dv(t) = \int \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} p(\tau) \sin \omega_D (t-\tau) \, d\tau$$

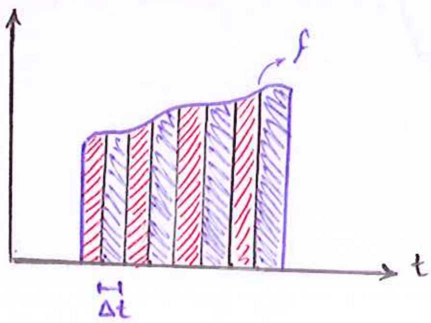
انتگرال دیوهامل (برای هر بارگذاری دلخواهی صادق است.)

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t-\tau) \, d\tau \\ v(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)} p(\tau) \sin \omega_D (t-\tau) \, d\tau \end{aligned}}$$

تحلیل دینامیکی سازه تحت بارگذاری کلی :

$P(t)\neq 0$

- انتگرال دیوهامل (برای تحلیل خطی صادق است.)
  - تحلیل دقیق - پیچیده است: $v(t)=\frac{1}{m\omega}\int e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,P(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$
    - تحلیل تابع $P(\tau)$ ساده نیست.
  - روش عددی
    - روش ذوزنقه
    - روش سیمپسون
- انتگرال گیری گام به گام (مستقیم) برای تحلیل خطی و غیرخطی صادق است.
  - روش صریح (پاسخ در لحظه i+1، حتماً به پاسخ در لحظات قبل آن بستگی دارد)
    - * روش اختلاف محدود
  - روش ضمنی (پاسخ در لحظه i+1، به پاسخ در همان لحظه و لحظات قبل آن بستگی دارد)
    - * روش شتاب ثابت یا متوسط
    - * روش خطی
    - * روش نیومارک
    - * روش ویلسون θ
    - * روش α



روش ذوزنقه : حل انتگرال با هر تابعی باشد.

روش ذوزنقه ای روش تقریبی است. چون تابع خطی نیست.

اگر تابع خطی باشد روش دقیق است.

هرچه Δt کوچکتر باشد روش دقیق و هرچه Δt بیشتر باشد روش تقریبی و با خطا است.

$$\int f(t)\,dt=\frac{\Delta t}{2}\left[f(t_0)+2f(t_1)+2f(t_2)+\dots+2f(t_{n-1})+f(t_n)\right]$$

تمامی نرم افزارها انتگرال ها را با روش عددی حل می کنند.

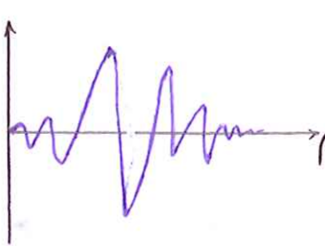
روش سیمپسون : از تابع درجه 2 انتگرال دقیق می گیرد. روش ذوزنقه ای از تابع خطی انتگرال دقیق می گیرد.

در این روش تعداد تقسیمات همیشه باید زوج باشد.

$$\int f(t)\,dt=\frac{\Delta t}{3}\left[f(t_0)+4f(t_1)+2f(t_2)+4f(t_3)+\dots+4f(t_{n-1})+f(t_n)\right]$$

در تحلیل خطی Δt را برابر $\frac{T}{10}$ در نظر می گیریم. T (زمان تناوب سازه)

در تحلیل غیرخطی Δt را کوچکتر در نظر میگیریم.



مقدار $P(t)$ را در هر لحظه می توان برداشت کرد و از روش عددی مقدار انتگرال بدست می آوریم.

روش انتگرال گیری مستقیم (گام به گام)

- خطی
- غیر خطی

معادله ی تعادل دینامیکی

همه ی تلاش ما در تحلیل دینامیکی، حل معادله ی $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P(t)$ می باشد.

این یک معادله دیفرانسیل است. حل این معادله تغییر مکان را در هر لحظه به ما می دهد. ($v_{(t)}$)

به جای اینکه پاسخ را در هر لحظه داشته باشیم، انتظار خود را پایین آورده و پاسخ را در زمان های مشخص بدست آوریم. نیازی نیست در گام های زمانی ۰/۰۱ تا ۰/۰۲ و ... پاسخ داشته باشیم.

اتفاقی از زمان ۰/۰۱ تا ۰/۰۸ رخ نمی دهد.

در روش انتگرال گیری مستقیم با زمان پیوسته کاری نداریم. زمان را ثابت می کنیم و معادله دینامیکی به معادله ی استاتیکی تبدیل می شود.

با اطلاعات پاسخ در لحظه ۰ پاسخ در لحظه ی 1 را بدست می آوریم و با داشتن پاسخ در گام 1 می توان پاسخ را در لحظه ی گام 2 بدست آورد. در این روش زمان را دیسکریت می کنیم.

اگر Δt را برابر ۰/۰۱ فرض کنیم برای اینکه پاسخ در 1 ثانیه را داشته باشیم باید ۱۰۰ گام را حل کرد.

انتگرال گیری مستقیم (گام به گام):

- روش صریح ← روش اختلاف محدود
- روشهای ضمنی
  - روش شتاب ثابت یا متوسط
  - روش خطی
  - روش نیومارک
  - روش ویلسون θ
  - روش α

در روش صریح اگر پاسخ گام های قبل را داشته باشیم ← پاسخ در لحظه ی i را می توان بدست آورد.

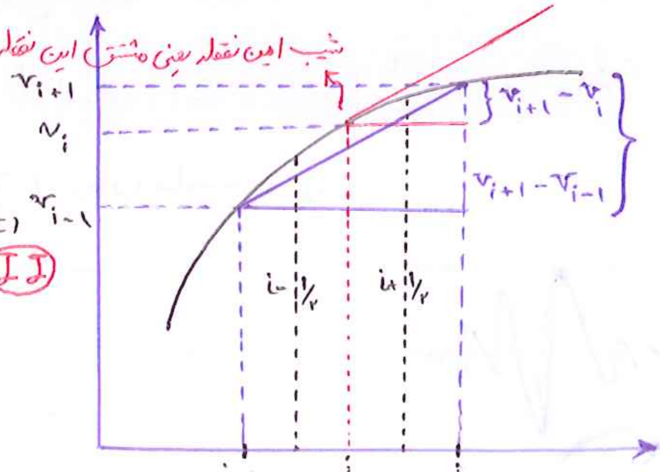
در روش ضمنی اگر پاسخ در لحظه ی i را بخواهیم باید پاسخ در خود لحظه و لحظه های قبل را داشته باشیم. لازم است سعی و خطا کرد تا از این دام رها شویم.

روش اختلاف محدود: در لحظه ی i مشتقات را بر اساس خود تابع می نویسیم (مشتق یعنی شیب آن نقطه)

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = Pt$$

در لحظه ی i $\longrightarrow$ $m\ddot{v}_i + c\dot{v}_i + kv_i = P_i(t)$ (I)

در لحظه ی $i+1$ $\longrightarrow$ $m\ddot{v}_{i+1} + c\dot{v}_{i+1} + kv_{i+1} = P_{i+1}(t)$ (II)



باتقسیمات مساوی $\dot{v}_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta t}$ شیب نقطه‌ی i برحسب تابع

مشتق دوم را براساس مشتق اول نوشته و شیب حاصل را بر اساس خود تابع نوشت.

$$\ddot{v}_i = \frac{\dot{v}_{i+\frac{1}{2}} - \dot{v}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\frac{v_{i+1}-v_i}{\Delta t} - \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t} \Rightarrow \ddot{v}_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta t^2}$$

جایگذاری مقادیر $\dot{v}_i$ و $\ddot{v}_i$ در معادله‌ی (I)

$$m\left[\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta t^2}\right] + c\left[\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta t}\right] + k v_i = P_i(t)$$

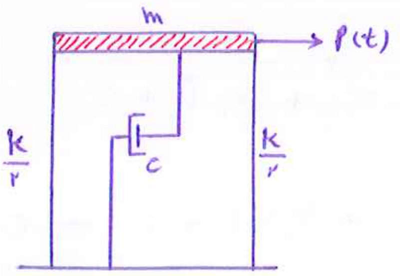
$$\left[\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right] v_{i+1} = \frac{m}{\Delta t^2}\left[2v_i - v_{i-1}\right] + c\frac{v_{i+1}}{2\Delta t} - k v_i + P_i t$$

$$K^* v_{i+1} = P^*_{i+1} \Rightarrow \boxed{v_{i+1} = \frac{P^*_{i+1}}{K^*}}$$

فرمول نشان داد که با داشتن پاسخ در لحظه‌ی $i-1$ و لحظه‌ی i که همان لحظات قبل است می‌توان پاسخ در لحظه‌ی $i+1$ را بدست آورد. مثلاً پاسخ در زمان ۰/۰۱ و ۰/۰۲ را داریم و می‌توان پاسخ در لحظه‌ی ۰/۰۳ را حساب کرد.

اگر در یک سازه یکدرجه آزادی مقادیر جرم - سختی - میرایی و مقدار بار را داشته باشیم و بدانیم شرایط اولیه چه می‌باشد می‌توان سازه را تحلیل کرد.

$$m\ddot{v}_i + c\dot{v}_i + k v_i = P_i(t)$$



$v_0 =$ تغییرمکان اولیه

$\dot{v}_{(0)} =$ سرعت اولیه لحظه صفر

$\ddot{v}_{(0)} = \frac{P_0 - k v_0 - c\dot{v}_0}{m}$ شتاب اولیه لحظه‌ی صفر

$v_{i+1} = v_{(0+1)} = v_1$

$v_{i-1} = v_{(0-1)} = v_{-1}$

تغییرمکان در گام اول که اگر بخواهیم در نقطه‌ی صفر یعنی $i=0$ بررسی کنیم می‌شود ← v_1

فقط برای شروع v_{-1} را نداریم که باید آن را حساب کرد.

$$\dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{v}_0 = \frac{v_1 - 2v_0 + v_{-1}}{\Delta t^2}$$

$$v_1 = 2\Delta t\,\dot{v}_0 + v_{-1} \longrightarrow \ddot{v}_0 = \frac{2\Delta t\,\dot{v}_0 + v_{-1} - 2v_0 + v_{-1}}{\Delta t^2}$$

$$v_{-1} = \frac{\ddot{v}_0\,\Delta t^2}{2} - \dot{v}_0\,\Delta t + v_0$$

با داشتن v_{-1} و v_0 می‌توان v_1 را بدست آورد.

مسئله‌ی غیرخطی: جرم - سختی - میرایی در لحظه‌های مختلف تغییر کند (یعنی اگر نسبت به زمان تغییر کند)

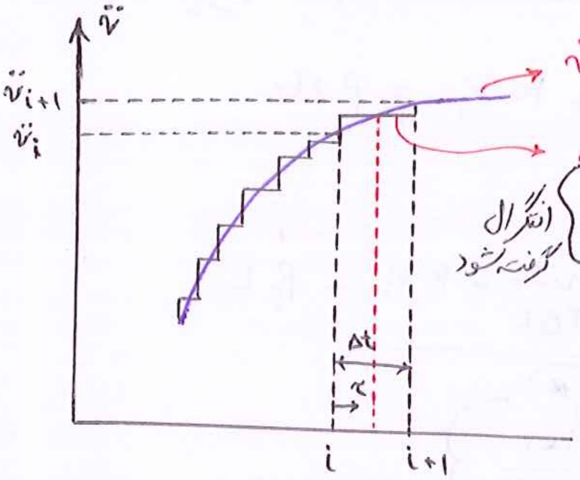
روش ضمنی : ← روش شتاب ثابت ...

$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P(t)$

① $m\ddot{v}_i + c\dot{v}_i + kv_i = P_i(t)$ برای لحظه‌ی i

② $m\ddot{v}_{i+1} + c\dot{v}_{i+1} + k_{i+1} = P_{i+1}(t)$ برای لحظه‌ی i+1 معادله‌ی (I)

تفاضل ① و ② $\Rightarrow$ $\boxed{m\Delta\ddot{v}_{i+1} + c\Delta\dot{v}_{i+1} + k\Delta v_{i+1} = \Delta P_{i+1}}$ (II) گاهی اوقات این معادله را حل می‌کنند



$\ddot{v}(\tau)$

$\ddot{v}(\tau) = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{2}$

انتگرال گرفته شود

$\dot{v}(\tau) = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{2}\tau + C$

(τ متغیری است که از i تا i+1 تغییر می‌کند.)

$\dot{v}(\tau=0) = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{2} \times 0 + C \Rightarrow \dot{v}(0) = C$

پس معادله‌ی سرعت $\Rightarrow$ $\dot{v}(\tau) = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{2}\tau + \dot{v}_i$

$\Rightarrow \tau = \Delta t \Rightarrow$ $\dot{v}_{i+1} = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{2}\Delta t + \dot{v}_i$ ← برای معادله‌ی (I)

$\Delta\dot{v}_{i+1} = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{2}\Delta t$ ① ← برای معادله‌ی (II)

انتگرال سرعت $\Rightarrow$ تغییر مکان $\Rightarrow$ $\int \dot{v}(\tau) = \int \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{2}\tau + \dot{v}_i$

$v(\tau) = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{4}\tau^2 + \dot{v}_i\tau + C$

$v(\tau=0) = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{4}(0)^2 + \dot{v}_i(0) + C \Rightarrow C = v(0)$

$C = v_i$

$\Rightarrow \tau = \Delta t$

$v_{i+1} = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{4}\Delta t^2 + \dot{v}_i\Delta t + v_i$ ← برای معادله‌ی (I)

از این رابطه $\ddot{v}_{i+1}$ را بدست می‌آوریم. ← $\Delta v_{i+1} = \frac{\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i}{4}\Delta t^2 + \dot{v}_i\Delta t$ ② ← برای معادله‌ی (II)

به دو طرف $-\ddot{v}_i$ اضافه شود ← $\ddot{v}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_{i+1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_i - \ddot{v}_i$ ③

رابطه‌ی ٤ بدست می‌آید

$\Delta\ddot{v}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_{i+1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_i - 2\ddot{v}_i$ ④ ③ را در ① قرار می‌دهیم و ⑤ بدست می‌آید $\Delta\dot{v}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t}\Delta v_{i+1} - 2\dot{v}_i$ ⑤

جایگذاری ٤ و ٥ در رابطه‌ی ← $m\Delta_{i+1} + c\Delta_{i+1} + k\Delta_{i+1} = \Delta p_{i+1}$

$$m\left[\frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_{i+1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_i - 2\ddot{v}_i\right] + c\left[\frac{2}{\Delta t}\Delta v_{i+1} - 2\dot{v}_i\right] + k\Delta v_{i+1} = \Delta p_{i+1}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k\right]\Delta v_{i+1} = \Delta p_{i+1} + \frac{4m}{\Delta t}\dot{v}_i + 2m\ddot{v}_i + 2c\dot{v}_i$$

$$k^*\Delta v_{i+1} = \Delta p^* \Rightarrow$$ تغییر مکان $$\boxed{\Delta v_{i+1} = \frac{\Delta p^*}{k^*}}$$

نتیجه : از رابطه‌ی ⑤ سرعت در آن لحظه بدست می‌آید.

از رابطه‌ی ④ شتاب در آن لحظه بدست می‌آید.

بارگذاری نیز معلوم می‌باشد و در نهایت تغییر مکان معلوم می‌شود.

$$m\ddot{v}_{i+1} + c\dot{v}_{i+1} + k v_{i+1} = p_{i+1}(t)$$

نکته : شتاب را از رابطه‌ی تعادل بدست می‌آوریم.

$$\Rightarrow \ddot{v}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{v}_{i+1} - k v_{i+1}}{m}$$

تحلیل دینامیکی سازه تحت بارگذاری کلی :

$$v(t) = \frac{1}{m\omega}\int e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot p(\tau) \cdot \sin(t-\tau)\, d\tau$$

تابع نمایی ، تابع خطی ، تابع هارمونیک

$p(t) \neq 0$:

- انتگرال دیوهامل (برای تحلیل خطی)
  - تحلیل دقیق - پیچیده است.
  - روش عددی
    - روش ذوزنقه (تابع درجه ①)
    - روش سیمپسون (از تابع درجه ② انتگرال دقیق می‌گیرد. تعداد تقسیمات همیشه زوج است.
- انتگرال‌گیری گام به گام (مستقیم) (برای تحلیل خطی و غیرخطی)
  - روش صریح ← روش اختلاف محدود
  - روش ضمنی
    - *روش شتاب ثابت یا متوسط
    - ** روش خطی
    - ** روش نیومارک
    - ** روش ویلسون θ
    - *** روش α

خلاصه‌ی روش شتاب ثابت یا متوسط :

$$\Delta\ddot{v}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_{i+1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_i - 2\ddot{v}_i$$ ← شتاب از رابطه‌ی ④

$$\Delta\dot{v}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t}\Delta v_{i+1} - 2\dot{v}_i$$ ← سرعت از رابطه‌ی ⑤

$$\ddot{v}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{v}_{i+1} - k v_{i+1}}{m}$$

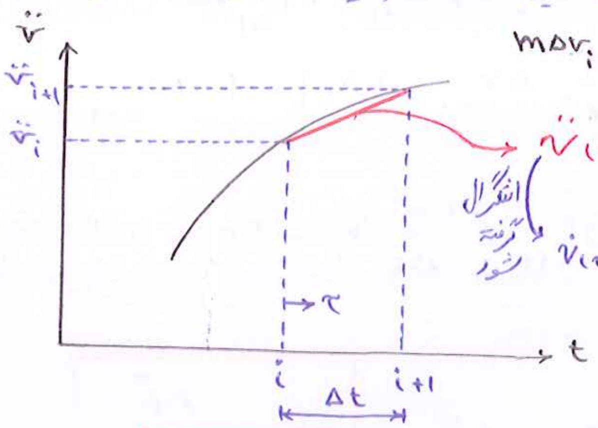
ویا شتاب را از رابطه‌ی تعادل نیز بدست می‌آورند.

نکته : برای دقت بیشتر از رابطه تعادل استفاده می‌شود.

$$\Rightarrow \left[\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k\right]\Delta v_{i+1} = \Delta p_{i+1} + \frac{4m}{\Delta t}\dot{v}_i + 2m\ddot{v}_i + 2c\dot{v}_i$$

$$k^*\Delta v_{i+1} = \Delta p^* \Rightarrow$$ تغییر مکان $$\Delta v_{i+1} = \frac{\Delta p^*}{k^*}$$

روش خطی: تفاوت شتاب ثابت با شتاب خطی، این است که در این حالت یک خط فرض می‌شود



$$m\Delta \ddot{v}_{i+1} + c\Delta\dot{v}_{i+1} + k\Delta v_{i+1} = \Delta P_{i+1}$$

معادله‌ی خط

$$\ddot{v}(\tau) = \ddot{v}_i + \frac{\ddot{v}_{i+1} - \ddot{v}_i}{\Delta t}\tau$$

انتگرال گرفته شود

$$\dot{v}(\tau) = \ddot{v}_i\tau + \frac{\ddot{v}_{i+1} - \ddot{v}_i}{2\Delta t}\tau^2 + C_1$$

$$\dot{v}(\tau=0) = C_1 \Rightarrow C_1 = \dot{v}_i$$

سرعت $\Rightarrow$ $$\boxed{\dot{v}(\tau) = \ddot{v}_i\tau + \frac{\ddot{v}_{i+1} - \ddot{v}_i}{2\Delta t}\tau^2 + \dot{v}_i} \quad \text{I}$$

انتگرال سرعت ← تغییرمکان $\Rightarrow$ $$v(\tau) = \frac{\ddot{v}_i\tau^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{i+1} - \ddot{v}_i}{6\Delta t}\tau^3 + \dot{v}_i\tau + C$$

$$v(\tau=0) = C \Rightarrow C = v_i$$

تغییرمکان $\Rightarrow$ $$\boxed{v(\tau) = \frac{\ddot{v}_i\tau^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{i+1} - \ddot{v}_i}{6\Delta t}\tau^3 + \dot{v}_i\tau + v_i} \quad \text{II}$$

اگر $\tau = \Delta t$

$$\text{I} \rightarrow \dot{v}_{i+1} = \ddot{v}_i\Delta t + \frac{\overbrace{\ddot{v}_{i+1} - \ddot{v}_i}^{\Delta\ddot{v}_{i+1}}}{2}\Delta t + \dot{v}_i$$

$$\text{II} \rightarrow v_{i+1} = \frac{\ddot{v}_i\Delta t^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{i+1} - \ddot{v}_i}{6}\Delta t^2 + \dot{v}_i\Delta t + v_i$$

$v_{i+1} \rightarrow$ $$k^*\Delta v_{i+1} = \Delta P^* \rightarrow \Delta v_{i+1} = \frac{\Delta P^*}{k^*}$$ v_{i+1} بدست می‌آید.

اگر c ، m ، k تابع زمان باشند برای آن لحظه را حساب می‌کنیم.

$$k^* = k + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}c$$

$$\Delta P^* = \Delta P_{i+1} + m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{v}_i + 3\ddot{v}_i\right] + c\left[3\dot{v}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{v}_i\right]$$

$\dot{v}_{i+1} \rightarrow$ $$\Delta\dot{v}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t}\Delta v_{i+1} - 3\dot{v}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{v}_i$$ ← $\dot{v}_{i+1}$ بدست می‌آید

$\ddot{v}_{i+1} \rightarrow$ $$\ddot{v}_{i+1} = \frac{P_{i+1} - c\dot{v}_{i+1} - k v_{i+1}}{m}$$ شتاب از رابطه تعادل بدست آمده است.

ΔP^*_{i+1} به پاسخ لحظات قبل بستگی دارد.

v ، $\dot{v}$ ، $\ddot{v}$ را در لحظه‌ی صفر داریم.

نکته: در تمامی این روش ها Δt باید از $\frac{T}{10}$ کوچکتر باشد ، T ← زمان تناوب طبیعی سازه

** روش نیومارک :

$$k^* \Delta v_{i+1} = \Delta p^*_{i+1}$$

فرمول های روش نیومارک

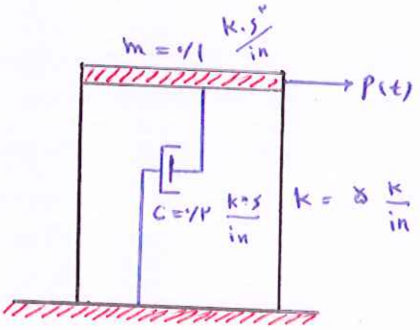
$$k^* = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta \Delta t} m$$

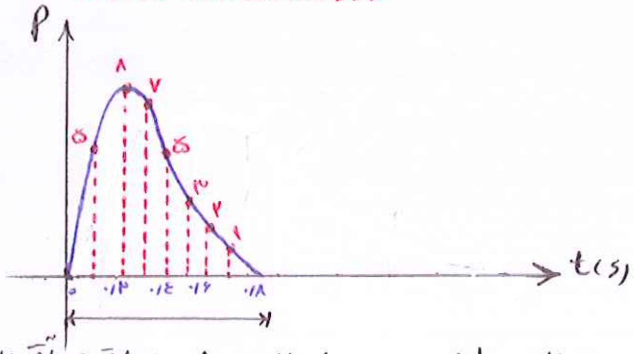
$$\Delta p^* = \Delta p_{i+1} + a \dot{v}_{i+1} + b \ddot{v}_{i+1}$$

$$a = \frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c$$

$$b = \frac{1}{2\beta} m + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) c$$

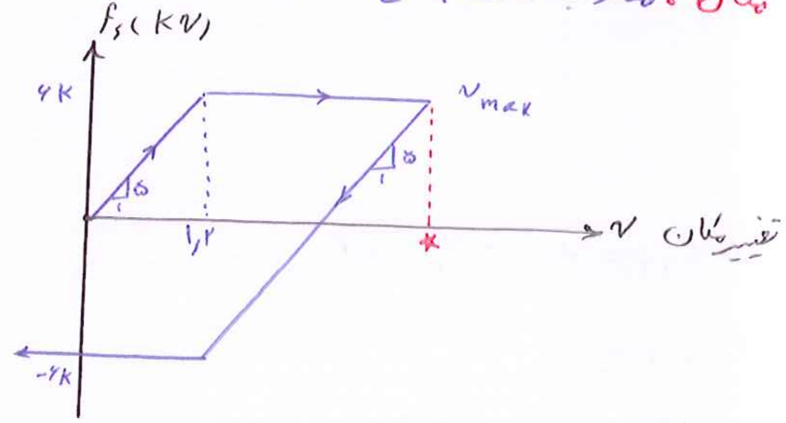
$$\Delta \dot{v}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$$





به ۸ قسمت تقسیم شده $8 \times 0.1\,s$ $\Delta t = 0.1\,s$

مثال : مطلوب است پاسخ سازه به روش شتاب خطی؟



چون سازه غیرخطی است و سختی نیز تغییر می کند نمی توان از انتگرال دیوهامل استفاده کرد.

$f_s = 6$ ← در تغییر مکان صفر

$f_s = 0$ ← در تغییر مکان ۱٫۲ شیب صفر است.

اگر $\dot{v}$ سرعت منفی شود یعنی با شیب منفی بر می گردد و باز سختی داریم تا زمانی که شیب صفر شود و باز سختی برابر صفر ما شد.

اگر از نقطه‌ی * با شیب منفی برگردیم و به ۱٫۲ برسیم باز شیب صفر و سختی صفر است.

$$k^* \Delta v_{i+1} = \Delta p^*$$

از روابط شتاب خطی استفاده می کنیم

$\Delta t = 0.1$

$m = 0.1$

$c = 0.2$

$k = 5$

$$k^* = k(t) + \frac{6}{\Delta t^2} m + \frac{3}{\Delta t} c = k(t) + 66$$

$$\Delta p^* = \Delta p_{i+1} + \left(\frac{6m}{\Delta t} + 3c\right) \dot{v}_i + \left(3m + \frac{\Delta t}{2}\right) \ddot{v}_i = \Delta p_{i+1} + 6.6 \dot{v}_i + 0.31 \ddot{v}_i$$

$$\Delta \dot{v}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t} \Delta v_{i+1} - 3\dot{v}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_i = 30 \Delta v_{i+1} - 3\dot{v}_i - 0.05 \ddot{v}_i$$

در لحظه‌ی صفر $\Rightarrow v_0 = 0 \qquad \dot{v}_0 = 0 \qquad$ از روی شکل $\rightarrow P_0 = 0 \qquad \ddot{v}_0 = 0$

معادله‌ی شتاب $\ddot{v}_{i+1} = \dfrac{P_{i+1} - Kv_{i+1} - C\dot{v}_{i+1}}{m}$

اگر $i=0$ یعنی در لحظه‌ی صفر $P_{i+1} = P_{0+1} = P_1$

از روی شکل $\rightarrow$ ۵

$\Delta v_{i+1} = v_{i+1} - v_i = 0.02$

$f_{si} = Kv_i$

$\ddot{v}_{i+1} = \dfrac{P_{i+1} - C\dot{v}_{i+1} - Kv_{i+1}}{m}$

اول $\Delta P(t) = P$ در لحظه 0.1 $- P$ در لحظه صفر

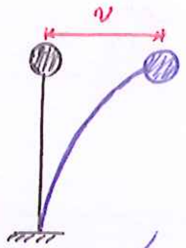
دوم $\Delta P(t) = P$ در لحظه 0.2 $- P$ در لحظه‌ی 0.1

نکته: اگر تغییر مکان کمتر از 1.2 باشد $\longrightarrow K = 6$

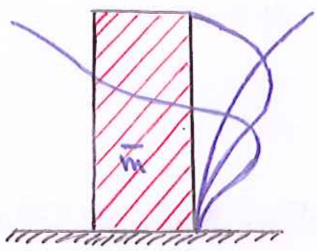
نکته: اگر تغییر مکان بیشتر از 1.2 باشد $\longrightarrow K = 0$

تحلیل دینامیکی

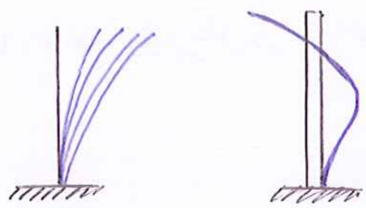
- سازه یک درجه آزادی
- سازه چند درجه آزادی (۲ و بیشتر)
- سازه های پیوسته (بینهایت درجه آزادی) سازه های دارای جرم پیوسته



یک درجه آزادی چون از جرم ستون صرف نظر شد.



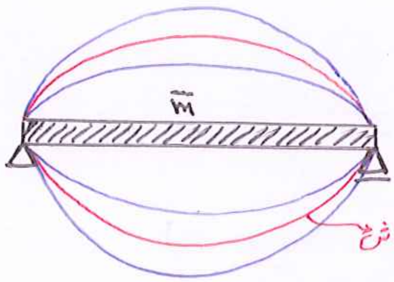
اگر دامنه ها فقط تغییر کنند سازه یک درجه است.



سازه یک درجه آزادی

روش رایلی: با ارتعاش سازه با جرم پیوسته را به سیستم تعمیم یافته تبدیل می کند.

سیستم های تعمیم یافته:

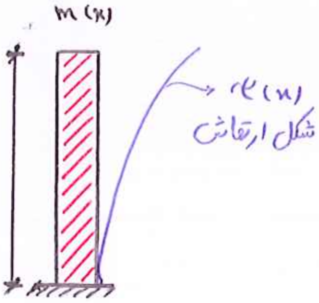


یک درجه آزادی: شکل ارتعاش $= \psi(x) = a \sin \frac{\pi x}{L}$

دو درجه آزادی: شکل ارتعاش $= \psi(x) = a \sin \frac{\pi x}{L} + b \sin \frac{\pi x}{L}$

دو درجه آزادی (a, b): شکل ارتعاش $= \psi(x) = a x^2 + b x$

سه درجه آزادی (a, b, c): شکل ارتعاش $= \psi(x) = a x^3 + b x^2 + c x$

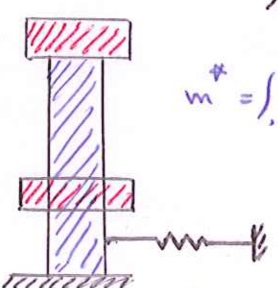


$$m^* \ddot{v} + c^* \dot{v} + k^* v = p^*(t)$$

به $\psi(x)$ بستگی دارد.

در رابطه m^*، $m(x)$ جرم واحد طول است.

$$m^* = \int_0^L m(x)\, \psi^2(x)\, dx$$



$$m^* = \underbrace{\int_0^L m(x)\, \psi^2(x)\, dx}_{\text{جرم پیوسته}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m(x_i)\, \psi^2(x_i)}_{\text{جرم متمرکز}} + \sum I_0\, \psi'^2(x)$$

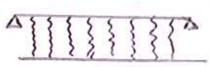
همان اینرسی دورانی

$$k^* = \underbrace{\int EI(x)\, \psi''^2(x)\, dx}_{\text{سختی خمشی}} + \underbrace{\int k(x)\, \psi^2(x)\, dx}_{\text{سختی الاستیک}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} k_i\, \psi_i^2(x)}_{\text{سختی متمرکز (فنر)}} \oplus\ominus \int N\, \psi'^2(x)\, dx$$

بار محوری فشاری (سختی هندسی)

$\oplus$: بار کششی

$\ominus$: بار فشاری

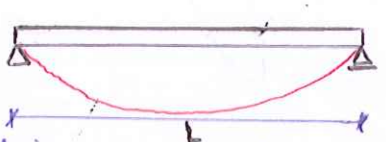


بستر ارتجاعی

$$c^* = \underbrace{\int_0^L c(x)\, \psi^2(x)\, dx}_{\text{میرایی جرم پیوسته}} + \underbrace{\sum c_i\, \psi_i^2(x)}_{\text{میرایی متمرکز}}$$

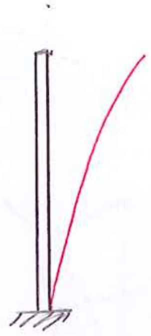
$$p^* = \int_0^L p(x,t)\, \psi(x)\, dx + \sum p_i\, \psi_i(x)$$

نکته ① $\varphi(x)$ می‌تواند هر تابعی باشد به شرطی که شرایط مرزی هندسی را ارضاء کند.



شرط ۱ → تغییر شکل در → $x = 0$ → 0

شرط ۲ → تغییر شکل در → $x = L$ → 0



شرط ① → شیب صفر است

شرط ② → تغییر مکان در $x = 0$ → 0

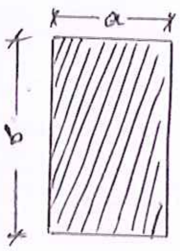
نکته ② ممان اینرسی دوران بر مقاطع مختلف

$\bar{m} = \frac{\text{جرم}}{\text{طول}}$

$\gamma = \frac{\text{جرم}}{\text{سطح}}$

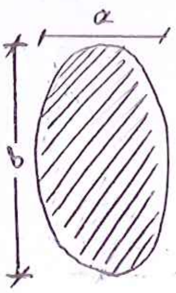
« میله »

$$I_0 = \frac{mL^2}{12} \quad , \quad m = \bar{m} L$$



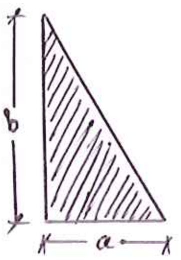
وزن واحد سطح

$$I_0 = m\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) \quad , \quad m = \gamma(a \cdot b)$$



وزن واحد سطح

$$I_0 = m\left(\frac{a^2+b^2}{16}\right) \quad , \quad m = \gamma\left(\frac{\pi a \cdot b}{4}\right)$$

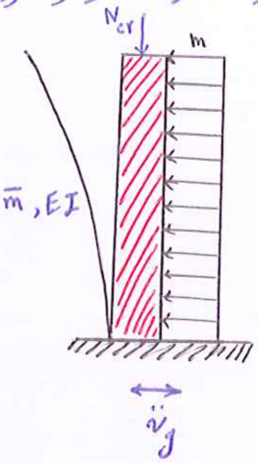


وزن واحد سطح

$$I_0 = m\left(\frac{a^2+b^2}{18}\right) \quad , \quad m = \gamma\left(\frac{ab}{2}\right)$$

یک سیستم پیوسته را با انتخاب یک شکل ارتعاش که شرایط مرزی را ارضاء کند را می‌توان حل کرد.

مثال: برج شکل زیر که در طول خود دارای سختی خمشی یکنواخت و جرم یکنواخت می باشد را در نظر می گیریم. معادله‌ی حرکت سیستم و بار بحرانی آن را تعیین کنید. (این سازه تحت حرکت زمین قرار دارد.)



$\psi(x)$ ← هر تابعی که شرایط مرزی را ارضا کند.

شکل ارتعاش $\psi(x) = ax^2 + bx + c$

شرایط مرزی تکیه‌گاه
$$\begin{cases} \psi(x=0) = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow c = 0 \\ \psi'(x=0) = 2a(0) + b + 0 \rightarrow b = 0 \end{cases}$$

فرض ← $\psi(x) = ax^2$

$$\overset{*}{m}\ddot{v} + \overset{*}{c}\dot{v} + \overset{*}{k}v = \overset{*}{p}(t)$$

0 میرایی نداریم

باید محاسبه گردد.

فرمول ها

$$\overset{*}{m} = \int m(x)\,\psi'^2(x)\,dx$$

$$\overset{*}{k} = \int EI\,\psi''^2(x)\,dx$$

$$\overset{*}{p} = \int p(x,t)\,\psi(x)\,dx$$

$$\psi(x) = \left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right) \longrightarrow \begin{cases} \text{در } x=0 \rightarrow \psi(x) = 0 \\ \text{در } x=0 \rightarrow \psi'(x) = 0 \end{cases}$$

تابع صفر است.

مشتق تابع صفر است.

$$\psi'(x) = \frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{2L}x$$

$$\psi''(x) = \frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi}{2L}x$$

$$\overset{*}{m} = \int_0^L \bar{m}(x)\,\psi^2(x)\,dx = \bar{m}\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx = 0/228\,\bar{m}L$$

$$\overset{*}{k} = \int_0^L EI\,\psi''^2(x)\,dx = EI\int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3}$$

$$\overset{*}{P}=\int P(x,t)\,\psi(x)\,dx=\int \bar{m}\,\ddot{v}_g\,\psi(x)\,dx=\bar{m}\,\ddot{v}_g\int_0^L \psi(x)\,dx$$

$$=\bar{m}\,\ddot{v}_g\int_0^L\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}x\right)dx=0/364\,\bar{m}L\ddot{v}_g$$

$$\overset{*}{m}\ddot{v}+\overset{*}{k}v=\overset{*}{P}(t)$$

$$\Rightarrow 0/228\,\bar{m}L\ddot{v}+\frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{EI}{L^3}v=0/364\,\bar{m}L\ddot{v}_g$$

حال بار کمانش را محاسبه می‌کنیم.

نکته: باری که سختی محوری سازه را به صفر برساند را بار کمانش گویند یعنی:

$$N_{cr}\leftarrow N \quad\leftarrow K-K_G=0 \qquad \text{هرگاه}$$

$$\overset{*}{k}=\underbrace{\int EI\,\psi''^2(x)\,dx}_{K}-\underbrace{\int N_{cr}\,\psi'^2(x)\,dx}_{K_G}=0$$

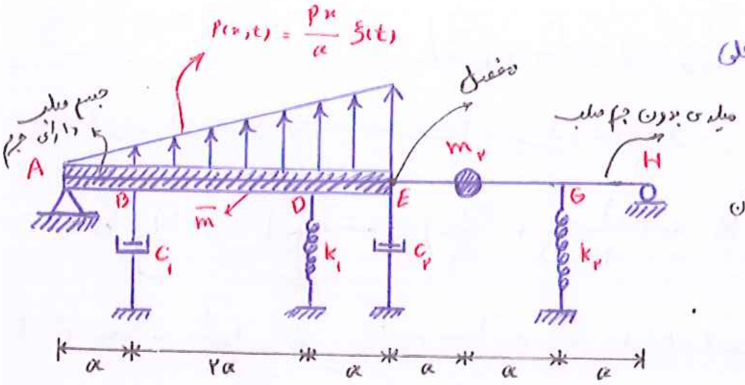
$$\Rightarrow\frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3}-\underbrace{N_{cr}\int_0^L\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{2L}x\right)^2dx}_{\frac{\pi^2}{8L}N_{cr}}=0$$

$$\Rightarrow\overset{*}{k}=\frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3}-\frac{\pi^2}{8L}N_{cr}=0$$

$$\Rightarrow N_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(2L)^2}$$

تحلیل دینامیکی

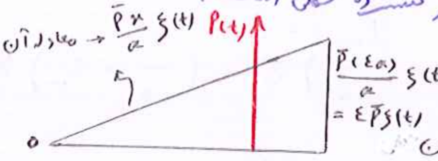
- سازه یکدرجه آزادی ← دالامبر (تعادل)
- سیستم تعمیم یافته ← هامیلتون (انرژی)
- سیستم دارای جسم صلب ← کار مجازی



نمونه سیستم یک درجه آزادی به صورت مجموعهٔ جسم صلب

مثال: در اثر یک تغییر مکان مجازی کار نیروی خارجی با کار نیروی داخلی باهم برابر است.

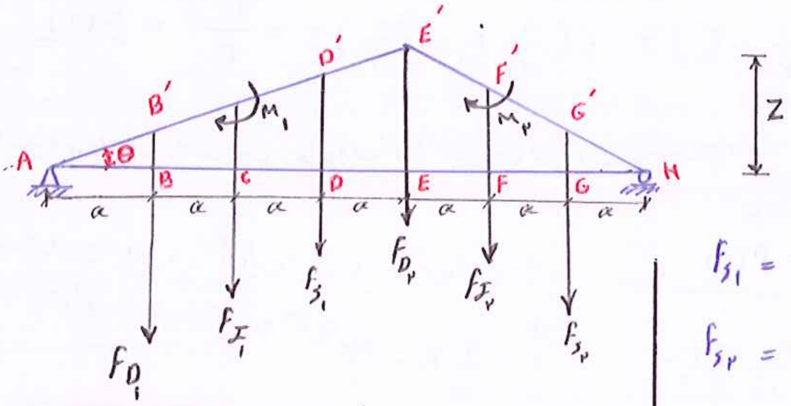
نیروی خارجی یک بار گسترده خطی است.



معادل بار گسترده مثلثی:

$\xi(t)$ تابع زمانی است که تغییرات آن خطی است.

$$\Rightarrow P(t) = 4\bar{P}\xi(t) \times \frac{4a}{2} = 8\bar{P}a\xi(t)$$



$BB' = \frac{1}{4}Z$ ، $DD' = \frac{3}{4}Z$

$FF' = \frac{2}{3}Z$

نیروی داخلی در اثر جابجایی Z:

$$f_{S_1} = k_1 \times \frac{3}{4}Z$$

$$f_{S_2} = k_2 \times \frac{1}{3}Z$$

$$f_{D_1} = c_1 \times \frac{1}{4}\dot{z}$$

$$f_{D_2} = c_2 \times \dot{z}$$

$$f_{I_1} = \bar{m}L\frac{\ddot{z}}{2} = \bar{m}4a\frac{\ddot{z}}{2} = 2\bar{m}a\ddot{z}$$

$$f_{I_2} = m_2 \times \frac{2}{3}\ddot{z}$$

$$M_1 = I_{0_1}\ddot{\theta} = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{\overbrace{\bar{m}L}^{m} \times L^2}{12}\ddot{\theta}$$

اینرسی دورانی میله

$$M_1 = \bar{m} \times 4a \times \frac{(4a)^2}{12} \times \overbrace{\frac{\ddot{z}}{4a}}^{\ddot{\theta}} = \frac{4}{3}\bar{m}a^2\ddot{z}$$

$$M_2 = I_{0_2}\ddot{\theta} = I_{0_2}\frac{\ddot{z}}{3a}$$

$W_{S_1} = \frac{3}{4}k_1 z \times \frac{3}{4}\delta z$ کار فنر ①

$W_{S_2} = \frac{1}{3}k_2 Z \times \frac{1}{3}\delta z$ کار فنر ②

$W_{D_1} = \frac{c_1}{4}\dot{z} \times \frac{1}{4}\delta z$ کار میرایی ①

$W_{D_2} = c_2\dot{z} \times \delta z$ کار میرایی ②

$$W_{I_1} = \frac{\bar{m}L}{2}\ddot{z} \times \frac{1}{2}\delta z$$

$$W_{I_2} = \frac{2}{3}m_2\ddot{z} \times \frac{2}{3}\delta z$$

$$W_{m_1} = \frac{4}{3}\bar{m}a^2\ddot{z} \times \frac{1}{4a}\delta z$$

$$W_{m_2} = I_{0_2}\frac{\ddot{z}}{3a}$$

کار نیروی خارجی $w = P \times \frac{2}{3}\delta z = 8\bar{P}a\xi(t) \times \frac{2}{3}\delta z = \frac{16}{3}\bar{P}a\xi(t)\delta z$

$\boxed{\text{کار نیروی خارجی = کار نیروی داخلی}}$

$$\delta W = 0 \Rightarrow f_{S_1} \times \tfrac{3}{4}\delta z + f_{S_2}\times\tfrac{1}{3}\delta z + f_{D_1}\times\tfrac{1}{4}\delta z + f_{D_2}\times\delta z + f_{I_1}\times\tfrac{1}{2}\delta z + f_{I_2}\times\tfrac{2}{3}\delta z$$

$$+ M_1 \times \tfrac{1}{4a}\delta z + M_2 = 8\bar{p}\,a\,\xi(t)\times\tfrac{2}{3}\delta z$$

کار در اثر جابجایی δz

$$\Rightarrow \left(K_1\tfrac{3}{4}z\times\tfrac{3}{4}\delta z\right)+\left(K_2\tfrac{1}{3}z\times\tfrac{1}{3}\delta z\right)+\left(C_1\tfrac{1}{4}\dot z\times\tfrac{1}{4}\delta z\right)+\left(C_2\dot z\times\delta z\right)+\left(2a\bar m\,\ddot z\,\tfrac{\delta z}{2}\right)$$

$$+\left(m_2\tfrac{2}{3}\ddot z\times\tfrac{2}{3}\delta z\right)+\left(\tfrac{4}{3}a^2\bar m\,\ddot z\times\tfrac{1}{4a}\delta z\right)+\left(I_{o2}\tfrac{1}{3a}\ddot z\right)=8\bar p\,a\,\xi(t)\tfrac{2}{3}\delta z$$

پس از ساده شدن به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[\left(a\bar m+\frac{a\bar m}{3}+\frac{4}{9}m_2+\frac{I_{o2}}{9a^2}\right)\ddot z+\left(\frac{c_1}{16}+c_2\right)\dot z+\left(\frac{9}{16}K_1+\frac{K_2}{9}\right)z-\frac{16}{3}\bar p\,a\,\xi(t)\right]\delta z=0$$

از آنجا که مقدار تغییر مکان مجازی δz دلخواه است، جمله‌ی درون کروشه باید صفر شود، بنابراین معادله‌ی حرکت پایانی به شکل زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{4}{3}\bar m a+\frac{4}{9}m_2+\frac{I_{o2}}{9a^2}\right)\ddot z+\left(\frac{c_1}{16}+c_2\right)\dot z+\left(\frac{9}{16}k_1+\frac{k_2}{9}\right)z=\frac{16}{3}\bar p\,a\,\xi(t)$$

این معادله را به صورت ساده‌ی زیر می‌توان نوشت:

$$m^*\ddot z + c^*\dot z + k^* z = p^*(t)$$

معادله‌ی یکدرجه آزادی برای مسائل جسم صلب با استفاده از روش کار مجازی

$$m^*=\frac{4}{3}\bar m a+\frac{4}{9}m_2+\frac{I_{o2}}{9a^2}\qquad c^*=\frac{c_1}{16}+c_2\qquad k^*=\frac{9}{16}k_1+\frac{k_2}{9}$$

تعیین فرکانس‌های طبیعی به روش رایلی:

فرکانس طبیعی: فرکانس طبیعی پاسخ سازه با ارتعاش آزاد است.

$$m\ddot v + k v = 0$$

$$u^2 \underset{\text{انتگرال}}{\overset{\text{مشتق}}{\rightleftarrows}} 2u\dot u \qquad \tfrac{1}{2}u^2 \underset{\text{مشتق}}{\overset{\text{انتگرال}}{\rightleftarrows}} u\dot u$$

$$m\ddot v\dot v + k\dot v v = 0$$

وانتگرال گرفته شود

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot v^2}_{\text{انرژی جنبشی}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}k v^2}_{\text{انرژی پتانسیل}} = C$$

طبق قانون رایلی، در یک سازه بدون بار خارجی و بدون میرایی مجموع نیروهای پتانسیل و جنبشی ثابت است.

$$T + V = C$$

نکته: ماکزیمم انرژی جنبشی زمانی رخ می‌دهد که انرژی پتانسیل صفر باشد و همچنین ماکزیمم انرژی پتانسیل زمانی شکل میگیرد که انرژی جنبشی صفر باشد.

$$\Rightarrow T_{max} = V_{max}$$

نکته: ارتعاش آزاد بدون میرایی یک ارتعاش هارمونیک است.

$$\begin{cases}\tfrac{1}{2}m\dot v_{max}^2=\tfrac{1}{2}k v_{max}^2\\ \dot v_{max}=\omega v\end{cases}\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}m\omega^2\cancel{v_{max}^2}=\cancel{\tfrac{1}{2}}k\cancel{v_{max}^2}\Rightarrow \omega^2=\frac{k}{m}$$

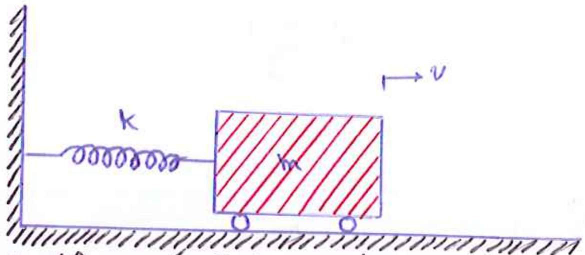
نتیجه: از رابطه $T_{max}=V_{max}$ می‌توان فرکانس را محاسبه کرد.

برای سیستم یک درجه آزادی هیچ هنری

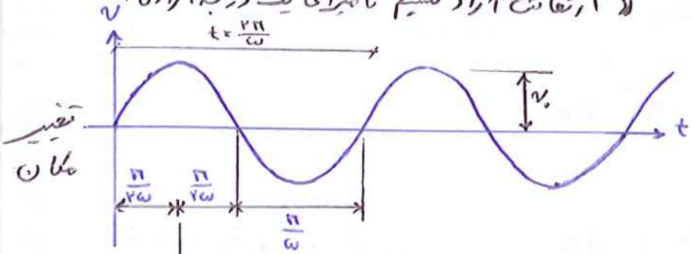
این موضوع را می‌توان اینگونه نیز بیان کرد (مطابق کتاب دکتر گل افشانی):

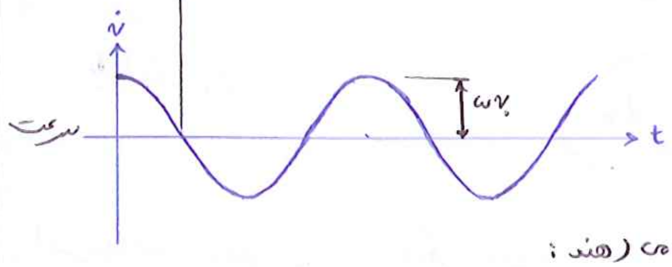
مفهوم اساسی روش ریلی اصل پایستگی انرژی است. اگر هیچ نیروی میرایی در سیستم برای جذب انرژی وجود نداشته باشد، انرژی این سیستم در ارتعاش آزاد باید ثابت بماند.

حرکت ارتعاش آزاد سیستم نامیرای جرم-فنر را در شکل زیر در نظر بگیرید.



«ارتعاش آزاد سیستم نامیرای یک درجه آزادی»





نکته: با انتخاب مبدأ زمانی مناسب تغییر مکان را به صورت زیر می‌توان بیان کرد. یعنی در ارتعاش آزاد بدون میرایی، شکل ارتعاش به صورت هارمونیک است.

$$v = v_0 \sin \omega t$$

$$\dot v = v_0 \omega \cos \omega t$$

انرژی پتانسیل این سیستم را کلاً به وسیله انرژی کرنشی فنر نشان می‌دهند:

I $$V = \frac{1}{2} k v^2 = \frac{1}{2} k v_0^2 \sin^2 \omega t$$

همچنین انرژی جنبشی جرم عبارت است از:

II $$T = \frac{1}{2} m \dot v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$$

در زمان $t = \frac{\pi}{2\omega}$، با توجه به شکل و همچنین از معادلات I و II معلوم است که انرژی جنبشی صفر است و انرژی پتانسیل به مقدار بیشینه خود رسیده است:

$$V_{max} = \frac{1}{2} k v_0^2$$

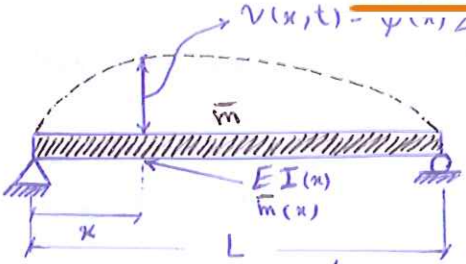
و در زمان $t = \frac{\pi}{\omega}$، انرژی پتانسیل صفر است و انرژی جنبشی مقدار بیشینه خود را دارد:

$$T_{max} = \frac{1}{2} m v_0^2 \omega^2$$

نتیجه: اگر کل انرژی در سیستم ارتعاش ثابت بماند (همان گونه که در ارتعاش آزاد نامیرا باید این چنین باشد) واضح است که انرژی جنبشی بیشینه مساوی انرژی پتانسیل بیشینه باید باشد.

$$V_{max} = T_{max} \Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}} k \cancel{v_0^2} = \cancel{\tfrac{1}{2}} m \cancel{v_0^2} \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

توجه: کاربرد اصلی روش ریلی در محاسبه‌ی تقریبی فرکانس طبیعی سیستم‌های چند درجه آزادی است.



روش رایلی برای سیستم چند درجه آزادی : (محاسبه‌ی فرکانس)

این تیر عملاً بینهایت درجه آزادی دارد.

یعنی با بینهایت الگوی تغییر مکانی می‌تواند تغییر مکان دهد

برای استفاده از روش رایلی، شکل تیر را در مود اصلی ارتعاش خود باید فرض کرد.

$$V=\int \frac{1}{2}\sigma \underbrace{\varepsilon}_{\frac{\sigma}{E}} dv=\int \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}\underbrace{dv}_{dA\,dx}=\int \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}dA\,dx \qquad \sigma=\frac{My}{I}$$

$$=\int \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{My}{I}\right)^2}{E}dA\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{M^2 \overbrace{y^2 dA}^{I}}{EI^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI_{(x)}}dx \qquad M=EI v''$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(EI_{(x)}v'')^2}{EI_{(x)}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\cancel{E^2}\cancel{I^2}v''^2}{\cancel{EI_{(x)}}}dx=\frac{1}{2}\int EI_{(x)}v''^2 dx$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{2}\int EI_{(x)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx$$ انرژی کرنشی این سیستم خمشی

انرژی پتانسیل (کار نیروهای داخلی)
$$\boxed{V_{max}=\frac{1}{2}\int EI_{(x)}v''^2_{max}dx}$$

انرژی جنبشی جرم پیوسته نایکنواخت برابر است با:
$$T=\frac{1}{2}\int \bar{m}(x)(\dot{v})^2 dx$$

$$T_{max}=\frac{1}{2}\int \bar{m}(x)(\dot{v}_{max})^2dx=\frac{1}{2}\int \bar{m}(x)\,\omega^2 v^2_{max}dx \qquad \dot{v}=\omega v$$

انرژی جنبشی
$$\boxed{T_{max}=\frac{1}{2}\int \bar{m}(x)\,\omega^2 v^2_{max}dx}$$

برای سیستم های پیوسته داریم:
$$T_{max}=V_{max}\Rightarrow \frac{1}{2}\int \bar{m}(x)\,\omega^2 v^2_{max}dx=\frac{1}{2}\int EI_{(x)}v''^2_{max}dx$$

$$\Rightarrow \omega^2=\frac{\int \frac{1}{2}EI_{(x)}v''^2_{max}dx}{\int \frac{1}{2}\bar{m}(x)v^2_{max}dx}$$

فقط کافی است تغییر شکل را حدس بزنیم و مطابق آن شکل ارتعاش یک فرکانس بدست می‌آوریم. هرچه شکل ارتعاش را دقیق‌تر حدس بزنیم، فرکانس را دقیق‌تر بدست آورده‌ایم.

$$v(x,t)=\psi(x)Z(t)$$

$$\Rightarrow \omega^2=\frac{\overbrace{\int EI_{(x)}\psi''^2_{(x)}dx}^{k^*}}{\underbrace{\int \bar{m}(x)\psi^2_{(x)}dx}_{m^*}} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

نکته: اگر به صورت کسر توجه شود می‌توان دید که این عبارت همان سختی تعمیم یافته (k^*) است و مخرج نیز همان جرم تعمیم یافته (m^*) می‌باشد.

$$k^*=\int EI(x)\psi''^2_{(x)}dx \qquad m^*=\int \bar{m}(x)\psi^2_x dx$$

حدس φ ← $\varphi(x) = x(L-x) = xL - x^2$

شرایط مرزی را ارضا می‌کند
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \varphi(x) = 0 \\ x = L \rightarrow \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

این φ شرط مرزی لنگر را ارضا نمی‌کند ← M صفر نشد

$$M = \ddot{\varphi}(x)\, EI = 2\, EI$$

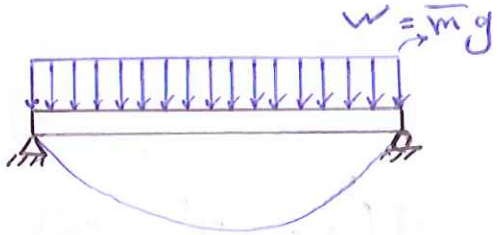
$$\omega^2 = \frac{k^*}{m^*} = \frac{\int_0^L EI\, \varphi''^2(x)\, dx}{\int_0^L \bar{m}\, \varphi^2(x)\, dx} = \frac{\int_0^L EI\, 4\, dx}{\int_0^L \bar{m}\, x^2 (L-x)^2\, dx} = \frac{120\, EI}{\bar{m} L^4} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{120\, EI}{\bar{m} L^4}}$$

$$\Rightarrow \omega = 10.95 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}$$

این φ حدوداً ۱۱٪ خطا دارد.

$\omega = 9.86 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}$ فرکانس دقیق

تغییر شکل تیر تحت اثر وزن خودش ← حال اگر $\varphi(x) = \frac{16}{5L^4}(L^3 x - 2Lx^3 + x^4)$ باشد

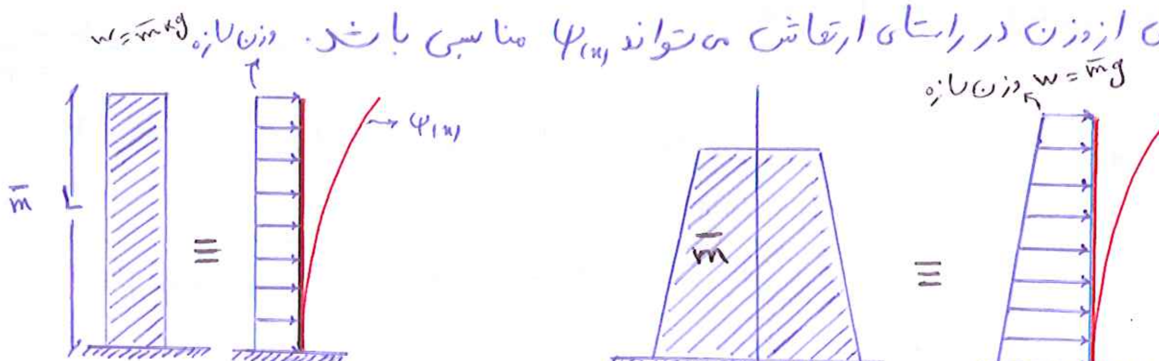


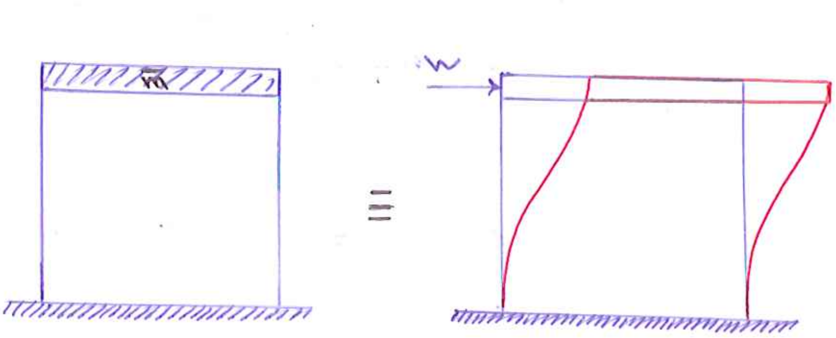
$$\omega^2 = \frac{k^*}{m^*} = \frac{\int_0^L EI\, \varphi''^2(x)\, dx}{\int_0^L \bar{m}\, \varphi^2(x)\, dx}$$

$$\Rightarrow \omega = 9.87 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}$$

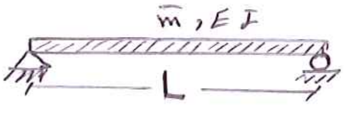
با این φ حدوداً ۰/۱٪ خطا داریم.

نکته: تغییر شکل تیر ناشی از وزن در راستای ارتعاش می‌تواند $\varphi(x)$ مناسبی باشد.



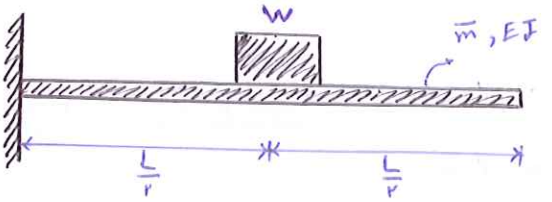


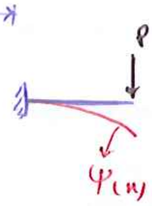
نکته: شکل ارتعاش دقیق تیر پیوسته



$$\omega = 9.86 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}} \qquad \varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$$

مثال: تعیین فرکانس طبیعی به روش رایلی:





ابتدا به یک $\varphi_{(x)}$ نیاز داریم. تغییر شکل تیر تحت بارگذاری

$$\varphi_{(x)} = \frac{PL^3}{3EI}\,\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}$$
انتخابی

$$T_{max} = T_{max}(\text{ناشی از وزن تیر}) + T_{max}(\text{ناشی از } W)$$

$$\begin{cases} v = \varphi_{(x)}\, Z(t) \\ \dot{v} = \omega \underbrace{\varphi_{(x)}\, Z(t)}_{\to v} \end{cases}$$

$$T_{max} = \underbrace{\int_0^L \frac{1}{2}\bar{m}\,\dot{v}_{max}^2\,dx}_{\text{برای تیر}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{W}{g}\,\dot{v}_{max}^2{}_{(x=\frac{L}{2})}}_{\text{برای بار متمرکز}}$$

$$= \int \frac{1}{2}\bar{m}\,\omega^2\varphi_{(x)}^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{W}{g}\,\omega^2\,\varphi^2_{(x=\frac{L}{2})}$$
چون جرم در $x=\frac{L}{2}$ قرار دارد.

$$= \omega^2\left[\int_0^L \frac{1}{2}\bar{m}\left(\frac{PL^3}{3EI}\times\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{W}{g}\left(\frac{PL^3}{3EI}\times\frac{3(\frac{L}{2})^2L - (\frac{L}{2})^3}{2L^3}\right)^2\right]$$

$$T_{max} = \left[\left(\frac{33}{140} + \frac{25}{256}\,\frac{W}{\bar{m}Lg}\right)\frac{\bar{m}L}{2}\right]\left(\frac{PL^3}{3EI}\right)^2\omega^2$$

اگر همه پارامترها را داشته باشیم
در نهایت ضریبی از ω^2 داریم.

$$V_{max} = \int_0^L \frac{1}{2}EI\,\varphi''^2_{(x)}\,dx$$

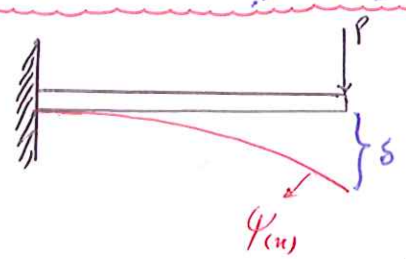
V = انرژی پتانسیل است (انرژی داخلی ناشی از تغییر شکل
توسط نیروی P)

کار انجام شده توسط نیروی خارجی P = انرژی پتانسیل

$$\varphi_{(x)} = \frac{PL^3}{3EI}\,\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}$$
انتخابی

اگر از $\varphi_{(x)}$ دو بار مشتق گرفته و به توان ۲ برسانیم
و سپس در انتگرال قرار داد، و مقدار انتگرال
را محاسبه می‌کنیم

روش سریع:



$$V_{max} = \int \frac{1}{2}EI\,\varphi''^2_{(x)}\,dx = \int \frac{1}{2}EI\,\varphi''^2_{(x)} = \frac{1}{2}P\,\varphi_{(x=L)}$$

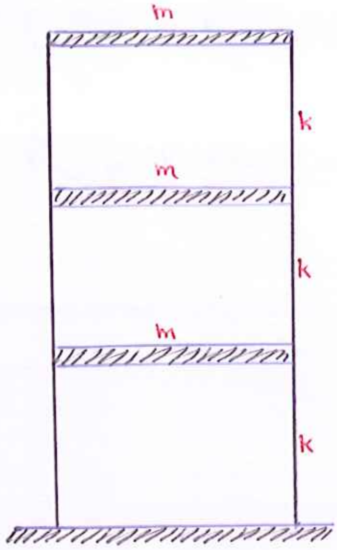
کار انجام شده
توسط نیروی خارجی P

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{1}{2}P\times\frac{PL^3}{3EI}\times 1 = \frac{1}{6}\,\frac{P^2L^3}{EI}$$

$$T_{max} = V_{max} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3EI}{\left[\frac{33}{140} + \frac{25}{256}\,\frac{W}{\bar{m}Lg}\right]\bar{m}L^4}$$

$$V_{max} = \frac{1}{2}P\times\frac{PL^3}{3EI}\,\underbrace{\cancel{\frac{3(L)^2L - (L)^3}{2L^3}}}_{1} = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

مثال: فرکانس طبیعی سازه های دارای چند جرم پیوسته را به روش رایلی

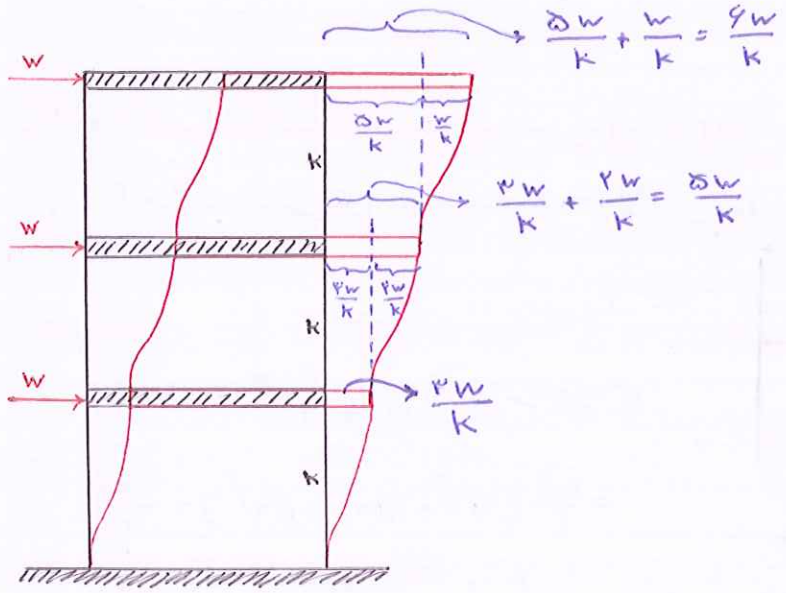


این سازه مثل تیر کنسول با سه جرم متمرکز عمل می کند.

به یک $\psi(x)$ نیاز است. $\qquad T_{max} = V_{max}$

وزن را در جهت ارتعاش قرار داده و تغییر شکل را بدست می آوریم.
جرم ثابت است و تغییر شکل محل جرم ها را باید داشته باشیم
یعنی ψ ها را باید در تراز سقف سوم و دوم و اول باید داشته باشیم.

$$\text{جابجایی} = \frac{\text{برش طبقه}}{\text{سختی طبقه}}$$



$$T_{max} = \sum \frac{1}{2}\left(\frac{w}{g}\right)_i \omega^2 \psi^2(x_i) = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{w}{g} \times \left[\frac{9w^2}{k^2} + \frac{25w^2}{k^2} + \frac{36w^2}{k^2}\right] = \frac{35w^3}{gk^2}\omega^2$$

$\left(\frac{w}{g}\right)_i \rightarrow m_i$

$$V_{max} = \sum \frac{1}{2} k (\Delta\psi)^2_{max} \quad \frac{\text{می توان}}{\text{نوشت}} \quad \sum \frac{1}{2} w_i \psi_i$$

همان انرژی پتانسیل داخلی است. $\qquad$ همان کار خارجی است.

$$V_{max} = \sum \frac{1}{2} k_i (\Delta\psi_i)^2 = \frac{1}{2} k \times \left(\frac{3w}{k}\right)^2 + \frac{1}{2} k \times \left(\frac{2w}{k}\right)^2 + \frac{1}{2} k \times \left(\frac{w}{k}\right)^2 = \frac{7w^2}{k}$$

جابجایی طبقه اول نسبت به کف $\qquad$ جابجایی طبقه دوم نسبت به طبقه اول $\qquad$ جابجایی طبقه سوم نسبت به طبقه دوم

$w_1 = w_2 = w_3 = w$

یا $\sum \frac{1}{2} w_i \psi_i = \frac{1}{2} w_3 \times \frac{3w_3}{k} + \frac{1}{2} w_2 \frac{5w_2}{k} + \frac{1}{2} w_1 \frac{6w_1}{k} = \frac{7w^2}{k}$

$$T_{max} = V_{max} \Rightarrow \frac{\cancel{35}^{5}\, w^{\cancel{3}}}{g k^{\cancel{2}}}\omega^2 = \frac{\cancel{7}\,\cancel{w^2}}{\cancel{k}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{gk}{5w}}$$

روش رایلی اصلاح شده:

$T_{max_0}=V_{max_0}$ ← ω (روش رایلی R_{00} گویند)

اگر $\psi_0(x)$ حدس زده شود

$m\omega^2\psi_0(x)$ ← $\psi_1(x)$ ← $T_{max_0}=V_{max_1}$ (روش رایلی R_{01} گویند)

ω بدست می‌آید

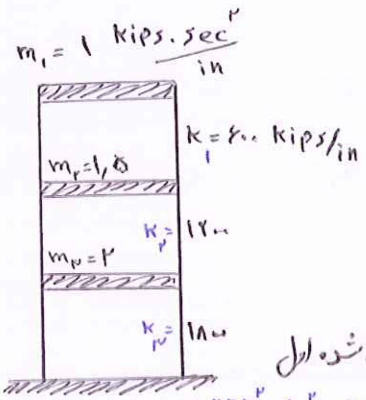
از جنس نیرو می‌شود
با این نیرو تغییر شکل را حساب می‌کنیم
پس V_{max_2} و T_{max_2} را بدست می‌آوریم.

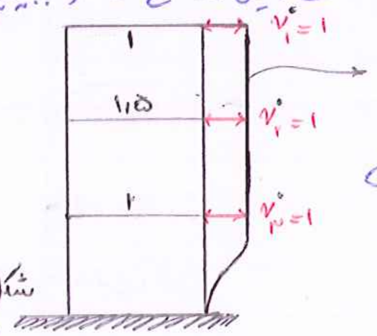
$T_{max_1}=V_{max_1}$ (روش رایلی R_{11} گویند)

ω دقیق‌تر از قبل بدست می‌آید

مثال: تعیین فرکانس طبیعی از روش رایلی اصلاح شده:

ابتدا یک تغییر شکل به حدس می‌زنیم تا اثر رایلی اصلاح شده را ببینیم.





انرژی جنبشی $T_{0max}=\frac{1}{2}\sum m_i\omega^2\psi_i^2$

$=\frac{\omega^2}{2}[1\times1^2+1.5\times1^2+2\times1^2]=\frac{4.5\omega^2}{2}$

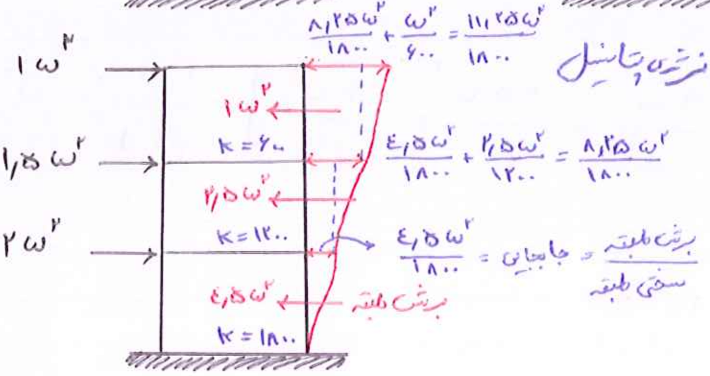
انرژی پتانسیل $V_{0max}=\frac{1}{2}k_i\Delta\psi_i^2$

$=\frac{1}{2}[1800\times1^2+1200\times(0)^2+600\times(0)^2]=900$

جابجایی نسبی طبقه اول نسبت به تکیه‌گاه

جابجایی نسبی طبقه دوم نسبت به طبقه اول

جابجایی طبقه سوم نسبت به طبقه دوم



بار لختی $=m_i\omega^2\psi_i^0$

شکل فرض شده دوم

$V_{0max}=T_{0max}\Rightarrow 900=\frac{4.5\omega^2}{2}\Rightarrow\omega^2=400$

$\Rightarrow \omega=20\ \frac{rad}{s}$

۳۶ درصد خطا دارد. (ω دقیق $14.5\ \frac{rad}{s}$)

انرژی پتانسیل = کار نیروی خارجی

$V_{1max}=\frac{1}{2}\left[2\omega^2\times\frac{4.5\omega^2}{1800}+1.5\omega^2\times\frac{8.25\omega^2}{1800}+1\omega^2\frac{11.25\omega^2}{1800}\right]=\frac{32.625\,\omega^4}{3600}$

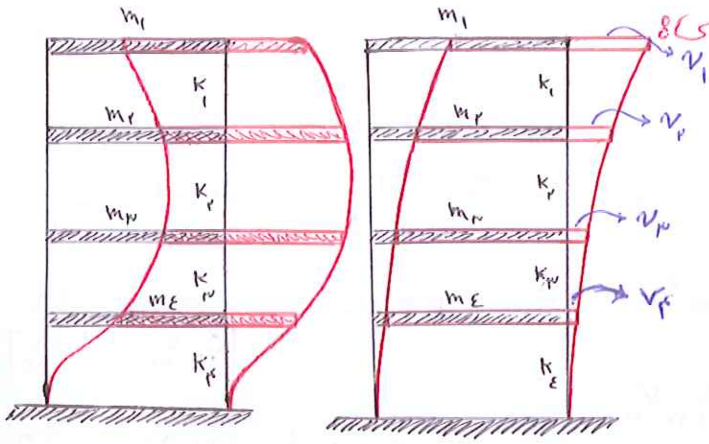
$T_{0max}=V_{1max}\Rightarrow\frac{4.5\omega^2}{2}=\frac{32.625\,\omega^{\cancel{4}\,2}}{3600}\Rightarrow\omega=15.73\ \frac{rad}{s}$

خطا کاهش پیدا کرده است

$T_{1max}=\frac{1}{2}\omega^2\left[\sum m_i\psi_i^2\right]=\frac{1}{2}\omega^2\left[1\times\left(\frac{11.25\omega^2}{1800}\right)^2+\left(1.5\times\left(\frac{8.25\omega^2}{1800}\right)^2\right)+\left(2\times\left(\frac{4.5\omega^2}{1800}\right)^2\right)\right]$ = ضریبی برحسب ω^4

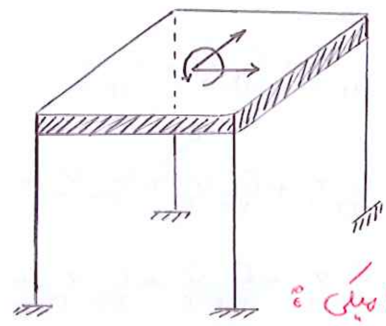
$T_{1max}=V_{1max}\Rightarrow\omega=14.76\ \frac{rad}{s}$

باز هم به 14.5 نزدیک‌تر شد.
و دقت بالاتر رفت



تحلیل دینامیکی سازه‌های چند درجه آزادی:

n درجه آزادی: n تا جابجایی دارد.



معادله‌ی تعادل دینامیکی:

روش دالامبر (تعادل مستقیم):

وقتی جسمی در حال تعادل است، تمامی اجزاء آن باید در تمام درجات آزادی متعادل باشند)

به عبارت دیگر: در یک سازه با n درجه آزادی، برای هر درجه آزادی دلخواه i، می‌توان نوشت:

$$f_{I_i} + f_{D_i} + f_{S_i} = P_i(t)$$

S = spring فنر (سختی الاستیک)

D = Damping میرایی

I = Inersy اینرسی

$n \leftarrow$ تعداد درجات آزادی

$$f_{I_1} + f_{D_1} + f_{S_1} = P_1(t)$$

$$f_{I_2} + f_{D_2} + f_{S_2} = P_2(t)$$

$$\vdots$$

$$f_{I_n} + f_{D_n} + f_{S_n} = P_n(t)$$

نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد $\leftarrow$ $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$

$k_{ij} = k_{ji} \leftarrow$ طبق قانون بتی و ماکسول

k_{ij} = نیروی لازم در درجه‌ی آزادی i برای ایجاد تغییر مکان واحد در درجه‌ی آزادی j به طوری که تغییر مکان بقیه‌ی درجات آزادی برابر صفر باشند.

رابطه‌ی عمومی و کلی: $f_{si} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + k_{i3}v_3 + \dots + k_{in}v_n$ نیروی لازم در درجه آزادی i

$$\begin{bmatrix} f_{s_1} \\ f_{s_2} \\ \vdots \\ f_{s_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} = k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + k_{13}v_3 + \dots + k_{1n}v_n \\ = k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + k_{23}v_3 + \dots + k_{2n}v_n \\ \\ = k_{n1}v_1 + k_{n2}v_2 + \dots + k_{nn}v_n \end{matrix} \Rightarrow f_s = K v = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$f_{D_i} = C_{i1}\dot{v}_1 + C_{i2}\dot{v}_2 + C_{i3}\dot{v}_3 + \cdots + C_{in}\dot{v}_n$$

C_{ij} = نیروی لازم در درجه آزادی i برای ایجاد سرعت واحد در درجهٔ آزادی j بطوریکه سرعت در درجات آزادی دیگر صفر باشد.

$$C_{ij} = C_{ji}$$

$$\begin{cases} f_{D_1} = C_{11}\dot{v}_1 + C_{12}\dot{v}_2 + C_{13}\dot{v}_3 + \cdots + C_{1n}\dot{v}_n \\ f_{D_2} = C_{21}\dot{v}_1 + C_{22}\dot{v}_2 + C_{23}\dot{v}_3 + \cdots + C_{2n}\dot{v}_n \\ f_{D_3} = C_{31}\dot{v}_1 + C_{32}\dot{v}_2 + C_{33}\dot{v}_3 + \cdots + C_{3n}\dot{v}_n \\ \vdots \\ f_{D_n} = C_{n1}\dot{v}_1 + C_{n2}\dot{v}_2 + C_{n3}\dot{v}_3 + \cdots + C_{nn}\dot{v}_n \end{cases} \Rightarrow F_D = C\dot{v} \rightarrow f_D = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix}$$

$$f_{I_i} = m_{i1}\ddot{v}_1 + m_{i2}\ddot{v}_2 + m_{i3}\ddot{v}_3 + \cdots + m_{in}\ddot{v}_n$$

m_{ij} = نیروی لازم در درجه آزادی i برای ایجاد شتاب واحد در درجهٔ آزادی j بطوریکه شتاب در بقیه درجات آزادی صفر باشد.

$$\begin{cases} f_{I_1} = m_{11}\ddot{v}_1 + m_{12}\ddot{v}_2 + m_{13}\ddot{v}_3 + \cdots + m_{1n}\ddot{v}_n \\ f_{I_2} = m_{21}\ddot{v}_1 + m_{22}\ddot{v}_2 + m_{23}\ddot{v}_3 + \cdots + m_{2n}\ddot{v}_n \\ f_{I_3} = m_{31}\ddot{v}_1 + m_{32}\ddot{v}_2 + m_{33}\ddot{v}_3 + \cdots + m_{3n}\ddot{v}_n \\ \vdots \\ f_{I_n} = m_{n1}\ddot{v}_1 + m_{n2}\ddot{v}_2 + m_{n3}\ddot{v}_3 + \cdots + m_{nn}\ddot{v}_n \end{cases} \Rightarrow f_I = M\ddot{v} \rightarrow F_I = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \vdots \\ \ddot{v}_n \end{bmatrix}$$

$$f_I + f_D + f_S = P(t) \qquad P(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{M\ddot{V} + C\dot{V} + KV = P(t)}$$ معادله ی تعادل دینامیکی سازه ی n درجه آزادی

سازه n درجه آزادی $\begin{cases} M \text{ و } C \text{ و } K \text{ ماتریس های } n\times n \\ V \text{ و } \dot{V} \text{ و } \ddot{V} \text{ ماتریس های } n\times 1 \end{cases}$

نکته: مؤلفه های معادله تعادل دینامیکی برای 1 درجه آزادی و برای n درجه آزادی همسان هستند ولی در n درجه آزادی مؤلفه ها ماتریس هستند.

در سازه یک درجه آزادی $\begin{cases} K \text{ و } C \text{ و } m \leftarrow \text{ اعداد هستند} \\ \ddot{V} \text{ و } \dot{V} \text{ و } V \leftarrow \text{ اعداد هستند.} \end{cases}$

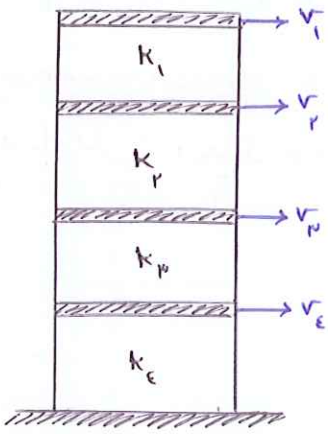
در نتیجه از معادله تعادل دینامیکی سازه n درجه آزادی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خواهد بود که از حل آنها پاسخ

... میرایی، مقدار بار را پیدا می‌کردیم.

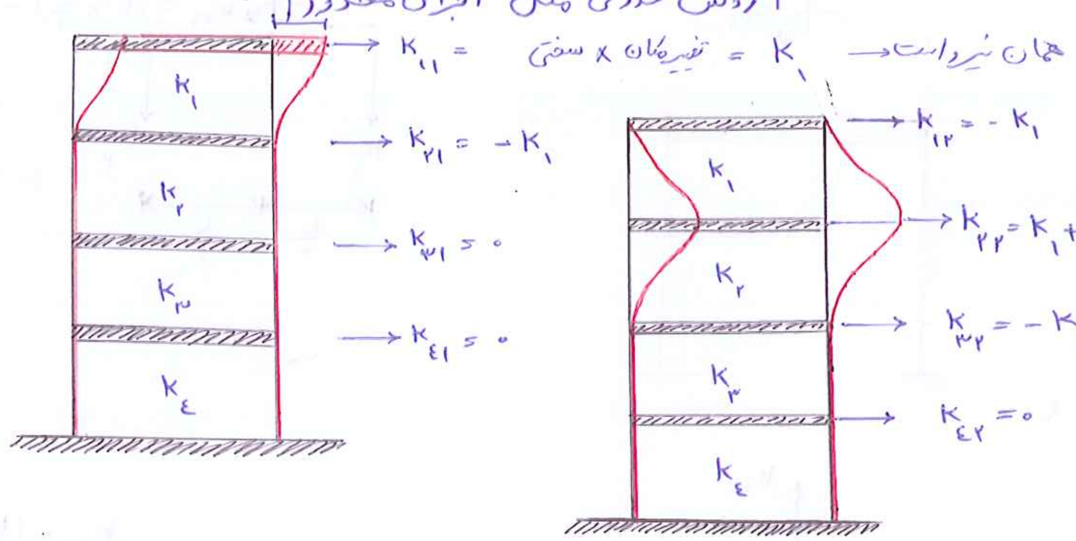
تحلیل دینامیکی سازه‌های چند درجه آزادی

- تشکیل معادله ← یعنی تعیین:
  - سختی
    - روش تحلیل (k_{ij})
    - روش عددی - اجزای محدود
  - جرم
  - میرایی
  - بار خارجی
- حل معادله

تعیین ماتریس سختی:
- روش تحلیلی (با استفاده از تعریف k_{ij})
- روش عددی مثل اجزای محدود

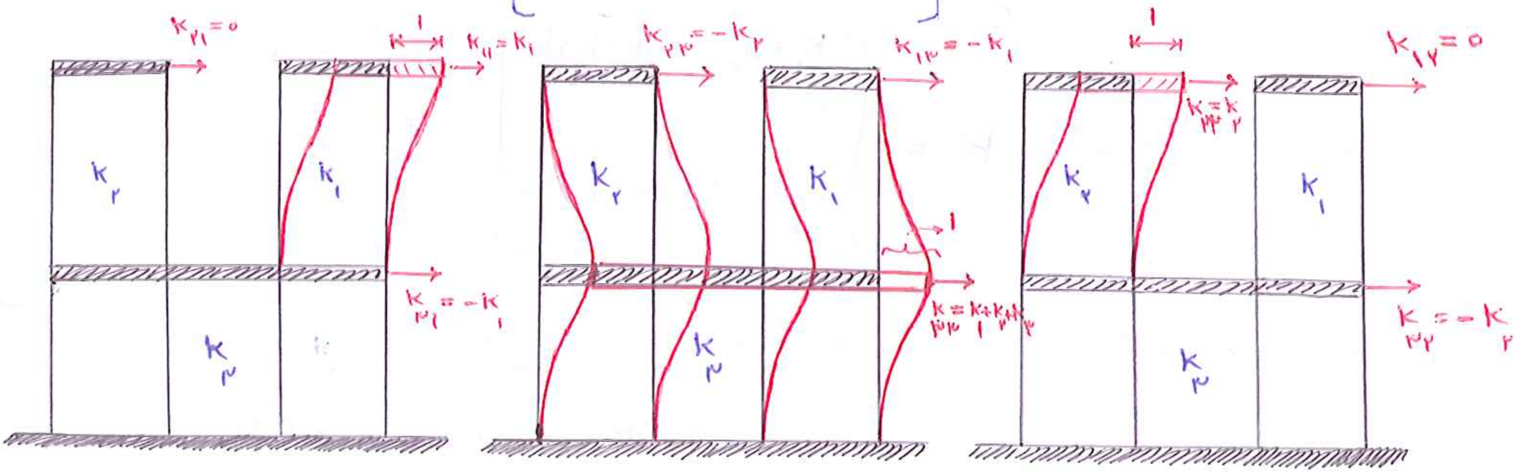


سیستم ۴ درجه آزادی
پس ماتریس سختی ۴×۴



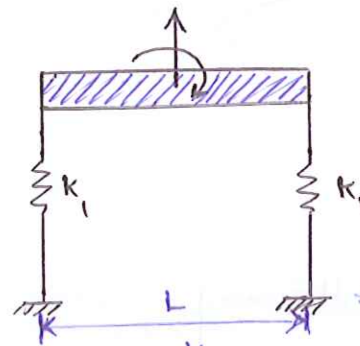
$$K = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3+K_4 \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس سختی همیشه متقارن است.

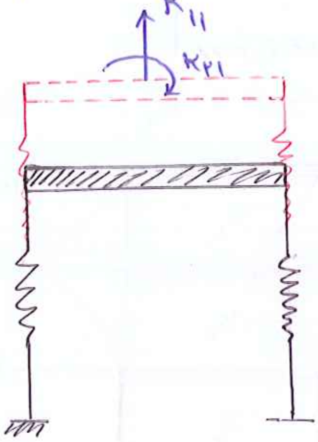


$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 \\ 0 & K_2 & -K_2 \\ -K_1 & -K_2 & K_1+K_2+K_3 \end{bmatrix}$$ ماتریس سختی

مثال: ماتریس سختی سازه‌ی زیر را بنویسید.

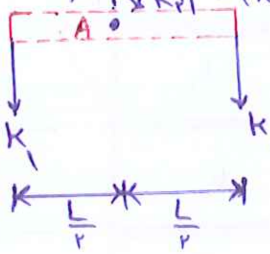


این سیستم دو درجه آزادی می‌باشد

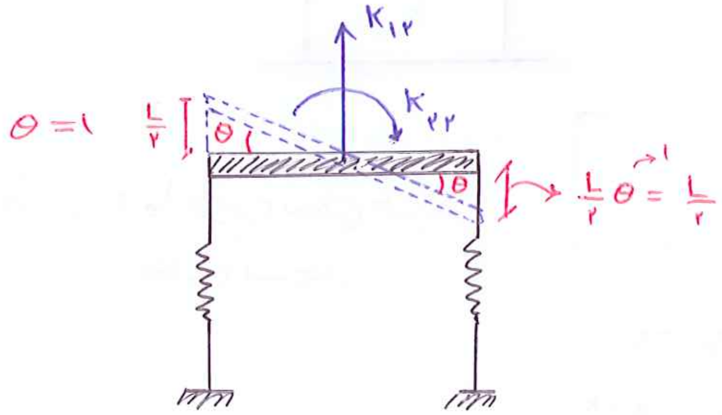


$K_{11}=K_1+K_2$

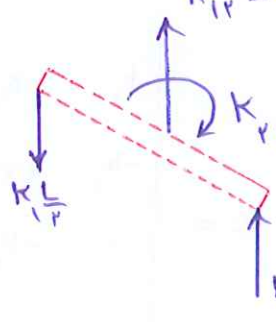
$K_{21}=(K_1\times\frac{L}{2})-(K_2\times\frac{L}{2})=(K_1-K_2)\frac{L}{2}$



برای بدست آوردن K_{21}، تعادل لنگر را حول نقطه A می‌نویسیم.



$K_{12}=(K_1-K_2)\frac{L}{2}$



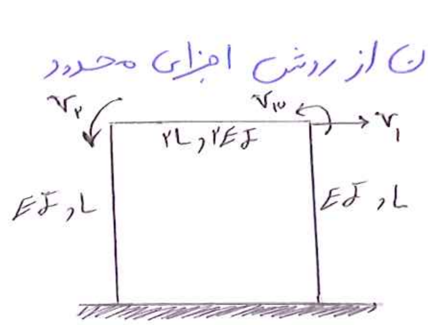
$K_{22}=(K_1\frac{L}{2})(\frac{L}{2})+(K_2\frac{L}{2})(\frac{L}{2})$

$=(K_1+K_2)\frac{L^2}{4}$

$$K=\begin{bmatrix} K_1+K_2 & (K_1-K_2)\frac{L}{2} \\ (K_1-K_2)\frac{L}{2} & (K_1+K_2)\frac{L^2}{4}\end{bmatrix}$$ ماتریس سختی

نکته: برای تعیین سختی، رایج‌ترین روش، روش عددی است که بین روش های عددی روش اجزای محدود بیشترین کاربرد را دارد.

نکته: برای بدست آوردن ماتریس سختی در قاب ها می‌توان از روش اجزای محدود استفاده کرد.



$$K=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 6L & 6L \\ 6L & 12L^2 & 4L^2 \\ 6L & 4L^2 & 12L^2 \end{bmatrix}$$

$K=\int B^T D B\, dv$

از درس اجزای محدود داریم.

ماتریس جرم:

۱) روش تحلیلی (با استفاده از تعریف m_{ij})

۲) روش عددی (روش اجزای محدود) $M = \int N^T \bar{m} N \, dv$

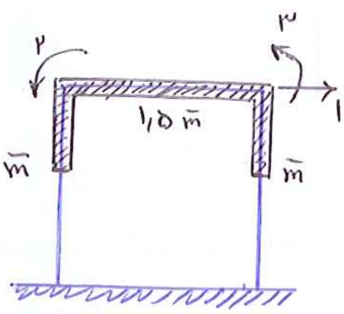
۳) ماتریس قطری

هر دو روش ۱ و ۲ در تعیین ماتریس جرم، منجر به یک ماتریس غیرقطری (ماتریس پر، پیوسته) می‌شوند یعنی یک ماتریس جرم سازگار (پیوسته) بدست می‌آید.

۳) روش ماتریس قطری:

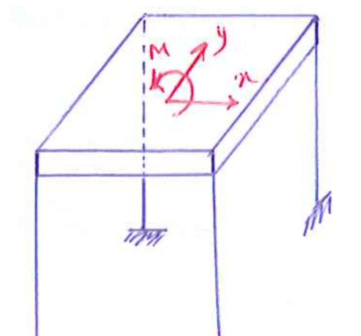
۱ به درجات آزادی تغییر مکانی، جرم اختصاص می‌دهیم.

به درجات آزادی غیر تغییر مکانی (چرخشی) جرم اختصاص نمی‌دهیم.



$$M = \begin{bmatrix} 4\bar{m}L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲ اگر در یک گره بیش از یک درجه آزادی تغییر مکانی وجود داشته باشد کل جرم به تمام درجات تغییر مکانی اختصاص می‌یابد.



ماتریس جرم $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

m_1: وزن سقف + نصف وزن ستونها

۳ جرم اختصاص یافته به درجات آزادی دورانی، مقدار اینرسی دورانی جسم صلب می‌باشد.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}$$

درنتیجه برای شکل بالا خواهیم داشت:

I_0: ممان اینرسی جرمی یا ممان اینرسی دورانی است.

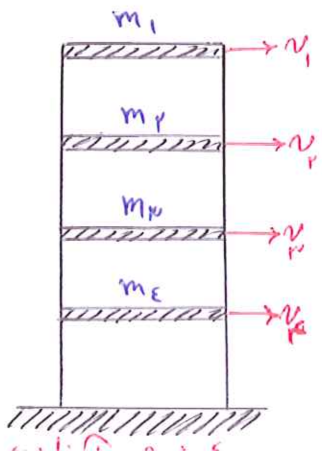
در اینجا ممان اینرسی دورانی مستقل است.

البته اگر جسم صلب باشد.

اگر اینرسی دورانی نباشد صفر خواهد بود.

$M\ddot{v}$ = نیرو

$M \times I_0 \ddot{\theta}$ = نیرو

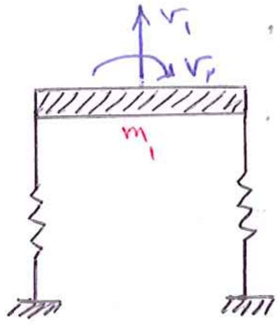


$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

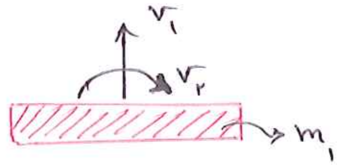
m_1, m_2, m_3, m_4 باهم برابر باشند همه برابر با m خواهند بود.

m_1 و m_2، m_3، m_4، جرم مربوط به درجه‌ی آزادی است که

مثال: ماتریس جرم سازه‌ی زیر را بدست آورید.



۲ درجه آزادی است پس ماتریس جرم ۲×۲ خواهد بود.



$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \qquad I_0 \rightarrow \frac{m l^2}{12}$$

ماتریس میرایی:

۱) تحلیلی

۲) روش عددی اجزای محدود

۳) میرایی به صورت ویسکوز بدست می‌آورند.

$$C = \alpha M + \beta K$$

میرایی ترکیبی از جرم و سختی

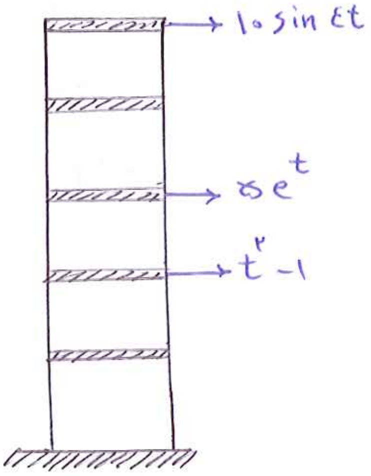
α و β براساس ایجاد یک میرایی مشخص در ۲ مود ارتعاشی متفاوت بدست می‌آید. در sap و دیگر نرم‌افزارها ضرایب α و β باید معرفی شود.

M و K قبلاً بدست آمده است $\longrightarrow$ C قابل محاسبه است.

ماتریس بار خارجی:

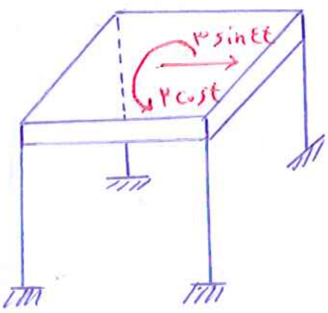
به تعداد درجه‌ی آزادی مؤلفه دارد.

$$P(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix}$$

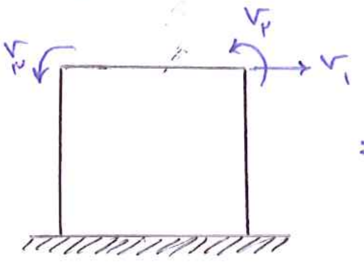


$$P(t) = \begin{Bmatrix} 10 \sin 4t \\ 0 \\ 5 e^t \\ t^2 - 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

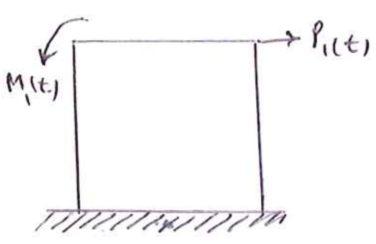
تعیین بار برای $P(t)$:



$$P(t) = \begin{Bmatrix} 3 \sin 4t \\ 0 \\ 2 \cos t \end{Bmatrix}$$

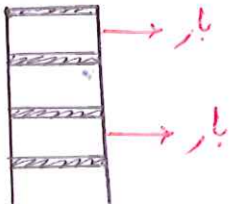


=



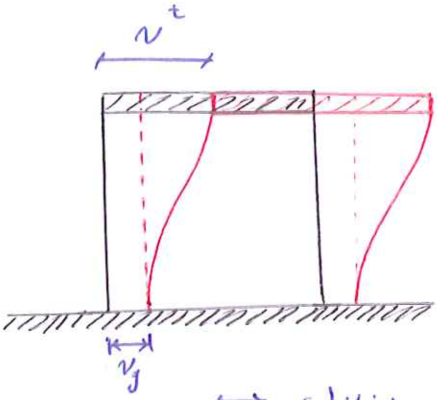
$$P(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ 0 \\ M_1(t) \end{Bmatrix}$$

نکته: این حالت شکل مقابل پیچیده است که چه مقدار و چه بخشی از بار به طبقه می‌رسد. چراکه بار به درجه‌ی آزادی وارد می‌شود.



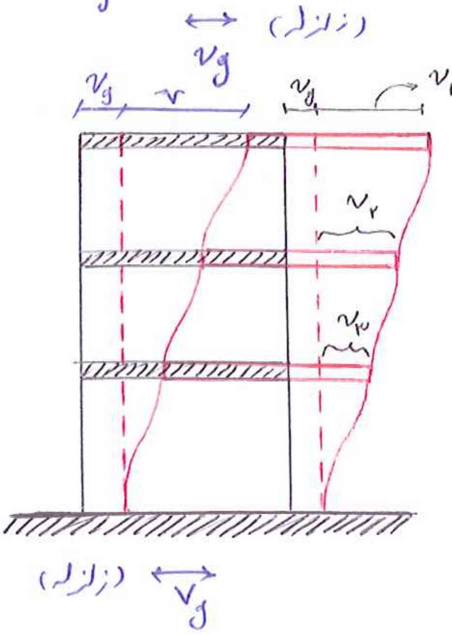
تعیین بار معادل ناشی از زلزله (زمین لرزه):

این نوع بار ارتعاش و حرکت زمین است که باید معادل آن بار را حساب کرد.



برای سازه یک درجه آزادی بار معادل را حساب کرده بودیم.

$$P_{eff} = m\ddot{v}_g$$



$$v^t = \begin{Bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ v_3^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_g + v_1 \\ v_g + v_2 \\ v_g + v_3 \end{Bmatrix} = v_g \overbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}^{\{r\}} + \overbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}}^{v}$$

همیشه ۱ نیست.

$$\Rightarrow v^t = v_g\{r\} + v$$

$$M\ddot{v}^t + C\dot{v} + Kv = 0$$

$$\boxed{M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = -M\{r\}\ddot{v}_g}$$

$$P_{eff}^t = -M\{r\}\ddot{v}_g$$

ماتریس جرم $m \times n$ — ماتریس $n \times 1$

$$P_{eff} \text{ سازه بالا } = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_g \\ \ddot{v}_g \\ \ddot{v}_g \end{Bmatrix}$$

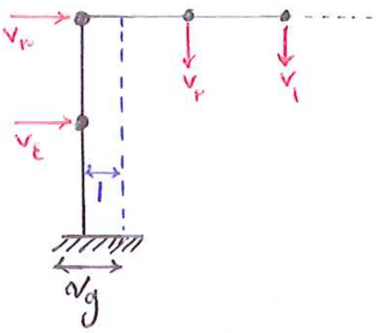
$$P_{eff} \text{ ناشی از زلزله } = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{Bmatrix}}_{\text{بردار } r} \ddot{v}_g$$

نکته: بردار $\{r\}$ یک ماتریس $n\times1$ است. دارای هایش سهم هر درجه آزادی از تغییر مکان مطلق واحد در تکیه‌گاه، در جهت ارتعاش است. همیشه 1 نیست می‌توان حساب کرد.

$$P_{eff}^{(t)} = -M\{r\}\ddot{v}_g$$

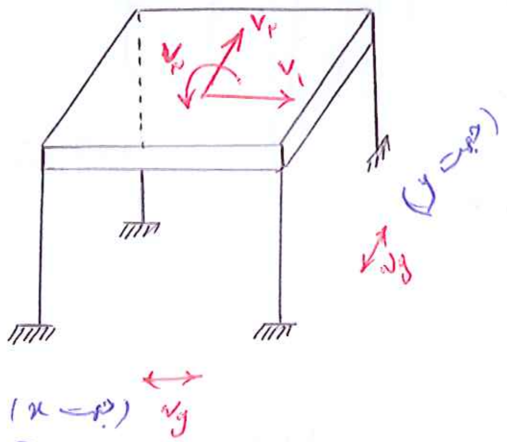
مؤلفه های بردار r به تعداد درجات آزادی بستگی دارد.

با ایجاد یک تغییر مکان واحد در تکیه گاه، سهم هر درجه آزادی از تغییر مکان، ماتریس $\{r\}$ سازه خواهد بود:



$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$ جهت نیروی زلزله در x

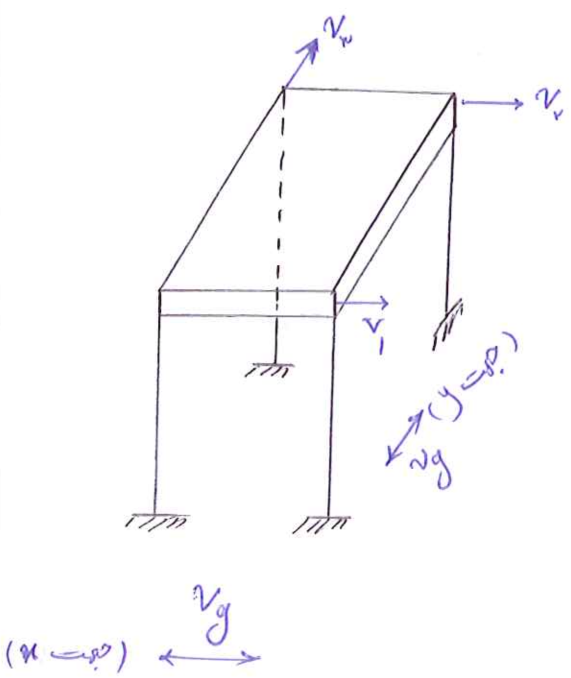
$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ جهت نیروی زلزله در y



$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ جهت نیروی زلزله در x

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ جهت نیروی زلزله در y

* اگر سازه مهاربندی شده توسط بادبند... باشد هم ماتریس $\{r\}$ به همین شکل بدست آید



جابجایی واحد در جهت x:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} \text{تغییر مکان } v_1 \\ \text{تغییر مکان } v_2 \\ \text{تغییر مکان } v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

جابجایی واحد در جهت y:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

تشکیل معادله :

ماتریس $n \times n$

$$M\ddot{V} + C\dot{V} + KV = P(t)$$

حل معادله تعادل دینامیکی سازه چند درجه آزادی :

ارتعاش آزاد بدون میرایی : $P(t)=0$ و $C=0$

$$\boxed{M\ddot{V} + KV = 0} \quad *$$

جواب $\rightarrow V = \{\alpha\}\sin(\omega t - \theta)$ (I)

$V_0 \leftarrow$ همان جواب عمومی است.

$$\ddot{V} = -\{\alpha\}\omega^2 \sin(\omega t - \theta) \Rightarrow \ddot{V} = -\omega^2 V \quad \text{(II)}$$

$\{\alpha\}$ = دامنه (شکل مود ارتعاشی)

* در (I) و (II) $\Rightarrow [-M\omega^2 + K]\{\alpha\}\sin(\omega t - \theta) = 0$

تابع زمان

M و K ماتریس هستند.

$$\rightarrow [-M\omega^2 + K]\{\alpha\} = 0$$

$\longrightarrow \{\alpha\} = 0$ حالت قبل از ارتعاش است

$\longrightarrow |K - \omega^2 M| = 0$ یک تابع درجه n از ω خواهد بود n تا ω بدست می دهد.

نکته : برای اینکه جواب غیرصفر داشته باشد، کافیست دترمینان ماتریس ضرائب آن صفر باشد.

$|K - \omega^2 M| = 0 \longrightarrow$ تابع درجه n از ω^2 $\longrightarrow$ n تا جواب دارد یعنی n تا ω^2 بدست می آید. $\rightarrow \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$

فرکانس مود اول — فرکانس مود n ام

سازه ی n درجه آزادی n تا ω_n (فرکانس طبیعی دارد. به کوچکترین آن ω_1 گفته می شود.

قبلاً $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ بود، حال دترمینان $|K - \omega^2 M| = 0$ ، فرکانس طبیعی را به ما می دهد.

اگر فرکانس بار با فرکانس طبیعی برابر بود، حالت تشدید رخ می دهد. با هر کدام از n فرکانس در همان مود می تواند تشدید کند.

$\{\alpha\} \neq 0$ جواب غیرصفر دارد $\longrightarrow$ شکل ارتعاش

یعنی به ازای هر فرکانس یک شکل ارتعاش بدست می آید.

نکته : فرکانس های کوچکتر یا مودهای پایین تر سهم بیشتر در پاسخ دارند تا فرکانس های بالاتر

یعنی اگر تشدید در فرکانس های بالا رخ دهد مهم نیست چون سهم آن کم است.

فرکانس بالا انرژی بیشتری برای تحریک نیاز دارد.

اما فرکانس های پایین تر انرژی کمتری برای تحریک نیاز دارد.

به ازای هر ω می‌توان یک $\{\alpha\}$ حساب کرد.

$\{\alpha\}$ را بردار ویژه یا شکل مود ها نیز گفته می‌شود.

به ω ها مقادیر ویژه نیز گفته می‌شود که می‌توان از ریاضیات نیز کمک گرفت.

مقادیر غیر صفر با فرض یک مقدار بدست می‌آید

مثلاً مؤلفه‌ی اول را فرض می‌کنیم و یک مقدار را بدست می‌آوریم.

اولی را فرض کرده ایم

$$[K-\omega^2 M]\{\alpha\}=0 \Longrightarrow [K-\omega^2 M]\begin{Bmatrix}1\\ \alpha_{2n}\\ \alpha_{3n}\\ \vdots\\ \alpha_{nn}\end{Bmatrix}=0$$

ϕ_n شکل مود

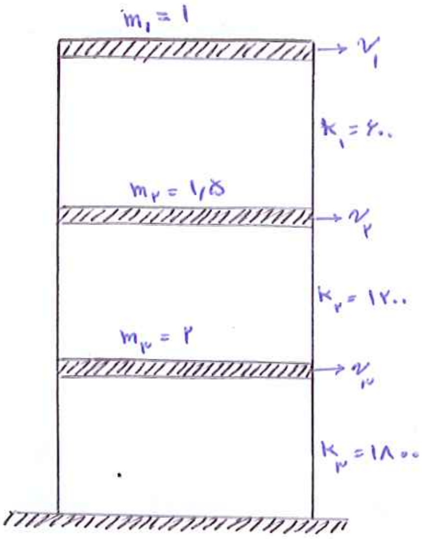
ϕ_{n-1}

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{1n}\\ e_{n1} & E_{nn}\end{vmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ \phi_{n-1}\end{Bmatrix}=0$$

$$e_{n1}\times 1+E_{nn}\phi_{n-1}=0$$

$$\Longrightarrow \phi_{n-1}=-E_{nn}^{-1}e_{n1}$$

نکته: در مثال صفحه‌ی بعد به ۳ روش محاسبه‌ی شکل مود اشاره شده است.



تحلیل دینامیکی سازه چند درجه آزادی :

$$|K - \omega^2 M| = 0$$ ارتعاش آزاد

$$|K - \omega_n^2 M| \{\phi_n\} = 0$$

ماتریس سختی

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & \underset{}{\overset{1800}{600+1200}} & -1200 \\ 0 & -1200 & \underset{3000}{1200+1800} \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [K - \omega^2 M] = \begin{bmatrix} 600-\omega^2 & -600 & 0 \\ -600 & 1800-1.5\omega^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000-2\omega^2 \end{bmatrix}$$

همه را بر 600 تقسیم می کنیم
و $B = \frac{\omega^2}{600}$ در نظر می گیریم

$$|K - \omega^2 M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B & -2 \end{matrix}$$

$$= (1-B)(3-1.5B)(5-2B) - \overbrace{\left(4\times(1-B) + (-1\times-1\times(5-2B))\right)}^{9-6B}$$

$$= (3 - 1.5B - 3B + 1.5B^2)(5-2B) - 9 + 6B$$

$$= 15 - \cancel{6B} - 7.5B + 3B^2 - 15B + 6B^2 + 7.5B^2 - 3B^3 - 9 + \cancel{6B}$$

$$= 6 - 22.5B + 16.5B^2 - 3B^3 = 0 \quad (\text{تقسیم بر } -3) \rightarrow \boxed{B^3 - 5.5B^2 + 7.5B - 2 = 0}$$

به ماشین حساب می دهیم

$$B_3 = 3.541 = \frac{\omega_3^2}{600} \Rightarrow \omega_3 = 46.1 \ \frac{rad}{s}$$

$$B_2 = 1.606 = \frac{\omega_2^2}{600} \Rightarrow \omega_2 = 31.1 \ \frac{rad}{s}$$

$$B_1 = 0.3516 = \frac{\omega_1^2}{600} \Rightarrow \omega_1 = 14.5 \ \frac{rad}{s}$$

محاسبه ی شکل مود اول، دوم و سوم:

$$[K - \omega_n^2 M]\{\phi_n\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-B_n & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B_n & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

محاسبه شکل مود اول:

$$\begin{bmatrix} 1-B_1 & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B_1 & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E

برای بدست آوردن ϕ_{21} و ϕ_{31} ۳ روش وجود دارد. اول اینکه ابتدا ϕ_{21} را بدست آورد. و سپس ϕ_{31} را محاسبه کنیم. دومین روش نیز ساختن دو معادله و دو مجهول برحسب ϕ_{31} و ϕ_{21} است.

$B_1 = 0.351$

(روش اول) $(1-B_1)\times 1 + (-1)\times\phi_{21} = 0 \rightarrow \phi_{21}$ بدست می آید

با جایگذاری ϕ_{21} در این معادله ϕ_{31} بدست می آید: $(-1)\times 1 + (3-1.5B_1)\phi_{21} + (-2)\phi_{31} = 0$

(روش دوم)

$$\begin{cases} (-1)\times 1 + (3-1.5B_1)\phi_{21} + (-2)\phi_{31} = 0 \rightarrow 2.4735\,\phi_{21} - 2\phi_{31} = 1 \\ 0\times 1 + (-2)\phi_{21} + (5-2B_1)\phi_{31} = 0 \rightarrow -2\phi_{21} + 4.298\,\phi_{31} = 0 \end{cases}$$

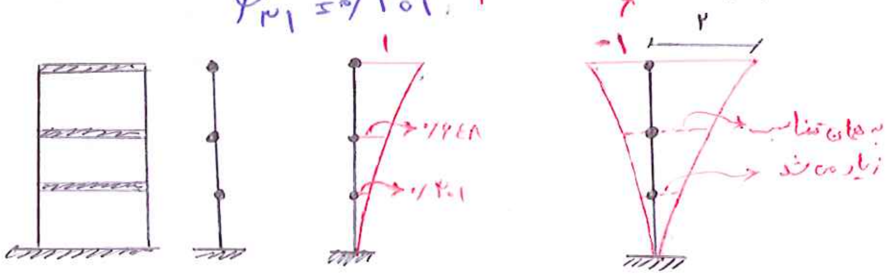
معادله را به ماشین حساب می دهیم و یا دستی حل می کنیم. $\Longrightarrow \phi_{21} = 0.648$

$\phi_{31} = 0.301$

اگر ۱ نرمال می کردیم

اگر ۲ نرمال می کردیم

شکل مود اول $\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix}$

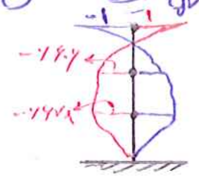


محاسبه ی شکل مود دوم: حال اگر $n=2$ باشد ← $B_2 = 1.61$

با توجه به مراحل انجام شد، برای مود 1، این مراحل را برای بدست آوردن شکل مود دوم نیز تکرار می کنیم با این تفاوت که این بار از $B_2 = 1.61$ استفاده می کنیم که در نهایت شکل مود بدست می آید:

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.606 \\ -0.679 \end{Bmatrix}$$

$B_2 = 1.61$



$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.54 \\ 2.43 \end{Bmatrix}$$

$B_3 = 0.3514$

روش سوم بدست آوردن شکل مودها که از همه راحت‌تر است (رهنمای) بعد آمده است.

روش سوم محاسبه ی شکل مود ها

$$\Rightarrow \overset{n=1}{E^1} = \begin{bmatrix} 3-1.5B_1 & -2 \\ -2 & 5-2B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-(1.5\times 0.351) & -2 \\ -2 & 5-(2\times 0.351) \end{bmatrix}$$

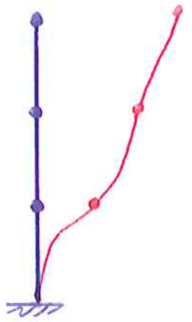
$B_1 = 0.351$

$$\Rightarrow E^1 = \begin{bmatrix} 2.4735 & -2 \\ -2 & 4.298 \end{bmatrix}$$

$$(E^1)^{-1} = \frac{\text{ماتریس اصلی با جابجایی قطر اصلی و قرینه ی بقیه درایه ها}}{\text{دترمینان ماتریس اصلی}} = \frac{1}{6.6259}\begin{bmatrix} 4.298 & 2 \\ 2 & 2.4735 \end{bmatrix}$$

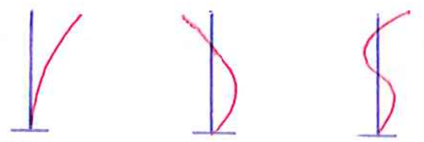
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6.6259}\begin{Bmatrix} 4.298 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix} \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix}$$

به همین ترتیب با جایگذاری $B_2 = 1.61$ شکل مود دوم و با جایگذاری $B_3 = 0.3514$ شکل مود سوم بدست می آید



سازه سه درجه آزادی به یک شکل ارتعاش می کند.

نکته : سازه با ترکیبی از همه ی شکل ارتعاش ها ، ارتعاش می کند.



مود اول ϕ_1 — مود دوم ϕ_2 — مود سوم ϕ_3

سهم مود اول در ایجاد آن شکل بیشتر است. سازه به تنهایی این مود ها ، ارتعاش نمی کند.

جابجایی به منظم بودن پلان سازه ، و منظم بودن سازه در ارتفاع بستگی دارد.

نتیجه کلی : اگر سازه جابجایی داشته باشد

$$v(t) = \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{Bmatrix} = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \phi_3 Y_3(t)$$

$$v_1(t) = \phi_1 Y_1(t)$$

$$v(t) = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \phi_3 Y_3(t)$$

سازه منظم باشد به خصوص در حرکت این سازه تحت زلزله ، عمده ی سهم مربوط به مود اول است.

۹۵ ٪ سهم مود اول است.

سازه نامنظم باشد سهم مود های بالاتر عوض می شود.

تغییر مکان و جابجایی سازه با تک مود نیست ، ترکیبی از مود های سازه است.

$$v_{(t)} = \phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_2 + \phi_3 Y_3 + \cdots + \phi_n Y_n = \{\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n\} \begin{Bmatrix} Y_{1(t)} \\ Y_{2(t)} \\ \vdots \\ Y_{n(t)} \end{Bmatrix} = \underset{n\times n}{\Phi}\ \underset{n\times 1}{Y_{(t)}}$$

می خواهیم معادله‌ی $M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = P_{(t)}$ را حل کنیم.

$$v = \Phi Y$$
$$\dot{v} = \Phi \dot{Y} \quad \Longrightarrow \quad M\Phi\ddot{Y} + C\Phi\dot{Y} + K\Phi Y = P_{(t)}$$
$$\ddot{v} = \Phi \ddot{Y}$$

اگر m , k را داشته باشیم می توان Φ را حساب کرد.

حال می خواهیم Y را بدست آوریم. مودها خواصیتی دارند که می توان فرم را عوض کرد.

ماتریس جرم و ماتریس سختی، نسبت به مودها متعامد هستند.

$$\begin{cases} \phi_n^T M \phi_m = 0 & \text{if: } n \neq m \\ \phi_n^T M \phi_m = M_n & \text{if: } n = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_n^T K \phi_m = 0 & \text{if: } n \neq m \\ \phi_n^T K \phi_m = K_n & \text{if: } n = m \end{cases}$$

اثبات تعامد جرم نسبت به مودها:

برای مود n ام

$$[K - \omega_n^2 M]\phi_n = 0$$

$$K\phi_n - \omega_n^2 M\phi_n = 0$$

$\phi_m^T \times$ دو طرف $\Rightarrow \phi_m^T K \phi_n - \omega_n^2 \phi_m^T M \phi_n = 0$ رابطه ①

برای مود m ام $[K - \omega_m^2 M]\phi_m = 0$

$$K\phi_m - \omega_m^2 M\phi_m = 0$$

$\phi_n^T \times$ دو طرف $\Rightarrow \phi_n^T K \phi_m - \omega_m^2 \phi_n^T M \phi_m = 0$

نکته: $(AB)^T = B^T A^T$

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$

دو طرف را ترانهاده می گیریم $\Rightarrow \phi_m^T K \phi_n - \omega_m^2 \phi_m^T M \phi_n = 0$ رابطه ②

ترانهاده ماتریس متقارن خود ماتریس می شود.

از ② و ① تفریق $\Rightarrow (\omega_m^2 - \omega_n^2)\phi_m^T M \phi_n = 0$

ترانهاده‌ی ترانهاده، خود ماتریس می شود.

if $n \neq m \rightarrow \phi_m^T M \phi_n = 0$

if $n = m \rightarrow \phi^T M \phi = M_n$

نتیجه $\Rightarrow$ $\Phi^T K \Phi = \begin{Bmatrix}\phi_1^T\\ \phi_2^T\\ \vdots\\ \phi_n^T\end{Bmatrix} K \left[\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n\right] = \begin{bmatrix} \phi_1^T K \phi_1 & \phi_1^T K \phi_2 & \cdots & \phi_1^T K \phi_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_n^T K \phi_1 & \cdots & & \phi_n^T K \phi_n \end{bmatrix}$

غیر صفر و بقیه درایه ها صفر است و در نهایت فقط ماتریس قطری داریم.

$$K_n = \phi_n^T K \phi_n = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & K_2 & & & & \\ \vdots & & K_3 & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & K_n \end{bmatrix} \quad و \quad M_n = \phi_n^T M \phi_n = \begin{bmatrix} m_1 & & \cdots & & 0 \\ & m_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & m_n \end{bmatrix}$$

جرم و سختی اثبات شد که متعامد است. میرایی نیز نسبت به مودها متعامد است.

$$C = \alpha M + \beta K$$

$$\underbrace{\Phi^T C \Phi}_{\text{پس این هم قطری است}} = \alpha \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\text{این قطری است}} + \beta \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{\text{این قطری است}}$$

میرایی را با ضریب α و β بدست می آورند.
یعنی اگر مقداری از جرم با مقداری از سختی باهم جمع شوند میرایی معادل بدست می آید. در اکثر نرم افزارها ضرایب α و β برای تعریف میرایی وجود دارد.
مانند ansis و sap

اگر معادله ی $M\Phi\ddot{Y} + C\Phi\dot{Y} + K\Phi Y = P(t)$ را در Φ^T پیش ضرب کنیم آنگاه برابر خواهد بود با:

$$\underbrace{\Phi^T M \Phi \ddot{Y}}_{\text{ماتریس جرمی که قطری شده است.}} + \underbrace{\Phi^T C \Phi \dot{Y}}_{\text{ماتریس میرایی که قطری شده است.}} + \underbrace{\Phi^T K \Phi Y}_{\text{ماتریس سختی که قطری شده است.}} = \Phi^T P(t)$$

نتیجه: به n تا معادله ی یک درجه آزادی تبدیل شده است.

تفاوت اصلی در این است که معادله به یک معادله ی دیگر تبدیل شده است و دیگر دستگاه معادلات دیفرانسیل نیست. یعنی پاسخ ها مرتبط به هم نیستند.

دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ $\longrightarrow$ به صورت ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$

x و y به هم وابسته هستند که این دستگاه معادلات دیفرانسیل است.

در حالت مقابل پیدا کردن x ربطی به y ندارد.
هر کدام مستقل هستند و قابل محاسبه می باشند.

دو معادله ی یک مجهولی $\quad 3x = 5 \quad 2y = 4$

یک ماتریس قطری است.

به صورت ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix}$

Y_1 را می‌توان مستقل از Y_2 حساب کرد.

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{Y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \vdots \\ \dot{Y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1^T P(t) \\ \phi_2^T P(t) \\ \vdots \\ \phi_n^T P(t) \end{Bmatrix}$$

اگر ماتریس ضرایب قطری نباشند، جواب‌ها به هم ارتباط پیدا می‌کنند و دیگر مستقل نیستند.

اگر معادله‌ی $M_n\ddot{Y}_n + C_n\dot{Y}_n + K_nY_n = P_n(t)$ حل شود Y بدست می‌آید.

به ازای $n=1$ ، Y_1 بدست می‌آید.

به ازای $n=2$ ، Y_2 بدست می‌آید.

⋮

به ازای $n=n$ ، Y_n بدست می‌آید.

معادله‌ی سازه‌ی n درجه آزادی تبدیل به معادله‌ی سازه‌ی یک درجه آزادی شد.

$$V = \underbrace{\phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_2 + \phi_3 Y_3}$$

ضرایبی که باید بدست می‌آمد

سازه یک درجه آزادی با هرگونه بارگذاری مختلف را می‌توان با روش‌های انتگرال دیوهامل یا روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم حل کرد و Y را بدست آورد.

یا
$$\boxed{\ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n}}$$

به این روش آنالیز مودال یا ترکیب مودها گفته می‌شود. به‌صورت خلاصه $\boxed{6}$ مرحله دارد

۱) تشکیل معادله (تعیین M ، K ، C ، $P(t)$)

۲) تعیین فرکانس‌ها و تشکیل مودهای ارتعاش

$|K-\omega^2 M|=0 \rightarrow$ فرکانس‌ها بدست می‌آید.

$[K-\omega_n^2 M]\{\phi_n\}=0 \rightarrow$ مودهای ارتعاش بدست می‌آید.

۳) تعیین بار تعمیم یافته و جرم تعمیم یافته

$M_n = \phi_n^T M \phi_n \rightarrow$ جرم تعمیم یافته

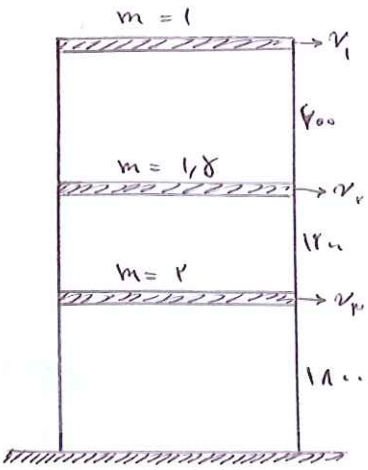
$P_n(t) = \phi_n^T P(t) \rightarrow$ بار تعمیم یافته

۴) تشکیل معادلات غیرکوپلد (معادلات مستقل) n تا معادله‌ی غیرکوپلد داریم.
$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

۵) حل معادلات غیرکوپله به روش دیوهامل - انتگرال‌گیری مستقیم - نوشتن پاسخ‌ها رمونیک (بسته به بارگذاری)

۶) ترکیب مودها و تعیین پاسخ

$$V(t) = \phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_2 + \phi_3 Y_3 + \dots + \phi_n Y_n$$



مثال: سازه تحت شرایط اولیه به ارتعاش در آمده است

تاریخچه زمانی تک تک v ها را می خواهیم بدست آوریم.

$$v_0 = \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{Bmatrix} \text{in} \qquad \dot{v}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{in/s} \qquad C = 0$$

میرایی نداریم.

$$K = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 600+1200 & -1200 \\ 0 & -1200 & 1200+1800 \end{bmatrix} , \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad C = 0$$

$$P(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

بار وجود ندارد زمین لرزه هم نداریم.

محاسبه ی فرکانس ها:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \implies \omega_1 = 14.5 \ \tfrac{rad}{s} , \quad \omega_2 = 31.1 \ \tfrac{rad}{s} , \quad \omega_3 = 46.1 \ \tfrac{rad}{s}$$

محاسبه ی شکل مود ها: از رابطه ی $[K - \omega_n^2 M]\{\phi_n\} = 0$ شکل مود ها را محاسبه می کنیم.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.648 & -0.606 & -2.54 \\ 0.301 & -0.679 & 2.43 \end{bmatrix}$$

قبلاً بدست آورده ایم

به تعداد مود ها، جرم مودی (جرم تعمیم یافته) حساب می کنیم.

$$M_1 = \phi_1^T M \phi_1 = [1 \quad 0.648 \quad 0.301] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{bmatrix} = 1.81$$

$$M_2 = \phi_2^T M \phi_2 = [1 \quad -0.606 \quad -0.679] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.606 \\ -0.679 \end{bmatrix} = 2.47$$

$$M_3 = \phi_3^T M \phi_3 = [1 \quad -2.54 \quad 2.43] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2.54 \\ 2.43 \end{bmatrix} = 32.6$$

$$P_n(t) = \phi_n^T P(t)$$

به تعداد مود ها، بار مودی (بار تعمیم یافته) حساب می کنیم.

$$P_1(t) = \phi_1^T P(t) = 0$$

$P_1(t)$ و $P_2(t)$ و $P_3(t)$ صفر است. چون $P(t)$ صفر است.

$$P_2(t) = \phi_2^T P(t) = 0 \qquad \implies P_n(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$P(t)$ اگر صفر نشود یک تابع بدست می آید

(می توانست هر تابع دلخواهی باشد)

$$P_3(t) = \phi_3^T P(t) = 0$$

تشکیل معادلات غیر کوپله

$$\ddot{Y}_n + 2\cancel{\xi_n \omega_n}\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n}$$ ← صفر است

چون میرایی نداریم.

طرف دوم هر تابعی بود باید بتوان حل کرد

چون یک سازه یکدرجه آزادی است.

با دیوهامل یا انتگرال گیری مستقیم

$$\ddot{Y}_1 + \omega_1^2 Y_1 = 0$$

$$\ddot{Y}_2 + \omega_2^2 Y_2 = 0$$

الان به معادله‌ی ارتعاش آزاد بدون میرایی رسیدیم.

$$\ddot{Y}_3 + \omega_3^2 Y_3 = 0$$

شرایط اولیه برحسب V معلوم است

برحسب Y معلوم نیست، اما باهم

ارتباط دارند.

$$Y_1(t) = \frac{\dot{Y}_1(0)}{\omega_1}\sin\omega_1 t + Y_1(0)\cos\omega_1 t$$

$$Y_2(t) = \frac{\dot{Y}_2(0)}{\omega_2}\sin\omega_2 t + Y_2(0)\cos\omega_2 t$$

$$Y_3(t) = \frac{\dot{Y}_3(0)}{\omega_3}\sin\omega_3 t + Y_3(0)\cos\omega_3 t$$

$$V = \phi Y \rightarrow V(0) = \phi Y(0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(0) = \phi^{-1} V(0) \\ \dot{Y}(0) = \phi^{-1}\dot{V}(0) \end{cases}$$

یا برای راحتی کار می‌توان مقادیر $Y_n(0)$ و $\dot{Y}_n(0)$ را از فرمول های زیر حساب کرد.

شرایط اولیه برحسب Y

$$Y_n(0) = \frac{\phi_n^T M V(0)}{M_n}$$

$$\dot{Y}_n(0) = \frac{\phi_n^T M \dot{V}(0)}{M_n}$$

$$Y_1(0) = \frac{\phi_1^T M V(0)}{M_1} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 0.648 & 0.301\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.648\\0.301\end{bmatrix}}{1.81} = 0.59$$

$$Y_2(0) = \frac{\phi_2^T M V(0)}{M_2} = 0.11$$

$$Y_3(0) = \frac{\phi_3^T M V(0)}{M_3} = 0.019$$

$$\dot{Y}_1(0) = \frac{\phi_1^T M \dot{V}(0)}{M_1} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 0.648 & 0.301\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.648\\0.301\end{bmatrix}}{1.81} = 4.83$$

$$\dot{Y}_2(0) = \frac{\phi_2^T M \dot{V}(0)}{M_2} = -3.3$$

$$\dot{Y}_3(0) = \frac{\phi_3^T M \dot{V}(0)}{M_3} = -1.53$$

در نهایت :

$$Y_1(t) = \frac{4.83}{14.5} \sin 14.5t + 0.59 \cos 14.5t$$

$$Y_2(t) = \frac{-3.3}{31.1} \sin 31.1t + 0.11 \cos 31.1t$$

$$Y_3(t) = \frac{-1.53}{46.1} \sin 46.1t + 0.019 \cos 46.1t$$

$$\Rightarrow V(t) = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \phi_3 Y_3(t)$$

$$\begin{Bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix} \left[\frac{4.83}{14.5} \sin 14.5t + 0.59 \cos 14.5t \right]$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.606 \\ -0.679 \end{Bmatrix} \left[\frac{-3.3}{31.1} \sin 31.1t + 0.11 \cos 31.1t \right]$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.54 \\ 2.43 \end{Bmatrix} \left[\frac{-1.52}{46.1} \sin 46.1t + 0.019 \cos 46.1t \right]$$

اگر سازه نامنظم بود و سختی هم تغییر داشت باز هم سهم مود اول بیشتر است.

سهم مود سوم در پاسخ درجه آزادی ۱، حدود $\frac{1}{10}$ مود اول است.

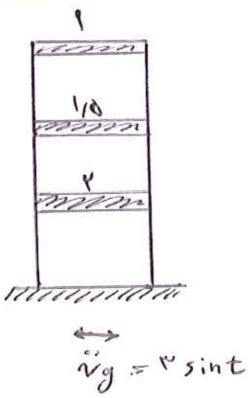
مؤلفه ی دوم حالت مود اول، ۳۰ برابر مؤلفه ی دوم مود سوم است.

مؤلفه دوم مود اول $\rightarrow 0.59$

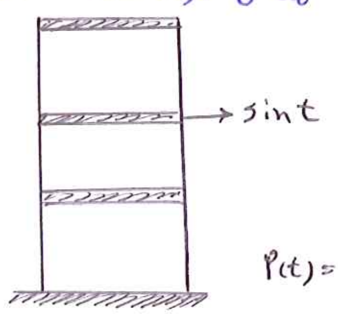
مؤلفه دوم مود سوم $\rightarrow 0.019$

$$\Rightarrow \frac{0.59}{0.019} \simeq 30$$

مثال از حالت $P(t) \neq 0$:



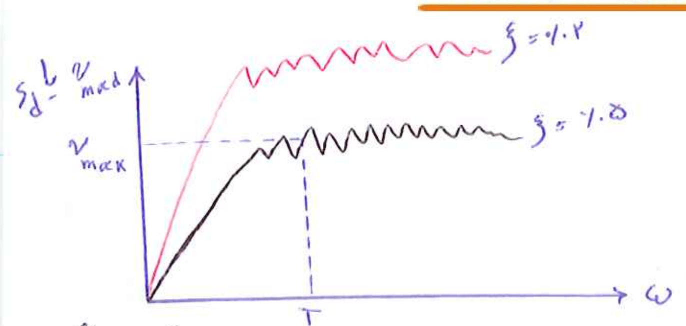
$$P(t) = M\{r\}\ddot{v}_g = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



$$P(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

تحلیل طیفی :

طیف های شکل های رسم شده برای یک زلزله ی خاص و در یک مکان خاص (زلزله ۱۹۴۰ ال سنترو) در کالیفرنیا رسم شده. انحنا و ناپیوستگی هایی که در این منحنی ها مشاهده می شود رزنانس ها یا تشدید های محلی را نشان می دهد.



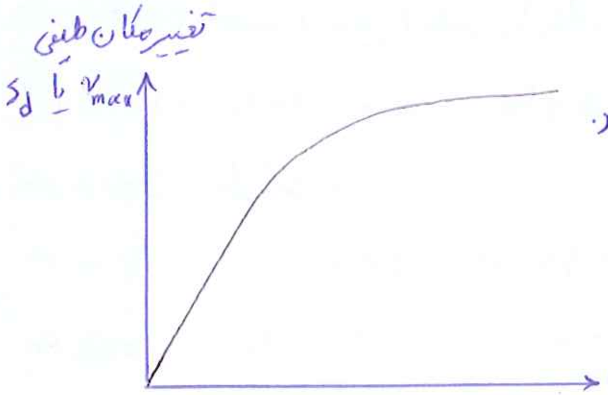
منحنی طیف تغییر مکان (تحت زلزله ای که قبلاً رخ داده است)

اگر زلزله ی مشخص، زلزله طرح منطقه باشد، طیف طرح گویند.

برای زلزله های آن منطقه می توان میانگین گرفت.

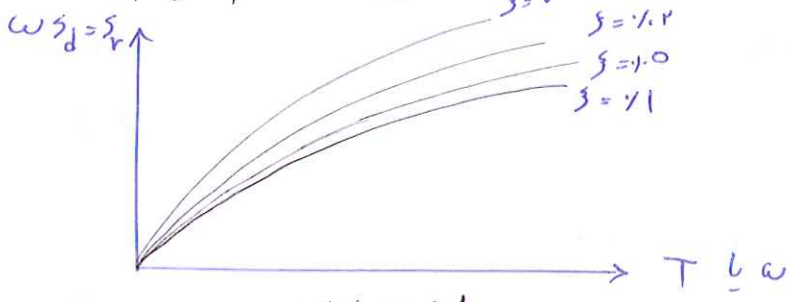
منحنی طیف برای هر منطقه می توان حساب کرد و بدست آورد.

نکته : برای طراحی در یک فرکانس سازه، پاسخ سازه نمی تواند تغییر زیادی داشته باشد اما در استفاده از طرح، از منحنی طیف این شکل استفاده می کنیم.



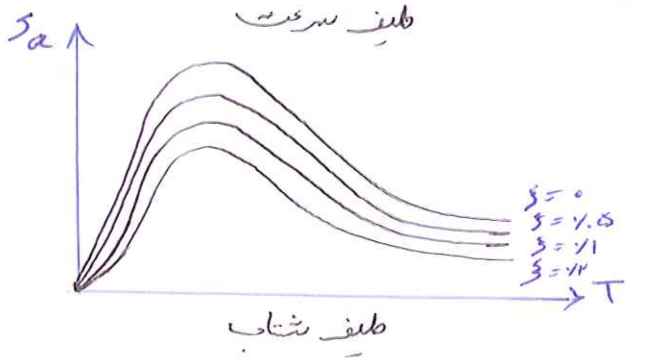
منحنی طیف تحت زلزله ای که در آینده می آید برای سادگی طراحی (خطا هم دارد)

شبه سرعت طیفی : $S_v = \omega S_d$ → جابجایی طیفی



طیف سرعت

شبه شتاب طیفی : $S_a = \omega^2 S_d = \omega S_v$



طیف شتاب

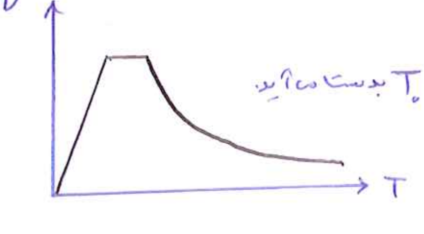
صفحه مختصات سه لگاریتمی :

نمودار تغییر مکان، سرعت، شتاب، در یک مختصات سه لگاریتمی ترسیم شده است.

جرم × شتاب طیف = نیروی معادل زلزله

شتاب طیف = $\frac{ABI}{R}g$

طیف شتاب در آیین نامه ۲۸۰۰ ایران :



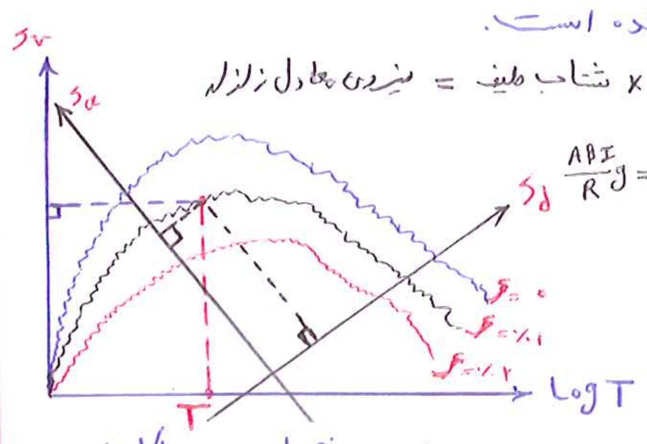
B = ضریب بازتاب

بر اساس نوع زمین و T_0 و T_s بدست می آید.

$$V = \frac{ABI}{R} W$$

$$V = \frac{ABI}{R} g m$$

S_a و طیف شتاب



منحنی مختصات سه لگاریتمی

اگر یک سازه بصورت طیفی بخواهد طراحی شود باید فقط زمان تناوب ...

در روش تحلیل دینامیکی سازه ها در برابر زلزله، ارائه تاریخچه نتایج (تغییر مکان ها، نیروها) احتیاج بود. یعنی در هر لحظه از زمان در مدت بارگذاری (ناشی از زلزله بر روی سازه) می بایستی نتایج مورد نظر را بدست آورد نمائیم، ولی با توجه به اینکه در طراحی سازه ها در برابر زلزله مقدار حداکثر مورد نظر می باشد لذا با محدود کردن تاریخچه جوابها به مقادیر حداکثرها از حجم عملیات و زمان محاسباتی کاسته می گردد. در این بحث سیستمهای ساده (شامل تغییر مکان - نیروهای داخلی - تنش ها و غیره) به صورت تابعی از زمان و وابستگی این پاسخ ها به پارامترهای سیستم مورد مطالعه قرار گرفت و سپس مفهوم طیف پاسخ (طیف بازتاب) و روش تعیین حداکثر پاسخ با استفاده از طیف پاسخ ارائه شد و در ادامه مشخصه های طیف پاسخ و در پی آن روش ساخت طیف طرح برای طراحی مورد بحث قرار گرفت.

طیف پاسخ یک معنای عملی برای تحلیل سازه تحت نیروهای زلزله است که اولین بار توسط MEhraz معرفی و توسط HosNer توسعه و بسط یافت.

طیف پاسخ پلی بین علم دینامیک سازه ها و طراحی سازه هاست.

برای اثبات طیف سرعت و طیف شتاب می توان اینگونه بیان کرد:

می دانیم براثر حرکت زمین نیرویی برابر $P(t) = M\ddot{v}_g$ بر سازه اثر می کند و با استفاده از انتگرال دیوهامل و برابر قرار دادن $\omega = \omega_D$ معادله بصورت زیر نوشته می شود.

$$u(t) = \frac{1}{\omega}\int \ddot{v}_g(\tau)\cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot \sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

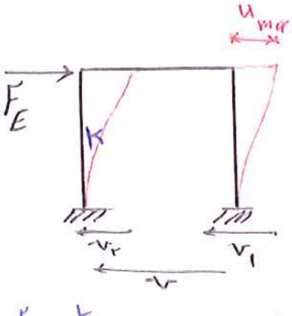
اگر $\int \ddot{v}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau)\,d\tau$ را مساوی $V(t)$ فرض کنیم داریم:

$$\Rightarrow u(t) = \frac{V(t)}{\omega} \Rightarrow V(t) = u(t)\cdot\omega \quad = \text{طول} \times \frac{rad}{s} = \frac{\text{طول}}{s}$$

در نهایت $V(t)$ را شبه سرعت یا طیف سرعت می گویند.

مقدار انتگرال بالا یک جواب ماکزیمم دارد که داریم: $V(t)_{max} = S_v$

$$\Rightarrow S_v = u(t)\cdot\omega \Rightarrow S_v = u_{max}\cdot\omega$$



$$F_{E_{max}} = K\cdot u_{max} = K\cdot S_d = m\omega^2 S_d \quad \Rightarrow u_{max} = \frac{S_v}{\omega} = S_d$$

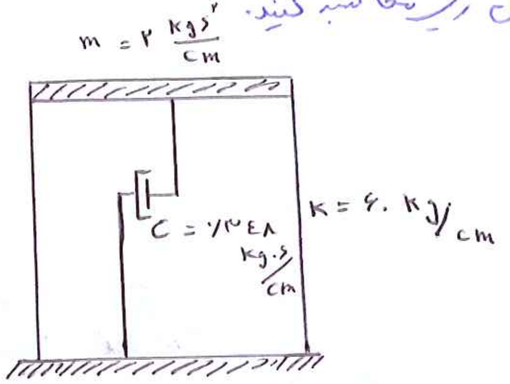
$$F_{I_{max}} = m\cdot S_a \quad \Rightarrow F_{E_{max}} = F_{I_{max}} \Rightarrow \cancel{m}\omega^2 S_d = \cancel{m} S_a \Rightarrow S_a = \omega^2 S_d$$

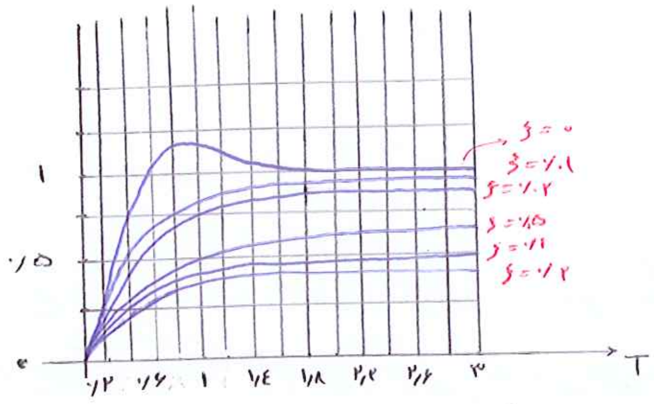
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \to k = \omega^2 m$$

S_d طیف تغییر مکان
S_v طیف سرعت
S_a طیف شتاب
} تابعی از پریود T یا فرکانس زاویه ای ω و میرایی سازه (ξ)

$S_v = \omega S_d = \frac{S_a}{\omega}$

مثال: سیستم یک درجه آزادی زیر با مشخصات داده شده را فرض کنید. ماکزیمم جابجایی و نیروی برشی پایه این سازه را بر اساس زلزله‌ای با طیف پاسخ سرعت شکل زیر محاسبه کنید.





طیف طرح سرعت (S_v برحسب در ثانیه)

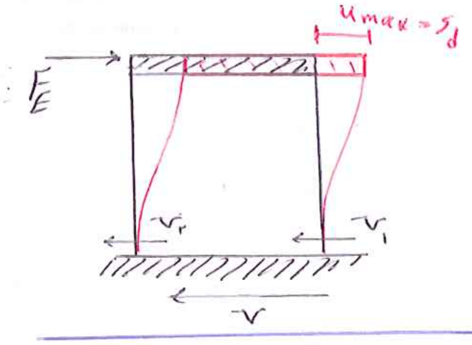
حل:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60}{2}} = 5.48 \ \frac{rad}{s} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.146 \ s$$

$$\xi = \frac{C}{\underbrace{2m\omega}_{C_{cr}}} = \frac{0.348}{2\times 2\times 5.48} = 0.02$$

با توجه به T و ξ، از روی نمودار مقدار S_v را برداشت می‌کنیم: $S_v = 0.75$

$$u_{max} = S_d = \frac{S_v}{\omega} = \frac{0.75}{5.48} = 0.137 \ cm \implies u_{max} = 0.137 \ cm$$



$$F_E = K u_{max} = K \times S_d \implies F_E = 60 \times 0.137 = 8.22$$

$$\text{یا} \quad F_E = m\omega^2 S_d = 2 \times 5.48^2 \times 0.137 = 8.22$$

تحلیل سازه‌های n درجه آزادی به روش شبه دینامیکی (طیفی):

$$v(t) = \underbrace{\phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \phi_3 Y_3(t) + \dots + \phi_n Y_n(t)}_{\text{پاسخ‌های سازه یک درجه آزادی}}$$

ϕ: شکل مود

$$M_n \ddot{Y}_n + C_n \dot{Y}_n + K_n Y_n = P_n(t)$$

$$\text{یا} \quad \ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

یادآوری:

$$\frac{C_n}{M_n} = 2\xi_n \omega_n$$

تغییر مکان حداکثر سازه n درجه آزادی $v_{max} = \phi_1 Y_{1max} + \phi_2 Y_{2max} + \phi_3 Y_{3max} + \dots + \phi_n Y_{nmax}$

همزمان Y ها ماکزیمم نمی‌شوند. در زمان های متفاوت به مقدار max می‌رسند و نمی‌توان

با هم جمع کرد. یعنی $\phi_1 Y_{1max} + \phi_2 Y_{2max} + \dots + \phi_n Y_{nmax}$ صحیح نیست.

از روش جذر مجموع مربعات برای پیدا کردن پاسخ حداکثر سازه n درجه آزادی استفاده می‌کنیم به این روش را روش SRSS می‌گویند و در برنامه‌ی ETABS نیز تعریف شده است.

معادله‌ی تعادل سازه n درجه آزادی تحت نیروی محرک زمین لرزه (زلزله):

$$\star \quad M\ddot{v}_{(t)} + C\dot{v}_{(t)} + K v_{(t)} = P(t) = M\{r\}\ddot{v}_g$$

نکته (از قبل محاسبه کرده بودیم) $\begin{cases} P(t) = P_{eff} \\ P_{eff} = M\{r\}\ddot{v}_g \end{cases}$

نکته: جابجایی کل ترکیبی از همه‌ی مودها است.

$$V_{(t)} = \begin{Bmatrix} v_{1(t)} \\ v_{2(t)} \\ v_{3(t)} \end{Bmatrix} = \underset{n\times1}{\phi_1} Y_{1(t)} + \underset{n\times1}{\phi_2} Y_{2(t)} + \dots + \underset{n\times1}{\phi_n} Y_{n(t)}$$

بردار $\{r\}$ یک ماتریس $n\times1$ است.

$$V_{(t)} = \{\phi_1 \;\; \phi_2 \;\; \dots \;\; \phi_n\} \begin{Bmatrix} Y_{1(t)} \\ Y_{2(t)} \\ \vdots \\ Y_{n(t)} \end{Bmatrix} = \underset{n\times n}{\Phi} \; \underset{n\times1}{Y_{(t)}}$$

دارای درایه هایش سهم هر درجه آزادی از تغییر مکان مطلوب داده در تکیه‌گاه، در جهت ارتعاش است.

$$\left.\begin{aligned} v_{(t)} &= \Phi Y_{(t)} \\ \dot{v}_{(t)} &= \Phi \dot{Y}_{(t)} \\ \ddot{v}_{(t)} &= \Phi \ddot{Y}_{(t)} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \star \Rightarrow M\Phi\ddot{Y}_{(t)} + C\Phi\dot{Y}_{(t)} + K\Phi Y_{(t)} = \overset{\text{ماتریس جرم}}{M}\{r\}\ddot{v}_g \quad \star\star$$

معادله‌ی ** را در Φ^T پیش ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{M_n}\ddot{Y}_{(t)} + \underbrace{\Phi^T C \Phi}_{C_n}\dot{Y} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K_n} Y = \underbrace{\Phi^T M\{r\}}_{L_n}\ddot{v}_g$$

$$\Rightarrow M_n\ddot{Y}_n + C_n\dot{Y}_n + K_n Y_n = L_n\ddot{v}_g \xrightarrow{\text{یا}} \ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{L_n}{M_n}\ddot{v}_g$$

$$Y_{n(max)} = \frac{S_{v_n} L_n}{\omega_n M_n}$$

محاسبه‌ی حداکثر تغییر مکان: $v_{n)max} = \phi_n Y_{n)max} = \dfrac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n} S_{v_n}$ یا $\dfrac{\phi_n L_n}{M_n} S_d$

یا $\dfrac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n^2} S_a$

جذر مجموع مربعات $V_{max} = \sqrt{v_{1)max}^2 + v_{2)max}^2 + \dots + v_{n)max}^2}$

جهت کنترل

$$\sum \frac{L_n^2}{M_n} = \sum m$$

فاکتور مشارکت مودی :

$$\frac{\frac{L_n}{M_n}}{\underbrace{\Sigma m}_{\text{جرم}}} \to \text{جرم مودی} = \text{مود } n \to (\text{٪ یک عدد})$$

$$L_n = \{\phi_n\}^T[m]\{r\}$$

$$M_n = \{\phi_n\}^T[m]\{\phi_n\}$$

$$F_n = \frac{L_n^2}{M_n} S_{a_n}$$

جرم موثر مودی

$$L_n \omega S_{v_n}$$

نیروی جانبی در تراز طبقه n :

$$\phi_n^T = \{2\ 1\ 0\} \leftarrow \phi_n = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

SRSS نیروی ناشی از زلزله در پای سازه $\Rightarrow F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots F_n^2}$

نیروی اینرسی هر طبقه از مود n :

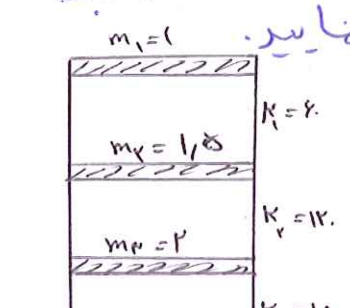
$$P_i = \frac{[m]\{\phi_n\}}{\{\phi_n\}^T[m]\{r\}} \times F_n \Rightarrow P_i = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_n = \begin{Bmatrix} \bigcirc \\ \bigcirc \\ \bigcirc \end{Bmatrix}$$

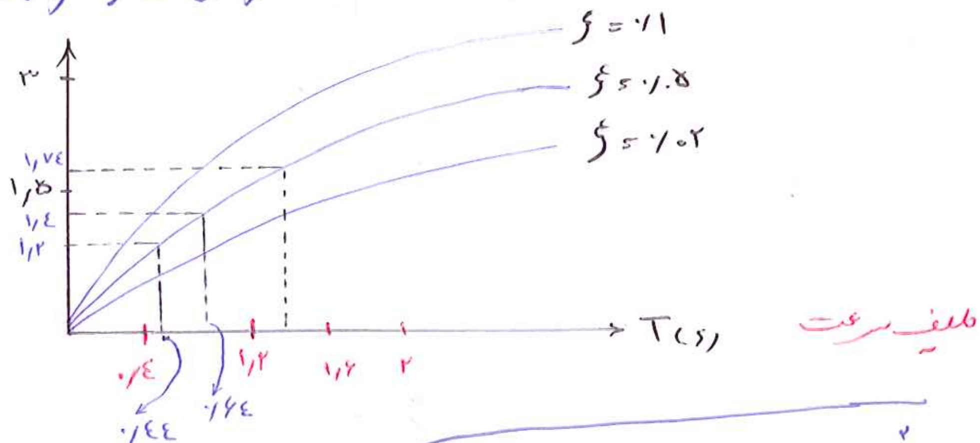
طبقه ① $P_1 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}$

طبقه ② $P_2 = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + \dots + (y_n)^2}$

کل $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$

مثال : سازه شکل زیر را در نظر بگیرید، اگر این سازه در منطقه ای ساخته شود که طرح طیف سرعت آن مطابق شکل زیر باشد، همچنین میرایی در کلیه ی مودها ثابت و برابر $\xi = ٪5$ باشد، حداکثر تغییر مکان درجات آزادی سازه را محاسبه نمایید.





$$v_{n\,max} = \frac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n} S_{v_n} \qquad V_{max} = \sqrt{v_{1\,max}^2 + v_{2\,max}^2 + \dots + v_{n\,max}^2}$$

$$\underset{\text{ماتریس سختی}}{K} = \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 \\ -60 & 60+120 & -120 \\ 0 & -120 & 60+120+180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 \\ -60 & 180 & -120 \\ 0 & -120 & 300 \end{bmatrix} \qquad \underset{\text{ماتریس جرم}}{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \xi = ٪5$$

محاسبه ی ω ها :

$$|K-\omega_n^2 M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 60-\omega_n^2 & -60 & 0 \\ -60 & 180-1.5\omega_n^2 & -120 \\ 0 & -120 & 300-2\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0 \xRightarrow{B=\frac{\omega_n^2}{60}} \begin{vmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B \end{vmatrix} = 0$$

با حل این دترمینان از روش ساروس مقدار ω_n ها بدست می آید.

$$\omega_1 = 4.58\ \frac{rad}{s} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1.372\ s \xrightarrow{\text{از روی شکل}} S_{a_1} = 1.74$$

$$\omega_2 = 9.82\ \frac{rad}{s} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.64\ s \xrightarrow{\text{از روی شکل}} S_{a_2} = 1.4$$

$$\omega_3 = 14.89\ \frac{rad}{s} \rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0.44\ s \xrightarrow{\text{از روی شکل}} S_{a_3} = 1.2$$

محاسبه ی شکل مودها :

$$[K-\omega_n^2 M]\{\phi_n\} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 60-\omega_n^2 & -60 & 0 \\ -60 & 180-\omega_n^2 & -120 \\ 0 & -120 & 300-\omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E

می توان همه را بر ۶۰ تقسیم کرد و $\frac{\omega_n^2}{60}$ را برابر با B قرار داد. در نهایت ۳ تا B داریم که متناسب با آن ω_n ها بدست می آید و در این مرحله مقدار ω ی مربوطه با توجه به شکل مود اول و دوم و سوم را در معادله ی مقابل قرار می دهیم.

$$E^1 = \begin{bmatrix} 3-B_1 & -2 \\ -2 & 5-2B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4754 & -2 \\ -2 & 4.298 \end{bmatrix}$$

چون نسبت سختی ها تغییر نکرد φ ها تغییر نمی کند.

$$(E^1)^{-1} = \frac{\text{ماتریس اصلی با جابجایی قطر اصلی و قرینه کردن بقیه درایه ها}}{\text{دترمینان ماتریس اصلی}} = \frac{1}{6.6259}\begin{bmatrix} 4.298 & 2 \\ 2 & 2.4754 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6.6259}\begin{Bmatrix} 4.298 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix} \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.601 \\ 0.676 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix}$$

محاسبه ی جرم مودی :

$$M_n = \phi_n^T M \phi_n \qquad M_1 = [1\ \ 0.648\ \ 0.301]\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{bmatrix} = 1.8$$

φ ها تغییری نداشتند جرم مودی هم تغییری نخواهد داشت

$$M_2 = 2.46 \qquad M_3 = 22.6$$

محاسبه L_n :

$$L_n = \phi_n^T M \{r\}$$

$$L_1 = \phi_1^T M \{r\} = [1 \quad ۰/۶۴۸ \quad ۰/۳۰۱] \begin{bmatrix} ۱ & & \\ & ۱/۵ & \\ & & ۲ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix} = ۲/۵۷$$

$$L_2 = \phi_2^T M \{r\} = ۱/۲۵$$

$$L_3 = \phi_3^T M \{r\} = ۲/۰۸$$

محاسبه تغییر مکان در مورد (۱)

$$v_{n\,max} = \frac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n} S_{v_n}$$

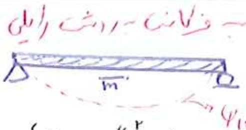
$$v_{1\,max} = \frac{\phi_1 L_1}{M_1 \omega_1} S_{v_1} = \frac{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۶۴۸ \\ ۰/۳۰۱ \end{bmatrix} \times ۲/۵۷}{۱/۸ \times ۴/۵۸} \times ۱/۷۴ = \begin{bmatrix} ۰/۵۴۱ \\ ۰/۳۴۸ \\ ۰/۱۶۲ \end{bmatrix}$$

$$v_{2\,max} = \frac{\phi_2 L_2}{M_2 \omega_2} S_{v_2} = \frac{\begin{bmatrix} ۱ \\ -۰/۶۰۱ \\ -۰/۶۷۶ \end{bmatrix} \times -۱/۲۵}{۲/۴۶ \times ۹/۸۲} \times ۱/۴ = \begin{bmatrix} -۰/۰۷۴ \\ ۰/۰۴۴ \\ ۰/۰۵ \end{bmatrix}$$

$$v_{3\,max} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۸ \\ -۰/۰۱۹ \\ ۰/۰۱۸ \end{bmatrix}$$

$$v_{max} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(۰/۵۴۱)^۲ + (۰/۰۷۴)^۲ + (۰/۰۰۸)^۲} \\ \sqrt{(۰/۳۴۸)^۲ + (۰/۰۴۴)^۲ + (۰/۰۱۹)^۲} \\ \sqrt{(۰/۱۶۲)^۲ + (۰/۰۵)^۲ + (۰/۰۱۸)^۲} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰/۵۴۶ \\ ۰/۳۵۱۲ \\ ۰/۱۷۰۴ \end{Bmatrix}$$

محاسبه فرکانس به روش رایلی



$$\omega^2 = \frac{\int EI_{(x)}\, v''^2_{max}\, dx}{\int \bar m_{(x)}\, v^2_{max}\, dx}$$

$v_{(x,t)} = \varphi(x)\, Z(t)$

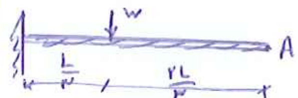
$$\omega^2 = \frac{\int EI\, \varphi''^2_{(x)}\, dx}{\int \bar m(x)\, \varphi^2_{(x)}\, dx} = \frac{k^*}{m^*}$$

شکل دقیق ارتعاش تیر دو سر ساده $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$

$\omega = 9.869\sqrt{\frac{EI}{\bar m L^4}}$

فرکانس را از روش رایلی بدست آورید

$$\varphi(x) = \frac{PL^3}{9EI}\;\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}$$



$T_{max} = \int_0^L \frac{1}{2}\bar m\, \dot v^2_{max}\, dx + \frac{1}{2}\frac{w}{g}\dot v^2_{(x=L/3)}$

$T_{max} = \int_0^L \frac{1}{2}\bar m\, \omega^2 \varphi_x^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{w}{g}\,\omega^2\varphi^2_{(x=L/3)}$

$T_{max} = \omega^2\Big[\Big(\frac{1}{2}\bar m\int_0^L \big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2\big(\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}\big)^2 dx$

$+ \frac{1}{2}\frac{w}{g}\big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2\Big(\frac{3(\frac{L}{3})^2L - (\frac{L}{3})^3}{2L^3}\Big)^2\Big]$

$\omega^2\big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2\Big[\frac{1}{2}\bar m\int_0^L\big(\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}\big)^2 dx$

$+ \frac{1}{2}\frac{w}{g}\big(\frac{3\times\frac{L^2}{9}\times L - \frac{L^3}{27}}{2L^3}\big)^2\Big] =$

$\omega^2\big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2\Big[\frac{1}{2}\bar m\int_0^L\Big[\frac{9L^2x^4 + x^6 - 6x^5L}{4L^6}$

$+ \frac{1}{2}\frac{w}{g}\times 0.052\Big]$

$T_{max} = \omega^2\big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2\Big[\frac{1}{2}\bar m\frac{1}{4L^6}\big(\frac{9L^2x^5}{5} + \frac{x^7}{7}$

$-\frac{6x^6L}{6}\big)\Big]_0^L + 0.01\frac{w}{g}\Big] =$

$\omega^2\big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2\Big[\frac{1}{2}\bar m\frac{1}{4L^6}\big(\frac{9L^7}{5} + \frac{L^7}{7} - \frac{6L^7}{6}\big)$

$+ 0.01\frac{w}{g}\Big] = \omega^2\big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2\big[0.117\bar m L$

$+ 0.01\frac{w}{g}\big]$

$V_{max} = \int_0^L \frac{1}{2}EI\,\varphi''^2 dx = \frac{1}{2}P\,\varphi_{(x=L)}$

$\frac{1}{2}P\big(\frac{PL^3}{9EI}\;\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}\big) = \frac{1}{2}P\frac{PL^3}{9EI}$

$\frac{3L^3 - L^3}{2L^3} = \frac{1}{2}\;\frac{P^2L^3}{9EI} = \frac{P^2L^3}{18EI}$

$V_{max} = T_{max} \Rightarrow \omega^2\big(\frac{PL^3}{9EI}\big)^2$

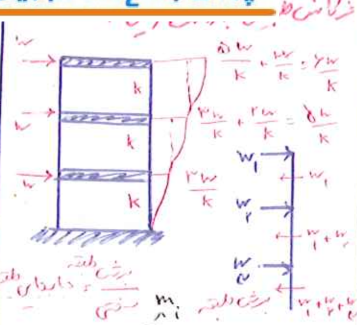
$\times\big[0.117\bar m L + 0.01\frac{w}{g}\big] = \frac{P^2L^3}{18EI}$

$$\omega^2 = \frac{\frac{P^2L^3}{18EI}}{\frac{P^2L^6}{81E^2I^2}\big[0.117\bar m L + 0.01\frac{w}{g}\big]}$$

$$\omega^2 = \frac{81E^2I^2\,P^2L^3}{18EI\,P^2L^6\big(0.117\bar m L + 0.01\frac{w}{g}\big)}$$

$$\omega^2 = \frac{EI \times 4.5}{L^3\big[0.117\bar m L + 0.01\frac{w}{g}\big]}$$

فرکانس را به روش رایلی



$\frac{6w}{k} + \frac{w}{k} = \frac{7w}{k}$

$\frac{3w}{k} + \frac{2w}{k} = \frac{5w}{k}$

$\frac{3w}{k}$

فرض شکل ارتعاش = جابجایی ناشی از بار مساوی جرم طبقه

$T_{max} = \sum\frac{1}{2}\big(\frac{w}{g}\big)\omega^2\varphi^2_{(x)}$

$= \frac{1}{2}\omega^2\frac{w}{g}\big(\frac{9w^2}{k^2} + \frac{25w^2}{k^2} + \frac{36w^2}{k^2}\big)$

$\Rightarrow T_{max} = \frac{35w^3}{gk^2}\omega^2$

جابجایی ها

$V_{max} = \sum\frac{1}{2}k(\Delta v_{max})^2 = \sum\frac{1}{2}w_iv_i$

انرژی پتانسیل داخل

$V_{max} = \sum\frac{1}{2}k_i(\Delta v_i)^2 = \frac{1}{2}k\times\big(\frac{3w}{k}\big)^2$

جابجایی نسبی طبقه اول به همکف

$+\frac{1}{2}k\times\big(\frac{2w}{k}\big)^2 + \frac{1}{2}k\big(\frac{w}{k}\big)^2 = \frac{7w^2}{k}$

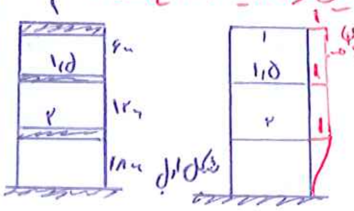
یا $\sum\frac{1}{2}w_iv_i = \frac{1}{2}w\times\frac{3w}{k} + \frac{1}{2}w\frac{5w}{k}$

$+\frac{1}{2}w\frac{6w}{k} = \frac{7w^2}{k}$

$T_{max} = V_{max} = \frac{35w^3}{gk^2}\omega^2 = \frac{7w^2}{k}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{gk}{5w}}$

تعیین فرکانس رایلی اصلاح شده



$T_{0\,max} = \frac{1}{2}\sum m_i\omega^2\varphi_i^2$

$= \frac{\omega^2}{2}(1\times1^2 + 1.5\times1^2 + 2\times1^2)$

$= \frac{4.5\omega^2}{2}$

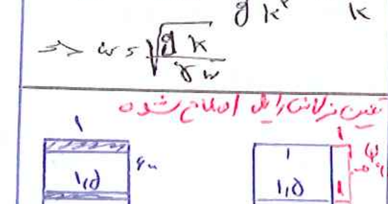
$V_{1\,max} = \frac{1}{2}k_i\Delta v_i^2 = \frac{1}{2}[1800\times1^2$

$+1200\times(0)^2 + 600\times0^2] = 900$

$V_{1\,max} = T_{0\,max} = 900 = \frac{4.5\omega^2}{2}$

$\Rightarrow \omega^2 = 400 \Rightarrow \omega = 20\ \frac{rad}{s}$

ω^2 در جرم ها ضرب کرده و باید در



$V_{1\,max} = \frac{1}{2}\big(2\omega^2\times\frac{4.5\omega^2}{1800} + 1.5\omega^2\frac{8.25\omega^2}{1800}$

$+1\omega^2\frac{11.25\omega^2}{1800}\big) = \frac{32.625}{3600}\omega^4$

$T_{1\,max} = V_{1\,max} = \frac{4.5\omega^2}{2} = \frac{32.625\omega^4}{3600}$

$\Rightarrow \omega = 15.74\ rad/s$

$T_{1\,max} = \frac{1}{2}\omega^2\big[\sum m_i v_i^2\big] = \frac{1}{2}\omega^2\big[1\times$

$\big(\frac{11.25\omega^2}{1800}\big)^2 + 1.5\times\big(\frac{8.25\omega^2}{1800}\big)^2\big) + (2\times$

$\big(\frac{4.5\omega^2}{1800}\big)^2\big)\big] = \ldots\times\omega^6$

$T_{1\,max} = V_{1\,max} \Rightarrow \omega = 14.76\ \frac{rad}{s}$

$\ldots 144$

ماتریس P ...

ارتعاش آزاد بدون میرایی

$M\ddot v + Kv = 0$

جواب: $v = \{\alpha\}\sin(\omega t - \theta)$

$\ddot v = -\{\alpha\}\omega^2\sin(\omega t - \theta) = -\omega^2 v$

$[-M\omega^2 + K]\{\alpha\} = 0$

$|K - \omega^2M| = 0$ ‏n تا جواب دارد

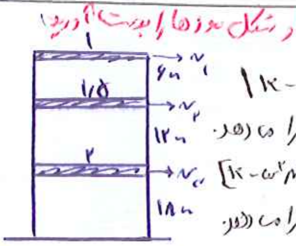
ماتریس سختی — ماتریس جرم

محاسبه شکل ارتعاش (مودها)

$[K - \omega^2M]\{\alpha\} = 0$

اولی را برابر یک فرض کرده و بقیه را بدست می آوریم

مقادیر و شکل مودها را بدست آورید



$|K - \omega^2M| = 0$

ω ها را می دهد

$[K - \omega^2M]\{\phi_n\} = 0$

مودها را می دهد

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K - \omega^2M] = \begin{bmatrix} 600-\omega^2 & -600 & 0 \\ -600 & 1800-1.5\omega^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000-2\omega^2 \end{bmatrix}$$

همه را بر 600 تقسیم می کنیم و $\frac{\omega^2}{600}$ را B در نظر

$$|K - \omega^2M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B \end{vmatrix}$$

$(1-B)(3-1.5B)(5-2B) - (4\times(1-B)$

$+(-1\times-1\times5-2B))$

$= (3 - 1.5B - 3B + 1.5B^2)(5 - 2B)$

$- 9 + 6B$

$= 15 - 6B - 7.5B - 15B + 3B^2 + 6B^2$

$+ 7.5B^2 - 3B^3 - 9 + 6B$

$\Rightarrow B^3 - 5.5B^2 + 7.5B - 2 = 0$

B_1 و B_2 و B_3 با ماشین حساب بدست می آید

$B_1 = 0.3514,\ \frac{\omega_1^2}{600} \Rightarrow \omega_1 = 14.5$

$B_2 = 1.606 = \frac{\omega_2^2}{600} \Rightarrow \omega_2 = 31.1$

$B_3 = 3.541 = \frac{\omega_3^2}{600} \Rightarrow \omega_3 = 46.1$

محاسبه شکل مود 3

$$\begin{bmatrix} 1-B_n & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B_n & -2 \\ \ldots \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{1n} \\ \ldots\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

مود اول را برابر یک قرار داده و ماتریس معکوس $(E')^{-1}$ را بدست می آوریم

(در حالت ماتریس اولی)

$$E' = \begin{bmatrix} 2.4705 & -2 \\ -2 & 4.298 \end{bmatrix}$$

$$(E')^{-1} = \frac{1}{6.6289}\begin{bmatrix} 4.298 & 2 \\ 2 & 2.4705 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_{21} \\ \phi_{31}\end{Bmatrix} = \frac{1}{6.6289}\begin{bmatrix} 4.298 & 2 \\ 2 & 2.4705 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.648 \\ 0.301\end{Bmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.606 \\ -0.679 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.54 \\ 2.43 \end{Bmatrix}$$

پاسخ قاب تحت شرایط اولیه با ارتعاش در آزاد

$$v_0\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{Bmatrix} in \qquad \dot v_{(0)}\begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\frac{in}{s}$$

میرایی نداریم. بارگذاری نداریم $P(t) = 0$

$|K - \omega^2M| = 0$ محاسبه فرکانس ها

$[K - \omega^2M]\{\phi_n\} = 0$ محاسبه شکل مودها

محاسبه جرم مودی با بار مودی

$M_n = \phi_n^T M\phi_n$

$$M_1 = [1\ \ 0.648\ \ 0.301]\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix} = 1.81$$

$M_2 = 2.47 \qquad M_3 = 22.6$

بار مودی صفر است چون $P(t)$ نداریم

$P_{n(t)} = \phi_n^T P(t) \qquad P(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

تشکیل معادلات غیر کوپله

$\ddot Y_n + 2\xi_n\omega_n\dot Y + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_{n(t)}}{M_n}$ صفر است

صفر چون نداریم

$\ddot Y_1 + \omega_1^2 Y_1 = 0$ ‏ الان به معادلی

ارتعاش آزاد بدون میرایی رسیدیم.

$\ddot Y_2 + \omega_2^2 Y_2 = 0$

$\ddot Y_3 + \omega_3^2 Y_3 = 0$

$Y_{1(t)} = \frac{\dot Y_{1(0)}}{\omega_1}\sin\omega_1 t + Y_{1(0)}\cos\omega_1 t$

$Y_{2(t)} = \frac{\dot Y_{2(0)}}{\omega_2}\sin\omega_2 t + Y_{2(0)}\cos\omega_2 t$

$Y_{3(t)} = \frac{\dot Y_{3(0)}}{\omega_3}\sin\omega_3 t + Y_{3(0)}\cos\omega_3 t$

شرایط اولیه برحسب Y داریم:

$Y_{n(0)} = \frac{\phi_n^T M v_{(0)}}{M_n}$ $\quad Y_{1(0)} = 0.59$

$\dot Y_{n(0)} = \frac{\phi_n^T M\dot v_{(0)}}{M_n}$ $\quad Y_{2(0)} = 0.11$ $\quad Y_{3(0)} = 0.019$

$\dot Y_{1(0)} = 4.83 \qquad \dot Y_{2(0)} = -3.3$

در نهایت جابجایی متناظر در $Y_{1(t)}$ ، $Y_{2(t)}$ ، $Y_{3(t)}$

$v(t) = \phi_1 Y_{1(t)} + \phi_2 Y_{2(t)} + \phi_3 Y_{3(t)}$

$$\begin{Bmatrix} v_{1(t)} \\ v_{2(t)} \\ v_{3(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix} Y_{1}(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.606 \\ -0.679 \end{Bmatrix} Y_{2}(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.54 \\ 2.53 \end{Bmatrix} Y_{3}(t)$$

مود دوم حداکثر → 0.59 $\frac{0.59}{0.019} = 30$

مود سوم حداکثر → 0.09 0.019

طیف سرعت $S_v = \omega S_d$

$v_{max} = \frac{S_v}{\omega}$, $S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d$

تحلیل سازه n درجه آزادی (طیفی) :

$$\underbrace{\Phi^T m \Phi}_{M_n} \ddot{Y}_{(t)} + \underbrace{\Phi^T c \Phi}_{C_n} \dot{Y} + \underbrace{\Phi^T k \Phi}_{K_n} Y = \underbrace{\Phi^T m \{r\}}_{L_n} \ddot{v}_g$$

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{L_n}{M_n} \ddot{v}_g$$

$$v_{n\,max} = \frac{\phi_n L_n \cdot S_{v_n}}{M_n \omega_n}$$ طیف سرعت

یا $\frac{\phi_n L_n}{M_n} S_d$ طیف تغییر مکان

یا $\frac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n^2} S_a$ طیف شتاب

$SRSS$: $V_{max} = \sqrt{v_{1max}^2 + v_{2max}^2 + \dots + v_{n\,max}^2}$

فاکتور مشارکت مودی :

$$\frac{\frac{L_n^2}{M_n}}{\sum m} = \text{(درصد)} \Gamma_n \text{ در مود n}$$

نیروی جانبی در تراز طبقه n :

$$F_n = \frac{L_n^2}{M_n} S_{a_n}$$

جرم مؤثر مودی

$L_n = \{\phi_n^T\}[m]\{r\}$

$M_n = \{\phi_n^T\}[m]\{\phi_n\}$

نیروی ناشی از زلزله در پای سازه

$SRSS$ $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2}$

نیروی استاتیکی در طبقه i در مود n :

$$P_i = \frac{[m]\{\phi_n\}}{\{\phi^T\}[m]\{r\}} \times F_n$$

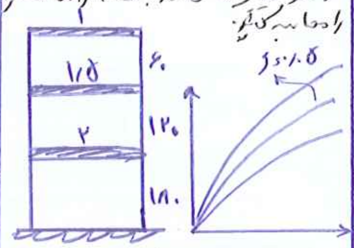
$$II = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix}$$

① طبقه $P_1 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}$

② طبقه $P_2 = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + \dots + (y_n)^2}$

کل $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n$

مثال : سازه شکل زیر را در نظر بگیرید اگر این سازه در منطقه ای ساخته شود که طیف طیف آن مطابق شکل باشد، همچنین میرای در کلیه مودها ثابت و برابر 0.5٪ باشد حداکثر تغییر مکان درجات آزادی سازه را محاسبه کنید.



$$v_{n\,max} = \frac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n} S_{v_n}$$

$$v_{max} = \sqrt{v_{1(max)}^2 + v_{2max}^2 + \dots v_{n\,max}^2}$$

$$k = \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 \\ -60 & 180 & -120 \\ 0 & -120 & 300 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \xi = 0.5\%$$

محاسبه مودها : $|k - \omega_n^2 M| = 0$

$\omega_1 = 4.58 \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1.37$

از روی شکل $\leftarrow S_{v_1} = 1.24$

$\omega_2 = 9.82 \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.64$

از روی شکل $\leftarrow S_{v_2} = 1.4$

$\omega_3 = 14.59 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0.44$

از روی شکل $\leftarrow S_{v_3} = 1.2$

محاسبه شکل مودها :

$[K - \omega_n^2 M]\{\phi_n\} = 0$

محاسبه جرم مودی :

$M_n = \phi_n^T M \phi_n$

$M_1 = 1.8$ $M_2 = 2.46$

$M_3 = 22.6$

محاسبه L_n :

$L_n = \phi_n^T M \{r\}$

$L_1 = 2.57$ $L_2 = 1.25$

$L_3 = 2.08$

محاسبه تغییر مکان در مود ①

$$v_{1max} = \frac{\phi_1 L_1}{M_1 \omega_1} S_{v_1}$$

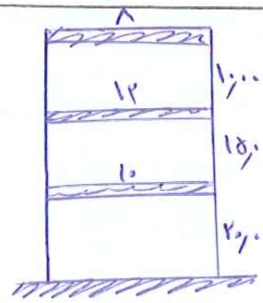
$$= \frac{\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.648 \\ 0.301 \end{Bmatrix} \times 2.57}{1.8 \times 4.58} \times 1.24 \begin{Bmatrix} 0.54 \\ 0.348 \\ 0.162 \end{Bmatrix}$$

$$v_{1max} = \begin{Bmatrix} 0.044 \\ 0.03 \end{Bmatrix}$$

$$v_{3max} = \begin{Bmatrix} 0.08 \\ -0.19 \\ 0.18 \end{Bmatrix}$$

$$v_{max} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(0.541)^2 + (0.04)^2 + (0.08)^2} \\ \sqrt{(0.348)^2 + (0.044)^2 + (0.19)^2} \\ \sqrt{(0.162)^2 + (0.03)^2 + (0.18)^2} \end{Bmatrix}$$

$$v_{max} = \begin{Bmatrix} 0.546 \\ 0.3512 \\ 0.1704 \end{Bmatrix}$$



$\omega_1 = 18.5$ $\omega_2 = 45.4$

$\omega_3 = 66.5$

$$k = \begin{bmatrix} 10000 & -10000 & 0 \\ 10000 & 25000 & -15000 \\ 0 & -15000 & 35000 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

محاسبه شکل مودها

$[K - \omega_n^2 M]\{\phi_n\} = 0$

محاسبه جرم مودی

$M_n = \phi_n^T M \phi_n$

محاسبه L_n :

$L_n = \phi_n^T M \{r\}$ ⟵ درایه‌ها $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$v_{max} = \frac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n} S_{v_n}$$

یا $\frac{\phi_n L_n}{M_n \omega_n^2} S_{a_n}$

یا $S_a = S_v \omega \rightarrow S_v = \frac{S_a}{\omega}$

محاسبه نیروی زلزله :

طبقه $V_{kn} = m_k \omega_n^2 v_{kn\,max}$ مود

روش سیمپسون:

$$\int f(t)\,dt = \frac{\Delta t}{3}\left[f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + 4f(t_3) + \cdots + 4f(t_{n-1}) + f(t_n)\right]$$

برای تحلیل خطی Δt را $\frac{T}{10}$ می‌گیریم. در تحلیل غیرخطی کوچکتر می‌گیریم.

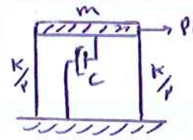
روش اختلاف محدود:

$$\left[\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right] v_{i+1} = \frac{m}{\Delta t^2}\left(2v_i - v_{i-1}\right) + \frac{c\,v_{i-1}}{2\Delta t} - k v_i + P_i(t)$$

k^* ، P^*_{i+1}

$$k^* v_{i+1} = P^*_{i+1} \rightarrow v_{i+1} = \frac{P^*_{i+1}}{k^*}$$

مثال اختلاف محدود:



$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P(t)$$

v_0 تغییر مکان اولیه

سرعت اولیه
$\dot{v}_0$
شتاب اولیه لحظه صفر

$$\ddot{v}_0 = \frac{P_0 - kv_0 - c\dot{v}_0}{m}$$

$$\dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{v}_0 = \frac{v_1 - 2v_0 + v_{-1}}{\Delta t^2}$$

$$v_1 = 2\Delta t\,\dot{v}_0 + v_{-1}$$

$$\ddot{v}_0 = \frac{2\Delta t\,\dot{v}_0 + v_{-1} - 2v_0 + v_{-1}}{\Delta t^2}$$

$$v_{-1} = \frac{\ddot{v}_0\,\Delta t^2}{2} - \dot{v}_0\,\Delta t + v_0$$

با داشتن v_{-1} و v_0 می‌توان v_1 را بدست آورد.

روش شتاب ثابت یا متوسط:

$$\left[\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k\right]\Delta v_{i+1} = \Delta P_{i+1} + \frac{4m}{\Delta t}\dot{v}_i + 2m\ddot{v}_i + 2c\dot{v}_i$$

ΔP^*

$$\Delta v_{i+1} = \frac{\Delta P^*}{k^*}$$

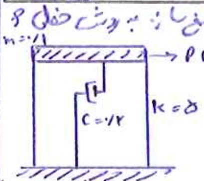
سرعت $\Delta\dot{v}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t}\Delta v_{i+1} - 2\dot{v}_i$

شتاب $\Delta\ddot{v}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_{i+1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_i - 2\ddot{v}_i$

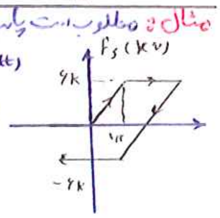
یا

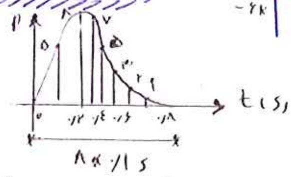
شتاب $\ddot{v}_{i+1} = \frac{P_{i+1} - c\dot{v}_{i+1} - kv_{i+1}}{m}$

مثال: مطلوبست پاسخ با روش خطی شتاب؟



$m=0.1$ ، $c=0.2$ ، $k=5$





$\Delta t = 0.1$ ، $m=0.1$ ، $c=0.2$ ، $k=5$

$$k^*\Delta v_{i+1} = \Delta P^*$$

$$k^* = k(t) + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}c = k(t) + 66$$

$$\Delta P^* = \Delta P_{i+1} + \left(\frac{6m}{\Delta t} + 3c\right)\dot{v}_i + \left(3m + \frac{\Delta t}{2}c\right)\ddot{v}_i$$

$$= \Delta P_{i+1} + 6.6\,\dot{v}_i + 0.31\,\ddot{v}_i$$

$$\Delta\dot{v}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t}\Delta v_{i+1} - 3\dot{v}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{v}_i$$

$$= 30\,\Delta v_{i+1} - 3\dot{v}_i - 0.05\,\ddot{v}_i$$

روش رایلی سیستم تعمیم یافته:

$$m^* = \int_0^L m(x)\,\psi^2_{(x)}\,dx + \sum_{i=1}^{n} m_{(x_i)}\,\psi^2_{(x_i)}$$

جرم گسترده / جرم متمرکز

$$+ \sum J_i\,\psi'^2_{(x)}$$ لنگر جرمی اینرسی دورانی

سختی الاستیک / سختی ارتجاعی

$$+ \sum_{i=1}^{n} k_i\,\psi^2_{(x_i)} - \int N\,\psi'^2_{(x)}\,dx$$

بار محوری فشاری / سختی متمرکز فنر

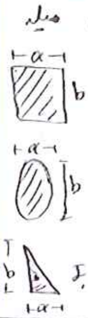
$$c^* = \int_0^L c_{(x)}\,\psi^2_{(x)}\,dx + \sum c_i\,\psi^2_{(x_i)}$$

میرایی جرم گسترده / میرایی متمرکز

$$P^* = \int_0^L P(x,t)\,\psi_{(x)}\,dx + \sum P_i\,\psi_{(x_i)}$$

ممان اینرسی جرمی مقاطع مختلف

میله $J_0 = \frac{mL^2}{12}$ ، $m = \bar{m}L$ ، $\gamma = \frac{\text{جرم}}{\text{سطح}}$ ، $\bar{m} = \frac{\text{جرم}}{\text{طول}}$



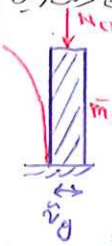
$$J_0 = m\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) \qquad m = \gamma(a\cdot b)$$

$$J_0 = m\left(\frac{a^2+b^2}{16}\right) \qquad m = \gamma\left(\frac{\pi a b}{4}\right)$$

$$J_0 = m\left(\frac{a^2+b^2}{18}\right) \qquad m = \gamma\left(\frac{a\cdot b}{2}\right)$$

مثال: جرم شکل زیر که در طول خود دارای سختی خمشی یکنواخت و جرم یکنواخت می‌باشد را در نظر بگیرید. معادله حرکت سیستم در بار زمانی آن را تعیین کنید. این سازه تحت حرکت زمین قرار دارد.

میرایی نداریم.



$$m^*\ddot{v} + c^*\dot{v} + k^*v = P^*(t)$$

$$m^* = \int m(x)\,\psi^2_{(x)}\,dx$$

$$k^* = \int EI\,\psi''^2_{(x)}\,dx$$

$$P^* = \int P(x,t)\,\psi_{(x)}\,dx$$

$$\psi_{(x)} = \left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right) \qquad x=0,\ \psi_{(0)}=0$$

$$\psi'_{(x)} = \frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{2L}x \qquad x=0,\ \psi'_{(x)}=0$$

$$\psi''_{(x)} = \frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi}{2L}x$$

$$m^* = \int_0^L \bar{m}(x)\,\psi^2_{(x)}\,dx$$

$$= \bar{m}\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx = 0.228\,\bar{m}L$$

$$k^* = \int_0^L EI\,\psi''^2_{(x)}\,dx = EI\int_0^L\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3}$$

$$P^* = \int P(x,t)\,\psi_{(x)}\,dx = \int \bar{m}\,\ddot{v}_g\,\psi_{(x)}\,dx$$

$$= \bar{m}\,\ddot{v}_g\int_0^L \psi_{(x)}\,dx = \bar{m}\ddot{v}_g\int_0^L\left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right)dx$$

$$= 0.364\,\bar{m}L\,\ddot{v}_g$$

$$m^*\ddot{v} + k^*v = P^*(t)$$

$$0.228\,\bar{m}L\,\ddot{v} + \frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{EI}{L^3}v = 0.364\,\bar{m}L\,\ddot{v}_g$$

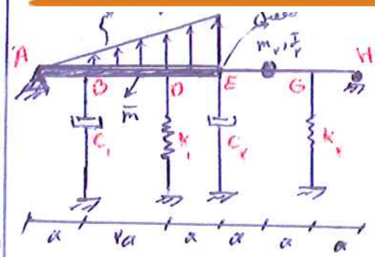
بار کمانشی: $N_{cr} \leftarrow N \leftarrow K - K_G = 0$

$$k^* = \underbrace{\int EI\,\psi''^2_{x}\,dx}_{K} - \underbrace{\int N_{cr}\,\psi'^2_{(x)}\,dx}_{K_G} = 0$$

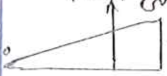
$$\frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} - N_{cr}\int_0^L\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx = 0$$

$$k^* = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} - \frac{\pi^2}{8L}N_{cr} = 0$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

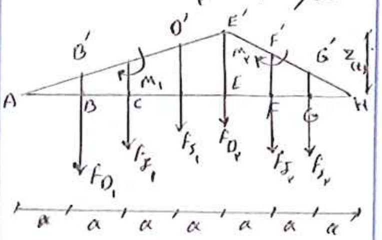


معادل بار گسترده خطی مثلثی:



$$\frac{\bar{P}(4a)}{2}\delta(t) = 4\bar{P}\,\delta(t)$$

$$P(t) = 4\bar{P}\,\delta(t)\times\frac{4a}{2} = 8\bar{P}a\,\delta(t)$$



نیروهای داخلی براساس جابجایی $Z(t)$:

$$f_{S_1} = k_1\times\frac{3}{4}Z \qquad BB' = \frac{1}{4}Z$$

$$f_{S_2} = k_2\times\frac{1}{3}Z \qquad FF' = \frac{2}{3}Z$$

$$DD' = \frac{3}{4}Z$$

$$f_{D_1} = c_1\times\frac{1}{4}\dot{Z} \qquad f_{I_1} = \bar{m}L\frac{\ddot{Z}}{2}$$

$$f_{D_2} = c_2\times\dot{Z} \qquad = \bar{m}\,4a\,\frac{\ddot{Z}}{2} = 2\bar{m}a\ddot{Z}$$

$$f_{I_2} = m_2\times\frac{2}{3}\ddot{Z}$$

$$M_1 = J_1\ddot{\theta} = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{\bar{m}L\times L^2}{12}\ddot{\theta}$$

$$M_1 = \bar{m}\times 4a\times\frac{(4a)^2}{12}\times\frac{\ddot{Z}}{4a} = \frac{4}{3}\bar{m}a^2\ddot{Z}$$

$$M_2 = J_2\ddot{\theta} = J_2\frac{\ddot{Z}}{3a}$$

$W_{S_1} = \frac{3}{4}k_1 Z\times\frac{3}{4}\delta Z$ کار فنر ①

$W_{S_2} = \frac{1}{3}k_2 Z\times\frac{1}{3}\delta Z$ کار فنر ②

$W_{D_1} = \frac{c_1}{4}\dot{Z}\times\frac{1}{4}\delta Z$ کار میرایی ①

$W_{D_2} = c_2\dot{Z}\times\delta Z$ کار میرایی ②

$$W_{I_1} = \frac{\bar{m}L}{2}\ddot{Z}\times\frac{1}{2}\delta Z$$

$$W_{I_2} = \frac{2}{3}m_2\ddot{Z}\times\frac{2}{3}\delta Z$$

$$W_{M_1} = \frac{4}{3}\bar{m}a^2\ddot{Z}\times\frac{1}{4a}\delta Z$$

$$W_{M_2} = J_2\frac{\ddot{Z}}{3a}$$

کار نیروی خارجی

$$W = P\times\frac{2}{3}\delta Z$$

$$= 8\bar{P}a\,\delta(t)\times\frac{2}{3}\delta Z = \frac{16}{3}\bar{P}\,\delta(t)\,\delta Z$$

کار نیروی خارجی = کار نیروی داخلی

$$f_{S_1}\times\frac{3}{4}\delta Z + f_{S_2}\times\frac{1}{3}\delta Z + f_{D_1}\times\frac{1}{4}\delta Z$$
$$+ f_{D_2}\times\delta Z + f_{I_1}\times\frac{1}{2}\delta Z + f_{I_2}\times\frac{2}{3}\delta Z$$
$$+ M_1\times\frac{1}{4a}\delta Z + M_2 = 8\bar{P}a\,\delta(t)\times\frac{2}{3}\delta Z$$

$$\left(\frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 + \frac{J_2}{9a^2}\right)\ddot{Z} + \left(\frac{c_1}{16} + c_2\right)\dot{Z}$$
$$+ \left(\frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9}\right)Z = \frac{16}{3}\bar{P}a\,\delta(t)$$

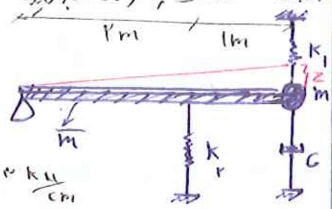
$$m^*\ddot{Z} + c^*\dot{Z} + kZ = P^*(t)$$

$$m^* = \frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 + \frac{J_2}{9a^2}$$

$$c^* = \frac{c_1}{16} + c_2$$

$$k^* = \frac{9k_1}{16} + \frac{k_2}{9}$$

مثال: در شکل زیر الف) فرکانس طبیعی سازه ب) اگر به جرم ۳ نیروی هارمونیک $P(t) = 5\sin 4t$ که دامنه آن برحسب KN وارد شود، دراثر نیروی بوجود آمده در فنر k_2 را محاسبه کنید.



$k_1 = 3\ \frac{KN}{cm}$

$k_2 = 5$ ، $\bar{m} = 1$ ، $m = 3$

$c_1 = 0.14$

$$f_{S_1} = -k_1 Z = -3Z$$

$$f_{S_2} = k_2\frac{2}{3}Z = \frac{10}{3}Z$$

$$f_{D_1} = c\dot{Z} = 0.14\dot{Z}$$

$$f_{I_1} = 3\bar{m}\frac{\ddot{Z}}{2} = \frac{3\times 1}{2}\ddot{Z} = 1.5\ddot{Z}$$

$$f_{I_2} = m\ddot{Z} = 3\ddot{Z}$$

$$M_1 = J_1\ddot{\theta} = \frac{\bar{m}\times 3\times 3^2}{12}\times\frac{\ddot{Z}}{3} = \frac{3}{4}\ddot{Z}$$

$$W_{S_1} = 3Z\times\delta Z$$

$$W_{S_2} = \frac{10}{3}Z\times\frac{2}{3}\delta Z = \frac{20}{9}Z\,\delta Z$$

$$W_{D_1} = 0.14\dot{Z}\cdot\delta Z$$

$$W_{I_1} = 1.5\ddot{Z}\cdot\frac{\delta Z}{2} = 0.75\ddot{Z}\,\delta Z$$

$$W_{I_2} = 3\ddot{Z}\cdot\delta Z$$

$$W_{M_1} = \frac{3}{4}\ddot{Z}\cdot\frac{\delta Z}{3} = \frac{\ddot{Z}\,\delta Z}{4}$$

چون نیروی خارجی نداریم $= 0$ کار نیروی خارجی = کار نیروی داخلی

$$\ddot{Z}\left[\frac{\delta Z}{4} + 3\delta Z + 0.75\,\delta Z\right]$$
$$+ \dot{Z}\left[0.14\,\delta Z\right] + Z\left[\frac{20}{9}\delta Z + 3\delta Z\right] = 0$$

از δZ فاکتور می‌گیریم ساده می‌شود.

$$\left(\frac{1}{4} + 3 + 0.75\right)\ddot{Z} + 0.14\dot{Z} + \left[\frac{20}{9} + 3\right]Z = 0$$

$$\underset{m}{4}\ddot{Z} + \underset{c}{0.14}\dot{Z} + \underset{k}{5.22}Z = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.22}{4}} = 1.14$$

ب)

$$4\ddot{Z} + 0.14\dot{Z} + 5.22Z = 5\sin 4t$$

معادله سازه یک درجه آزادی با بار هارمونیک + میرایی

$$c = 2\xi m\omega \rightarrow \xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{0.14}{2\times 4\times 1.14} = 0.015$$

$$\omega = 1.14 \rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 1.139$$

$$P_0 = 5 \qquad \bar{\omega} = 4 \qquad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 3.508$$

$$v(t) = \frac{P_0}{k}D\sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} = -0.93$$

$$v(t) = \frac{5}{5.22}\left[\frac{1}{\sqrt{(1-3.508^2)^2 + (2\times 0.015\times 3.508)^2}}\right.$$
$$\left.\times\sin(4t + 0.93)\right]$$

$$v(t) = 0.084\sin(4t + 0.93)$$

$$f_{S_2} = k_2\frac{2}{3}Z = \frac{10}{3}Z$$

$$Z = 0.084\sin(4t + 0.93) \qquad \sin(4t + 0.93) \text{ برابر ۱ باشد}$$

$$f_{S_2} = 0.28\sin(4t + 0.93) \qquad f_{S_{2\,max}} = 0.28$$

ارتعاش آزاد $P(t)=0$ $C=0$

$v(t)=\rho\cos(\omega t-\theta)$ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\rho=\sqrt{(\frac{\dot v_0}{\omega})^2+(v_0)^2}$ $\theta=\tan^{-1}(\frac{\dot v_0}{\omega v_0})$

ارتعاش آزاد $P(t)=0$ $C\neq0$

$v(t)=\rho_D\cos(\omega_D t-\theta_D)$

$\rho_D=e^{-\xi\omega t}\left[(\frac{\dot v_0+\xi\omega v_0}{\omega_D})^2+(v_0)^2\right]^{1/2}$

$\omega_D=\omega\sqrt{1-\xi^2}$ $\xi=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2m\omega}$

ارتعاش اجباری $P(t)\neq0$ $C=0$

$v(t)=\frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left[\underbrace{\sin\bar\omega t}_{\text{حالت ماندگار}}-\underbrace{\beta\sin\omega t}_{\text{حالت گذرا}}\right]$

در اغلب موارد: $v(t)=\frac{P_0}{K}\,\frac{1}{1-\beta^2}\,(\sin\bar\omega t)$

تغییر مکان استاتیکی — ضریب تقویت دینامیکی — شکل ارتعاش به صورت هارمونیک

ارتعاش اجباری $P(t)\neq0$ $C\neq0$

$v(t)=e^{-\xi\omega t}[A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t]+\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar\omega t-2\xi\beta\cos\bar\omega t\right]$

در اغلب موارد: $v(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\bar\omega t-\theta)$

$D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$ $\theta=\tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

در وضعیت تشدید:

$\beta=\sqrt{1-2\xi^2}$ $D_{max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

در حالت $\beta=1$ در میرایی نیز تشدید شکل میگیرد

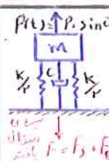
$\beta=\sqrt{1-2\xi^2}\simeq1$ $D_{max}=\frac{1}{2\xi}$

در محدوده‌ی تشدید، اثر ξ اثرگذار است.

$D=\frac{1}{2\xi}=\frac{1}{2\times\frac{1}{100}}=50$ ماکزیمم تغییر مکان دینامیکی ۵۰ برابر تغییر مکان استاتیکی است.

$D=\frac{1}{2\xi}=\frac{1}{2\times0.05}=10$ اگر میرایی ۵٪ باشد تغییر مکان دینامیکی ۱۰ برابر تغییر مکان استاتیکی است.

جسم مرتعش بسته به تکیه‌گاه



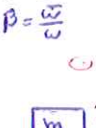
$F_{max}=P_0D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$

$\frac{F_{max}}{P_0}=D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$

ضریب تقویت دینامیکی $D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$

$\beta=\frac{\bar\omega}{\omega}$

تکیه‌گاه مرتعش و جسم روی آن

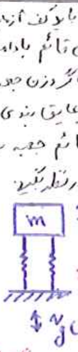


$v^t_{max}=v_{g0}D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$

$\frac{v^t_{max}}{v_{g0}}=D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$

$v_g(t)=v_{g0}\sin\bar\omega t$

مثال: یک جعبه حاوی ابزارهای حساس باید کف آزمایشگاه نصب شود. این آزمایشگاه دارای ارتعاش دائم با دامنه‌ی ۰/۰۳ in و فرکانس ۲۰ Hz می‌باشد. اگر وزن جعبه ۸۰۰ پوند باشد تعیین کنید سختی فنر عایق‌بندی جعبه چقدر باشد تا دامنه‌ی حرکت دائم جعبه به ۰/۰۰۵ کاهش یابد. میرایی را صفر درنظر بگیرید.



ارتعاش دائم کف $v_{g0}=0.03$ in

دامنه حرکت دائم جعبه $v^t_{max}=0.005$

وزن جعبه $w=800\,lb$

فرکانس ارتعاش $\bar\omega=20\times2\pi=40\pi\ \frac{rad}{s}$

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\to k=\omega^2m$

$w=800\to m=\frac{w}{g}=\frac{800}{386}$

$\frac{v_{max}}{v_{g0}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\times\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$

صورت سوال گفته $\xi=0$ می‌باشد پس داریم:

$\frac{v_{max}}{v_{g}}=\frac{1}{|1-\beta^2|}\Rightarrow\frac{0.005}{0.03}=\frac{1}{|1-\beta^2|}$

$\Rightarrow|1-\beta^2|=6\Rightarrow-1+\beta^2=6$

$\beta^2=7\Rightarrow\beta=\sqrt7$

$\beta=\frac{\bar\omega}{\omega}=\sqrt7\Rightarrow\frac{40\pi}{\omega}=\sqrt7\Rightarrow\omega=\frac{40\pi}{\sqrt7}$

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{40\pi}{\sqrt7}=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{\frac{w}{g}}}=\sqrt{\frac{k\cdot g}{w}}$

$\Rightarrow\frac{40\pi}{\sqrt7}=\sqrt{\frac{k\cdot g}{w}}\Rightarrow\frac{40\pi}{\sqrt7}=\sqrt{\frac{k\times386}{800}}$

$\boxed{k=47/5\ \frac{lb}{in}}$

سختی فنر ۴۷/۵ $\frac{lb}{in}$ باشد حداکثر تغییر مکان انتقال به جعبه ۰/۰۰۵ اینچ خواهد بود.

اندازه‌گیری میرایی

① روش کاهش دامنه $\xi=\frac{v_n-v_{n+1}}{2\pi\cdot v_{n+1}}$ یا $\xi=\frac{v_n-v_{n+m}}{2\pi\cdot m\cdot v_{n+m}}$

② روش تقویت تشدید $\xi=\frac{1}{2}\frac{v_{st}}{v_{max}}$ $v_{st}\to\frac{P_0}{k}$

③ روش نیم توان $\xi=\frac12(\beta_1-\beta_2)$ یا $\xi=\frac12(\bar\omega_1-\bar\omega_2)$

④ روش اتلاف انرژی در وضعیت تشدید $\xi=\frac{W_D}{4\pi W_s}$

ارتعاش اجباری در بار متناوب است

$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\bar\omega_n t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\bar\omega_n t$

$a_0=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\,dt$ $a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\cos\bar\omega_n t\,dt$

$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\sin\bar\omega_n t\,dt$

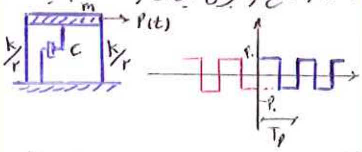
T_p زمان تناوب

$\bar\omega_n=n\bar\omega_1=n\frac{2\pi}{T_p}$

اگر $P(t)$ فرد باشد $a_0=a_n=0$

اگر $P(t)$ زوج باشد $b_n=0$

مثال: سازه یکدرجه آزادی تحت بار متناوب مطابق شکل زیر قرار گرفته است. تاریخچه زمانی پاسخ را برای این سازه محاسبه کنید.



$m\ddot v+c\dot v+kv=P(t)$ $P(t)=P_0$ $0\le t\le\frac{T_p}{2}$

$P(t)=-P_0$ $\frac{T_p}{2}\le t\le T_p$

$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\bar\omega_n t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\bar\omega_n t$

در تابع فرد $a_0=a_n=0$ است $P(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\bar\omega_n t$

$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\sin\frac{2n\pi}{T_p}t\,dt$

$=\frac{2}{T_p}\left[\int_0^{T_p/2}P_0\sin\bar\omega_n t\,dt-\int_{T_p/2}^{T_p}P_0\sin\bar\omega_n t\,dt\right]$

$=\frac{4}{T_p}\int_0^{T_p}\sin\bar\omega_n t\,dt=\frac{4}{T_p}\int_0^{T_p/2}\sin\frac{2n\pi}{T_p}t\,dt$

اگر n = زوج باشد $b_n=0$

اگر n = فرد باشد $b_n=\frac{2P_0}{\dots}$

$+\frac{2P_0}{5\pi}\sin\bar\omega_5 t+\frac{2P_0}{7\pi}\sin\bar\omega_7 t+\dots$

$m\ddot v+c\dot v+kv=P(t)$

تاریخچه زمانی پاسخ در برابر بار متناوب

$v(t)=\frac{2P_0}{k\pi}D_1\sin(\bar\omega_1t-\theta_1)+\frac{2P_0}{3k\pi}D_3\sin(\bar\omega_3t-\theta_3)+\frac{2P_0}{5k\pi}D_5\sin(\bar\omega_5t-\theta_5)+\dots$

اگر k، m و ξ معلوم باشند در نتیجه همه معلوم هستند. این سوال پارامتری بود.

$D_n=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}}$

$\beta_n=n\beta_1=n\frac{\bar\omega_1}{\omega}=\frac{n\bar\omega_1}{\omega}=\frac{\bar\omega_n}{\omega}$

$\bar\omega_n=\frac{2\pi n}{T_p}$ ⟵ زمان تناوب بار

ارتعاش اجباری بار از نوع توابع نمایی

$v(t)=H(\bar\omega)e^{i\bar\omega t}$

$H(\bar\omega)=\frac{1}{k}\,\frac{1}{1-\beta^2+2\xi\beta i}$

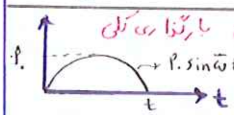
$m\ddot v+c\dot v+kv=C_ne^{in\bar\omega t}$ تابع

پاسخ ← $v(t)=C_nH(n\bar\omega)e^{in\bar\omega t}$

$m\ddot v+c\dot v+kv=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\bar\omega t}$

پاسخ ← $v(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_nH(n\bar\omega)e^{in\bar\omega t}$

ارتعاش اجباری بارگذاری کلی



$\frac{t_1}{T}>\frac12$ max پاسخ در ناحیه ① است.

$\frac{t_1}{T}<\frac12$ max پاسخ در ناحیه ② است.

T = زمان تناوب طبیعی سازه

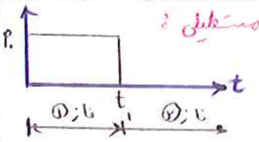
پاسخ ارتعاش اجباری برحسب $\frac{t_1}{T}$ در ناحیه ①

$v(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin(\frac{2\pi n}{1+\frac{2t_1}{T}})-\beta\sin\frac{2\pi n}{\frac{T}{2t_1}+1}\right]$

پاسخ ارتعاش آزاد اگر $t_1<\frac{T}{2}$ باشد ناحیه ②

$v_{max}=\frac{P_0}{k}\times\frac{\frac{T}{t_1}\cos\frac{\pi T}{t_1}}{(\frac{T}{2t_1})^2-1}$

بار ضربه‌ای مستطیلی: بدون میرایی



اگر $\frac{T}{2}<t_1$ ← پاسخ حداکثر در ناحیه ①

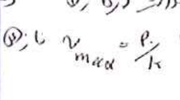
اگر $\frac{T}{2}>t_1$ ← پاسخ حداکثر در ناحیه ②

ناحیه ②: $v_{max}=\frac{P_0}{k}(1-\underbrace{\cos\pi}_{\text{اگر }-1\text{ باشد}})=\frac{2P_0}{k}$

ناحیه ①: $v_{max}=\frac{P_0}{k}\sqrt{2(1-\cos\omega t_1)}$

$=\frac{P_0}{k}\sqrt{2(1-\cos2\pi\frac{t_1}{T})}$

اگر بارگذاری به شکل مقابل باشد



ارتعاش اجباری $t\le t_1\to m\ddot v+kv=P_0(1-\frac{t}{t_1})$

ارتعاش آزاد $t\ge t_1\to m\ddot v+kv=\dots$

پاسخ ارتعاش اجباری:

$v(t)=\frac{P_0}{k}\left[\frac{1}{\omega t_1}\sin\omega t-\cos\omega t+1-\frac{t}{t_1}\right]$

پاسخ ارتعاش آزاد:

$v(t)=\frac{\dot v(t_1)}{\omega}\sin\omega(t-t_1)+v(t_1)\cos\omega(t-t_1)$

برای رسیدن به پاسخ حداکثر از $v(t)$ ارتعاش اجباری مشتق گرفته و t_1 را بدست آورده و نسبت به $\frac{t_1}{T}$ را بررسی می‌کنیم.

پاسخ تقریبی ضربه در حالت بدون میرایی:

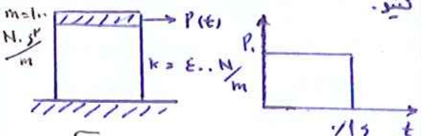
مساحت زیر نمودار بار

$v(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^{t_1}P(t)\,dt\,\sin\omega(t-t_1)$

پاسخ ضربه در حالت با میرایی:

$v(t)=e^{-\xi\omega(t-t_1)}\times\frac{1}{m\omega_D}\int P(t)\,dt\cdot\sin\omega_D(t-t_1)$

مثال: برای بارگذاری زیر حداکثر پاسخ را حساب کنید.



$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=2\ \frac{rad}{s}$

$t_1<\frac{T}{2}$ حداکثر پاسخ در ناحیه ①

$t_1>\frac{T}{2}$ حداکثر پاسخ در ناحیه ②

$\omega=2\to T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}\Rightarrow T=\pi$

$t_1=0.1\,s\to\frac{t_1}{T}=\frac{0.1}{\pi}<\frac12$

دقیق $v_{max}=\frac{P_0}{k}\times[2(1-\cos\omega t_1)]^{1/2}$

$=\frac{P_0}{400}\times[2(1-\cos(2\times0.1))]^{1/2}$

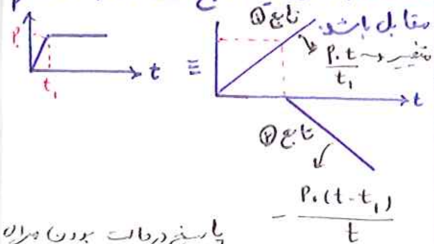
$v_{max}=4.99\times10^{-4}P_0$

تقریبی $v_{max}=\frac{1}{m\omega}\int P(t)\,dt=\frac{1}{100\times2}\times(\overset{\text{مساحت بار}}{P_0\times1})$

$v_{max}=5\times10^{-4}P_0$

چون مقدار t_1 کوچک بود max پاسخ در حالت دقیق و تقریبی، تقریباً یکسان می‌باشند.

مثال: با فرض اینکه تابع بارگذاری به صورت مقابل باشد.



پاسخ در حالت بدون میرایی

$v(t)=\underbrace{\frac{P_0}{k}(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega t}{\omega t_1})}_{\text{پاسخ تابع ①}}-\underbrace{\frac{P_0}{k}(\frac{t-t_1}{t_1}-\frac{\sin\omega(t-t_1)}{\omega t_1})}_{\text{پاسخ تابع ②}}$

$v(t)=\frac{P_0}{k}\left[1-\frac{\sin\omega t}{t_1}+\frac{\sin\omega(t-t_1)}{\omega t_1}\right]$

اگر t_1 بزرگ باشد مخرج بزرگ‌تر می‌شود و می‌توان از عبارات داخل کروشه صرف‌نظر کرد.

اگر بار را آرام آرام وارد کنیم همان تغییر مکان $\frac{P_0}{k}$ را داریم.

روش ذوزنقه:

$\int f(t)\,dt=\frac{\Delta t}{2}[f(t_0)+2f(t_1)+2f(t_2)+\dots+2f(t_{n-1})+f(t_n)]$